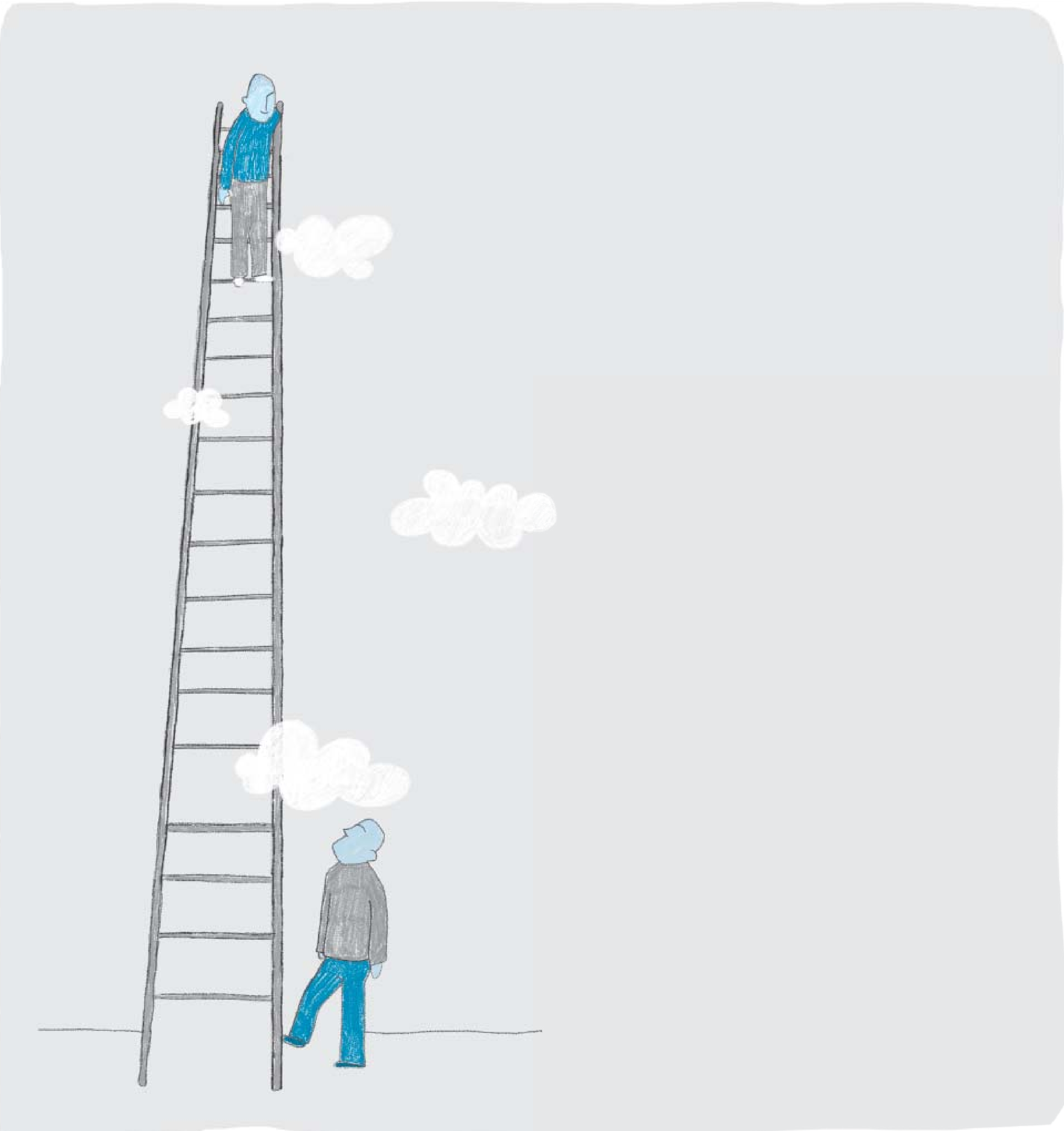
فهرست

فصل ۱۰
تابع



مفهوم تابع

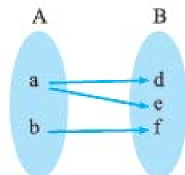
قبل از این‌که با موجودی به نام تابع آشنا شویم، لازم است تمام نسل‌های قبل از آن را بشناسیم. پیدایش موجوداتی از این دست (که ژن یکسان دارند) با زوج‌مرتب شروع شد. زوج‌مرتب یک عضو دوتایی است که ترتیب قرارگیری آن‌ها مهم است. به عنوان مثال $(2,1)$ یک زوج‌مرتب است که مؤلفهٔ اول آن ۲ و مؤلفهٔ دوم آن ۱ است. نسل بعد از کنار هم قرار گرفتن چندتا زوج‌مرتب به وجود آمد و به این نسل «رابطه» گفتند. مثلاً $R=\{(-1,1),(2,0),(-1,2)\}$ یک رابطه است. تا این‌جا اوضاع خیلی خوب بود. تا این‌که شکل تکامل‌یافتهٔ یک رابطه به نام «تابع» *برفنمون کرد!* و تمام ریاضیات را تحت تأثیر قرار داد.

تعریف تابع: رابطه‌ای (مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب) است که در آن هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی، مولفه اول یکسان نداشته باشند. برای مثال $f=\{(1,1),(0,0)\}$ یک تابع است ولی $g=\{(\underline{1},1),(\underline{1},0)\}$ تابع نیست.

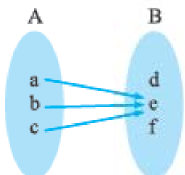
انواع نمایش یک تابع

۱ نمودار پیکانی (نمودار ون)

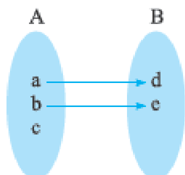
یک رابطه در نمودار پیکانی زمانی یک تابع است که از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان به مجموعهٔ دوم نسبت داده شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:



تابع نیست، زیرا عضو a از مجموعهٔ A به دو عضو از مجموعهٔ B نسبت داده شده است.



تابع است. از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده است.



تابع نیست، چون از عضو c در مجموعهٔ A پیکانی خارج نشده است.

پس توجه کنید لزومی ندارد که به هر عضو مجموعهٔ B دقیقاً یک پیکان وارد شود.

۲ نمایش زوج‌مرتبی (یا جدولی)

در این نمایش، در هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی، نباید مؤلفه‌های اول برابر باشند. اگر مؤلفه‌های اول برابر باشند، برای تابع‌بودن باید مؤلفه‌های دوم هم برابر باشند.

تست به ازای کدام مقدار k رابطهٔ $f=\{(0,n),(3,n+1),(\sqrt{\ m^2},n^2\ \ 2),(m+3,k+1),(k+4,1+k^2)\}$ نمایش‌دهندهٔ یک تابع است؟

۱) ۱ ‏ ۲) -1 ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) هیچ مقدار k

پاسخ **گزینهٔ «۳»** بدون توجه به شرایط تابع‌بودن، به $\sqrt{-m^2}$ *اون وسط داره چشمک میزنه!* چون $m^2\geq 0$ و در نتیجه $-m^2\leq 0$ است و زیر رادیکال هیچ‌وقت منفی نمی‌شود؛ پس باید $m=0$ باشد. در نتیجه $f=\{(0,n),(3,n+1),(0,n^2-2),(3,k+1),(k+4,1+k^2)\}$

حالا چون دوتا زوج‌مرتب $(0,n)$ و $(0,n^2-2)$ مؤلفه‌های اول برابر دارند، پس باید مؤلفه‌های دومشان هم برابر باشد.

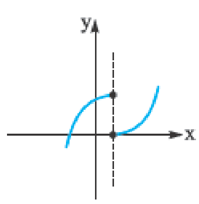
$$\Rightarrow n^2-2=n \Rightarrow n^2-n-2=0 \Rightarrow (n-2)(n+1)=0 \Rightarrow n=2, n=-1$$

هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

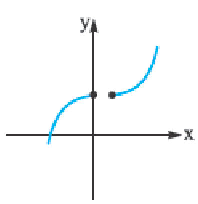
$$\begin{cases} n=-1: f=\{(0,-1),\underline{(3,0)},\underline{(3,k+1)},(k+4,1+k^2)\} \Rightarrow k+1=0 \Rightarrow k=-1 \Rightarrow f=\{(0,-1),(\underline{3},0),(\underline{3},2)\} \text{ : تابع نیست} \\ n=2: f=\{(0,2),\underline{(3,3)},\underline{(3,k+1)},(k+4,1+k^2)\} \Rightarrow k+1=3 \Rightarrow k=2 \Rightarrow f=\{(0,2),(3,3),(6,5)\} \ ✓ \end{cases}$$

۳ نمایش نموداری

در نمایش نموداری یک تابع، هر خط موازی محور yها (x دلخواه) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



تابع نیست



تابع است

۴ نمایش ضابطه‌ای: در این نمایش باید به ازای هر مقدارِ x دلخواه، برای y حداکثر یک مقدار حاصل شود.

تست کدام‌یک از معادله‌های زیر، معرف یک تابع است؟

۱) $y^2+1=x^3$ ۲) $|x|+|y^2-1|=0$ ۳) $y^2+1=\cos x$ ۴) $y^2-xy+3=0$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** برای گزینه‌های نادرست مثال نقض می‌آوریم:

① با در نظر گرفتن $x=2$، برای y دو مقدار $\pm\sqrt{7}$ حاصل می‌شود؛ پس تابع نیست.

② می‌دانیم مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر دوتای آن‌ها صفر باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} |x|=0 \Rightarrow x=0 \\ |y^2-1|=0 \Rightarrow y=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow R=\{(0,-1),(0,1)\} \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

④ با فرض $x=4$، برای y دوتا مقدار به دست می‌آید:
$$y^2-4y+3=0 \Rightarrow y=1,3$$

محاسبهٔ مقدار یک تابع

برای محاسبهٔ مقدار تابع در $x=a$ کافی است به جای xهای تابع، مقدار a را قرار دهیم. به عنوان مثال مقدار تابع $f(x)=x^2+\cos x$ در $x=\pi$ برابر است با:
$$f(\pi)=\pi^2+\cos\pi=\pi^2-1$$

تست اگر $2f(x)+xf(\frac{1}{x})=f(1)-2x$، $f(2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول مقدار $f(1)$ را محاسبه کنیم برای این کار در معادله، $x=1$ قرار می‌دهیم:

$$x=1: 2f(1)+(1)f(1)=f(1)-2 \Rightarrow 2f(1)=-2 \Rightarrow f(1)=-1 \Rightarrow \text{تساوی}: 2f(x)+xf(\frac{1}{x})=-1-2x$$

حالا برای محاسبهٔ $f(2)$، یک بار $x=2$ و یک بار $x=\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x=2: 2f(2)+2f(\frac{1}{2})=-5 \\ x=\frac{1}{2}: 2f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f(2)=-2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \frac{3}{2}f(2)=-3 \Rightarrow f(2)=-2$$

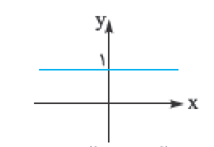
توابع خاص

در این قسمت چندتا تابع خاص و مهم را مرور می‌کنیم که باید با این توابع و ویژگی‌های آن‌ها آشنا شوید.

۱ توابع چندجمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_0، a_1، a_2 و ... و a_{n-1} و a_n، اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ است، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند. برای مثال تابع $y=x^3-4x^2+1$ چندجمله‌ای است ولی تابع $y=x^2+\sqrt{x}-1$، چندجمله‌ای نیست.

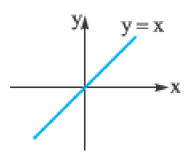
۲ تابع ثابت


$f(x)=\sin^2x+\cos^2x=1$

تابعی که برد آن فقط یک عضو دارد. در حالت زوج‌مرتبی، مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌ها برابر است. برای مثال تابع $f=\{(-1,1),(0,1)\}$ ثابت است.

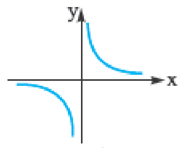
در حالت ضابطه‌ای، ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=1$ است برای مثال $g(x)=2$ و $h(x)=\sin^2x+\cos^2x-1$ تابع ثابت هستند. نمودار یک تابع ثابت، خطی موازی محور xها یا بخشی از آن است.

۳ تابع همانی



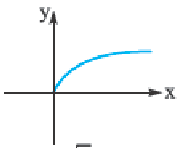
تابعی که هر عضو از دامنه را به همان عضو از برد نظیر می‌کند. به عبارت دیگر هر مقداری تحویل تابع بدهیم، همان مقدار را تحویل می‌دهد. در حالت زوج‌مرتبی مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج‌مرتب برابر هستند؛ برای مثال $f=\{(1,1),(-2,-2)\}$. در حالت ضابطه‌ای ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=x$ است و نمودار آن خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (یا بخشی از آن) است.

۴ تابع گویا: توابعی به فرم $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی چندجمله‌ای هستند را گویند.



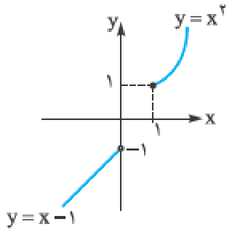
$y=\frac{۱}{x}$

برای مثال تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^۴}$ یک تابع گویاست ولی تابع $g(x)=\frac{x^۲}{\sqrt{x}+۱}$ گویا نیست (مخرج چندجمله‌ای نیست). معروف‌ترین و مهم‌ترین تابع گویا، تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ است که نمودار آن به صورت مقابل است.



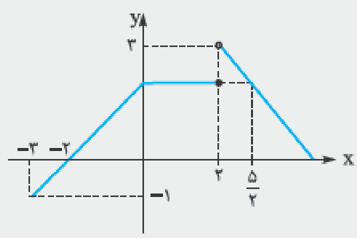
$y=\sqrt{x}$

۵ تابع رادیکالی: برخی توابع هم هستند که در آن‌ها عبارت رادیکالی وجود دارد، برای مثال $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$؛ به این توابع، توابع رادیکالی می‌گویند اورجینال‌ترین تابع رادیکالی هم تابع $f(x)=\sqrt{x}$ است که نمودار آن را در شکل مقابل می‌بینید.



۶ توابع قطعه‌ای (چندضابطه‌ای): توابعی که در محدوده‌های مختلف دامنه‌اش، ضابطه‌های مختلفی دارد را توابع قطعه‌ای می‌نامند. برای مثال تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۱ \\ x-۱ & x<۰ \end{cases}$ یک تابع قطعه‌ای است که نمودار آن را در شکل مقابل می‌بینید:

تست نمودار تابع قطعه‌ای f به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، حاصل $f(۲)+f(۴)$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۲» با توجه به نمودار، تابع f در فاصله $[۰,۲]$ یک تابع ثابت است؛ اما مقدار تابع را در این فاصله نداریم. برای محاسبهٔ مقدار تابع باید از معادلهٔ تابع به ازای $x\leq ۰$ کمک بگیریم در این فاصله با یک تابع خطی روبه‌رو هستیم که از نقاط $(-۲,۰)$ و $(-۳,-۱)$ عبور می‌کند. پس:

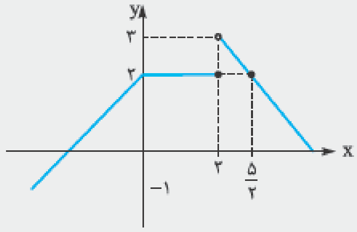
$$\begin{cases}(-۲,۰)\in \text{خط} \\ (-۳,-۱)\in \text{خط}\end{cases} \Rightarrow \text{معادله}: y-۰=\frac{۰-(-۱)}{-۲-(-۳)}(x-(-۲)) \Rightarrow y=x+۲$$

مقدار این تابع در $x=۰$ برابر مقدار تابع در فاصلهٔ $[۰,۲]$ است. $x=۰: y=۰+۲=۲$

از آن‌جا که در فاصلهٔ $[۰,۲]$ تابع f مقدار ثابت ۲ را دارد؛ پس $f(۲)=۲$.

روش سریع، وقتی خط، از $x=-۳$ به $x=-۲$ میره، یعنی وقتی طولش یه واحد زیاد میشه، عرضش یه واحد زیاد شده. حالا از $x=-۲$ تا $x=۰$، طول خط دو واحد زیاد شده، پس عرضش هم باید ۲ واحد زیاد بشه، پس: $f(۰)=۲$.

همچنین برای محاسبهٔ $f(۴)$، باید از معادلهٔ تابع به ازای $x>۲$ استفاده کنیم. در این فاصله هم با یک تابع خطی روبه‌رو هستیم که با کمک نقاط $A(۲,۳)$ و $B(\frac{۵}{۲},۲)$ می‌توانیم معادلهٔ آن را بیابیم پس داریم:



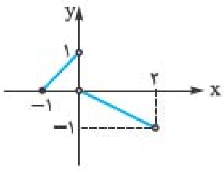
$$\begin{cases}A(۲,۳) \\ B(\frac{۵}{۲},۲)\end{cases} \Rightarrow y-۳=\frac{۳-۲}{۲-\frac{۵}{۲}}(x-۲) \Rightarrow y-۳=\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}}(x-۲)$$

$$\Rightarrow y-۳=-۲(x-۲) \Rightarrow y-۳=-۲x+۴ \Rightarrow y=-۲x+۷$$

برای محاسبهٔ $f(۴)$ در معادلهٔ خط، $x=۴$ قرار می‌دهیم: $y=-۲(۴)+۷=-۱ \Rightarrow f(۴)=-۱ \Rightarrow f(۲)+f(۴)=۲+(-۱)=۱$

تعیین دامنهٔ توابع

دامنهٔ یک تابع، مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن برای x است؛ به طوری که تابع به ازای هر مقدار x در آن مجموعه، یک مقدار برای y به دست می‌آورد. دامنهٔ تابع را معمولاً با حرف D (Domain) نمایش می‌دهند. در جدول صفحهٔ بعد، روش محاسبهٔ دامنهٔ توابعی که با آن‌ها سروکار داریم را بررسی می‌کنیم:

تابع	دامنه	مثال
نموداری	تصویر نمودار تابع روی محور xها، دامنه را نمایش می‌دهد.	 $D_f=[-1,2)-\{0\}$
زوج‌مرتبی و نمودار ون	مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های اول تابع، برابر دامنهٔ تابع است.	$f=\{(1,-1),(0,2),(4,-1)\} \Rightarrow D_f=\{1,0,4\}$
چندجمله‌ای	دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است.	$f(x)=x^4-3x^3+1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$
گویا	$D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	$f(x)=\frac{x^2}{x-3} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{3\}$
رادیکالی: $f(x)=\sqrt{g(x)}$	دامنهٔ تابع از حل نامعادلهٔ $g(x)\ge 0$ حاصل می‌شود.	$f(x)=\sqrt{1-x^2} : 1-x^2\ge 0$ $\Rightarrow x^2\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1 \Rightarrow D_f=[-1,1]$
قدرمطلقی: $f(x)=\lvert g(x)\rvert$	دامنهٔ تابع، همان دامنهٔ g است.	$f(x)=\left\lvert\frac{x}{x+1}\right\rvert \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$
براکتی: $f(x)=[g(x)]$	دامنهٔ تابع، همان دامنهٔ g است.	$f(x)=[\sqrt{x}] \Rightarrow D_f:[0,+\infty)$
لگاریتم: $f(x)=\log_{g(x)}h(x)$	دامنهٔ f از اشتراک جواب‌های سه نامعادلهٔ زیر به دست می‌آید: $(1)h(x)>0\ ,\ (2)g(x)>0\ ,\ (3)g(x)\neq 1$	$f(x)=\log_{2-x}x \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2-x>0 \Rightarrow x<2 \\ 2-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 1 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(0,2)-\{1\}$
$f(x)=\sin(g(x))$ $f(x)=\cos(g(x))$	دامنهٔ f، همان دامنهٔ تابع g است.	$f(x)=\sin(\frac{x}{x^2-1}) \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

تست دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-1}{ax^3+x+a+1}$ فقط یک عدد حقیقی را شامل نمی‌شود. حدود a چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به این‌که دامنهٔ تابع فقط یک عدد حقیقی را شامل نمی‌شود، پس مخرج کسر فقط یک ریشه دارد. اگر کمی دقت کنید، متوجه خواهید شد که $x=-1$ ریشهٔ مخرج است. (معمولاً کافی است $x=1$، $x=-1$، $x=2$ و $x=-2$ را در معادله امتحان کنید.) پس مخرج یک عامل $(x+1)$ دارد. حالا مخرج را تجزیه می‌کنیم: $ax^3+x+a+1=(x+1)(ax^2-ax+a+1)$

در نتیجه برای این‌که مخرج ریشهٔ دیگری غیر از یک نداشته باشد، باید معادلهٔ $ax^2-ax+a+1=0$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد.

$$\Delta<0 \Rightarrow a^2-4(a)(a+1)<0 \Rightarrow a(a-4a-4)<0 \Rightarrow a(-3a-4)<0$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} a(3a+4)>0 \Rightarrow a>0 \text{ یا } a<-\frac{4}{3} \Rightarrow$$ شامل عدد صحیح -1 نیست.

