(درس ۲)

وارون یک تابع و تابع یک به یک

وارون تابع

دیدیم که هر تابع مانند f رابطه‌ای است که به هر مقدار x یک مقدار از y را نسبت می‌دهد. حالا اگر جای x و y را در این نسبت عوض کنیم، یعنی زوج مرتب (x,y) را به زوج مرتب (y,x) تبدیل کنیم، می‌گوییم وارون تابع را به دست آورده‌ایم و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم:

$$g=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\} \Rightarrow g^{-1}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳)\}$$

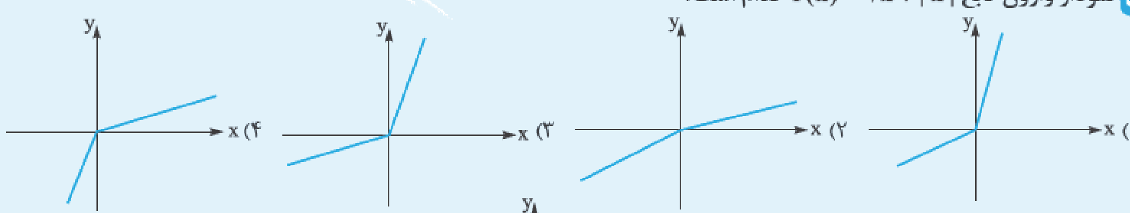
همان‌طور که در دو مثال بالا می‌بینیم، بعضی وقت‌ها وارون یک تابع خودش تابع هست و بعضی وقت‌ها هم نیست. مثلاً در دو تابع بالا، وارون f یعنی f^{-1} تابع نیست ولی وارون g یعنی g^{-1} تابع است.

از آن‌جا که برای پیداکردن وارون تابع، جای x و y را در تابع عوض می‌کنیم، پس در نمودار تابع هم همین اتفاق می‌افتد. یعنی برای رسم نمودار وارون یک تابع باید جای x و y را در مختصات نقطه‌ها عوض کنیم:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

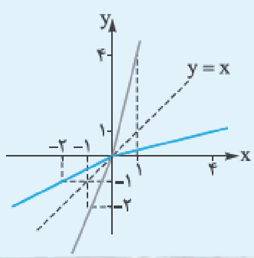
و عوض‌کردن جای x و y در مختصات نقطه یعنی آن را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه کنیم. پس برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است نمودار تابع را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه کنیم.

تست نمودار وارون تابع $f(x)=۳x+|x|$ کدام است؟



پاسخ **گزینهٔ ۲** اول نمودار خود تابع را رسم می‌کنیم و سپس نمودار قرینه‌اش را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم می‌کنیم.

$$f(x)=۳x+|x|=\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases} \Rightarrow$$



تابع یک به یک

دیدیم که بعضی از تابع‌ها وارونشان هم تابع است. این‌ها تابع‌های یک‌به‌یک هستند. در یک تابع یک‌به‌یک، به هر مقدار x تنها یک مقدار منحصربه‌فرد y نسبت داده می‌شود. یعنی همان‌طور که هر x فقط یک y دارد، هر y هم فقط یک x دارد. (به همین علت اسمشان یک‌به‌یک است!)

به تابع‌هایی که یک‌به‌یک هستند، اصطلاحاً می‌گوییم تابع‌های وارون‌پذیر یا معکوس‌پذیر. (معکوس تابع همان وارون تابع است اما به عربی‌اش!)

دقت کنید که همهٔ تابع‌ها وارون دارند اما فقط وارون تابع‌های یک‌به‌یک، تابع است که به آن می‌گوییم تابع وارون، یعنی:

تابع وارون پذیر نیست. $\Rightarrow$ **وارون تابع، تابع نیست.** $\Rightarrow$ **وارون دارد.** $\Rightarrow$ **تابع یک‌به‌یک نیست.**

