**۷۲- گزینه‌ی ۱** فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by+c_1=0$ و $ax+by+c_2=0$ برابر است با

$$\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ابتدا دو طرف معادله‌ی $ax+3y+c=0$ را در ۳ ضرب می‌کنیم

$$3ax+9y+3c=0$$

چون این خط با خط $12x+9y-2=0$ موازی است، پس شیب آن‌ها برابر است

$$-\frac{3a}{9}=-\frac{12}{9}\Rightarrow a=4$$

چون فاصله‌ی دو خط برابر با ۳ است، پس

$$\frac{|3c-(-2)|}{\sqrt{12^2+9^2}}=3\Rightarrow|3c+2|=3\times15$$

$$c=-\frac{47}{3}\ (\text{غ.ق.ق}),\ c=\frac{43}{3}$$

بنابراین

$$\frac{a}{c}=\frac{12}{43}$$

**۷۳- گزینه‌ی ۴** شیب خط $x+3y-1=0$ برابر $-\frac{1}{3}$ است.

بنابراین شیب خط موردنظر هم برابر $-\frac{1}{3}$ و معادله‌ی آن به‌صورت $x+3y+c=0$ است. چون فاصله‌ی این خط از خط‌های داده شده برابر است، پس

$$\frac{|c+1|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|c-4|}{\sqrt{1^2+3^2}}\Rightarrow|c+1|=|c-4|$$

$$c+1=\pm(c-4)\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

بنابراین معادله‌ی خط موردنظر $x+3y+\frac{3}{2}=0$ یا $2x+6y+3=0$ است.

**۷۴- گزینه‌ی ۱** توجه کنید که حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر b است، پس $ab=b$، و چون $b\neq0$، پس $a=1$. از طرف دیگر مجموع ریشه‌ها برابر $-a$ است، پس

$$a+b=-a\Rightarrow b=-2a=-2$$

**۷۵- گزینه‌ی ۲** حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{1}{6}$ است، پس $x_1x_2=-\frac{1}{6}$. بنابراین معادله‌ی داده شده به‌صورت زیر در می‌آید:

$$x^2+\frac{x}{6}-\frac{1}{6}=0\Rightarrow6x^2+x-1=0$$

ریشه‌های این معادله $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ هستند. در نتیجه

$$x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$$

**۷۶- گزینه‌ی ۳** توجه کنید که

$$x_1+x_2=3m$$

$$x_1x_2=6m+1=2(3m)+1=2(x_1+x_2)+1$$

بنابراین $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$.

**۷۷- گزینه‌ی ۲** فرض می‌کنیم

$$r=\frac{-n}{1+n},\quad s=\frac{n}{1-n}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{r}=-\frac{1+n}{n}=-\frac{1}{n}-1,\quad \frac{1}{s}=\frac{1-n}{n}=\frac{1}{n}-1$$

پس $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=-2$. اکنون توجه کنید که

$$r+s=\frac{n}{m},\quad rs=\frac{12}{m}$$

پس

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{r+s}{rs}=\frac{n}{12}=-2$$

بنابراین $n=-24$.

**۷۸- گزینه‌ی ۲** فرض می‌کنیم $r=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}}$ و $s=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}$. در نتیجه

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\beta^2+1}{\beta^2}=1+\frac{1}{\beta^2},\quad \frac{1}{s^2}=\frac{\beta^2-1}{\beta^2}=1-\frac{1}{\beta^2}$$

بنابراین

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=2$$

توجه کنید که

$$r+s=-b,\quad rs=2$$

بنابراین

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{r^2+s^2}{(rs)^2}=\frac{(r+s)^2-2rs}{(rs)^2}=\frac{b^2-4}{4}=2$$

در نتیجه

$$b^2=12\Rightarrow b=\pm2\sqrt{3}$$

**۷۹- گزینه‌ی ۴** چون k در دو معادله یکسان بوده، پس $k=(-۲)(-۱۵)=۳۰$. بنابراین معادله‌ی اصلی $x^۲+۱۳x+۳۰=۰$ است، که ریشه‌هایش ۱۰- و ۳- هستند.