تست دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{1+\log_{0/1}(x-1)}$ به کدام صورت است؟

۱) $(1,2]$ ۲) $[2,10]$ ۳) $[1,11)$ ۴) $(1,11]$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** *در تابع f دوتا عبارت نوسباب‌امی‌بینیم. لگاریتم و رادیکال با فرجهٔ زوج. اما خیالی نیست از پس این سؤال هم بر میایم.* هر عبارت را به صورت جداگانه بررسی و حدود x مربوطه را محاسبه می‌کنیم. سپس از جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

$\log_{0/1}(x-1)$: خوشبختانه مبنا عدد ثابت است که بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک هست. پس در این‌جا فقط باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشد.

$x-1>0 \Rightarrow x>1\ (*)$

$\sqrt{1+\log_{0/1}(x-1)}$: از آن‌جا که عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، بنابراین:

$$1+\log_{0/1}(x-1)\ge 0 \Rightarrow \log_{0/1}(x-1)\ge -1 \quad (***)$$

حالا باید لگاریتم را حذف کنیم. پس به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته ۱ $\log_b a > c \xrightarrow{b>1} a > b^c$ (جهت علامت تغییر نمی‌کند) ۲ $\log_b a > c \xrightarrow{0<b<1} a < b^c$ (جهت تغییر می‌کند)

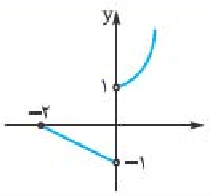
پس با توجه به این‌که در نامعادلهٔ (***) مبنا ۰/۱ و عددی بین صفر و یک است، داریم: (جهت تغییر می‌کند)

$$(x-1)\le (0/1)^{-1} \Rightarrow x-1\le \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} \Rightarrow x-1\le 10 \Rightarrow x\le 11 \quad (****)$$

از اشتراک دو جواب (*) و (****) داریم: $1<x\le 11$: دامنهٔ f

تعیین برد توابع

برد تابع یعنی مجموعهٔ تمام مقادیر خروجی تابع (به ازای همهٔ مقادیر مجاز ورودی آن). برد یک تابع را معمولاً با R (Range) نمایش می‌دهند.
برای محاسبهٔ برد، جدول زیر خیلی به کارتان می‌آید:

روش	نکات و طرز محاسبه	مثال
در حالت نموداری	برد تابع برابر تصویر نمودار تابع f روی محور yهاست.	 $R_f=(-1,0]\cup(1,+\infty)$
در حالت زوج‌مرتبی	مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های دوم، برد تابع است.	$f=\{(-1,1),(0,2),(3,1)\} \Rightarrow R=\{1,2\}$
توجه به دامنه	در این حالت با توجه به دامنه و ضابطهٔ تابع، برد تابع را می‌یابیم.	مثال: $f(x)=x^2+1,\ D_f=(-1,0)$ حل: $-1<x<0 \Rightarrow 0<x^2<1 \Rightarrow 1<x^2+1<2$ $\Rightarrow R_f=(1,2)$
محاسبهٔ x برحسب y	با طرفین وسطین کردن یا با کمک روش Δ در حل معادلهٔ درجه‌دوم و جداکردن x به یکی از دو حالت زیر می‌رسیم: ۱ $x=g(y)$ دامنهٔ $g(y)$ همان برد تابع خواهد بود. ۲ $\lvert x\rvert$ یا $\sqrt{x}$ یا $x^2=g(y)$ برد، از حل نامعادلهٔ $g(y)\ge 0$ محاسبه می‌شود.	مثال: $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ حل: طرفین وسطین می‌کنیم: $yx^2+y=x^2 \Rightarrow yx^2-x^2=-y$ $\Rightarrow x^2(y-1)=-y \Rightarrow x^2=\frac{-y}{y-1}$ $\xrightarrow{x^2\ge 0} \frac{-y}{y-1}\ge 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{y}{y-1}\le 0 \Rightarrow 0\le y<1$
استفاده از نامساوی‌ها، روابط قدرمطلق و جزءصحیح	۱ $0\le x-[x]<1$ ۲ $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ ۳ $x+\frac{1}{x}\ge 2 \quad (x>0)$ ۴ $x+\frac{1}{x}\le -2 \quad (x<0)$ ۵ $x^2\ge 0, \lvert x\rvert\ge 0, \sqrt{x}\ge 0$	مثال: $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$ حل: با تفکیک کسر و با استفاده از ویژگی‌های ۳ و ۴: $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow \begin{cases} x>0: \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\ge 1\\ x<0: \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\le -1\end{cases}$ $\Rightarrow R_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

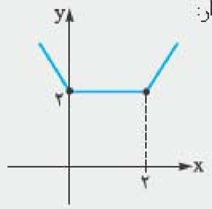
تست برد تابع $y=\dfrac{a}{|x|+|x-۲|}$ شامل حداقل دو عدد طبیعی است. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۴» *عبارت مخرج خیلی آشناست. درسته؟!*

نمودارش را به اسم نمودار گلدانی می‌شناسیم که به صورت مقابل رسم می‌شود. با توجه به نمودار:

$$y=\underset{A(۰,۲)}{\underset{\downarrow}{|x|}}+\underset{B(۲,۲)}{\underset{\downarrow}{|x-۲|}}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow |x|+|x-۲|\geq ۲$$

با این نامساوی حدود تابع را تعیین می‌کنیم:

$$|x|+|x-۲|\geq ۲ \xrightarrow{\text{معکوس}} ۰<\frac{۱}{|x|+|x-۲|}\leq\frac{۱}{۲}$$

(دقت کنید که چون عبارت $|x|+|x-۲|$ همواره مثبت است، پس معکوس آن نیز همواره مثبت خواهد بود و در نتیجه باید شرط بزرگ‌تر از صفر را حتماً اضافه کنید)

حالا طرفین را در a ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times a} ۰<\frac{a}{|x|+|x-۲|}\leq\frac{a}{۲}\Rightarrow R=(۰,\frac{a}{۲}]$$

برای این‌که این برد شامل حداقل دو عدد طبیعی باشد، باید:

$$\frac{a}{۲}\geq ۲\Rightarrow a\geq ۴$$

چند تذکر:

۱. برد توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد برابر $\mathbb{R}$ است. برای مثال:

$$f(x)=x^۵+۲x^۴-۱\Rightarrow R_f=\mathbb{R}$$

۲. یکی از روش‌های مؤثر در تعیین برد تابع، استفاده از روش رسم است.

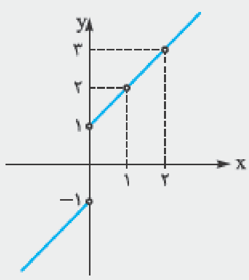
تست برد تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-x-۲}{x-۲} & x>۱\\ x+\dfrac{|x|}{x} & x<۱\end{cases}$ چند مقدار صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۴» ابتدا با کمک تجزیه و تعیین علامت قدرمطلق، تابع را بازنویسی کرده و سپس با کمک رسم شکل، برد را می‌یابیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-۲)(x+۱)}{x-۲} & x>۱\\ x+\dfrac{x}{x} & ۰<x<۱\\ x+\dfrac{-x}{x} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۱, x\neq ۲\\ x+۱ & ۰<x<۱\\ x-۱ & x<۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۰, x\neq ۱,۲\\ x-۱ & x<۰\end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت مقابل است:



$$\Rightarrow R_f=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)-\{۲,۳\}$$

که این فاصله، مقادیر صحیح $\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$ را شامل نمی‌شود.

در توابعی که دامنهٔ تابع محدود است، محاسبهٔ دامنه در محاسبهٔ برد کمک بسیاری می‌کند.

تست برد تابع $y=x+\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) $[-\sqrt{۲},۱]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ ۴) $[-۱,\sqrt{۲}]$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** اول دامنهٔ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$1-x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$$

حالا x را تنها می‌کنیم:

$$y = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y - x = \sqrt{1-x^2} \quad (*)$$

قبل از به توان ۲ رساندن طرفین، توجه کنید که چون طرف راست یک عبارت همواره نامنفی است، پس باید:

$$y - x \ge 0 \Rightarrow y \ge x$$

حالا طرفین $(*)$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (y-x)^2 = 1-x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 - 2xy = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$$

طرف چپ تساوی یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب x حاصل شد. بنابراین با کمک روش حل معادلهٔ درجه‌دوم، x را جدا می‌کنیم:

$$\underset{a}{\underset{\downarrow}{2}}x^2 \underbrace{-2y}_{b}x + \underbrace{y^2-1}_{c} = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2y \pm \sqrt{(-2y)^2 - (4)(2)(y^2-1)}}{(2)(2)} \Rightarrow x = \frac{2y \pm \sqrt{-4y^2+8}}{4}$$

برای این‌که عبارت طرف راست تعریف‌شده باشد، باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$-4y^2 + 8 \ge 0 \Rightarrow y^2 \le 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2} \quad (**)$$

با توجه به شرط دامنه یعنی $-1 \le x \le 1$ و شرط $y \ge x$، حتماً باید $y \ge -1$ باشد؛ بنابراین:

$$\xrightarrow{(**)} -1 \le y \le \sqrt{2}$$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g مساوی هستند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف دامنهٔ هر دو تابع با هم برابر باشند: $D_f = D_g = D$

ب به ازای هر x از مجموعهٔ D داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

دوتا تابعی که مساوی هستند، در حقیقت یک تابع هستند با قیافه‌های متفاوت ولی باطن آن‌ها مثل هم عمل می‌کند.

تست کدام‌یک از جفت توابع زیر برابر هستند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = \log x^2 \\ g(x) = 2\log x \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3 - x^2} \\ g(x) = |x|\sqrt{x-1} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-1)} \\ g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1} \\ g(x) = \dfrac{x}{x+1} \end{cases}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** در هر یک از گزینه‌ها، اول شرط تساوی دامنه‌ها را چک می‌کنیم سپس در صورت برابری دامنه‌ها، به سراغ شرط دوم یعنی تساوی ضابطه‌ها می‌رویم.

۱ $\begin{cases} f(x) = \log x^2 : x^2 > 0 \Rightarrow x \ne 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = 2\log x : x > 0 \Rightarrow D_g = (0, +\infty) \end{cases} \xrightarrow{\text{دامنه‌ها نابرابر}} f \ne g$

نکته دقت کنید که دو تابع $y = \log x^2$ و $y = 2\log|x|$ برابر هستند.

۲ $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3 - x^2} : x^3 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2(x-1) \ge 0 \Rightarrow \\ g(x) = |x|\sqrt{x-1} : x - 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1 \Rightarrow D_g = [1, +\infty) \end{cases}$

x		0		1	
عبارت	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

$\Rightarrow D_f = [1, +\infty) \cup \{0\}$

دامنه‌ها برابر نیستند؛ پس دو تابع مساوی نیستند.

۳ $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-1)} : x(x-1) \ge 0 \Rightarrow x \ge 1 \text{ یا } x \le 0 \\ g(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{(x\ge 0)}\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\cap (x \ge 1)} : D_g = [1, +\infty) \end{cases} \xrightarrow{\text{دامنه‌ها نابرابر}} f \ne g$

۴ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1} : x^2 + 2x + 1 \ne 0 \Rightarrow (x+1)^2 \ne 0 \Rightarrow x \ne -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \\ g(x) = \dfrac{x}{x+1} : x + 1 \ne 0 \Rightarrow x \ne -1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1\} \end{cases}$

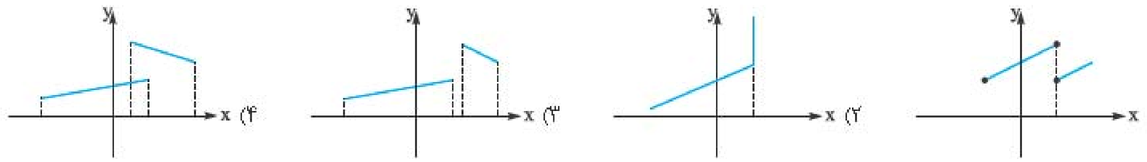
دامنه‌ها برابرند. به سراغ تساوی ضابطه‌ها می‌رویم:

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1} = g(x)$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

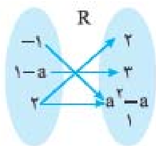
تابع و مفاهیم آن

۸۹۵- کدام شکل نمودار یک تابع است؟



۸۹۶- کدام‌یک از نمودارهای زیر نمایش‌دهندهٔ یک تابع است؟

۸۹۷- به ازای کدام مقادیر a، رابطهٔ مقابل نمایش‌دهندهٔ یک تابع است؟



۱) $\{-۱,۲\}$

۲) فقط -۱

۳) فقط ۲

۴) هیچ مقدار a

۸۹۸- رابطهٔ $f=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(\ ۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟ (تجربی خارج ۸۵)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

۸۹۹- اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{d,e,f,g\}$ چند تابع مانند h از A به B وجود دارد، به طوری که $(a,d)\notin h$، ولی $(b,f)\in h$ باشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲ ۳) ۸۱ ۴) ۱۵

۹۰۰- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x+[x]}}{x^۲\ \ ۱}$، حاصل $f(۱/۲۵)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

۹۰۱- اگر $f(x)+xf(\ \ x)=x^۲+۱$، آن‌گاه $f(۲)$ کدام است؟ (ق ۴۰)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۰۲- تابع $f=\{(\ \ ۱,a^۲+b),(۰,۳a\ \ b),(۱,b\ \ a)\}$ یک تابع ثابت است. مقدار منفی b کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۹۰۳- به ازای کدام c، جدول مقابل یک همانی را نمایش می‌دهد؟

x	|a|	۲a	۲	b
y	۲b+۱	b+c	b	۲a

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) -۷

تعیین دامنهٔ توابع

۹۰۴- کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً صحیح نیست؟

۱) در تابع همانی f، $f(ab)=f(a)f(b)$

۲) در تابع ثابت g، $g(a)+g(b)=۲g(a+b)$

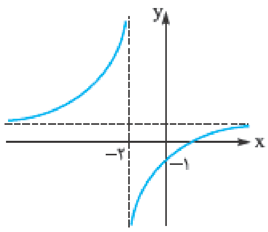
۳) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند، تابع همانی است.

۴) تابعی وجود دارد که هم ثابت باشد و هم همانی

۹۰۵- اگر دامنهٔ تابع $f=\{(۲,۶),(a^۲+a,۲),(۶,a)\}$ دوعضوی باشد، مجموعهٔ مقادیر a چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۹۰۶- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ به صورت مقابل است. $a-b$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۲−
۳) ۴
۴) ۴−

۹۰۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x}{۲x^۳+۴x^۲+۳x}$ چند عدد حقیقی را شامل نمی‌شود؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۹۰۸- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x\ \ ۱}{ax^۲+۴x+a\ \ ۳}$ برابر $\mathbb{R}-\{k\}$ باشد، $a+k$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر　۲) ۰/۷۵　۳) ۱　۴) ۳/۵

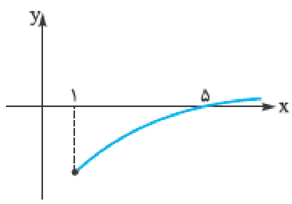
۹۰۹- $x=۱$ عضو دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۳+ax+۲}$ نیست. دامنهٔ تابع f چند عدد حقیقی را شامل نمی‌شود؟

۱) ۳　۲) ۲　۳) ۱　۴) ۴

۹۱۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۳\ \ (a+۱)x^۲+(a+۱)x\ \ ۱}$ تنها یک عدد حقیقی را شامل نمی‌شود. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۱,۳)$　۲) $(-۱,۳)$　۳) $(-۲,۲)$　۴) $\mathbb{R}-[-۲,۲]$

۹۱۱- اگر نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ به صورت مقابل باشد، $a+b$ کدام است؟



۱) ۱−
۲) ۳−
۳) ۴
۴) ۲

۹۱۲- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x\ \ \sqrt{۲x^۲\ \ x\ \ ۱}$ در آن تعریف نمی‌شود کدام است؟

۱) ۰/۵　۲) ۱　۳) ۱/۵　۴) ۲

۹۱۳- دامنهٔ تابع $f(x)=x\sqrt{x^۲\ \ a}$ سه عدد صحیح را شامل نمی‌شود. اگر a بیشترین مقدار خود را داشته باشد، $f(۶)$ چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۳۶　۲) ۳۲　۳) ۲۸　۴) ۲۴

۹۱۴- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\ \ ۲x^۲+ax+b}$ تنها شامل عضو $\{-۱\}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۶−　۲) ۸−　۳) ۴　۴) ۲−

۹۱۵- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{\ \ x^۲(x^۲\ \ ۴)^۲}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۳　۴) بی‌شمار

۹۱۶- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{۳\ \ \sqrt{۱\ \ ۴x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳　۲) ۲　۳) ۴　۴) ۵

۹۱۷- دامنهٔ تابع با ضابطه $y=\sqrt{||x\ \ ۱|\ \ ۳|\ \ ۲}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۳　۲) ۶　۳) ۲　۴) بی‌شمار

۹۱۸- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x+۳|x\ \ ۱|\ \ ۶}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۵　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۴

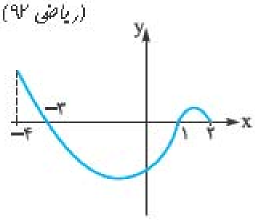
۹۱۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x}{[\ \ ۲x]\ \ ۱}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۲,-۱]$　۲) $\mathbb{R}-[-۲,-۱)$　۳) $\mathbb{R}-(-۱,-\frac{۱}{۲}]$　۴) $\mathbb{R}-[-۱,-\frac{۱}{۲})$

۹۲۰- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{۲}{[x]}\ \ ۱}$ بازهٔ $[a,b)$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۹۲۱- شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



۱) $[۰,۲]$
۲) $[-۳,۲]$
۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$
۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

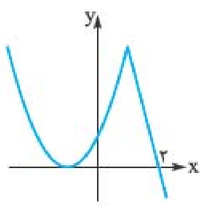
۹۲۲- اگر $(\frac{۱}{۲})^x \ \ f(x)=۱$ باشد، دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $[-۱,۱]$　۲) $(-\infty,۰)$　۳) $(-\infty,+\infty)$　۴) $(۰,+\infty)$