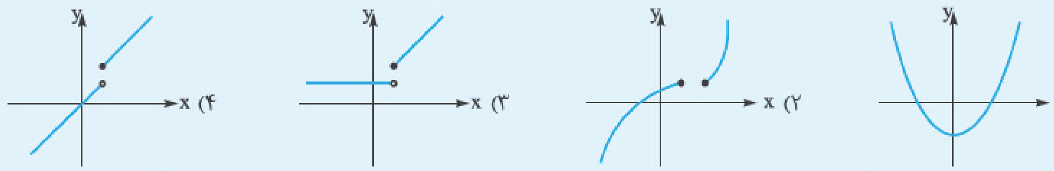
تابع وارون‌پذیر است. $\Rightarrow$ **وارون تابع، تابع است.** $\Rightarrow$ **وارون دارد.** $\Rightarrow$ **تابع یک‌به‌یک است.**

برای این‌که ببینیم تابعی یک‌به‌یک هست یا نه:

۱) اگر بتوانیم مثال نقض بزنیم یعنی نشان دهیم که برای دو مقدار متفاوت x، یک مقدار یکسان برای y به دست می‌آید، آن‌گاه تابع یک‌به‌یک نیست.

۲) اگر نمودار تابع را رسم کنیم و هر خط موازی محور xها (*همان خط‌های افقی*) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک‌به‌یک است.

تست کدام‌یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟



پاسخ گزینهٔ ۴ فقط در (۴) هر خط افقی دلخواه، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس (۴) یک‌به‌یک است.

تست کدام‌یک از تابع‌های زیر، تابع وارون دارد؟

۱) $y=x^{۴}-x^{۲}$ ۲) $y=x^{۳}-x$ ۳) $y=x-\sqrt{x}$ ۴) $y=x+\sqrt{x}$

پاسخ گزینهٔ ۴ از روش رد گزینه‌ها و مثال نقض استفاده می‌کنیم. یعنی سعی می‌کنیم برای هر کدام از گزینه‌ها (که حدس می‌زنیم یک‌به‌یک نیستند) دو مقدار برای x در نظر بگیریم که yهای یکسانی ایجاد کنند:

(۱) $y=x^{۴}-x^{۲}\,,\,x=۱\Rightarrow y=۰\,,\,x=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

(۲) $y=x^{۳}-x\,,\,x=۱\Rightarrow y=۰\,,\,x=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

(۳) $y=x-\sqrt{x}\,,\,x=۱\Rightarrow y=۰\,,\,x=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

پس (۴) یک‌به‌یک است.

چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج (*قدرمطلق را هم از درجهٔ زوج حساب می‌کنیم*) اگر دامنه‌شان $\mathbb{R}$ باشد یک‌به‌یک نیستند.

پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون

برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون (یک تابع یک‌به‌یک) از مفهوم وارون استفاده می‌کنیم. یعنی:

اول به جای $f(x)$ می‌گذاریم y؛ بعد x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم و به جای y می‌گذاریم $f^{-1}(x)$.

تست ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\dfrac{۲x+۳}{x-۵}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-۵}{۲x+۳}$ ۲) $f^{-1}(x)=\dfrac{۳x+۲}{۵x-۱}$ ۳) $f^{-1}(x)=\dfrac{۵x+۳}{x-۲}$ ۴) $f^{-1}(x)=\dfrac{۵x-۱}{۲x-۳}$

پاسخ گزینهٔ ۳ کارهایی را که گفتیم به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۵}\Rightarrow y=\frac{۲x+۳}{x-۵}\Rightarrow yx-۵y=۲x+۳\Rightarrow yx-۲x=۵y+۳\Rightarrow x(y-۲)=۵y+۳$$

$$\Rightarrow x=\frac{۵y+۳}{y-۲}\xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{۵x+۳}{x-۲}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۵x+۳}{x-۲}$$

دقت کنید که وقتی x را برحسب y پیدا می‌کنیم تا وقتی که جای x و y را عوض نکرده‌ایم، هنوز با خود تابع سروکار داریم و ضابطهٔ تابع وارون از جایی شروع می‌شود که جای x و y را عوض کنیم.