**۸۰- گزینه‌ی ۲** جواب‌های معادله‌ی $x^۲+۲x-۶=۰$ را با α و β نشان می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل $(\alpha-۲)(\beta-۲)=(۲-\alpha)(۲-\beta)$ را بیابیم. می‌دانیم

$$x^۲+۲x-۶=(x-\alpha)(x-\beta)$$

اگر در این تساوی به‌جای x قرار دهیم ۲، به‌دست می‌آید

$$(۲-\alpha)(۲-\beta)=۲$$

چون $\alpha\beta=-۶$، پس حاصل‌ضرب به‌اندازه‌ی ۸ واحد تغییر کرده است.

**۸۱- گزینه‌ی ۳** اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=-\frac{۱}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=-۱$. بنابراین

$$\frac{m-۱}{۲}=-۱\Rightarrow m-۱=-۲\Rightarrow m=-۱$$

**۸۲- گزینه‌ی ۱** ابتدا توجه کنید که

$$x_۱+x_۲=-(k-۱)=۱-k,\quad x_۱x_۲=۸$$

بنابراین

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۱-k}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $k=-۵$.

**۸۳- گزینه‌ی ۲** اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۸,\quad \alpha=\frac{\beta}{۲}+۵$$

از حل دستگاه معادله‌های بالا به‌دست می‌آید $\alpha=۶$ و $\beta=۲$.

از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=m\Rightarrow m=۱۲$$

**۸۴- گزینه‌ی ۱** اگر جواب‌های معادله را α و β بنامیم، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۲,\quad \alpha=۳\beta+۳$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آید $\alpha=\frac{۹}{۴}$ و $\beta=-\frac{۱}{۴}$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=\frac{m}{۲}\Rightarrow(\frac{۹}{۴})(-\frac{۱}{۴})=\frac{m}{۲}\Rightarrow m=-\frac{۹}{۸}$$

**۸۵- گزینه‌ی ۲** توجه کنید که $x_۱+x_۲=-(m+۱)$ و $x_۱x_۲=۲$. بنابراین

$$۳(x_۱+x_۲)-۵x_۱x_۲=-۱۹$$

$$۳(-(m+۱))-۵\times۲=-۱۹$$

$$-۳m-۳=-۹\Rightarrow m=۲$$

**۸۶- گزینه‌ی ۳** توجه کنید که $x_۱+x_۲=۱$ و

$$|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{\Delta}=\sqrt{۱-۴(۲k-۴)}$$

از طرف دیگر،

$$x_۱^۲-x_۲^۲=۵\Rightarrow(x_۱-x_۲)(x_۱+x_۲)=۵$$

پس $x_۱-x_۲>۰$، در نتیجه

$$\sqrt{۱۷-۸k}=۵\Rightarrow۱۷-۸k=۲۵\Rightarrow k=-۱$$

**۸۷- گزینه‌ی ۳** توجه کنید که

$$\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=k-۱$$

از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases}\alpha+\beta=k\\ \alpha+۲\beta=۵\end{cases}$ به‌دست می‌آید

$$\alpha=۲k-۵,\quad \beta=۵-k$$

بنابراین

$$\alpha\beta=(۲k-۵)(۵-k)=k-۱\Rightarrow k^۲-۷k+۱۲=۰$$

$$(k-۴)(k-۳)=۰\Rightarrow k=۳ \text{ یا } k=۴$$

پس مجموع مقدارهای ممکن برای k برابر ۷ است.

**۸۸- گزینه‌ی ۲** اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\beta^۲$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=-۸\Rightarrow\beta^۳=-۸\Rightarrow\beta=-۲$$

پس $\alpha=۴$، همچنین

$$\alpha+\beta=m\Rightarrow m=۴-۲=۲$$

**۸۹- گزینه‌ی ۱** اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله باشند، $x_۲=-x_۱^۲$. از طرف دیگر $x_۱x_۲=-m$، پس

$$-x_۱^۳=-m\Rightarrow m=x_۱^۳$$

در معادله به جای m مقدار $x_۱^۳$ را قرار می‌دهیم:

$$x^۲-x_۱^۳x-x_۱^۳=۰$$

چون $x_۱$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x_۱^۲-x_۱^۳x_۱-x_۱^۳=۰\Rightarrow x_۱^۲(۱-x_۱-x_۱^۲)=۰$$

$$x_۱^۲=۰\Rightarrow x_۱=۰\Rightarrow m=۰\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$۱-x_۱-x_۱^۲=۰\Rightarrow x_۱^۲+x_۱-۱=۰\Rightarrow x_۱=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}=\sqrt[۳]{m}$$