۹۲۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x+۲}{x} & ۳\le x< \ \ ۱\\ \sqrt{x+۱} & ۱<x<۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[-۳,۱)-\{-۱,۰\}$　۲) $\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$　۳) $[-۳,۱)-\{-۱\}$　۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

۹۲۴- اگر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(x+۱)^۲ & ,x\le ۱\\ g(x) & ,x>۱\end{cases}$ به صورت زیر باشد، $g(۴)$ کدام است؟



۱) -۴
۲) -۸
۳) -۲
۴) -۶

۹۲۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{(۶\ \ x)}(x^۲+x\ \ ۶)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۹۲۶- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۱\ \ \log(x\ \ ۱)}$ به کدام صورت است؟ (تجربی خارج ۸۶)

۱) $(۱,۲]$　۲) $[۲,۱۰]$　۳) $[۱,۱۱)$　۴) $(۱,۱۱]$

۹۲۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱\ \ \log(x^۲\ \ ۳x)}$ به کدام صورت بازه‌ها است؟ (ریاضی ۹۵)

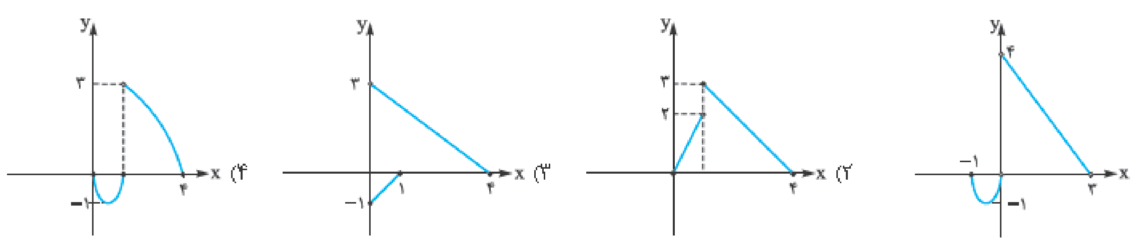
۱) $[-۲,۰)\cup(۳,۵]$　۲) $[-۲,۰]\cup(۳,۵)$　۳) $[-۲,۳)$　۴) $(۰,۵]$

۹۲۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log_{x\ \ [x]}(۲\ \ \sqrt{x})}$ به کدام فرم قابل نمایش است؟

۱) $[a,b)-\{c,d\}$　۲) $(a,b)-\{c,d\}$　۳) $[a,b)-\{c\}$　۴) $(a,b)-\{c\}$

تعیین برد توابع

۹۲۹- در کدام‌یک از نمودارهای زیر، دامنهٔ تابع، فاصلهٔ $[۰,۴]$ و برد آن فاصلهٔ $(-۱,۳]$ است؟



۹۳۰- اگر f تابعی با نمایش جبری $f(x)=x^۴+x^۲$ و با برد $\{۰,۲\}$ باشد، حداکثر تعداد اعضای دامنه کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۹۳۱- برد تابع $\begin{cases}f:(\ \ ۱,۲]\to\mathbb{R}\\ f(x)=x^۲+۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[۱,۵]$　۲) $(۲,۵]$　۳) $(۰,۳]$　۴) $[۱,۴]$

۹۳۲- برد تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & |x|\le ۱\\ ۱-x & |x|>۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-((-۱,۲]\cup\{۰\})$ ۲) $\mathbb{R}-(۱,۲]$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۹۳۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x-۳$ و با دامنهٔ $\{x:|x-۱|<۲\}$ همواره چگونه است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

۹۳۴- برد تابع $f(x)=-۲x^۲+۸x-۱$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۷]$ ۲) $(-\infty,۲]$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $[۷,+\infty)$

۹۳۵- برد تابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $[-۱,\frac{۱}{۲})-\{۰\}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) بی‌شمار ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۳۶- اگر برد تابع $f(x)=\frac{ax+۲}{x+a+۱}$ تنها یک عضو داشته باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-۲,۱\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{-۲\}$ ۴) $\varnothing$

۹۳۷- برد تابع $f(x)=\frac{x^۳-۲x^۲-۸x}{x}$ کدام است؟

۱) $[-۹,+\infty)$ ۲) $[-۹,+\infty)-\{۰\}$ ۳) $[-۱,+\infty)$ ۴) $[-۹,+\infty)-\{-۸\}$

۹۳۸- برد تابع $f(x)=x+\frac{x}{|x|}$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\mathbb{R}-[-۱,۱]$

۹۳۹- برد تابع $f(x)=\frac{۲x}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۲\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۱\}$

۹۴۰- برد تابع $f(x)=[\frac{|x|+۱}{|x|-۱}]$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۴۱- برد تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x>۱\\ x+۲ & x\le -۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-(-۱,۱]$ ۳) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۹۴۲- برد تابع $f(x)=۱+\sqrt{x-|x|}$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $\{۱\}$ ۴) $[۰,+\infty)$

۹۴۳- برد تابع $f(x)=\sqrt{x+[۱-x]}$ کدام است؟

۱) $\{۱\}$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $\{۰,۱\}$

۹۴۴- برد تابع $y=\sqrt{۳-۲[x]-[x]^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۴۵- برد تابع $y=\frac{۲}{۱+۲^{|x|}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۴۶- برد تابع $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x}$ برابر $\mathbb{R}-(a,b)$ است. $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۴۷- اگر برد تابع $f(x)=\frac{۲}{|x|+|x-۱|+۲}$ فاصلهٔ $(a,b]$ باشد، $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۲

۹۴۸- برد تابع $f(x)=\frac{2x}{x^2+4}$ فاصلهٔ $[a,b]$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۴۹- برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $(0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $(1,3)$

تساوی دو تابع

۹۵۰- اگر دو تابع $f=\{(-1,1),(4,n+2)\}$ و $g=\{(m^2,3),(-n,k)\}$ مساوی باشند، $n-k$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۹۵۱- کدام جفت از توابع زیر با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ و $g(x)=\sin x$ ب) $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ و $g(x)=|x|\sqrt{x-1}$

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هر دو ۴) هیچ‌یک

۹۵۲- دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟ (ریاضی خارج ۸۹)

۱) $f(x)=2\log x$ و $g(x)=\log x^2$ ۲) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ و $g(x)=1$

۳) $f(x)=(\sqrt{x})^2$ و $g(x)=x$ ۴) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}$

۹۵۳- تابع $f(x)=(x-1)\sqrt{1-x}$ با کدام‌یک از توابع زیر می‌تواند برابر باشد؟

۱) $g(x)=\sqrt{(x-1)^2(1-x)}$ ۲) $h(x)=\sqrt{(1-x)^3}$

۳) $I(x)=-\sqrt{(1-x)^3}$ ۴) $k(x)=\sqrt{(x-1)^3}$

۹۵۴- کدام‌یک از زوج توابع زیر با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$ ب) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هر دو ۴) هیچ‌یک

۹۵۵- اگر دو تابع $f(x)=x+1$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2+ax+b}{x-2} & x\neq c\\ d & x=c\end{cases}$ با هم برابر باشند، مقدار $g(a+d)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

توابع چندجمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_0، a_1، a_2 و ... و a_{n-1} و a_n، اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ است، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.

دامنهٔ توابع چندجمله‌ای، مجموعه اعداد حقیقی است.

به عنوان مثال توابع $y=x^4-2x^3-1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ چهار، تابع $y=\sqrt{2}x+1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ یک و تابع $y=-3$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر است.

تست اگر تابع $f(x)=x^3(a-2x^n)+1$، یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۵ باشد که مجموع ضرایب آن برابر ۳ است، $f(2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -31 ۳) ۱۵ ۴) -7

پاسخ گزینهٔ «۲» اول باید مقادیر a و n را بیابیم: $f(x)=x^3(a-2x^n)+1=ax^3-2x^{3+n}+1$

چون f یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۵ است، پس باید بزرگ‌ترین توان x آن برابر ۵ باشد، در نتیجه:

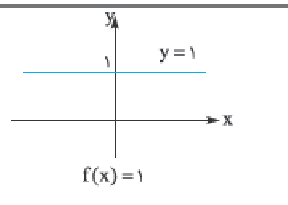
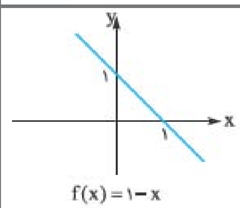
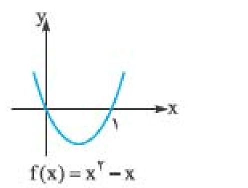
$$3+n=5 \Rightarrow n=2 \Rightarrow f(x)=ax^3-2x^5+1$$

از طرفی مجموع ضرایب برابر ۳ است، پس:

$$a+(-2)+1=3 \Rightarrow a=4$$

$$\Rightarrow f(x)=4x^3-2x^5+1 \Rightarrow f(2)=4(8)-2(32)+1=-31$$

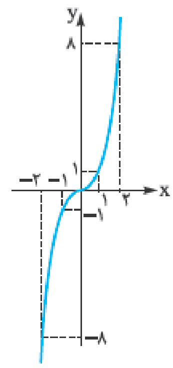
در طول این چند سال گذشته، نمودار توابع چندجمله‌ای درجهٔ صفر، درجهٔ یک و درجهٔ دو را یاد گرفتید که به صورت خلاصه در زیر می‌بینید.

اسمش	تابع درجه صفر	تابع درجه ۱	تابع درجه ۲
لقبش	تابع ثابت	تابع خطی	سهمی
ضابطش	$f(x)=a$	$f(x)=ax+b$	$f(x)=ax^2+bx+c$
قیافش!			

امسال باید با یک تابع چندجمله‌ای دیگر، با جزئیات بیشتر آشنا شوید. *(نمی‌ذارن همین‌طوری دست‌خالی بریدکه!)* قطعاً این تابع، تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ است. ابتدایی‌ترین حالت آن هم به صورت $f(x)=x^3$ است. *اما قبل تا قیافشو نبینیم، نمی‌تونیم بفهمیم دوست‌داشتنی هست یا نه!*

پس اول به سراغ رسم آن (با کمک مقداردهی) می‌رویم:

x	$y=x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

$\Rightarrow$ 

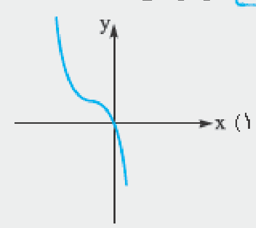
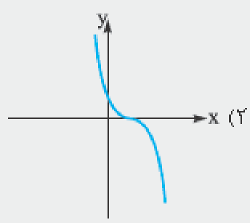
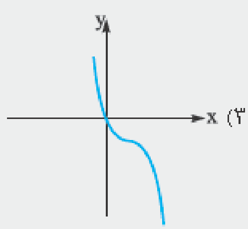
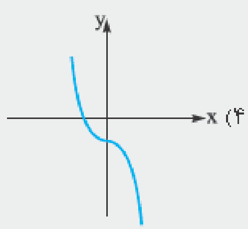
ویژگی‌های تابع $y=x^3$:

۱ دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

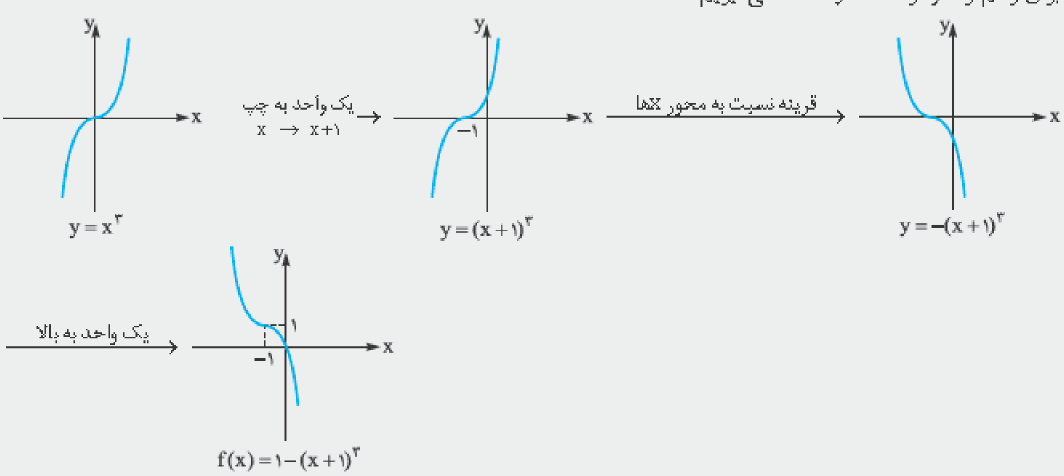
۲ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

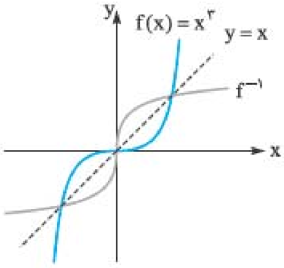
۳ نسبت به مبدأ مختصات قرینه است.

تست نمودار تابع $f(x)=1-(x+1)^3$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ **گزینهٔ «۱»** برای رسم از نمودار $y=x^3$ کمک می‌گیریم:



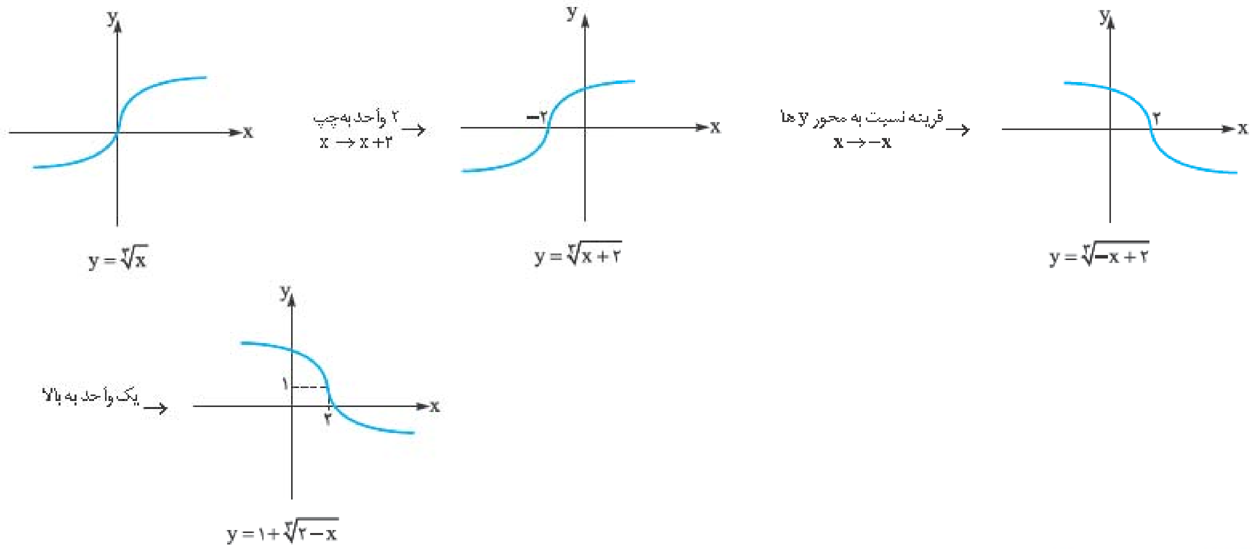


گفتیم تابع $f(x)=x^3$ یک تابع یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است؛ پس تابع وارون دارد. برای رسم نمودار تابع وارون آن، کافی است نمودار $f(x)=x^3$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم؛ اما به هر حال این شکل (شکل f^{-1} منظورمه) یک ضابطه‌ای هم دارد. برای یافتن ضابطه به صورت زیر عمل می‌کنیم:[1]

$$y=x^3 \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم می‌گیریم}} \sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

مثال **نمودار تابع $y=1+\sqrt[3]{2-x}$ را رسم کنید.**

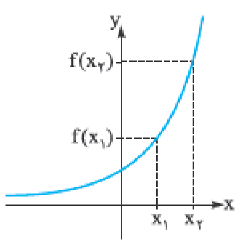
پاسخ برای رسم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



توابع صعودی و نزولی

در این قسمت می‌خواهیم در مورد روند حرکتی نمودارها بحث کنیم. به خاطر داشته باشید، به طور کلی برای بررسی روند حرکتی و تغییرات نموداری یک تابع، همواره نمودار آن از چپ به راست مورد بررسی قرار می‌گیرند.

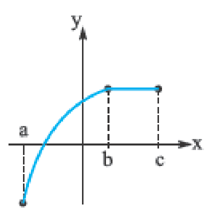
حالا به حالت زیر توجه کنید:



تابع صعودی اکید: به نمودار مقابل توجه کنید. وقتی روی منحنی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، مقادیر تابع دائماً در حال افزایش هستند. به این توابع، صعودی اکید می‌گویند.

تابع f را صعودی اکید می‌نامیم؛ هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنهٔ f که $x_1 < x_2$ است داشته باشیم:

$$f(x_1) < f(x_2)$$



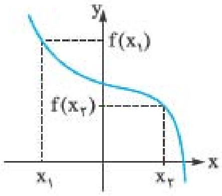
تابع صعودی: بعضی وقت‌ها نمودار تابع در قسمت‌هایی در حال افزایش است و در قسمت‌هایی موازی محور xها حرکت می‌کند. به شکل مقابل نگاه کنید. تابع در فاصلهٔ $[a,b]$ در حال افزایش و در فاصلهٔ $[b,c]$ موازی محور xها حرکت می‌کند، پس چون روند کاهشی ندارد، به آن صعودی می‌گوییم. حذف‌شدن عبارت «اکید» برای این است که تابع به صورت دائم در حال افزایش نیست.

تابع f را صعودی می‌نامیم؛ هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنهٔ f که $x_1 < x_2$ است، داشته باشیم:

$$f(x_1) \le f(x_2)$$

(در قسمت‌هایی که نمودار، موازی محور xها حرکت می‌کند $f(x_1)=f(x_2)$ و در سایر قسمت‌ها $f(x_1)<f(x_2)$، به همین دلیل باید $f(x_1)\le f(x_2)$ باشد.)

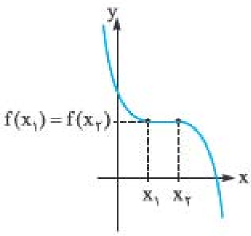
۱- این قسمت در کتاب درسی در این فصل بحث نشده اما از آن‌جا که در فصل مشتق از تابع $y=\sqrt[3]{x}$ سؤال مطرح شده، پس در این‌جا به معرفی آن پرداختیم.



تابع نزولی اکید: در این‌جا وقتی روی منحنی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، مقادیر تابع دائماً در حال کاهش هستند. (مطابق شکل مقابل)، پس تعریف این توابع هم به صورت زیر است:

تابع f را نزولی اکید می‌نامیم؛ هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنهٔ f که $x_1 < x_2$ است، داشته باشیم:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

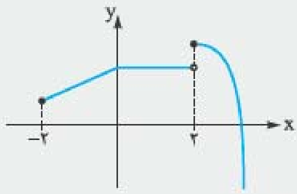


تابع نزولی: اگر نمودار تابع، روند کاهشی داشته باشد؛ ولی در قسمت‌هایی موازی محور xها حرکت کند، لفظ «اکید» از روی آن برداشته می‌شود و نام «نزولی» به خود می‌گیرد. در شکل مقابل چون عرض دو نقطهٔ x_1 و x_2 یکسان است، بنابراین تابع «نزولی» است؛ هر چند که در سایر قسمت‌ها نمودار تابع دائماً در حال کاهش است.

تابع f را نزولی گوییم؛ هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنهٔ f که $x_1 < x_2$ است، داشته باشیم:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

تست با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، کدام گزینه صحیح است؟



۱) تابع در بازهٔ $[-2,2]$ صعودی است.