تست ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\sqrt[۳]{۱-x^{۳}}$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $f(-x)$ ۴) $-f(-x)$

پاسخ گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{۱-x^{۳}}\Rightarrow y=\sqrt[۳]{۱-x^{۳}}\xrightarrow{\text{توان ۳}} y^{۳}=۱-x^{۳}\Rightarrow x^{۳}=۱-y^{۳}\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} x=\sqrt[۳]{۱-y^{۳}}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=\sqrt[۳]{۱-x^{۳}}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۱-x^{۳}}=f(x)$$

پس در این‌جا، تابع و تابع وارون مساوی یکدیگرند، یعنی: $f^{-1}(x)=f(x)$

از آن‌جا که نمودار تابع و تابع وارونش نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه‌اند، پس نمودار تابع وارون و تابع به شرطی بر هم منطبق‌اند که نمودار خود تابع نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن باشد.

در تابع‌های زیر، نمودار تابع وارون و خود تابع بر هم منطبق‌اند (یعنی $f^{-1}=f$): $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}\,,\,f(x)=\sqrt[n]{1-x^n}\,,\,(n$ فرد$)$

تست نمودار تابع وارون تابع $f(x)=2x^3+x-1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(0,-1)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(2,1)$

پاسخ **گزینهٔ ۴** پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=2x^3+x-1$ بسیار دشوار است (و جزء مطالب درسی شما نیست!) اما در این‌جا لازم نیست ضابطهٔ تابع وارون را پیدا کنیم. گفتیم اگر $(a,b)\in f$، آن‌گاه $(b,a)\in f^{-1}$؛ پس از بین گزینه‌ها نقطه‌ای روی منحنی تابع وارون است که جابه‌جاشدهٔ مختصاتش در ضابطهٔ خود تابع صدق کند، پس گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

$$① \ (1,2) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (2,1) \ : \ 1=2(2)^3+2-1 \quad \times$$
$$② \ (0,-1) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (-1,0) \ : \ 0=2(-1)^3-1-1 \quad \times$$
$$③ \ (0,1) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (1,0) \ : \ 0=2(1)^3+1-1 \quad \times$$
$$④ \ (2,1) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (1,2) \ : \ 2=2(1)^3+1-1 \quad \checkmark$$

پس نقطهٔ $(2,1)$ روی منحنی تابع وارون قرار دارد.

دامنه و برد تابع وارون

گفتیم که وقتی تابعی را با ضابطهٔ جبری تعریف می‌کنیم حتماً باید دامنه‌اش را هم مشخص کنیم (و اگر دامنه را مشخص نکنیم، دامنه برابر بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که تابع در آن تعریف شده است). در مورد تابع وارون هم همین‌طور است، یعنی وقتی ضابطهٔ تابع وارون را پیدا می‌کنیم، باید دامنه‌اش را هم تعیین کنیم.

گفتیم که در تابع وارون و تابع، جای x و y عوض می‌شود و چون دامنه برابر مجموعهٔ xها و برد برابر مجموعهٔ yها بود، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\begin{cases} D_{f^{-1}}=R_f \\ R_{f^{-1}}=D_f \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \text{برد تابع} = \text{دامنهٔ تابع وارون} \\ \text{دامنهٔ تابع} = \text{برد تابع وارون} \end{cases}$$

یعنی برای پیداکردن دامنهٔ f^{-1} می‌رویم R_f را پیدا می‌کنیم.

تست ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-2}+1$ کدام است؟

۱) $f(x)=x^2-2x+1\,,\,x\geq 1$ ۲) $f(x)=x^2-2x+3\,,\,x\geq 1$

۳) $f(x)=x^2-2x+3\,,\,x\in\mathbb{R}$ ۴) $f(x)=x^2-2x-1\,,\,x\in\mathbb{R}$

پاسخ **گزینهٔ ۲** اول ضابطهٔ تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x-2}+1 \Rightarrow y=\sqrt{x-2}+1 \Rightarrow \sqrt{x-2}=y-1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-2=y^2-2y+1$$
$$\Rightarrow x=y^2-2y+3 \xrightarrow{\text{وارون}} y=x^2-2x+3 \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-2x+3$$