توجه کنید که چون معادله دو جواب دارد، پس $m^۲+۴m>۰$ و در نتیجه $m>۰$ یا $m<-۴$. بنابراین $m=(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})^۳\simeq۰/۲$ قابل قبول است. البته $m=(\frac{-\sqrt{۵}-۱}{۲})^۳\simeq-۴/۲$ هم قابل قبول است که چون $m>۰$ شرط مسئله است این عدد در گزینه‌ها نیامده است.

**۹۰- گزینه‌ی ۴** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=m\,,\quad \alpha\beta=۶۴\,,\quad \beta=\alpha^{۳}$$

بنابراین

$$\alpha(\alpha^{۳})=۶۴\Rightarrow\alpha^{۴}=۶۴\Rightarrow\alpha=\sqrt{۸}\Rightarrow\beta=۸\sqrt{۸}$$

در نتیجه

$$\alpha+\beta=\sqrt{۸}+۸\sqrt{۸}=m\Rightarrow m=۹\sqrt{۸}=۱۸\sqrt{۲}$$

**۹۱- گزینه‌ی ۲** از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$x_{۱}-x_{۲}=x_{۱}^{۲}-x_{۲}^{۲}=(x_{۱}-x_{۲})(x_{۱}+x_{۲})$$

$$\xrightarrow{x_{۱}\neq x_{۲}} x_{۱}+x_{۲}=۱$$

بنابراین

$$x_{۱}+x_{۲}=\frac{۲}{m}=۱$$

پس $m=۲$.

**۹۲- گزینه‌ی ۴** توجه کنید که

$$x_{۱}+x_{۲}=۳k\,,\quad x_{۱}x_{۲}=۹$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_{۱}}-\sqrt{x_{۲}}=۳\Rightarrow(\sqrt{x_{۱}}-\sqrt{x_{۲}})^{۲}=۹$$

$$\Rightarrow x_{۱}+x_{۲}-۲\sqrt{x_{۱}x_{۲}}=۹$$

$$\Rightarrow ۳k-۲\sqrt{۹}=۹$$

پس $k=۵$.

**۹۳- گزینه‌ی ۴** فرض می‌کنیم $x_{۱}$ و $x_{۲}$ ریشه‌های معادله‌ی موردنظر باشند. در این صورت

$$x_{۱}+x_{۲}=\frac{m+۱}{۲}\,,\quad x_{۱}x_{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_{۱}}+\sqrt{x_{۲}}=۲\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}x_{۱}+x_{۲}+۲\sqrt{x_{۱}x_{۲}}=۴$$

$$\frac{m+۱}{۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=۴\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow m=۶$$

**۹۴- گزینه‌ی ۳** فرض می‌کنیم $x_{۱}$ و $x_{۲}$ ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}-x-۲=۰$ و $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $۸x^{۲}-mx-۸=۰$ باشند. در این صورت

$$x_{۱}+x_{۲}=\frac{۱}{۲}\,,\quad x_{۱}x_{۲}=-۱$$

$$\alpha+\beta=\frac{m}{۸}\,,\quad \alpha\beta=-۱$$

$$\alpha=x_{۱}^{۳}\,,\quad \beta=x_{۲}^{۳}$$

دو طرف تساوی $x_{۱}+x_{۲}=\frac{۱}{۲}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}+۳x_{۱}x_{۲}(x_{۱}+x_{۲})=\frac{۱}{۸}$$

$$\alpha+\beta-۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}$$

$$\frac{m}{۸}=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۲}\Rightarrow m=۱۳$$

**۹۵- گزینه‌ی ۴** توجه کنید که بنابر اتحاد مکعب دوجمله‌ای،

$$(x_{۱}+x_{۲})^{۳}=x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}+۳x_{۱}x_{۲}(x_{۱}+x_{۲})\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، $x_{۱}+x_{۲}=۲$ و $x_{۱}x_{۲}=k+۱$. در نتیجه، از تساوی (۱) و این که $x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}=۵$ به‌دست می‌آید

$$۸=۵+۳(k+۱)(۲)$$

بنابراین $k=-\frac{۱}{۲}$.