۲) تابع در بازهٔ $[0,+\infty)$ نزولی است.

۳) تابع f هم صعودی و هم نزولی است.

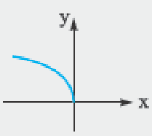
۴) تابع در بازهٔ $[0,2]$، ثابت است.

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به شکل، تابع در بازهٔ $[-2,0]$ صعودی اکید و در فاصلهٔ $[0,2)$ ثابت است. هم‌چنین مقدار $f(2)$ از مقدار تمام نقاط قبل از خود بیشتر است، پس می‌توان گفت تابع در بازهٔ $[-2,2]$ صعودی است. اما دقت کنید چون مقدار $f(2)$ از مقدار $f(1)$ بیشتر است، پس تابع در بازهٔ $[0,+\infty)$ نزولی نیست؛ در نتیجه ۲ صحیح نیست (تابع در این فاصله نه صعودی و نه نزولی است). هم‌چنین به دلیل این‌که تابع در بخش‌هایی صعودی و در بخش‌هایی نزولی است، پس تابع **نه صعودی و نه نزولی** است، پس ۳ نیز صحیح نیست و در آخر تابع در بازهٔ $[0,2)$ ثابت است، نه در بازهٔ $[0,2]$؛ پس ۴ نیز صحیح نیست.

تست کدام‌یک از توابع زیر صعودی است؟

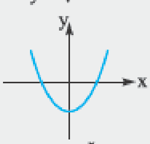
۱) $y = \sqrt{-x}$ ۲) $y = x^2 - 1$ ۳) $y = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 1 - x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ۴) $y = -\frac{1}{x}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم و صعودی یا نزولی بودن آن‌ها را بررسی می‌کنیم:



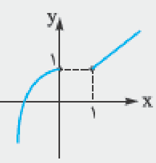
$y = \sqrt{-x}$

۱ $y = \sqrt{-x}$: اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ به دست می‌آید با توجه به نمودار، از چپ به راست، مقادیر تابع در حال کاهش هستند، پس تابع **نزولی اکید** است.

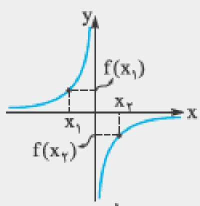


$f(x) = x^2 - 1$

۲ $y = x^2 - 1$: برای رسم این نمودار، نمودار تابع $y = x^2$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. این نمودار در بازهٔ $(-\infty,0)$ در حال کاهش و در بازهٔ $(0,+\infty)$ در حال افزایش است، پس **نه صعودی و نه نزولی** است.



۳ $y = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 1 - x^2 & x \leq 0 \end{cases}$: با رسم نمودار هر ضابطه و با توجه به دامنهٔ آن ضابطه، شکل مقابل حاصل می‌شود. با توجه به شکل، تابع از چپ به راست در حال افزایش است و فقط به دلیل این‌که عرض دو نقطه به طول‌های صفر و یک برابر است، در نتیجه تابع صعودی (و نه اکید) است.



$y = -\frac{1}{x}$

۴ $y = -\frac{1}{x}$: برای رسم این نمودار، کافی است نمودار $y = \frac{1}{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم. با توجه به شکل، نمودار تابع در هر طرف محور yها روند افزایشی دارد، اما با توجه به این‌که مثلاً $f(x_1) > f(x_2)$ است، تابع **نه صعودی و نه نزولی** است.

حالا با هم چندتا نکتهٔ باحال یاد بگیریم

۱ ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی باشد، ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد. برای مثال تابع $y = x^{2} - 1$ که نه صعودی و نه نزولی است، در فاصلهٔ $(-\infty, 0)$ نزولی و در فاصلهٔ $(0, +\infty)$ صعودی است.

۲ تابع ثابت $y = c$ یک تابع هم صعودی و هم نزولی است (چون در هر دو تعریف صدق می‌کند.)

۳ اگر f و g توابعی صعودی (نزولی) باشند، $f + g$ نیز صعودی (نزولی) است.

۴ اگر f و g توابعی صعودی (نزولی) باشند، آن‌گاه:

الف اگر f و g مثبت باشند، آن‌گاه $f.g$ صعودی (نزولی) است. **ب** اگر f و g منفی باشند، آن‌گاه $f.g$ نزولی (صعودی) است.

۵ اگر f تابعی صعودی (نزولی) باشد، $-f$ تابعی نزولی (صعودی) است.

۶ اگر f تابعی صعودی (نزولی) باشد و تمام مقادیر آن هم‌علامت باشند، در این صورت $\frac{1}{f}$ نزولی (صعودی) است.

۷ در توابع صعودی یا نزولی برای تعیین برد، کافی است مقدار نقاط ابتدا و انتهای دامنه را محاسبه و برد را تعیین کنید.

تست برد تابع $y = \sqrt{-x} - \sqrt{x+1}$ کدام است؟

۱) $[0, +\infty)$ ۲) $(-\infty, -1]$ ۳) $[-1, 0]$ ۴) $[-1, 1]$

پاسخ گزینهٔ «۴» تابع $y_1 = \sqrt{-x}$ یک تابع نزولی است. از طرفی تابع $y = \sqrt{x+1}$ یک تابع صعودی و در نتیجه طبق نکتهٔ **۵** تابع $y_2 = -\sqrt{x+1}$ یک تابع نزولی است، پس مجموع دو تابع y_1 و y_2 یعنی تابع $y = \sqrt{-x} - \sqrt{x+1}$ با دامنهٔ $[-1, 0]$ (که از اشتراک دامنهٔ توابع y_1 و y_2 حاصل می‌شود) یک تابع نزولی است. (طبق نکتهٔ **۳**)

پس با توجه به این‌که تابع، نزولی است؛ برای تعیین برد تابع، مقادیر ابتدا و انتهای دامنه را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 - 0 = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{برد} = [-1, 1]$$

تست توابع $f(x) = \frac{x^{2}}{x^{3} + x^{2} + 1}$ و $g(x) = \frac{x^{3} + 1}{x^{3} + x^{2} + 1}$ مفروض‌اند. اگر در بازهٔ I، تابع f صعودی باشد، آن‌گاه تابع g الزاماً چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) مثبت ۴) منفی

پاسخ گزینهٔ «۲» مجموع دو تابع f و g تابعی ثابت است. نگاه کنید:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^{2}}{x^{3} + x^{2} + 1} + \frac{x^{3} + 1}{x^{3} + x^{2} + 1} = \frac{x^{3} + x^{2} + 1}{x^{3} + x^{2} + 1} = 1$$

بنابراین در بازه‌ای که f صعودی است، تابع g نزولی خواهد بود.

$$f(x) + g(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \underbrace{1 - \underbrace{f(x)}_{\text{صعودی}}}_{\text{نزولی}}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

توابع چندجمله‌ای

۹۵۶- تابع $f(x) = 2x^{n}(1 - x)^{3} + b$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است که مجموع ضرایب آن برابر ۳ است. $n + b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۵۷- اگر $f(x) = (k - 2)x + k - 1$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ صفر و $g(x) = 3x + b$ باشند. به ازای کدام مقدار b نقطهٔ تلاقی نمودار دو تابع f و g روی خط $y = x + 2$ است؟

۱) -2 ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۹۵۸- نمودار تابع $y = 1 - x^{3}$ از کدام ناحیهٔ مختصاتی نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۹۵۹- نمودار تابع $f(x) = -x^{3}$ و $g(x) = -x^{2}$ مفروض‌اند. به ترتیب در هر یک از فاصله‌های $(-1, 0)$، $(0, 1)$ و $(1, 2)$ نمودار کدام تابع، بالاتر است؟

۱) f ،g ،f ۲) g ،f ،g ۳) f ،g ،g ۴) f ،f ،g *(برگرفته از تمرین کتاب درسی)*

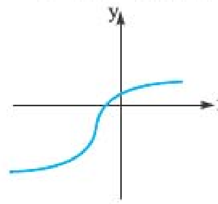
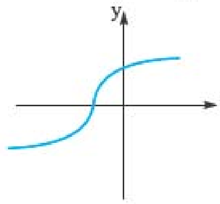
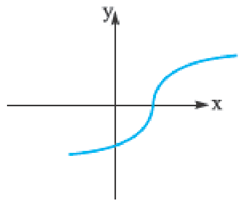
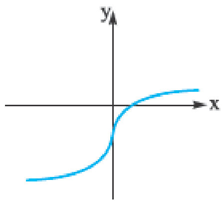
۹۶۰- نمودار تابع $f(x)=(x\quad 1)^{۳}$ را ابتدا در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض کرده و سپس نسبت به محور yها قرینه و در نهایت نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. نمودار تابع حاصل با چه طولی محور xها را قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ‏ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ‏ ۳) -۱ ‏ ۴) ۱

۹۶۱- برای رسم نمودار $y=x(x^{۲}+۳x+۳)$ با استفاده از نمودار $y=x^{۳}$ چه مراحلی باید انجام شود؟

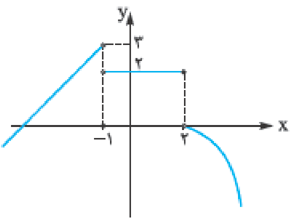
۱) یک واحد به چپ ـ یک واحد به پایین
۲) یک واحد به راست ـ یک واحد به بالا
۳) یک واحد به چپ ـ انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۳}$
۴) یک واحد به پایین ـ انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۳}$

۹۶۲- نمودار تابع معکوس تابع $f(x)=(x\quad 1)^{۳}\quad ۱$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

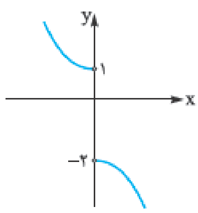
توابع صعودی و نزولی

۹۶۳- تابع f با نمودار مقابل در کدام فاصله نزولی است؟



۱) $(-\infty,۰)$
۲) $(-\infty,۱)$
۳) $[-۱,+\infty)$
۴) $[۰,۳]$

۹۶۴- نمودار تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به صورت مقابل است. مجموعهٔ مقادیر $f(۰)$ کدام باشد تا تابع اکیداً یکنوا باشد؟



۱) $\mathbb{R}-(-۲,۱)$
۲) $[-۲,۱]$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $\varnothing$

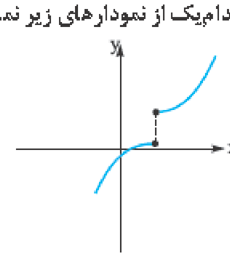
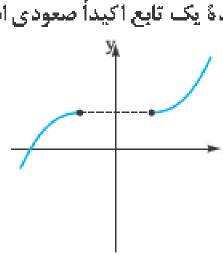
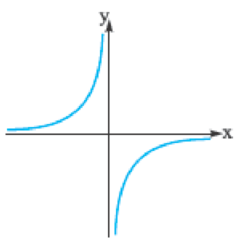
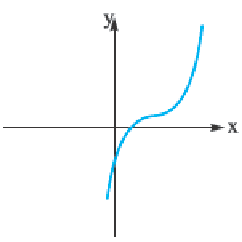
۹۶۵- اگر تابع $f=\{(۱,[a]),(۰,۱),(\quad ۱,|a\quad ۲|)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $[۲,۳)$ ‏ ۲) $(۱,۳)$ ‏ ۳) $(۲,+\infty)$ ‏ ۴) $\{۲\}$

۹۶۶- توابع $y=\log_{۰/۵}\frac{۱}{x}$ و $y=۲^{x\quad ۱}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) صعودی ـ نزولی ‏ ۲) نزولی ـ صعودی ‏ ۳) نزولی ـ نزولی ‏ ۴) صعودی ـ صعودی

۹۶۷- کدام‌یک از نمودارهای زیر نمایش‌دهندهٔ یک تابع اکیداً صعودی است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۶۸- کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=|x+۱|+|x\quad ۲|$ صحیح است؟

۱) در بازهٔ $[-۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است.
۲) در بازهٔ $[-۱,۲]$ نه صعودی و نه نزولی است.
۳) در بازهٔ $(-\infty,۲]$ نزولی است.
۴) f تابعی هم صعودی و هم نزولی است.

۹۶۹- نمودار تابع اکیداً صعودی f را ابتدا نسبت به محور yها سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و تابع حاصل را g می‌نامیم. تابع g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $g(x) = |x - ۲|$ ۲) $g(x) = \sqrt{۲ - x}$ ۳) $g(x) = x^۲$ ۴) $g(x) = \frac{۱}{x}$

۹۷۰- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ صحیح است؟

۱) در بازهٔ $(-۲,۰)$ نزولی است ۲) در بازهٔ $(-۲,۰)$ صعودی است ۳) در بازهٔ $(۰,۲)$ نزولی است ۴) در بازهٔ $(۰,۲)$ صعودی است

۹۷۱- تابع $f(x) = \begin{cases} ۲^{\ \ x} & x \geq ۰ \\ g(x) & x < ۰ \end{cases}$ تابعی نزولی است. $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $g(x) = -x$ ۲) $g(x) = x$ ۳) $g(x) = x + ۱$ ۴) $g(x) = ۱ - x$

۹۷۲- نمودار تابع $f(x) = |۲x + a| \quad ۱$ در فاصلهٔ $[-۱,۲]$ یکنواست. حدود a کدام است؟

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $\mathbb{R} - (-۴,۲)$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},۱]$ ۴) $\mathbb{R} - (-۱,\frac{۱}{۲})$

۹۷۳- حدود k برای این‌که تابع $f(x) = (k \quad ۲)x^۲ \quad x$ در فاصلهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $k \geq \frac{۵}{۲}$ ۲) $۲ < k \leq \frac{۵}{۲}$ ۳) $k < \frac{۵}{۲}$ ۴) $k > ۲$

۹۷۴- به ازای چه حدودی از a، تابع $y = ۲x \quad a|x|$ اکیداً نزولی است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $\varnothing$ ۳) $\mathbb{R} - (-۲,۲)$ ۴) $\mathbb{R}$

۹۷۵- به ازای چه حدودی از a، نمودار تابع $y = \begin{cases} |x| \quad ۱ & x \leq ۰ \\ x^۲ \quad a & x > ۰ \end{cases}$ اکیداً یکنواست؟

۱) $a \geq -۱$ ۲) $a \geq ۱$ ۳) $a > -۱$ ۴) $a > ۱$

۹۷۶- اگر f تابعی صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ گذرنده از مبدأ باشد، دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام مجموعه است؟ (ق.م)

۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۰\}$ ۲) $\{x \in \mathbb{R}, x > ۰\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\{x \in \mathbb{R}, x \leq ۰\}$

۹۷۷- f تابعی نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است که محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{xf(۲ \quad x)}$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $\mathbb{R} - (۰,۱)$ ۴) $\mathbb{R} - (۰,۲)$

۹۷۸- اگر f تابعی پیوسته و نزولی و $f(۰) = f(۲) = ۲$ باشد، آن‌گاه نمودار f در چند نقطه تابع $g(x) = [x^۲]$ را قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) حداکثر ۲ ۴) بی‌شمار

۹۷۹- اگر f تابعی نزولی و پیوسته با دامنهٔ $[-۱,۳]$ باشد و $f(\quad ۱) = ۳$ و $f(۳) = \quad ۱$ باشد، آن‌گاه برد تابع $y = f(x) \quad x$ کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $[-۴,۴]$ ۳) $[-۲,۶]$ ۴) $[۰,۲]$

۹۸۰- اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً صعودی باشد، کدام‌یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

۱) $|x| + f(x)$ ۲) $xf(x)$ ۳) $x + f(x)$ ۴) $|x|f(x)$

۹۸۱- تابع $\log_۵ x - \log_{۰/۵} x$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) نه صعودی و نه نزولی ۴) ثابت

۹۸۲- توابع $f(x) = x^۳$ و $g(x) = \sqrt{\quad x}$ مفروض‌اند. کدام‌یک از توابع زیر نزولی است؟

۱) $f - g$ ۲) $f + g$ ۳) $g - f$ ۴) $-g - f$

۹۸۳- توابع $f(x) = x$ و $g(x) = [x]$ مفروض‌اند. کدام‌یک از توابع زیر در دامنهٔ خود اکیداً صعودی است؟

۱) $f - g$ ۲) $f + g$ ۳) $f.g$ ۴) $\frac{g}{f}$

اعمال روی توابع

همان‌طور که چهار عمل اصلی «جمع»، «تفریق»، «ضرب» و «تقسیم» را برای اعداد حقیقی استفاده می‌کنیم، برای توابع نیز می‌توان این اعمال را انجام داد. البته این‌جا یک سری شرایط (از جمله دامنه) داریم که باید آن‌ها را هم لحاظ کنیم.

از طرفی در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲+BC^۲=AC^۲ \Rightarrow (۶+۹)=AC^۲ \Rightarrow AC=۵$$

$$AB^۲=AH.AC \Rightarrow AH=\frac{AB^۲}{AC}=\frac{۱۶}{۵}$$

برای پیدا کردن HF در رابطهٔ (*) باید BH را هم بیابیم. برای این کار از مساحت مثلث کمک می‌گیریم:

$$S_{ABC}=\frac{AB\times BC}{۲}=\frac{BH.AC}{۲} \Rightarrow AB.BC=BH.AC$$

$$\Rightarrow ۴\times۳=BH\times۵ \Rightarrow BH=\frac{۱۲}{۵}$$

در رابطهٔ (*):

$$HF=\frac{AH^۲}{BH}=\frac{(\frac{۱۶}{۵})^۲}{\frac{۱۲}{۵}}=\frac{۲۵۶\times۵}{۲۵\times۱۲}=\frac{۶۴}{۱۵}$$

۸۹۵- گزینه۳ تنها در ۳ هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۸۹۶- گزینه۳ در نمایش نموداری ون یک تابع، باید از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان خارج شود.

بررسی گزینه‌ها:

در ۱ و ۴ از عضو a، دو پیکان خارج شده است، پس تابع نیست.

۲ از عضو c، پیکانی خارج نشده است، پس تابع نیست.

۳ از a و b فقط یک پیکان خارج شده است، پس تابع است.

۸۹۷- گزینه۴ در نمایش نموداری ون یک تابع، باید از هر عضو مجموعهٔ اول فقط یک پیکان خارج شود؛ چون نمودار، تابع است و از عدد ۲، دو پیکان خارج شده؛ پس:

$$a^۲-a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow (a+۱)(a-۲)=۰$$

$$\Rightarrow a=-۱\,,\,a=۲$$

نمایش نموداری ون را به صورت زوج مرتبی ببینیم:

$a=-۱ \Rightarrow R=\{(-۱,۲),(۲,۳),(۲,۲)\}$ تابع نیست

$a=۲ \Rightarrow R=\{(-۱,۲),(-۱,۳),(۲,۲)\}$ تابع نیست

هیچ‌کدام از مقادیر a قابل‌قبول نیست.

۸۹۸- گزینه۲ طبق تعریف تابع، نباید دوتا زوج مرتب با مؤلفهٔ اول یکسان داشته باشیم. اگر مؤلفه‌های اول برابر بودند، باید برای تابع‌بودن، مؤلفه‌های دوم هم برابر باشند.

$$\begin{cases}(۳,m^۲)\in \text{تابع}\\(۳,m+۲)\in \text{تابع}\end{cases} \Rightarrow m^۲=m+۲$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \xrightarrow{a+c=b} m=-۱\,,\,۲$$

حالا هر دوتا مقدار را در مجموعهٔ A قرار می‌دهیم. ببینیم به ازای کدام‌یک، با یک تابع روبه‌رو هستیم

$$\begin{cases}m=-۱: f=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\} & \text{تابع است.}\\ m=۲: f=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۲,۲),(۲,۴)\} & \text{تابع نیست.}\end{cases}$$

پس فقط $m=-۱$ قابل‌قبول است

۸۹۹- گزینه۲ از اعضای مجموعهٔ A شروع می‌کنیم.