حالا برای پیداکردن دامنهٔ تابع وارون، برد خود تابع را پیدا می‌کنیم. در تابع $y=\sqrt{x-2}+1$ چون حاصل رادیکال همیشه بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس:

$$\sqrt{x-2}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}+1\geq 1 \Rightarrow y\geq 1 \Rightarrow R_f=[1,+\infty)$$

پس دامنهٔ تابع وارون برابر است با $D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$؛ بنابراین ضابطهٔ تابع وارون است با: $f^{-1}(x)=x^2-2x+3\,,\,x\geq 1$

راه دوم ضابطهٔ تابع وارون را با استفاده از مختصات نقطهٔ روی منحنی تابع و روی منحنی تابع وارون پیدا می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x-2}+1 \Rightarrow (3,2)\in f \Rightarrow (2,3)\in f^{-1}$$

مختصات نقطهٔ $(2,3)$ فقط در ② و ③ صدق می‌کنند.

حالا مثل راه‌حل اول می‌رویم سراغ به دست آوردن دامنهٔ f^{-1} (یعنی همان برد f) تا از بین ② و ③ یکی را انتخاب کنیم.

تست برد تابع وارون تابع $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^3-1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{1\}$

پاسخ گزینه می‌دانیم برد تابع وارون برابر دامنهٔ تابع است، پس:

$$f(x)=\frac{2x^3-1}{x^3-1}: x^3-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

پس برد تابع وارون هم برابر است با $R_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{1\}$.

ضابطهٔ تابع وارون تابع‌های چندضابطه‌ای

در یک تابع چندضابطه‌ای (به شرطی که یک‌به‌یک باشد) برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون، باید ضابطهٔ وارون هر کدام از ضابطه‌ها را جداگانه به دست آوریم. نکتهٔ مهم این است که محدودهٔ x در هر کدام از ضابطه‌های تابع وارون، برابر محدودهٔ y در ضابطهٔ خود تابع است. بیایید با هم تست زیر را حل کنیم.

تست ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ 4x+1 & x\geq 0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1) & x<0\\ \frac{1}{4}(x-1) & x\geq 0\end{cases}$

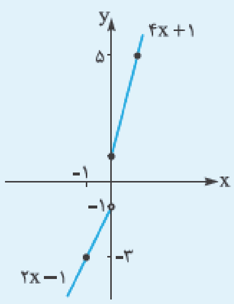
۲) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1) & x<0\\ \frac{1}{4}(x+1) & x\geq 0\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1) & x<-1\\ \frac{1}{4}(x+1) & x\geq 1\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1) & x<-1\\ \frac{1}{4}(x-1) & x\geq 1\end{cases}$

پاسخ گزینه باید برای هر کدام از ضابطه‌های تابع، برد و ضابطهٔ وارون را حساب کنیم. برای پیداکردن برد بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ 4x+1 & x\geq 0\end{cases} \Rightarrow$$



حالا با توجه به نمودار می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x<0 \Rightarrow y=2x-1 \Rightarrow \begin{cases}\text{برد}: y<-1\\ y=2x-1 \Rightarrow x=\dfrac{y+1}{2} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\dfrac{1}{2}(x+1)\end{cases}\\ x\geq 0 \Rightarrow y=4x+1 \Rightarrow \begin{cases}\text{برد}: y\geq 1\\ y=4x+1 \Rightarrow x=\dfrac{y-1}{4} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\dfrac{1}{4}(x-1)\end{cases}\end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت روبه‌رو است:

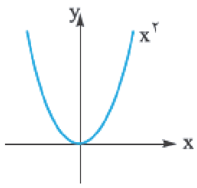
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1) & x<-1\\ \frac{1}{4}(x-1) & x\geq 1\end{cases}$$

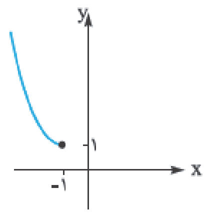
محدودکردن دامنهٔ یک تابع و ساختن یک تابع یک‌به‌یک

دیدیم که اگر تابعی یک‌به‌یک نیست، وارون‌پذیر نیست (یعنی تابع وارون ندارد) اما اگر دامنهٔ چنین تابعی را به بازه‌ای (یا مجموعه‌ای) محدود کنیم که تابع در آن یک‌به‌یک باشد، تابع در آن بازه، تابع وارون دارد و می‌توانیم ضابطهٔ تابع وارونش را پیدا کنیم.