**۹۶- گزینه‌ی ۳** ابتدا توجه کنید که

$$x_{۱}+x_{۲}=-۴\Rightarrow x_{۲}=-۴-x_{۱}$$

بنابراین

$$x_{۱}^{۲}+۵x_{۱}+x_{۲}=۱۹\Rightarrow x_{۱}^{۲}+۵x_{۱}-۴-x_{۱}=۱۹$$

$$x_{۱}^{۲}+۴x_{۱}=۲۳$$

از طرف دیگر، چون $x_{۱}$ ریشه‌ی معادله است، پس

$$x_{۱}^{۲}+۴x_{۱}-۵k-۳=۰\Rightarrow ۲۳-۵k-۳=۰$$

بنابراین $k=۴$.

**۹۷- گزینه‌ی ۴** ابتدا توجه کنید که

$$x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}=(x_{۱}+x_{۲})^{۲}-۲x_{۱}x_{۲}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، $x_{۱}+x_{۲}=k-۲$ و $x_{۱}x_{۲}=۸$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$۲۰=(k-۲)^{۲}-۲\times۸\Rightarrow(k-۲)^{۲}=۳۶$$

$$k-۲=\pm۶\Rightarrow k=۸\,,\ k=-۴$$

**۹۸- گزینه‌ی ۳** توجه کنید که

$$x_{۱}+x_{۲}=۳m,\quad x_{۱}x_{۲}=m-۳$$

بنابراین

$$\frac{۱}{x_{۱}}+\frac{۱}{x_{۲}}>۴\Rightarrow\frac{x_{۱}+x_{۲}}{x_{۱}x_{۲}}>۴$$

$$\frac{۳m}{m-۳}>۴\Rightarrow\frac{۳m}{m-۳}-۴>۰$$

$$\frac{۳m-۴(m-۳)}{m-۳}>۰\Rightarrow\frac{-m+۱۲}{m-۳}>۰$$

بنابراین $m\in(۳,۱۲)$.

۹۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=-۲$ و $\alpha\beta=k$.
بنابراین

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-۲}{k}$$

بنابراین تساوی داده شده بین ریشه‌های معادله به دو شرط زیر برقرار است:

- حاصل‌ضرب ریشه‌ها صفر نباشد، یعنی $k\neq ۰$.
- معادله دو ریشه داشته باشد. یعنی

$$\Delta=۴-۴k>۰\Rightarrow k<۱$$

بنابراین تساوی داده شده برای $k\in(-\infty,۱)-\{۰\}$ برقرار است.

۱۰۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\begin{cases} x_۱x_۲=۳ \\ x_۱=۳x_۲ \end{cases}\Rightarrow ۳x_۲^۲=۳\Rightarrow x_۲^۲=۱$$

بنابراین $x_۲=۱$ یا $x_۲=-۱$.
اگر $x_۲=۱$، آن‌گاه

$$۱^۲-(۳m+۱)\times۱+۳=۰\Rightarrow m=۱$$

اگر $x_۲=-۱$، آن‌گاه

$$(-۱)^۲-(۳m+۱)(-۱)+۳=۰\Rightarrow m=-\frac{۵}{۳}$$

چون مقدار مثبت m موردنظر است، پس $m=۱$ قابل قبول است.

۱۰۱- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۶$، بنابراین $x_۲=۶-x_۱$. در نتیجه

$$۳x_۱^۲+۲x_۱x_۲-x_۲^۲=۱۲$$

$$۳x_۱^۲+۲x_۱(۶-x_۱)-(۶-x_۱)^۲=۱۲$$

$$۳x_۱^۲+۱۲x_۱-۲x_۱^۲-x_۱^۲-۳۶+۱۲x_۱=۱۲$$

$$۲۴x_۱=۴۸\Rightarrow x_۱=۲$$

چون $x_۱$ ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، پس ۲ در این معادله صدق می‌کند

$$۲^۲-۶(۲)+k+۳=۰\Rightarrow k=۵$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=m+۱$ و $\alpha\beta=m$. از طرف دیگر،

$$۲(\alpha+\beta)+\beta=\alpha\beta\Rightarrow ۲(m+۱)+\beta=m$$

$$\beta=-۲-m$$

چون $\beta$ ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، در معادله صدق می‌کند

$$(-۲-m)^۲-(m+۱)(-۲-m)+m=۰$$

$$m^۲+۴m+۳=۰$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن برای m برابر است با مجموع جواب‌های معادله‌ی فوق که $-۴$ است.