عضو a چون در صورت سؤال گفته a اجازه ندارد که با d زوج تشکیل دهد، $((a,d)\notin h)$ پس برای a، ۳ حالت f، g و e وجود دارد.

عضو b چون طراح گفته $(b,f)\in h$ است، یعنی b اجازه ندارد با هیچ عضو دیگری غیر از f، زوج مرتب تشکیل دهد و فقط باید با f باشد (*خوب با بد باید بسازه!*) پس برای b یک حالت وجود دارد.

عضو c چون محدودیتی برای c نداریم، بنابراین می‌تواند از هر یک از چهار عضو $\{d,e,f,g\}$ زوجش را انتخاب کند (*خوش به حالش!*) یعنی ۴تا حالت دارد. در نتیجه $۱۲=۴\times۱\times۳=$ تعداد حالت‌های تشکیل تابع

۹۰۰- گزینه۲ در تابع f، مقدار ۱/۲۵ را به جای x جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(۱/۲۵)=\frac{\sqrt{۱/۲۵+[۱/۲۵]}}{(۱/۲۵)^۲-۱}=\frac{\sqrt{۱/۲۵+۱}}{(\frac{۵}{۴})^۲-۱}=\frac{۱/۵}{\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۲۴}{۹}=\frac{۸}{۳}$$

۹۰۱- گزینه۱ اول $x=۲$ را قرار می‌دهیم

$$f(۲)+۲f(-۲)=۵ \quad (*)$$

وجود $f(-۲)$ برای محاسبهٔ $f(۲)$ ایجاد مزاحمت می‌کند. برای رفع این مزاحمت با توجه به این‌که در تساوی داده‌شده $f(-x)$ و $f(x)$ داریم، $x=-۲$ را هم قرار می‌دهیم $x=-۲: f(-۲)-۲f(۲)=۵ \quad (**)$

حالا با کمک دو معادلهٔ (*) و (**) به صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، مقدار $f(۲)$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases}f(۲)+۲f(-۲)=۵\\ f(-۲)-۲f(۲)=۵ \xrightarrow{\times(-۲)} -۲f(-۲)+۴f(۲)=-۱۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{معادلات}]{\text{جمع دو طرف}} ۵f(۲)=-۵ \Rightarrow f(۲)=-۱$$

۹۰۲- گزینه۱ در تابع ثابت، برد تابع تنها یک عضو دارد؛ بنابراین مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها، باید با هم برابر باشند.

$$\underbrace{a^۲+b=b-a}_{(۱)}\overbrace{{}=۳a-b}^{(۲)}$$

$$(۱) \Rightarrow a^۲+b=b-a \Rightarrow a^۲+a=۰$$

$$\Rightarrow a(a+۱)=۰ \Rightarrow a=۰\,,\,a=-۱$$

$$(۲) \Rightarrow b-a=۳a-b \Rightarrow ۴a=۲b \Rightarrow b=۲a$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=۰ \Rightarrow b=۰\\ a=-۱ \Rightarrow b=-۲\end{cases}$$

۹۰۳- گزینه۲ تابع همانی، هر مقدار در دامنه را به همان مقدار در برد نظیر می‌کند. با توجه به جدول:

x	$\lvert a\rvert$	۲a	۲-b
y	۲b+۱	b+c	b-۲a

$$\Rightarrow \begin{cases}|a|=۲b+۱ & (۱)\\ ۲a=b+c & (۲)\\ ۲-b=b-۲a & (۳)\end{cases}$$

b را از معادلهٔ (۳) برحسب a به دست آورده و در معادلهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(۳) \Rightarrow ۲-b=b-۲a \Rightarrow ۲b=۲a+۲ \Rightarrow b=۱+a$$

$$\xrightarrow{(۱)} |a|=۲(۱+a)+۱ \Rightarrow |a|=۳+۲a$$

$$\begin{cases} a\ge ۰ \Rightarrow a=۳+۲a \Rightarrow a=-۳ & \times \\ a<۰ \Rightarrow -a=۳+۲a \Rightarrow a=-۱ & \checkmark \end{cases}$$

پس با توجه به تساوی $b=۱+a$، داریم: $b=۰$

$(۲)\Rightarrow ۲(-۱)=۰+c \Rightarrow c=-۲$

۹۰۴- گزینهٔ ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

① تابع f همانی است؛ یعنی $f(x)=x$، بنابراین:

$$\begin{cases} f(ab)=ab \\ f(a)=a \\ f(b)=b \end{cases} \Rightarrow f(ab)=f(a)f(b)$$

② تابع g ثابت است؛ پس فرض کنیم $g(x)=k$، در نتیجه

$$\begin{cases} g(a)=k \\ g(b)=k \\ g(a+b)=k \end{cases} \Rightarrow g(a)+g(b)=۲g(a+b)$$

③ در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$ دامنه و برد، برابر $\{۱,۲\}$ هستند، اما همانی نیست.

④ تابع $f=\{(۱,۱)\}$ هم ثابت است و هم همانی.

۹۰۵- گزینهٔ ۳ برای این‌که دامنهٔ تابع، دوعضوی باشد، باید در تابع f تنها دو زوج مرتب متمایز مشاهده شود. پس یکی از حالت‌های زیر می‌تواند رخ دهد:

$$\begin{cases} (۲,۶)=(a^۲+a,۲): \text{هیچ‌گاه برابر نمی‌شوند} \\ (۲,۶),(۶,a): \text{هیچ‌گاه برابر نمی‌شوند} \\ (a^۲+a,۲)=(۶,a) \Rightarrow \begin{cases} a^۲+a=۶ \Rightarrow a^۲+a-۶=۰ \\ \Rightarrow a=۲,-۳ \\ ۲=a \end{cases} \\ \xrightarrow{\text{اشتراک}} a=۲ \end{cases}$$

پس تنها به ازای $a=۲$، دامنهٔ تابع f دوعضوی خواهد بود.

۹۰۶- گزینهٔ ۴ نمودار از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد؛ پس:

$$f(۰)=-۱ \Rightarrow -۱=\frac{۰+a}{۰+b} \Rightarrow a=-b \quad (*)$$

بنا به نمودار، $x=-۲$ عضو دامنه نیست؛ پس:

$$-۲+b=۰ \Rightarrow b=۲ \xrightarrow{(*)} a=-۲ \Rightarrow a-b=-۲-۲=-۴$$

۹۰۷- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)$ یک تابع گویا است، پس دامنهٔ آن به صورت $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است:

$$۲x^۳+۴x^۲+۳x=۰ \Rightarrow x(۲x^۲+۴x+۳)=۰$$

$x=۰$ تنها ریشهٔ مخرج است. دقت کنید که Δی معادلهٔ درجه‌دوم داخل پرانتز، منفی است و ریشه ندارد.

۹۰۸- گزینهٔ ۱ با فرض $a\neq ۰$: دامنهٔ تابع گویا: $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است. دامنهٔ تابع تنها شامل یک عدد نمی‌باشد؛ پس مخرج کسر تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد؛ بنابراین $ax^۲+۴x+a-۳=۰$ باید یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد و در نتیجه $\Delta=۰$ خواهد بود.

$$\Delta=۱۶-۴(a)(a-۳)=۰ \Rightarrow ۴(a^۲-۳a-۴)=۰$$
$$\Rightarrow ۴(a+۱)(a-۴)=۰ \Rightarrow a=-۱, a=۴$$

هردو مقدار را امتحان می‌کنیم:

▸ $a=-۱ \Rightarrow f(x)=\dfrac{x-۱}{-x^۲+۴x-۴}$

ریشهٔ مخرج است $k: -k^۲+۴k-۴=۰ \Rightarrow -(k-۲)^۲=۰$

$\Rightarrow k=۲ \Rightarrow a+k=-۱+۲=۱$

▸ $a=۴ \Rightarrow f(x)=\dfrac{x-۱}{۴x^۲+۴x+۱}$

ریشهٔ مخرج است $k: ۴k^۲+۴k+۱=۰ \Rightarrow (۲k+۱)^۲=۰$

$\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow a+k=۴-\frac{۱}{۲}=۳/۵$

اگر $a=۰$ باشد، $f(x)=\dfrac{x-۱}{۴x-۳}$ است و $k=\frac{۳}{۴}$ به دست می‌آید؛ پس $a+k=۰+\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$

۹۰۹- گزینهٔ ۲ $x=۱$ عضو دامنهٔ تابع نیست؛ پس ریشهٔ مخرج کسر است

$(۱)^۳+a(۱)+۲=۰ \Rightarrow a=-۳$

بنابراین $f(x)=\dfrac{x}{x^۳-۳x+۲}$

دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم.

دقت کنید که چون یک ریشهٔ عبارت $x^۳-۳x+۲$ است پس یک عامل $(x-۱)$ دارد $(x-۱)(x^۲+x-۲)$

$=(x-۱)(x-۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۱, x=-۲$

پس دامنهٔ تابع شامل دو عضو $\{۱,-۲\}$ نمی‌شود

۹۱۰- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع گویا، $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است. از آن‌جا که دامنه، تنها یک عدد حقیقی را شامل نمی‌شود، پس مخرج کسر تنها یک ریشه دارد. به مخرج کسر تابع f دقت کنید!

مجموع ضرایب آن صفر است، پس یک ریشهٔ مخرج $x=۱$ است. تجزیه‌شدهٔ مخرج کسر به صورت $(x-۱)(x^۲-ax+۱)$ است برای این‌که مخرج فقط یک ریشه داشته باشد باید Δی عبارت درجه‌دوم داخل پرانتز کوچک‌تر از صفر باشد.

$$\Delta=(-a)^۲-۴(۱)(۱)=a^۲-۴<۰ \Rightarrow -۲<a<۲$$

۹۱۱- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، دامنهٔ تابع $x\ge ۱$ است. همچنین با توجه به ضابطهٔ تابع، برای محاسبهٔ دامنه باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد؛ یعنی $x\ge -b$ پس $-b=۱$ یا $b=-۱$ خواهد بود؛

بنابراین $f(x)=a+\sqrt{x-۱}$.

از طرف دیگر $(۵,۰)\in f$ است $f(۵)=۰ \Rightarrow a+\sqrt{۴}=۰ \Rightarrow a=-۲$

$\Rightarrow a+b=(-۲)+(-۱)=-۳$

۹۱۲- گزینهٔ ۳ تابع، در عضوهای خارج از دامنه، تعریف نمی‌شود؛ بنابراین کافی است بدانیم عبارت زیر رادیکال در چه بازه‌ای منفی خواهد شد.

$$P(x)=۲x^۲-x-۱<۰ \Rightarrow (۲x+۱)(x-۱)<۰$$

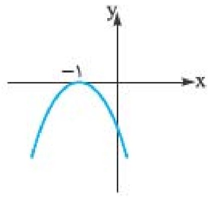
x		$-\frac{۱}{۲}$		۱	
P(x)	+	۰	−	۰	+

بزرگ‌ترین بازه برابر $(-\frac{۱}{۲},۱)$ است که طول آن $|۱-(-\frac{۱}{۲})|=۱/۵$ است.

۹۱۳- گزینهٔ ۴ سه عدد صحیح در بازه‌ای قرار دارند که در آن، عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود $(x^2<a)$. این بازه، بازه‌ای متقارن و شامل عدد صفر است. از آن‌جا که $x^2<4$ شامل ۳ عدد صحیح است، پس $a=4$؛ در نتیجه:

$$f(x)=x\sqrt{x^2-4} \Rightarrow f(6)=6\sqrt{32}=24\sqrt{2}$$

۹۱۴- گزینهٔ ۴ **راه اول:** چون دامنهٔ تابع تنها شامل یک عضو است و عبارت زیر رادیکال از نوع درجه دوم است، پس باید مطابق شکل مقابل، عبارت درجه‌دوم تنها در $x=-1$ صفر شود (*تنها نقطه‌ای که تعریف می‌شه*) و در سایر نقاط منفی باشد. این حالت هم زمانی رخ می‌دهد که شرایط زیر برای معادلهٔ $-2x^2+ax+b=0$ برقرار باشد.



$$\begin{cases} x=-1 \text{ ریشه است}: -2(-1)^2+a(-1)+b=0 \\ \Rightarrow b-a=2 \Rightarrow b=a+2 \\ \text{بر محور xها مماس است}: \Delta=0 \Rightarrow a^2-4(-2)b=0 \\ a^2+8b=0 \xrightarrow{b=a+2} a^2+8(a+2)=0 \\ \Rightarrow a^2+8a+16=0 \\ \Rightarrow (a+4)^2=0 \Rightarrow a=-4 \xrightarrow{b=a+2} b=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=-4-(-2)=-2$$

راه دوم: برای این‌که دامنهٔ تابع تنها شامل عضو $\{-1\}$ باشد، باید نمودار عبارت درجه‌دوم در $x=-1$ بر محور xها مماس شود و در سایر نقاط منفی باشد، می‌دانیم عبارت درجه دومی که ریشهٔ مضاعف $x=a$ دارد، به صورت $k(x-a)^2$ قابل نمایش است که k ضریب x^2 است. چون در عبارت $-2x^2+ax+b$، ضریب x^2 برابر −۲ است و ریشهٔ مضاعف $x=-1$ دارد؛ بنابراین:

$$-2x^2+ax+b\equiv-2(x-(-1))^2$$

$$\Rightarrow -2x^2+ax+b\equiv-2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow -2x^2+ax+b\equiv-2x^2-4x-2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a-b=-2$$

۹۱۵- گزینهٔ ۳ بنا به ضابطهٔ تابع، عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد

$$-\underbrace{x^2}_{\text{نامنفی}}\underbrace{(x^2-4)^2}_{\text{نامنفی}}\ge0$$

پس این عبارت نمی‌تواند بزرگ‌تر از صفر باشد، در نتیجه فقط می‌تواند برابر صفر باشد

$$-x^2(x^2-4)^2=0 \Rightarrow -(x)^2(x-2)^2(x+2)^2=0$$

$$\Rightarrow x=0, x=2, x=-2$$

پس دامنهٔ تابع شامل سه عدد $\{0,\pm2\}$ است.

۹۱۶- گزینهٔ ۱ دوتا رادیکال با فرجهٔ دو داریم که عبارت زیر هر کدام باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

$$\sqrt{\underbrace{1-4x}}: 1-4x\ge0 \Rightarrow 4x\le1 \Rightarrow x\le\frac{1}{4} \quad (*)$$

$$\sqrt{\underbrace{3-\sqrt{1-4x}}}: 3-\sqrt{1-4x}\ge0 \Rightarrow \sqrt{1-4x}\le3$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان دو}} 1-4x\le9 \Rightarrow 4x\ge-8 \Rightarrow x\ge-2 \quad (**)$$

از اشتراک (*) و (**)، دامنه را می‌یابیم: $\Rightarrow$ دامنه: $-2\le x\le\frac{1}{4}$

بنابراین اعداد صحیح $\{-2,-1,0\}$ در دامنهٔ تابع قرار دارند

۹۱۷- گزینهٔ ۲ باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد

$$||x-1|-3|-2\ge0 \Rightarrow ||x-1|-3|\ge2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-1|-3\ge2 \Rightarrow |x-1|\ge5 \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge5 \\ \text{یا} \\ x-1\le-5 \end{cases} \\ \text{یا} \\ |x-1|-3\le-2 \Rightarrow |x-1|\le1 \Rightarrow -1\le x-1\le1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge6 \\ \text{یا} \\ x\le-4 \end{cases} \Rightarrow x\le-4 \text{ یا } x\ge6 \\ \text{یا} \\ 0\le x\le2 \end{cases}$$

چون بین حالت‌ها «یا» داریم، از دو جواب به دست آمده اجتماع می‌گیریم:

$$\Rightarrow D=(-\infty,-4]\cup[0,2]\cup[6,+\infty)$$

با توجه به مجموعه‌جواب فوق، دامنهٔ تابع اعداد صحیح $\{-3,-2,-1,3,4,5\}$ را شامل نمی‌شود

۹۱۸- گزینهٔ ۴ باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس: $x+3|x-1|-6\ge0$

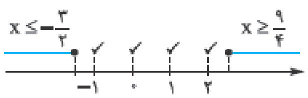
با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، قدرمطلق را حذف می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge1: x+3(x-1)-6\ge0 \Rightarrow x+3x-3-6\ge0 \\ \Rightarrow 4x-9\ge0 \Rightarrow 4x\ge9 \\ \text{یا} \\ x<1: x-3(x-1)-6\ge0 \Rightarrow x-3x+3-6\ge0 \\ \Rightarrow -2x-3\ge0 \Rightarrow 2x\le-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge\frac{9}{4} \xrightarrow{x\ge1} x\ge\frac{9}{4} \\ \text{یا} \\ x\le-\frac{3}{2} \xrightarrow{x<1} x\le-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} \text{دامنه}=(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{9}{4},+\infty)$$

حالا با توجه به شکل زیر، تعداد اعداد صحیح که دامنهٔ تابع را شامل نمی‌شود، را می‌شماریم:



پس چهار عدد صحیح را شامل نمی‌شود

۹۱۹- گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که دامنهٔ تابع گویا، $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، کافی است ریشه‌های مخرج را پیدا کنیم:

$$[-2x]-1=0 \Rightarrow [-2x]=1 \Rightarrow 1\le-2x<2 \Rightarrow -1<x\le-\frac{1}{2}$$

پس دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-(-1,-\frac{1}{2}]$ است.

یادآوری: برای $k\in\mathbb{Z}$: $[x]=k \Rightarrow k\le x<k+1$

۹۲۰- گزینه ۳ با توجه به رادیکالی‌بودن ضابطهٔ تابع f، عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

$$\frac{۲}{[x]}-۱\ge ۰ \Rightarrow \frac{۲-[x]}{[x]}\ge ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{[x]-۲}{[x]}\le ۰ \Rightarrow ۰<[x]\le ۲$$

بنا به صحیح‌بودن $[x]$؛ پس:

$[x]=۲ \Rightarrow ۲\le x<۳ \quad (۱)$

$[x]=۱ \Rightarrow ۱\le x<۲ \quad (۲)$

اجتماع (۱) و (۲) دامنهٔ تابع f است که برابر $[۱,۳)$ می‌باشد؛ پس:

$a=۱, b=۳ \Rightarrow a+b=۴$

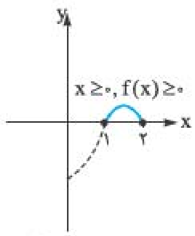
۹۲۱- گزینه ۴ باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد $xf(x)\ge ۰$

حاصل‌ضرب دو عبارت زمانی بزرگ‌تر یا مساوی است که هر دو هم‌علامت یا حداقل یکی صفر باشد. پس دو حالت زیر را داریم:

۱ هر دو نامنفی: $x\ge ۰, f(x)\ge ۰$

پس شرایط نمودار با توجه به این‌که $x\ge ۰$ است، در سمت راست محور yها باید بررسی شود

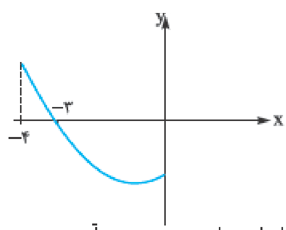
$\Rightarrow x\in[۱,۲]$



۲ هر دو نامثبت: $x\le ۰, f(x)\le ۰$

از آن‌جا که $x\le ۰$ است، نمودار f در سمت چپ محور yها باید بررسی شود:

$\Rightarrow x\in[-۳,۰]$

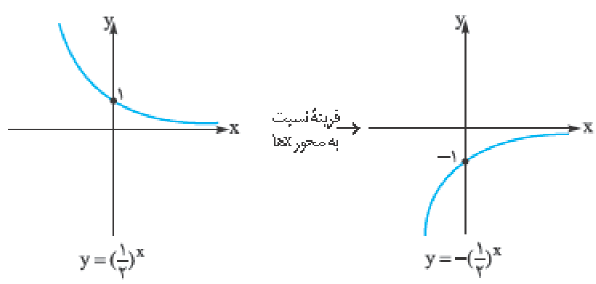


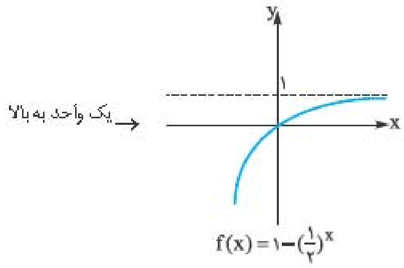
پس دامنهٔ تابع، برابر اجتماع فاصله‌های به دست آمده یعنی $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$ است.