۱۰۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=m$ و $\alpha\beta=m-۱$. از طرف دیگر،

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=۲\Rightarrow ۲\alpha+\beta=۲\alpha\beta\Rightarrow\alpha+(\alpha+\beta)=۲\alpha\beta$$

$$\alpha+m=۲m-۲\Rightarrow\alpha=m-۲$$

چون $\alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، در معادله صدق می‌کند

$$(m-۲)^۲-m(m-۲)+m-۱=۰$$

$$m^۲-۴m+۴-m^۲+۲m+m-۱=۰$$

بنابراین $m=۳$.

۱۰۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۵$ و $x_۱x_۲=۳$.
بنابراین

$$\frac{x_۱x_۲}{(x_۱+x_۲)^۲}=\frac{۳}{۲۵}$$

۱۰۵- گزینه‌ی ۲ اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۷,\quad \alpha\beta=۱$$

بنابراین

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^۲}=\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{۴۹-۴}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

۱۰۶- گزینه‌ی ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$۴a^۲(x_۱-x_۲)^۲=۴a^۲((x_۱+x_۲)^۲-۴x_۱x_۲)$$

$$=۴a^۲((-\frac{b}{a})^۲-\frac{۴c}{a})$$

$$=۴(b^۲-۴ac)=۴\Delta=۲۰$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم $A=۴a^۲(x_۱-x_۲)^۲$. در این صورت

$$\sqrt{A}=۲|a|\times|x_۱-x_۲|=۲|a|\times\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲\sqrt{\Delta}=۲\sqrt{۵}$$

بنابراین $A=(۲\sqrt{۵})^۲=۲۰$.

۱۰۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x_۱x_۲=-۵$ و $x_۱+x_۲=۳$.
در نتیجه

$$x_۱(x_۲-۲)+x_۲(x_۱-۲)=۲x_۱x_۲-۲(x_۱+x_۲)$$

$$=۲(-۵)-۲(۳)=-۱۶$$

۱۰۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲$$

از طرف دیگر،

$$x_۱+x_۲=۶,\quad x_۱x_۲=۳$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۶^۲-۲\times۳=۳۰$.

**۱۰۹- گزینه‌ی ۳** راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}=\frac{(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{8-4}{-13-16+4}=-\frac{4}{25}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $x_1+x_2=8$. همچنین

$$x^2-8x-13=(x-x_1)(x-x_2)$$

در نتیجه

$$(2-x_1)(2-x_2)=2^2-8\times2-13=-25$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}=\frac{x_1+x_2-4}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{8-4}{-25}=-\frac{4}{25}$$

**۱۱۰- گزینه‌ی ۱** ابتدا توجه کنید که

$$\alpha+\beta=5,\quad \alpha\beta=-2$$

بنابراین

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\frac{\beta-1}{\beta+1}=\frac{(\alpha-1)(\beta+1)+(\alpha+1)(\beta-1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$=\frac{\alpha\beta+\alpha-\beta-1+\alpha\beta-\alpha+\beta-1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{2\alpha\beta-2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{-4-2}{-2+5+1}=-\frac{3}{2}$$

**۱۱۱- گزینه‌ی ۴** توجه کنید که $\alpha\beta=2$. در نتیجه

$$\frac{2}{\alpha}=\beta,\quad \frac{2}{\beta}=\alpha$$

بنابراین باید حاصل عبارت زیر را حساب کنیم

$$(2\alpha)^2+(2\beta)^2=4(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=4(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta$$

$$=4(5)^2-8\times2=84$$

**۱۱۲- گزینه‌ی ۱** راه‌حل اول توجه کنید که $x_1+x_2=4$ و $x_1x_2=-4$. بنابراین از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

$$=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2)$$

$$=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)$$

$$=4(4^2+3\times4)=112$$

راه‌حل دوم بنابر اتحاد مکعب دوجمله‌ای،

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$4^3=x_1^3+x_2^3-3\times4\times4$$

بنابراین $x_1^3+x_2^3=112$.

**۱۱۳- گزینه‌ی ۱** ریشه‌ی مشترک دو معادله را t در نظر می‌گیریم. در این صورت، چون ۲ و t ریشه‌های $x^2-ax+b=0$ هستند، پس

$$2+t=a,\quad 2t=b$$

و چون ۴ و t ریشه‌های $x^2-cx+d=0$ هستند، پس

$$4+t=c,\quad 4t=d$$

بنابراین

$$a-c+\frac{b}{d}=(2+t)-(4+t)+\frac{2t}{4t}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

**۱۱۴- گزینه‌ی ۳** توجه کنید که $x_1+x_2=12$ و $x_1x_2=9$.

بنابراین

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}^2+\sqrt{x_2}^2}{\sqrt{x_1x_2}}$$

$$=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4$$

**۱۱۵- گزینه‌ی ۱** ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=4$ و $\alpha\beta=-1$.

همچنین

$$\alpha-\beta=-|\alpha-\beta|=-\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=-\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}$$

$$=-\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=-\sqrt{16+4}=-2\sqrt{5}$$

بنابراین

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(-2\sqrt{5})\times4=-8\sqrt{5}$$

البته می‌توانستیم $|\alpha-\beta|$ را به‌صورت زیر نیز به‌دست آوریم

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{20}}{1}=2\sqrt{5}$$

**۱۱۶- گزینه‌ی ۱** ابتدا توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $2m-1$ است. بنابراین

$$\tan\alpha\cot\alpha=2m-1\Rightarrow1=2m-1\Rightarrow m=1$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $m-3$ است. پس

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m-3=-2$$

دو طرف تساوی فوق را به توان دو می‌رسانیم

$$(\tan\alpha+\cot\alpha)^2=4\Rightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2=4$$

$$\Rightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=2$$

**۱۱۷- گزینه‌ی ۲** توجه کنید که $x_۱+x_۲=۳$ و $x_۱x_۲=۱$.
از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}&(x_۱\sqrt{x_۱}+x_۲\sqrt{x_۲})^۲\\&=(x_۱\sqrt{x_۱})^۲+(x_۲\sqrt{x_۲})^۲+۲x_۱\sqrt{x_۱}x_۲\sqrt{x_۲}\\&=x_۱^۳+x_۲^۳+۲x_۱x_۲\sqrt{x_۱x_۲}\\&=(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)+۲x_۱x_۲\sqrt{x_۱x_۲}\\&=۳^۳-۳(۱)(۳)+۲(۱)\sqrt{۱}=۲۰\end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که ریشه‌های معادله عددهایی مثبت‌اند، پس عبارت مورد نظر هم مثبت است. بنابراین

$$x_۱\sqrt{x_۱}+x_۲\sqrt{x_۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

**۱۱۸- گزینه‌ی ۲** توجه کنید که $x_۱+x_۲=۴$ و $x_۱x_۲=-۱$.
از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}&(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})^۳\\&=\sqrt[۳]{x_۱}^{\,۳}+\sqrt[۳]{x_۲}^{\,۳}+۳\sqrt[۳]{x_۱}\sqrt[۳]{x_۲}(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})\\&=x_۱+x_۲+۳\sqrt[۳]{x_۱x_۲}(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})\\&=۴-۳(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})\end{aligned}$$

بنابراین، اگر فرض کنیم $\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}=A$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}&A^۳=۴-۳A\Rightarrow A^۳+۳A-۴=۰\\&A^۳+۳A-۳-۱=۰\\&(A^۳-۱)+۳(A-۱)=۰\\&(A-۱)(A^۲+A+۱)+۳(A-۱)=۰\\&(A-۱)(A^۲+A+۴)=۰\end{aligned}$$

چون $A^۲+A+۴$ همواره مثبت است، پس $A=۱$.