۹۲۲- گزینه ۳ برای محاسبهٔ دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$xf(x)\ge ۰ \Rightarrow \begin{cases} x\ge ۰, f(x)\ge ۰ \\ \text{یا} \\ x\le ۰, f(x)\le ۰ \end{cases}$$

برای این‌که ببینیم در چه فواصلی $f(x)$ مثبت و در چه فواصلی منفی است، از رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم:





با توجه به نمودار، شرط $x\ge ۰$ و $f(x)\ge ۰$ به‌ازای هر $x\ge ۰$ برقرار است. همچنین شرط $x\le ۰$ و $f(x)\le ۰$ هم به ازای هر $x\le ۰$ برقرار است. در نتیجه چون بین حالت‌ها «یا» داریم، پس دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است؛ یعنی $D=(-\infty,+\infty)$

۹۲۳- گزینه ۳ برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع چندضابطه‌ای، ابتدا دامنهٔ هر ضابطه را به دست آورده و سپس از دامنه‌ها اجتماع می‌گیریم:

ضابطهٔ بالا: $\frac{x+۲}{x}, -۳\le x<-۱$

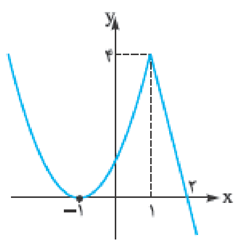
ریشهٔ مخرج $x=۰$ می‌باشد، اما چون در $-۳\le x<-۱$ قرار ندارد، پس دامنهٔ ضابطهٔ بالا همان $-۳\le x<-۱$ است.

ضابطهٔ پایین: $\sqrt{x+۱}, -۱<x<۱$

دامنهٔ $\sqrt{x+۱}$، $x\ge -۱$ است که اشتراکش با دامنهٔ ضابطه $(-۱<x<۱)$، $-۱<x<۱$ می‌باشد.

دامنهٔ تابع: $[-۳,-۱)\cup(-۱,۱)=[-۳,۱)-\{-۱\}$

۹۲۴- گزینه ۲ از آن‌جا که نمودار تابع در فاصلهٔ $(-\infty,۱]$، نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^۲$ است و از آن‌جا که $f(۱)=(۱+۱)^۲=۴$ می‌باشد، پس تکمیل‌شدهٔ نمودار به صورت مقابل است



در فاصلهٔ $[۱,+\infty)$ نمودار تابع، یک خط است که دو نقطهٔ $(۱,۴)$ و $(۲,۰)$ روی آن قرار دارند

$$\begin{cases} (۱,۴)\in \text{خط} \\ (۲,۰)\in \text{خط} \end{cases} \Rightarrow y-۰=\frac{۴-۰}{۱-۲}(x-۲)$$

$\Rightarrow y=-۴(x-۲) \Rightarrow y=-۴x+۸$

$\Rightarrow g(x)=-۴x+۸ \Rightarrow g(۴)=-۸$

۹۲۵- گزینه ۲ ۱ باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشد

$x^۲+x-۶>۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۳)>۰ \Rightarrow x<-۳ \text{ یا } x>۲$

۲ مبنا بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک است:

$۶-x>۰ \Rightarrow x<۶$

$۶-x\ne ۱ \Rightarrow x\ne ۵$

از اشتراک سه جواب به دست آمده، دامنهٔ تابع مشخص می‌شود:

$$\begin{cases} x>۲, x<-۳ \\ x<۶ \\ x\ne ۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x<-۳, ۲<x<۶, x\ne ۵$$

که این مجموعه شامل اعداد طبیعی $\{۳,۴\}$ است.

۹۲۶- گزینه ۴ ضابطهٔ f از دو نوع تابع، رادیکالی با فرجهٔ زوج و لگاریتم تشکیل شده است. دامنهٔ هر عبارت را به صورت جداگانه به دست آورده و سپس اشتراک می‌گیریم.

► $\sqrt{1-\log(x-1)}\ge 0 \Rightarrow \log(x-1)\le 1$

$\Rightarrow (x-1)\le 10 \Rightarrow x\le 11$

یادآوری: برای حذف لگاریتم، به مبنای لگاریتم توجه کنید:

$\log_b a > c \xrightarrow{b>1} a > b^c$

$\log_b a > c \xrightarrow{0<b<1} a < b^c$

◄ $\log_{10}(x-1)$: مبنا عددی ثابت و بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک است، پس کافی است $x-1$ مثبت باشد: $x-1>0 \Rightarrow x>1$

اشتراک این دو مجموعه برابر است با: $(-\infty,11]\cap(1,+\infty)=(1,11]$

۹۲۷- گزینه ۱ **راه اول:** یک لگاریتم و یک رادیکال با فرجهٔ زوج داریم؛ بنابراین دامنهٔ هر یک را جداگانه محاسبه می‌کنیم و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم (دقت کنید که مبنای لگاریتم برابر ۱۰ است.)

(۱) $\log(x^2-3x)$: $x^2-3x>0 \Rightarrow x(x-3)>0$

$\Rightarrow x<0$ یا $x>3$

(۲) $\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$: $1-\log(x^2-3x)\ge 0$

$\Rightarrow \log(x^2-3x)\le 1 \Rightarrow x^2-3x\le 10^1$

$\Rightarrow x^2-3x-10\le 0 \Rightarrow (x-5)(x+2)\le 0 \Rightarrow -2\le x\le 5$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $D_f=[-2,0)\cup(3,5]$

راه دوم: $x=5$ در ۱ و ۴ وجود دارد و در ۲ و ۳ وجود ندارد؛ پس $x=5$ را در تابع f قرار می‌دهیم. اگر خروجی داد، پس حتماً $x=5$ باید عضو دامنه باشد.

$x=5: f(5)=\sqrt{1-\log(25-15)}=\sqrt{1-\log 10}=\sqrt{1-1}=0$

پس ۲ و ۳ رد می‌شوند.

از طرفی $x=-2$ در ۱ هست ولی در ۴ نیست.

$x=-2: f(-2)=\sqrt{1-\log(4+6)}=\sqrt{1-\log 10}=\sqrt{1-1}=0$

پس $x=-2$ نیز در دامنه قرار دارد. پس ۱ صحیح است.

۹۲۸- گزینه ۲ اول از همه دقت کنیم که در تابع، $\sqrt{x}$ داریم، پس $x\ge 0$ است. حالا بریم سراغ تعیین دامنهٔ تابع f که از ۲ نوع تابع رادیکالی و لگاریتمی تشکیل شده است.

◄ دامنهٔ لگاریتمی

$$\begin{cases} 2-\sqrt{x}>0 \Rightarrow \sqrt{x}<2 \xrightarrow{x\ge 0} 0\le x<4\\ x-[x]>0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ x-[x]\ne 1 \Rightarrow x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x\in(0,4)-\{1,2,3\}$ (۱)

◄ دامنهٔ رادیکالی $\log_{x-[x]}(2-\sqrt{x})\ge 0 \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شه}]{0<x-[x]<1} 2-\sqrt{x}\le 1$

$\Rightarrow \sqrt{x}\ge 1 \Rightarrow x\ge 1$ (۲)

اشتراک رابطهٔ (۱) و (۲) با در نظر گرفتن شرط $x\ge 0$ در ابتدای حل مسئله، برابر است با: $[1,+\infty)\cap((0,4)-\{1,2,3\})=(1,4)-\{2,3\}$

یادآوری: همواره داریم:

$$\begin{cases} x\in\mathbb{Z}: & x-[x]=0\\ x\notin\mathbb{Z}: & 0<x-[x]<1\end{cases} \Rightarrow 0\le x-[x]<1$$

۹۲۹- گزینه ۴ دامنهٔ تابع ۱ برابر $[-1,3)-\{0\}$ است، پس جواب نیست. دامنهٔ تابع ۲ بازهٔ $[0,4]$ است، ولی برد آن فاصلهٔ $[0,3]$ است، پس این هم جواب نیست. ۳ هم که اصلاً تابع نیست. پس ۴ جواب است. در نمودار ۴ تصویر نقاط روی محور xها فاصلهٔ $[0,4]$ و تصویر نقاط روی محور yها فاصلهٔ $[-1,3)$ را ایجاد می‌کنند. پس دامنهٔ این تابع $[0,4]$ و برد آن $[-1,3)$ است.

۹۳۰- گزینه ۲ برد تابع، خروجی‌های تابع است، پس برای تعیین اعضای دامنه، کافی است تابع $f(x)$ را با اعضای برد برابر قرار دهیم:

► $f(x)=0 \Rightarrow x^4+x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2+1)=0 \Rightarrow x=0$

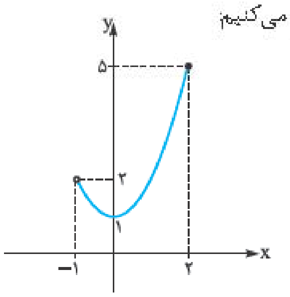
► $f(x)=2 \Rightarrow x^4+x^2=2 \Rightarrow x^4+x^2-2=0$

$\xrightarrow{x^2=t} t^2+t-2=0 \Rightarrow (t-1)(t+2)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \xrightarrow{x^2=t} x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1\\ t=-2 \ \text{✗}\end{cases}$$

پس $x=0,\pm 1$؛ بنابراین دامنه حداکثر دارای ۳ عضو است.

۹۳۱- گزینه ۱ تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم.

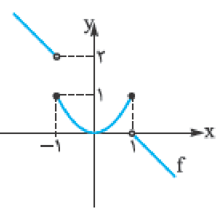


با توجه به نمودار، برد تابع $[1,5]$ است.

۹۳۲- گزینه ۲ تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x\le 1\\ 1-x, & x>1 \ \text{یا}\ x<-1\end{cases}$$

نمودار f را رسم می‌کنیم:



برد تابع تمام اعداد حقیقی به‌جز $(1,2]$ است.

۹۳۳- گزینه ۱ با توجه به دامنهٔ f

$|x-1|<2 \Rightarrow (x-1)^2<4$ (*)

در ضابطهٔ تابع f، $(x-1)$ را ایجاد می‌کنیم:

$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

بنا به نامساوی (*): $(x-1)^2<4 \Rightarrow (x-1)^2-4<0 \Rightarrow f(x)<0$

پس تابع f در دامنهٔ خود همواره منفی است.

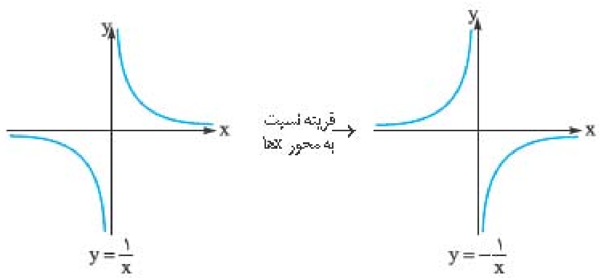
۹۳۴- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد، اول تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=-2x^2+8x-1=-2x^2+8x-8+7$$
$$=-2(x^2-4x+4)+7=-2(x-2)^2+7$$

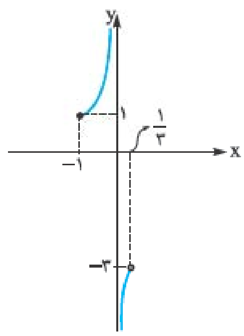
عبارت $-2(x-2)^2$ همواره نامثبت است؛ پس:

$$-2(x-2)^2\le 0 \xrightarrow{+7} -2(x-2)^2+7\le 7 \Rightarrow f(x)\le 7$$

۹۳۵- گزینهٔ ۳ تابع $f(x)=-\frac{1}{x}$ را روی دامنهٔ $[-1,\frac{1}{3})-\{0\}$ رسم می‌کنیم:



اما قسمتی از تابع $f(x)=-\frac{1}{x}$ مدنظر است که در محدودهٔ $[-1,\frac{1}{3})-\{0\}$ قرار دارد:



برد این تابع $\mathbb{R}-[-3,1)$ است که اعداد صحیح $\{-3,-2,-1,0\}$ را شامل نمی‌شود.

۹۳۶- گزینهٔ ۱ چون برد تابع، تک‌عضوی است، پس تابع ثابت است؛ می‌دانیم تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ زمانی ثابت است که:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}\Rightarrow a^2+a-2=0$$
$$\Rightarrow (a-1)(a+2)=0\Rightarrow a=1,-2$$

۹۳۷- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}-\{0\}$ است. تحت این دامنه، f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-2x-8=(x-1)^2-9$$

چون $(x-1)^2\ge 0$ است، پس: $f(x)=(x-1)^2-9\ge -9$

دقت کنید با توجه به این‌که $x\neq 0$ پس $f(0)$ تعریف نمی‌شود

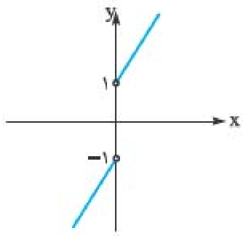
$$f(x)=x^2-2x-8\Rightarrow f(0)=-8$$

پس در ظاهر باید -8 از برد حذف شود اما از آن‌جا که $f(-2)=-8$ بنابراین نباید حذف شود.

۹۳۸- گزینهٔ ۴ تابع را به ازای xهای مثبت و منفی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$

تابع f را رسم می‌کنیم:



برد تابع $\mathbb{R}-[-1,1]$ است.

۹۳۹- گزینهٔ ۳ با فرض $y=f(x)$، x را برحسب y به دست می‌آوریم. سپس دامنهٔ عبارت حاصل را پیدا می‌کنیم که برابر برد تابع f است:

$$y=\frac{2x}{x-1}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} yx-y=2x$$
$$\Rightarrow yx-2x=y\Rightarrow x(y-2)=y\Rightarrow x=\frac{y}{y-2}$$

دامنهٔ عبارت بالا $\mathbb{R}-\{2\}$ است؛ پس برد تابع f، $\mathbb{R}-\{2\}$ است.

۹۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا برد تابع $y=\frac{|x|+1}{|x|-1}$ را می‌یابیم. برای این کار با طرفین‌وسطین، $|x|$ را تنها می‌کنیم:

$$y|x|-y=|x|+1\Rightarrow y|x|-|x|=y+1$$
$$\Rightarrow |x|(y-1)=y+1\Rightarrow |x|=\frac{y+1}{y-1}$$

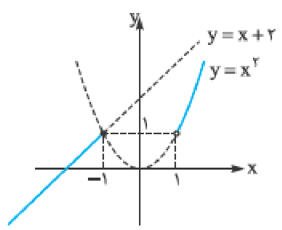
چون $|x|$ همواره نامنفی است، پس طرف راست هم باید نامنفی باشد، بنابراین:

$$\frac{y+1}{y-1}\ge 0\Rightarrow y>1 \text{ یا } y\le -1$$

حالا با توجه به این مجموعه‌جواب و از آن‌جا که $[-1]=-1$ و $[1/2]=1$، پس برد تابع f تنها عدد صحیح صفر را شامل نمی‌شود.

۹۴۱- گزینهٔ ۴ از رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم. برای رسم، نمودار هر ضابطه را ابتدا به صورت خط‌چین رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی که در شرط ضابطه صدق می‌کنند را توپر می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x>1\\ x+2 & ,x\le -1\end{cases}$$



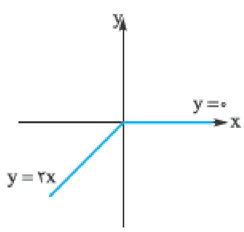
با توجه به شکل، برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

۹۴۲- گزینهٔ ۳ اول دامنهٔ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{عبارت زیر رادیکال}\ \ge 0\Rightarrow x-|x|\ge 0$$

برای یافتن جواب نامعادلهٔ بالا از رسم نمودار $y=x-|x|$ استفاده می‌کنیم:

$$y=x-|x|=\begin{cases}0 & x\ge 0\\ 2x & x<0\end{cases}$$



به ازای $x<0$، چون نمودار، پایین محور xهاست، پس مقادیر $x-|x|$ منفی است و در نتیجه عبارت زیر رادیکال تعریف نمی‌شود. به ازای $x\geq 0$، تابع $y=x-|x|$ مقدار صفر دارد و در نتیجه عبارت زیر رادیکال تعریف می‌شود. پس دامنهٔ تابع $x\geq 0$ است.

چون در این فاصله، $x-|x|$ مقدار صفر دارد؛ بنابراین:

$$f(x)=1+\sqrt{\underbrace{x-|x|}_{0}}=1+0=1 \Rightarrow \text{برد}=\{1\}$$

۹۴۳- گزینهٔ ۳ ابتدا تابع f را برای xهای صحیح و غیرصحیح از هم جدا کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+[1-x]}=\sqrt{x+1+[-x]}$$

▸ $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [-x]=-x \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+1-x}=1$

پس برای اعداد صحیح دامنه، تابع f تابع ثابت است و برد آن عدد ۱ می‌باشد.

▸ $x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [-x]=-[x]-1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+1-[x]-1}$

$=\sqrt{x-[x]}$

که برای $x\notin\mathbb{Z}$: $x-[x]\in(0,1) \Rightarrow f(x)\in(0,1)$

پس با اجتماع دو جواب به دست آمده برد تابع f بازهٔ $(0,1]$ است.

۹۴۴- گزینهٔ ۱ با استفاده از تغییر متغیر $[x]=t$، دامنهٔ y را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{[x]=t} y=\sqrt{3-2t-t^2}=\sqrt{-(t^2+2t-3)}$$

$$=\sqrt{\underbrace{-(t-1)(t+3)}_{P}} \Rightarrow$$

t		−۳		۱	
P	−	۰	+	۰	−

چون زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس $t\in[-3,1]$ یعنی $[x]\in[-3,1]$.
با توجه به این‌که $[x]\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$[x]=-3 \Rightarrow y=\sqrt{3-2(-3)-(-3)^2}=0$$

$$[x]=-2 \Rightarrow y=\sqrt{3-2(-2)-(-2)^2}=\sqrt{3}$$

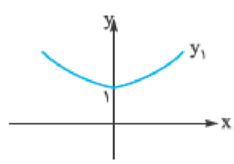
$$[x]=-1 \Rightarrow y=\sqrt{3-2(-1)-(-1)^2}=2$$

$$[x]=0 \Rightarrow y=\sqrt{3}$$

$$[x]=1 \Rightarrow y=\sqrt{3-2(1)-(1)^2}=0$$

برد تابع شامل دو عدد صحیح $\{0,2\}$ است.

۹۴۵- گزینهٔ ۲ دقت کنیم که y همیشه مثبت است. با توجه به نمودار $y_1=2^{|x|}$، همواره $y_1\geq 1$ است.



هم‌چنین $1+y_1\geq 2$، اگر طرفین نامساوی را به $(1+y_1)$ تقسیم کنیم ($1+y_1$ همواره مثبت است.)

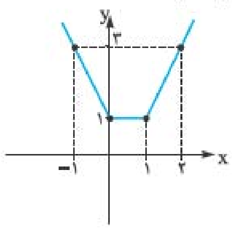
$$0<\frac{2}{1+y_1}\leq 1 \Rightarrow 0<y\leq 1$$

۹۴۶- گزینهٔ ۴ ابتدا تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x>0\,;\ f(x)\geq 2\\ x<0\,;\ f(x)\leq -2\end{cases}$$

پس برد تابع $\mathbb{R}-(-2,2)$ است و: $a=-2\,,\ b=2 \Rightarrow b-a=4$

۹۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا برد عبارت مخرج را می‌یابیم برای این کار از رسم نمودار استفاده می‌کنیم. نمودار تابع $y=|x|+|x-1|$ به صورت مقابل است (گلدانی است.)



x	−۱	۰	۱	۲
y	۳	۱	۱	۳

با توجه به نمودار: $y=|x|+|x-1|\geq 1$

حالا شروع می‌کنیم و با این حدود، حدود تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$|x|+|x-1|\geq 1 \xrightarrow{+2} |x|+|x-1|+2\geq 3$$

حالا باید طرفین را معکوس کنیم. فقط به دلیل این‌که طرف چپ، یک عبارت همواره مثبت داریم و از آن‌جا که معکوس این عبارت هم منفی نمی‌شود، به صورت زیر عمل می‌کنیم (به کلور مشخص‌شده توجه کنید)

$$|x|+|x-1|+2\geq 3 \xrightarrow{\text{معکوس}} 0<\frac{1}{|x|+|x-1|+2}\leq\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 0<\frac{2}{|x|+|x-1|+2}\leq\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{برد } f=(0,\tfrac{2}{3}]=(a,b] \Rightarrow b-a=\frac{2}{3}$$

۹۴۸- گزینهٔ ۲ با فرض $f(x)=y$:

$$y=\frac{2x}{x^2+4} \Rightarrow yx^2+4y=2x \Rightarrow yx^2-2x+4y=0$$

ای بابا چرا این‌جوری شد؟! چه‌جوری حالا x رو جدا کنیم؟!

از روش کلی حل معادلات درجه دوم استفاده می‌کنیم.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(y)(4y)}}{2(y)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-16y^2}}{2y}$$

حالا برای محاسبهٔ برد، باید دامنهٔ عبارت سمت راست را محاسبه کنیم.
برای محاسبهٔ دامنهٔ عبارت سمت راست، دو حالت داریم:

۱ عبارت زیر رادیکال $\geq 0 \Rightarrow 4-16y^2\geq 0 \Rightarrow 16y^2\leq 4$

$$\Rightarrow y^2\leq\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$$

۲ مخرج $\neq 0 \Rightarrow y\neq 0$

اما همیشه یادتان باشد در استفاده از روش حل معادله درجه‌دوم، بررسی کنید که ریشهٔ مخرج، عضو برد هست یا نه. برای این کار باید معادلهٔ «ریشهٔ مخرج $=f(x)$» را حل کنید: $\frac{2x}{x^2+4}=0 \Rightarrow x=0$

پس برد، مقدار صفر را هم دارد و در نتیجه برد تابع همان $-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$ است.

یعنی $\text{برد}=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \Rightarrow (b-a)\ \text{بیشترین مقدار}=\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=1$

۹۴۹- گزینه۲ **راه اول:** از ابتدا با توجه به این‌که رادیکال داریم، دامنه را محاسبه می‌کنیم، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{2-x}{x}\ge 0 \xrightarrow{\times(-)} \frac{x-2}{x}\le 0 \Rightarrow 0<x\le 2$$

در این فاصله $|\underset{+}{x}|=x$ است و در نتیجه:

$$f(x)=(x+x)\sqrt{\frac{2-x}{x}}=2x\sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

چون می‌دانیم مقادیر x مثبت هستند (با توجه به دامنه) و از آن‌جا که خروجی رادیکال هیچ‌وقت منفی نمی‌شود، پس مقادیر تابع همواره نامنفی است. پس برد تابع f^2 را محاسبه می‌کنیم و سپس جذر می‌گیریم:

$$f^2(x)=4x^2\left(\frac{2-x}{x}\right)=4(2x-x^2)=-4(x^2-2x)$$

حالا مربع کامل می‌کنیم: $f^2(x)=-4((x-1)^2-1)$

با توجه به حدود x حدود $-4((x-1)^2-1)$ را می‌یابیم

$$0<x\le 2 \xrightarrow{-(1)} -1<x-1\le 1$$

(دلیلشو تو راه‌حل گفتم!) $\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 0\le (x-1)^2\le 1$

$$\xrightarrow{-1} -1\le (x-1)^2-1\le 0$$

$$\xrightarrow{\times(-4)} 0\le -4((x-1)^2-1)\le 4$$

پس برد تابع f^2 برابر $[0,4]$ است؛ پس برد f فاصلهٔ $[0,2]$ است.

نکته: اگر $a<0$، $b>0$ و $a<x<b$ آن‌گاه $0\le x^2<\max\{a^2,b^2\}$

راه دوم: اگر $x=2$ را در تابع قرار دهیم، خروجی صفر خواهیم داشت، یعنی برد تابع شامل صفر است. تنها گزینه‌ای که شامل صفر است ۲ است.

۹۵۰- گزینه۲ شرط اول تساوی تابع، برابری دامنه‌هاست:

▸ $\{-1,4\}=$ دامنهٔ f ، $\{m^2,-n\}=$ دامنهٔ g

با توجه به این‌که $m^2\ge 0$، پس:
$$\Rightarrow \begin{cases}-n=-1\Rightarrow n=1\\ m^2=4\Rightarrow m=\pm 2\end{cases}$$

پس: $f=\{(-1,1),(4,3)\}$ و $g=\{(4,3),(-1,k)\}$

شرط دوم تساوی دو تابع، برابری خروجی‌های توابع است.

▸ $f(-1)=g(-1)\Rightarrow k=1$

بنابراین $n-k=0$.

۹۵۱- گزینه۴ الف) از بررسی تساوی دامنه‌ها شروع می‌کنیم

دامنهٔ تابع g برابر $\mathbb{R}$ است. برای محاسبهٔ دامنهٔ f باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$1-\cos^2x\ge 0\Rightarrow \cos^2x\le 1\Rightarrow -1\le\cos x\le 1$$

از آن‌جا که همواره $-1\le \cos x\le 1$، پس دامنهٔ این تابع هم برابر $\mathbb{R}$ است

و اما تساوی ضابطه‌ها

$$f(x)=\sqrt{1-\cos^2x}=\sqrt{\sin^2x}=|\sin x|\ne g(x)$$

پس دو تابع برابر نیستند.

یادآوری: $\sqrt{u^2}=|u|$

ب) تساوی دامنه‌ها را بررسی می‌کنیم:

D_f : عبارت زیر رادیکال $\ge 0 \Rightarrow x^2(x-1)\ge 0$

x		۰		۱	
عبارت	−	۰	−	۰	+

$\Rightarrow D_f=[1,+\infty)\cup\{0\}$

D_g : عبارت زیر رادیکال $\ge 0\Rightarrow x-1\ge 0\Rightarrow x\ge 1$

دامنهٔ دو تابع یکسان نیست، پس دو تابع برابر نیستند.

۹۵۲- گزینه۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ دامنهٔ g از حل نامعادلهٔ $x^2>0$ به دست می‌آید، پس $D_g:\mathbb{R}-\{0\}$ (x^2 همیشه مثبت است. فقط در $x=0$ مقدار صفر دارد.) دامنهٔ f هم $x>0$ است. پس چون دامنه‌ها برابر نیستند پس دو تابع برابر نیستند

نکته: $\log x^2=2\log|x|$

۲ دامنهٔ تابع g برابر $\mathbb{R}$ است؛ اما دامنهٔ f قطعاً $\mathbb{R}$ نیست (چون صفر ریشهٔ مخرجش است)؛ پس چون دامنه‌ها برابر نیستند، دو تابع برابر نیستند.

۳ دامنهٔ تابع g برابر $\mathbb{R}$ و دامنهٔ f، $x\ge 0$ است؛ پس باز هم دو تابع برابر نیستند.

۴ دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}-\{0\}$ است. از طرفی

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\frac{x}{x}=1 & x>0\\ \frac{x}{-x}=-1 & x<0\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x}=1 & x>0\\ \frac{x}{-x}=-1 & x<0\end{cases}$$

پس ضابطه‌ها با هم برابر هستند در نتیجه دو تابع برابرند.

۹۵۳- گزینه۳ دامنهٔ تابع f برابر $(-\infty,1]$ است. پس ۴ که دامنهٔ آن $[1,+\infty)$ است رد می‌شود. در سایر گزینه‌ها، دامنه $(-\infty,1]$ است. حالا باید به دنبال تساوی ضابطه‌ها در سه گزینهٔ دیگر باشیم:

۱ $\sqrt{(x-1)^2(1-x)}=|x-1|\sqrt{1-x}$

چون دامنهٔ تابع فاصلهٔ $(-\infty,1]$ است و عبارت داخل قدرمطلق در این فاصله منفی است، بنابراین قدرمطلق با علامت منفی حذف می‌شود:

$$g(x)=-(x-1)\sqrt{1-x}=(1-x)\sqrt{1-x}\quad (*)$$

پس با f برابر نیست.

۲ این گزینه همان ضابطهٔ ۱ است. فقط یک‌کم دستکاری شده و شکلش عوض شده، نگاه کن:

$$h(x)=\sqrt{(1-x)^3}=\sqrt{(1-x)^2(1-x)}$$

از آن‌جا که $(1-x)^2=(x-1)^2$؛ بنابراین $h(x)=\sqrt{(x-1)^2(1-x)}$

۳ جواب همین گزینه است. با توجه به توضیحات ۱ و ۲ تابع I قرینهٔ تابع g است، پس:

$$I(x)=-g(x)\overset{(*)}{=}-(1-x)\sqrt{1-x}$$

$$\Rightarrow I(x)=(x-1)\sqrt{1-x}=f(x)$$

۹۵۴- گزینهٔ ۱ دو شرط تساوی دو تابع:

۱ دامنهٔ دو تابع با هم برابر باشد.

۲ به ازای هر x از دامنه $f(x)=g(x)$

بررسی برابری توابع «الف» شرط اول:

$$D_f: x-x^2\ge 0 \Rightarrow x(1-x)\ge 0 \Rightarrow 0\le x\le 1$$

$$D_g: \{x\ge 0\}\cap\{x\le 1\} = 0\le x\le 1$$

شرط دوم: $f(x)=\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{x}\sqrt{1-x}=g(x)$

توابع «الف» برابرند.

بررسی برابری توابع «ب»

شرط اول $D_f: x(x-1)\ge 0 \Rightarrow \{x\ge 1\}\cup\{x\le 0\}$

$$D_g: \{x\ge 0\}\cap\{x\ge 1\}=\{x\ge 1\}$$

شرط اول برقرار نیست پس توابع «ب» با هم برابر نیستند.

۹۵۵- گزینهٔ ۲ شرط اول تساوی دو تابع، برابربودن دامنه‌هاست. دامنهٔ f برابر $\mathbb{R}$ اســت پس باید دامنهٔ تابع g هم، $\mathbb{R}$ باشد. چون $x=2$ ریشهٔ مخرج ضابطهٔ بالایی تابع g است و شرط ضابطهٔ بالا $x\ne c$ است پس $c=2$ است حالا از تساوی ضابطه‌های دو تابع استفاده می‌کنیم $f(2)=g(2) \Rightarrow 3=d$

به ازای $x\ne 2$ هم باید ضابطه‌های دو تابع، با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x+1=\frac{x^2+ax+b}{x-2}$$

$$\Rightarrow x^2+ax+b=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$$

$$\Rightarrow a=-1, b=-2 \Rightarrow a+d=-1+3=2 \Rightarrow g(2)=d=3$$

۹۵۶- گزینهٔ ۳ چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ اســت؛ پس $n=1$:

$$f(x)=2x(1-x)^3+b$$

می‌دانیم برای محاسبهٔ مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای می‌توانیم به جای متغیر آن ۱ قرار دهیم. پس مجموع ضرایب f برابر است با:

مجموع ضرایب: $x=1: f(1)=0+b=b$

پس مجموع ضرایب برابر ۳ است. پس: $b=3 \Rightarrow n+b=1+3=4$

۹۵۷- گزینهٔ ۴ چــون $f(x)=(k-2)x+k-1$ چندجملــه‌ای از درجهٔ صفر است؛ پس $k-2=0$ یعنی $k=2$ خواهد بود و $f(x)=1$.

نقطهٔ تلاقی $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر است:

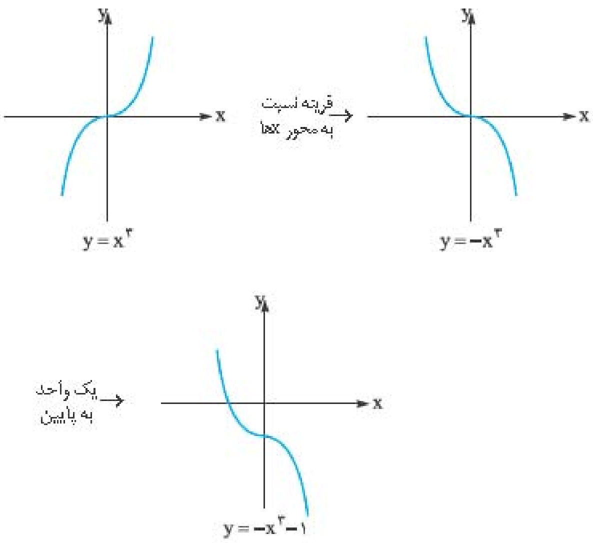
$$\begin{cases} f(x)=1 \\ g(x)=3x+b \end{cases} \Rightarrow 3x+b=1 \Rightarrow x=\frac{1-b}{3}, y=1$$

نقطهٔ تلاقی روی خط $y=x+2$ قرار دارد.

$$\xrightarrow[y=1]{x=\frac{1-b}{3}} 1=\frac{1-b}{3}+2 \Rightarrow \frac{1-b}{3}=-1 \Rightarrow 1-b=-3$$

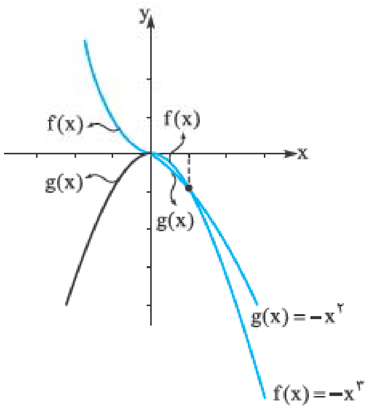
$$\Rightarrow b=4$$

۹۵۸- گزینهٔ ۱ از نمودار تابع $f(x)=x^3$ کمک می‌گیریم:



از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.

۹۵۹- گزینهٔ ۴ نمودار توابـع $f(x)=-x^3$، $g(x)=-x^2$ در فاصلهٔ $(-1,2)$ را رسم می‌کنیم:



در بازهٔ $(-1,0)$، $f(x)$ بالاتر از $g(x)$ است.

در بازهٔ $(0,1)$، $f(x)$ بالاتر از $g(x)$ است.

در بازهٔ $(1,2)$، $g(x)$ بالاتر از $f(x)$ است.

۹۶۰- گزینهٔ ۳ مرحله به مرحله با مسئله پیش می‌رویم:

۱ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3$ در راستـای افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض می‌شود پس به جای x، $2x$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=(x-1)^3 \xrightarrow{x\to 2x} f_1(x)=(2x-1)^3$$

۲ نسبت به محور yها قرینه شده، پس $x\to -x$:

$$f_2(x)=(-2x-1)^3=-(2x+1)^3$$

۳ نمودار حاصل یک واحد به پایین منتقل می‌شود:

$$f_3(x)=-1-(2x+1)^3$$

برای این‌که طول نقطهٔ برخورد نمودار با محور xها را بیابیم، عرض را صفر قرار می‌دهیم: $-1-(2x+1)^3=0 \Rightarrow (2x+1)^3=-1$

$$2x+1=-1 \Rightarrow x=-1$$

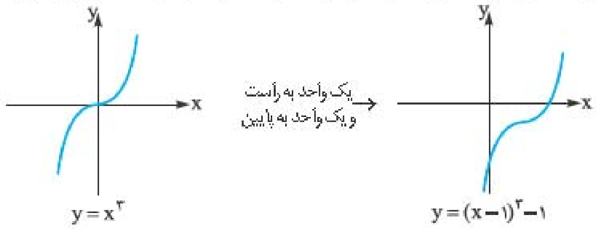
۹۶۱- گزینه ۱ ابتدا $y=x(x^2+3x+3)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y=x(x^2+3x+3)=x^3+3x^2+3x=(x+1)^3-1$$

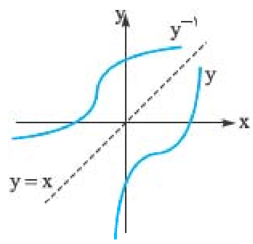
برای رسم این نمودار کافی است نمودار $y=x^3$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین منتقل کنیم:

$$y=(\underbrace{x+1}_{\text{یک واحد به چپ}})^3\underbrace{-1}_{\text{یک واحد به پایین}}$$

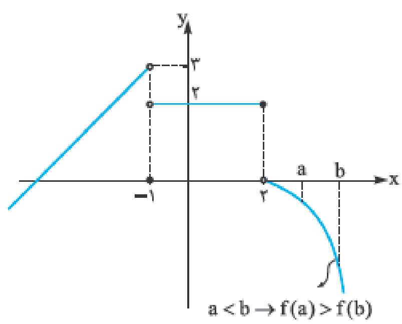
۹۶۲- گزینه ۲ اگر نمودار $y=x^3$ را یک واحد به راست و سپس یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار $f(x)=(x-1)^3-1$ حاصل می‌شود.



برای رسم نمودار معکوس این تابع، نمودار آن را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه می‌کنیم:



۹۶۳- گزینه ۴ تابع f در بازه‌ای نزولی است که به ازای هر دو مقدار a و b در این بازه (با شرط $a<b$) آن‌گاه $f(a)\ge f(b)$.



با توجه به نمودار تابع در بازهٔ $(-1,+\infty)$ نزولی است. ۴ زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $(-1,+\infty)$ است.

۹۶۴- گزینه ۲ کافی است $f(0)$ در بازهٔ $[-2,1]$ قرار گیرد تا نمودار دائماً در حال کاهش باشد.

۹۶۵- گزینه ۱ اعضای f را مرتب می‌کنیم (عضوهای دامنه را کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم):

$$f=\{(-1,|a-2|),(0,1),(1,[a])\}$$

تابعی اکیداً صعودی است هر گاه $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

$$-1<0<1 \Rightarrow \underbrace{|a-2|<1}_{(1)}\underbrace{<[a]}_{(2)}$$

$$(1)\quad |a-2|<1 \Rightarrow -1<a-2<1 \Rightarrow 1<a<3$$

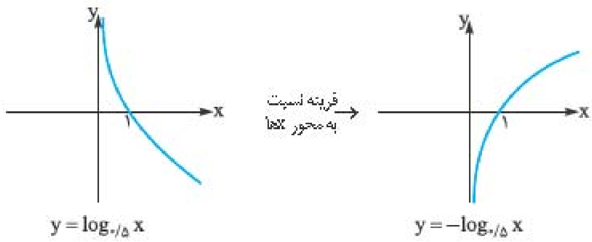
$$(2)\quad [a]>1 \Rightarrow [a]\ge 2 \Rightarrow a\ge 2$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} 2\le a<3$$

۹۶۶- گزینه ۴ هر کدام از توابع را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$y=\log_{0.5}\frac{1}{x}=\log_{0.5}x^{-1}=-\log_{0.5}x$$

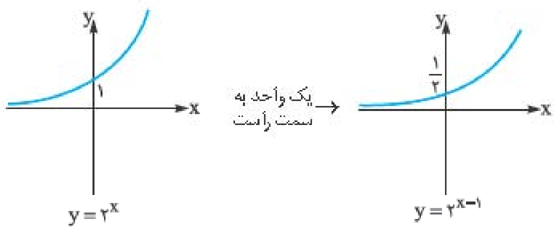
نمودار $\log_{0.5}x$ را رسم کرده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



پس تابع $y=\log_{0.5}\frac{1}{x}$ صعودی است.