**۱۱۹- گزینه‌ی ۲** ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=۵$ و $\alpha\beta=۱$.
بنابراین

$$\begin{aligned}&\alpha^۲+\frac{۲}{\beta^۲}+۳\beta^۲=\alpha^۲+۲\alpha^۲+۳\beta^۲=۳(\alpha^۲+\beta^۲)\\&=۳((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)=۳(۲۵-۲)=۶۹\end{aligned}$$

**۱۲۰- گزینه‌ی ۴** ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{۴}{۳}$ و $\alpha\beta=-\frac{۱}{۳}$. بنابراین $۳\alpha-۴=-۳\beta$. پس عبارت خواسته شده به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}&۱۰\alpha^۲+(۳\alpha-۴)^۲+\beta^۲=۱۰\alpha^۲+(-۳\beta)^۲+\beta^۲=۱۰(\alpha^۲+\beta^۲)\\&=۱۰((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)=۱۰(\frac{۱۶}{۹}+\frac{۲}{۳})=\frac{۲۲۰}{۹}\end{aligned}$$

**۱۲۱- گزینه‌ی ۲** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\sqrt{۵}$ و $\alpha\beta=۱$. بنابراین

$$\begin{aligned}A&=۲\alpha+۴\beta=۳\alpha-\alpha+۳\beta+\beta=۳(\alpha+\beta)+\beta-\alpha\\&=۳(\alpha+\beta)+\sqrt{(\beta-\alpha)^۲}=۳(\alpha+\beta)+\sqrt{\beta^۲+\alpha^۲-۲\alpha\beta}\\&=۳(\alpha+\beta)+\sqrt{(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta}\end{aligned}$$

بنابراین

$$A=۳\sqrt{۵}+\sqrt{\sqrt{۵}^۲-۴\times۱}=۳\sqrt{۵}+\sqrt{۱}=۳\sqrt{۵}+۱$$

**راه‌حل دوم** جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند

$$\alpha=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},\quad \beta=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}۲\alpha+۴\beta&=۲(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})+۴(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})=\sqrt{۵}-۱+۲\sqrt{۵}+۲\\&=۳\sqrt{۵}+۱\end{aligned}$$

**۱۲۲- گزینه‌ی ۳** $\alpha$ جواب معادله اســت، پـس در معادله صدق می‌کند

$$۲\alpha^۲-۳\alpha-۱=۰\Rightarrow ۲\alpha^۲=۳\alpha+۱\Rightarrow ۴\alpha^۲=۶\alpha+۲$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}A&=۴\alpha^۲+۶\beta(۱+\alpha)=۶\alpha+۲+۶\beta+۶\alpha\beta\\&=۶(\alpha+\beta+\alpha\beta)+۲\end{aligned}$$

چون $\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۱}{۲}$، بنابراین

$$A=۶(\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲})+۲=۸$$

**۱۲۳- گزینه‌ی ۴** چون $\alpha$ ریشه‌ی معادله است، پس در آن صدق می‌کند

$$\alpha^۲-۲\alpha-۱=۰\Rightarrow\alpha^۲=۲\alpha+۱$$

دو طرف تساوی فوق را در $\alpha$ ضرب می‌کنیم

$$\alpha^۳=۲\alpha^۲+\alpha\Rightarrow\alpha^۳=۲(۲\alpha+۱)+\alpha=۵\alpha+۲$$

بنابراین

$$\alpha^۳+۵\beta=۵\alpha+۲+۵\beta=۵(\alpha+\beta)+۲=۵\times۲+۲=۱۲$$

**۱۲۴- گزینه‌ی ۲** چون $\alpha$ ریشه‌ی معادله است، پس در آن صدق می‌کند

$$\alpha^۲-۳\alpha-۱=۰\Rightarrow\alpha^۲=۳\alpha+۱$$

دو طرف تساوی فوق را به توان دو می‌رسانیم

$$\begin{aligned}\alpha^۴&=(۳\alpha+۱)^۲=۹\alpha^۲+۶\alpha+۱=۹(۳\alpha+۱)+۶\alpha+۱\\&=۳۳\alpha+۱۰\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\alpha^۴+۳۳\beta&=۳۳\alpha+۱۰+۳۳\beta=۳۳(\alpha+\beta)+۱۰\\&=۳۳\times۳+۱۰=۱۰۹\end{aligned}$$