▸ $y=2^{x-1}$

نمودار $y=2^x$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:

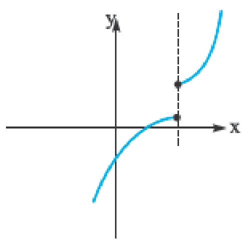


پس تابع $y=2^{x-1}$ صعودی است.

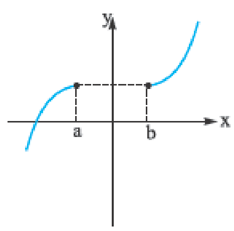
۹۶۷- گزینه ۴ تابعی اکیداً صعودی است که $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) تابع نیست. ✖



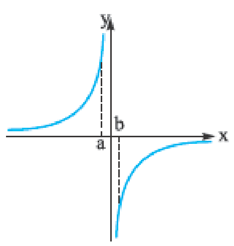
(۲)



$\Rightarrow a<b \Rightarrow f(a)=f(b)$

$\Rightarrow$ صعودی غیراکید است.

(۳)



$\Rightarrow a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$

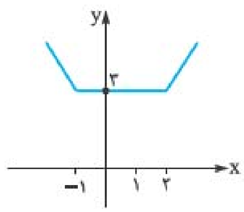
$\Rightarrow$ نه صعودی و نه نزولی است.

۹۶۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=|x+۱|+|x-۲|$ را رسم می‌کنیم:

ریشه‌های داخل قدرمطلق $x=-۱,۲$ است.

$$f(x)=\begin{cases}-x-۱-x+۲ & x\le -۱\\ x+۱-x+۲ & -۱\le x\le ۲\\ x+۱+x-۲ & x\ge ۲\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}-۲x+۱ & x\le -۱\\ ۳ & -۱\le x\le ۲\\ ۲x-۱ & x\ge ۲\end{cases}$$

بررسی گزینه‌ها:



۱) تابع در بازهٔ $[-۱,+\infty)$ صعودی است؛ نه اکیداً صعودی.

۲) تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ ثابت است، پس هم صعودی و هم نزولی است.

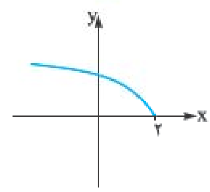
۳) تابع در بازهٔ $(-\infty,۲]$ نزولی است.

۴) f تابعی نه صعودی و نه نزولی است.

۹۶۹- گزینهٔ ۲ f صعودی اکیدا است. وقتی نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم نمودار حاصل نزولی اکید خواهد شد از طرفی قرینه نسبت به $y=x$، تأثیری در یکنوایی تابع ندارد. در نتیجه تابع حاصل اکیداً نزولی خواهد ماند پس باید در گزینه‌ها دنبال یک تابع اکیداً نزولی باشیم:

با توجه به گزینه‌ها تنها تابع ۲ اکیداً نزولی است.

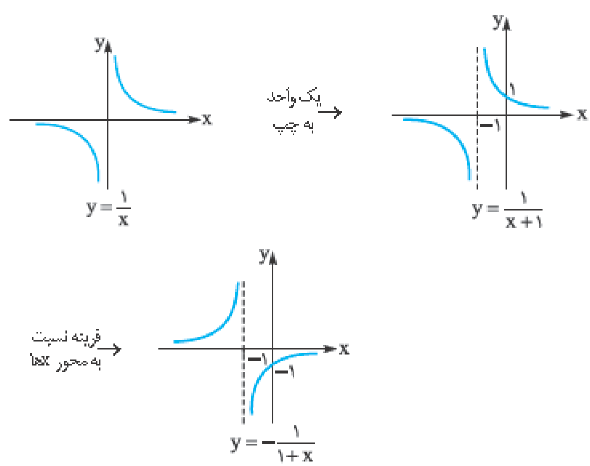
$g(x)=\sqrt{۲-x}\Rightarrow$

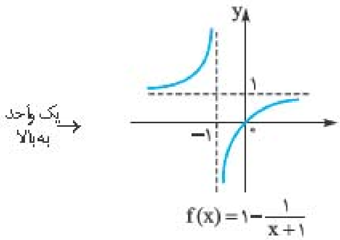


۹۷۰- گزینهٔ ٤ تابع $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۱-۱}{x+۱}=۱-\frac{۱}{x+۱}$$

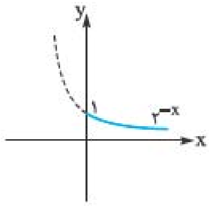
تابع $y=\frac{۱}{x}$ را رسم کرده، یک واحد به چپ می‌بریم و سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)=۱-\frac{۱}{x+۱}$ حاصل شود:





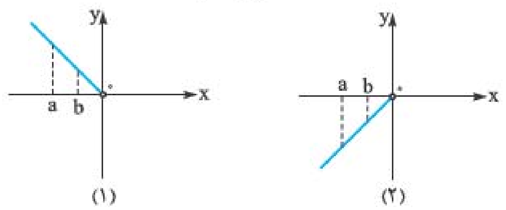
با توجه به گزینه‌ها تابع در بازهٔ $(۰,۲)$ صعودی است.

۹۷۱- گزینهٔ ٤ نمودار $y=۲^{-x}$ را در بازهٔ $x\ge ۰$ رسم می‌کنیم:

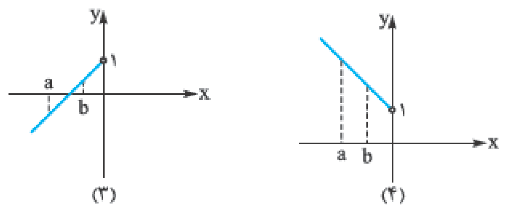


$$f(x)=۲^{-x}=(۲^{-۱})^{x}=(\tfrac{۱}{۲})^{x}$$

نمودار گزینه‌ها را برای $x<۰$ رسم می‌کنیم:

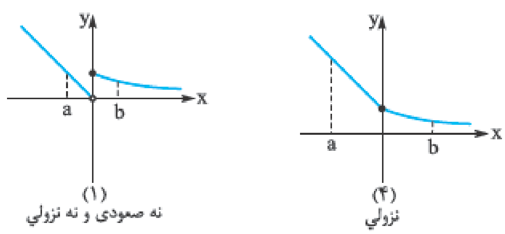


(۱) $a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$ (۲) $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$



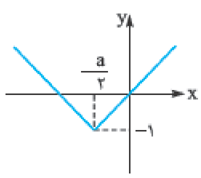
(۳) $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$ (۴) $a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$

با توجه به نمودارها فقط ۱ و ۴ نزولی هستند و می‌توانند به جای تابع g قرار گیرند. حالا نمودار f را با توجه به این دو گزینه رسم می‌کنیم



۹۷۲- گزینهٔ ۲ ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق $-\frac{a}{۲}$ است.

برای این‌که تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ یکنوا باشد باید این ریشه نقطهٔ درونی بازه نباشد. شکل فرضی را ببینید

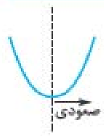


پس باید:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}\ge 2 \Rightarrow -a\ge 4 \Rightarrow a\le -4 \\ \text{یا} \\ -\frac{a}{2}\le 1 \Rightarrow -a\le 2 \Rightarrow a\ge -2\end{cases}$$

پس حدود a، به صورت $\mathbb{R}-(-4,2)$ است.

۹۷۳- گزینهٔ ۱ چون تابع f در فاصلهٔ $[1,+\infty)$ صعودی است؛ پس باید ضریب x^2، مثبت باشد:



$$k-2>0 \Rightarrow k>2 \quad (1)$$

همچنین طول رأس سهمی باید در سمت چپ بازهٔ $[1,+\infty)$ قرار داشته باشد:

$$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2(k-2)}\le 1 \Rightarrow k-2\ge\frac{1}{2} \Rightarrow k\ge\frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} k\ge\frac{5}{2}$$

۹۷۴- گزینهٔ ۲ اول قدرمطلق را حذف کنیم:

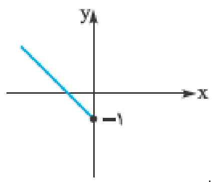
$$y=\begin{cases}(2-a)x & x\ge 0\\(2+a)x & x<0\end{cases}$$

زمانی y اکیداً نزولی است که شیب هر دو ضابطه، منفی باشد.

$$\begin{cases} \text{شیب ضابطهٔ بالایی}=2-a<0\Rightarrow a>2 \quad (1)\\ \text{شیب ضابطهٔ پایینی}=2+a<0\Rightarrow a<-2 \quad (2)\end{cases}$$

(۱) و (۲) اشتراکی ندارند پس جواب $\varnothing$ است.

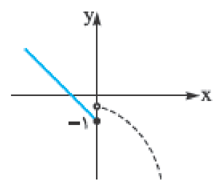
۹۷۵- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=|x|-1$ در بازهٔ $x\le 0$ به صورت مقابل است:



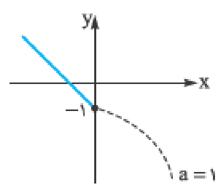
تابع $g(x)=-x^2-a$، همان تابع $y=-x^2$ (قرینهٔ $y=x^2$ نسبت به محور xها) است که $|a|$ واحد به پایین یا بالا منتقل شده است.

بنابراین نمودار تابع یکی از حالت‌های زیر را دارد:

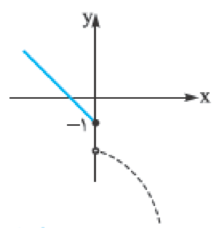
۱ $\xrightarrow{a<1}$



۲ $\xrightarrow{a=1}$



۳ $\xrightarrow{a>1}$



پس برای این‌که تابع اکیداً یکنوا باشد باید حالت ۲ یا ۳ برقرار باشد.

در نتیجه باید: $a\ge 1$.

۹۷۶- گزینهٔ ۳ فرض کنیم $f(x)=x$ باشد (هم صعودی است (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) و هم از مبدأ می‌گذرد) در تابع $g(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم و دامنهٔ آن را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt{xf(x)} \xrightarrow{f(x)=x} g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$$

دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است.

۹۷۷- گزینهٔ ۳ f تابعی نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند که به عنوان مثال $f(x)=1-x$ این شرایط را دارا است.

ابتدا $f(2-x)$ را به دست آورده و سپس در y جای‌گذاری کرده و دامنهٔ آن را پیدا می‌کنیم (برای پیداکردن $f(2-x)$، به جای xها در $f(x)$، $2-x$ را قرار می‌دهیم)

$$f(x)=1-x \Rightarrow f(2-x)=1-(2-x)=-1+x$$

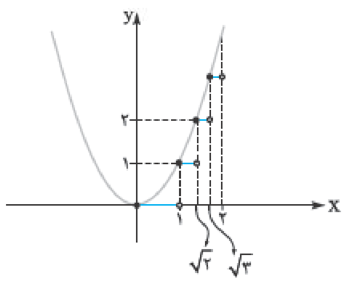
$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } y} y=\sqrt{x(x-1)}$$

$$D_y=\{x \mid x(x-1)\ge 0\}=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)=\mathbb{R}-(0,1)$$

۹۷۸- گزینهٔ ۴ f تابعی پیوسته و نزولی است؛ بنابراین:

$$a<b \Rightarrow f(a)\ge f(b)$$

حالت تساوی زمانی برقرار است که تابع ثابت باشد؛ پس f در بازهٔ $[0,2]$ برابر $f(x)=2$ است. نمودار $g(x)=[x^2]$ را رسم می‌کنیم:



$f(x)=2$، تابع $g(x)=[x^2]$ را در بی‌شمار نقطه در بازهٔ $[1,\sqrt{2})$ قطع می‌کند.

۹۷۹- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)$ نزولی و پیوسته است و $g(x)=x$ صعودی است و $g(x)=-x$ نزولی خواهد بود، پس $y=f(x)-x$ هم نزولی است. بنابراین کافی است $x=-1$ و $x=3$ را در y جای‌گذاری کنیم تا کم‌ترین و بیشترین مقدار برد به دست آید:

$$x=-1 \Rightarrow y=f(-1)-(-1)=3+1=4$$

$$x=3 \Rightarrow y=f(3)-3=-1-3=-4$$

پس برد تابع y، $[-4,4]$ است.

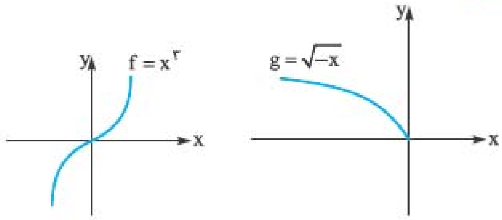
نکته: اگر تابع f صعودی یا نزولی باشد، کم‌ترین و بیشترین مقدار تابع در نقاط انتهایی دامنه رخ می‌دهند.

۹۸۰- گزینهٔ ۳ توابع $f(x)$ و $y=x$ اکیداً صعودی هستند؛ پس مجموع آن‌ها هم، اکیداً صعودی است.

با فرض $f(x)=x$ خودتان نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

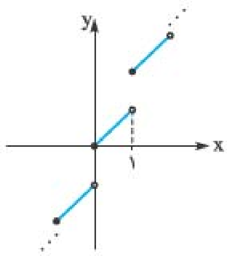
۹۸۱- گزینه۱ $y=\log_{۵} x$ صعودی است (مبنا بزرگ‌تر از واحد است). $y=\log_{۰/۵} x$ نزولی است (مبنا بین صفر و یک است)؛ پس $-\log_{۰/۵} x$ صعودی است و $y=\log_{۵} x-\log_{۰/۵} x$ مجموع دو تابع صعودی است که خود، صعودی است.

۹۸۲- گزینه۳ نمودارهای f و g را ببینید:



تابع f صعودی و g نزولی است. با توجه به صعودی‌بودن f، $-f$ نزولی است. بنا به نکات درس‌نامه، $g-f$ نزولی است.

۹۸۳- گزینه۲ نمودار $y=x+[x]$ را رسم می‌کنیم:



تابع اکیداً صعودی است.

۹۸۴- گزینه۲ با توجه به این‌که $(۲f-g)(۳)=۲f(۳)-g(۳)$ کافی است $f(۳)$ و $g(۳)$ را پیدا کنیم:

$$f(۳)=\sqrt{۳+۱}=۲\ ,\ g(۳)=\frac{۳+۱}{۳-۲}=۴$$
$$۲f(۳)-g(۳)=۲(۲)-۴=۰$$

۹۸۵- گزینه۴ ابتدا $x=(f+g)(۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$x=(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=(۱-۵)+(۱^{۲}-۱)=-۴$$

حالا باید $(f-g)(-۴)$ را محاسبه کنیم:

$$(f-g)(-۴)=f(-۴)-g(-۴)=\sqrt{-(-۴)}-(-۴+۳)$$
$$=۲-(-۱)=۳$$

۹۸۶- گزینه۲ ابتدا باید دامنهٔ $\frac{۲}{f^{۲}}$ را پیدا کنیم. $f^{۲}=f.f$ است؛ پس دامنهٔ $f^{۲}$ همان دامنهٔ f و برابر $\mathbb{R}$ است. $(D_{۲}=\mathbb{R})$

$$D_{\frac{۲}{f^{۲}}}=D_f-\{x|f^{۲}=۰\Rightarrow f=۰\}=\{-۲,۰,۲\}-\{۲\}=\{-۲,۰\}$$

مقدار $\frac{۲}{f^{۲}}$ را به ازای عضوهای دامنه‌اش می‌یابیم:

- $\frac{۲}{f^{۲}}(-۲)=\frac{۲}{f^{۲}(-۲)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$
- $\frac{۲}{f^{۲}}(۰)=\frac{۲}{f^{۲}(۰)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

پس: $\frac{۲}{f^{۲}}=\{(-۲,\frac{۱}{۲}),(۰,\frac{۱}{۲})\}$

۹۸۷- گزینه۱ ابتدا دامنهٔ $\frac{۲}{f}-\frac{۱}{g}$ را می‌یابیم که برابر اشتراک دامنه‌های توابع $\frac{۲}{f}$ و $\frac{۱}{g}$ است.

$$D_{\frac{۲}{f}}=D_f-\{x|f=۰\}=\{۱,۲,-۱\}-\{۲\}=\{-۱,۱\}$$
$$D_{\frac{۱}{g}}=D_g-\{x|g=۰\}=\{۲,۱,۳\}-\varnothing=\{۱,۲,۳\}$$
$$D_{\frac{۲}{f}-\frac{۱}{g}}=D_{\frac{۲}{f}}\cap D_{\frac{۱}{g}}=\{۱\}\Rightarrow(\frac{۲}{f}-\frac{۱}{g})(۱)=\frac{۲}{f(۱)}-\frac{۱}{g(۱)}$$
$$=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{-۲}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۶}$$

۹۸۸- گزینه۱ طبق تعریف داریم:

$$D_{\frac{g}{f-g}}=D_g\cap D_{f-g}-\{x|f-g=۰\}$$
$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=D_f\cap D_g-\{x|f=g\}$$
$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=D_g\cap D_f-\{x|f=g\}$$

حالا باید از نمودار، اطلاعات مورد نیاز را استخراج کنیم:

$$D_g=(-۲,۲]-\{۱\}\qquad D_f=[-۲,۳)$$

هم‌چنین در $x=۰$ مقدار دو تابع f و g با هم برابر هستند.

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=(\underbrace{((-۲,۲]-\{۱\})\cap([-۲,۳))}_{(-۲,۲]-\{۱\}})-\{x=۰\}$$
$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=((-۲,۲]-\{۱\})-\{۰\}\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=(-۲,۲]-\{۰,۱\}$$

۹۸۹- گزینه۱ **راه اول:** ابتدا دامنهٔ هر یک از توابع f و g را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f=(\text{دامنهٔ صورت})\cap(\text{دامنهٔ مخرج})-\{x|\text{مخرج}=۰\}$$
$$D_f=(\mathbb{R})\cap(x\ge-۳)-\{x|\sqrt{x+۳}=۰\Rightarrow x=-۳\}$$
$$\Rightarrow D_f=(x\ge-۳)-\{-۳\}=(x>-۳)\Rightarrow D_f=(-۳,+\infty)$$

به همین ترتیب برای تابع g داریم:

$$D_g=(\mathbb{R})\cap(x\ge-۳)-\{x|\sqrt{x+۳}=۰\Rightarrow x=-۳\}$$
$$\Rightarrow D_g=(x\ge-۳)-\{-۳\}=x>-۳\Rightarrow D_g=(-۳,+\infty)$$

حالا دامنهٔ تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}$$
$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=(-۳,+\infty)\cap(-۳,+\infty)-\{x|\frac{x-۱}{\sqrt{x+۳}}=۰$$
$$\Rightarrow x=۱\}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=(-۳,+\infty)-\{۱\}$$

راه دوم: از گزینه‌ها برای حل استفاده می‌کنیم.

$x=۱$ را در تابع قرار می‌دهیم ($x=۱$ در ۱ و ۲ قرار ندارد و در ۳ و ۴ هست.)