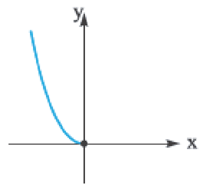
به عنوان مثال می‌دانیم تابع $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک نیست و تابع وارون ندارد، اما می‌توانیم دامنهٔ تابع $f(x)=x^2$ را (که برابر $\mathbb{R}$ است) به بازه‌ای محدود کنیم که تابع در آن یک‌به‌یک باشد.

مثلاً تابع $f(x)=x^{۲}$ در بازه‌های زیر، یک‌به‌یک است:

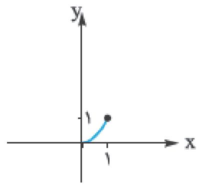




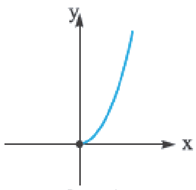
$x\in(-\infty,-۱]$



$x\in(-\infty,۰)$



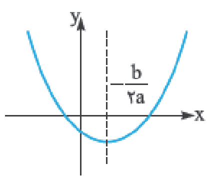
$x\in[۰,۱]$

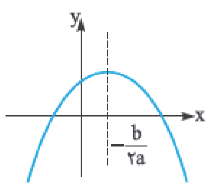


$x\in[۰,+\infty)$

در حالت کلی برای این‌که بفهمیم دامنهٔ تابع را باید چگونه محدود کنیم، بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم. اما در مورد تابع‌های درجهٔ دوم (سهمی) می‌توانیم از نکتهٔ زیر استفاده کنیم:

تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ یک‌به‌یک نیست. بزرگ‌ترین بازه‌هایی که این تابع در آن یک‌به‌یک است، برابرند با: $[-\frac{b}{۲a},+\infty)$ و $(-\infty,-\frac{b}{۲a}]$.





دقت کنید که $x=-\frac{b}{۲a}$ طول رأس سهمی است.

این‌که می‌گوییم بزرگ‌ترین بازه، منظورمان این است که تابع در هر بازهٔ دیگری هم که زیرمجموعهٔ این بازه‌ها باشد، یک‌به‌یک است.

تست **تابع $f(x)=x^{۲}+۲x$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ یک‌به‌یک است. اگر a بزرگ‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، ضابطهٔ تابع وارون در این بازه کدام است؟**

۱) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۳$ ۲) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۱$ ۳) $f^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۱}-۱$ ۴) $f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-x}-۱$

پاسخ **گزینهٔ ۳** طول رأس سهمی $f(x)=x^{۲}+۲x$ برابر $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-(۲)}{۲(۱)}=-۱$ است، پس تابع در بازه‌های $(-\infty,-۱]$ و $[-۱,+\infty)$ یک‌به‌یک است، یعنی در این‌جا باید $a=-۱$ باشد. حالا ضابطهٔ تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

از مختصات نقطهٔ روی تابع و روی تابع وارون استفاده می‌کنیم:

$$y=x^{۲}+۲x,x=-۲\Rightarrow y=(-۲)^{۲}+۲(-۲)=۰\Rightarrow(-۲,۰)\in f\Rightarrow(۰,-۲)\in f^{-۱}$$

مختصات نقطهٔ $(۰,-۲)$ فقط در ۱ و ۳ صدق می‌کند، پس می‌رویم سراغ یک نقطهٔ دیگر:

$$y=x^{۲}+۲x,x=-۳\Rightarrow y=(-۳)^{۲}+۲(-۳)=۳\Rightarrow(-۳,۳)\in f\Rightarrow(۳,-۳)\in f^{-۱}$$

مختصات نقطهٔ $(۳,-۳)$ در ۳ صدق می‌کند، پس جواب ۳ است.

راه دوم x را برحسب y پیدا می‌کنیم: (با استفاده از اتحاد مربع)

$$y=x^{۲}+۲x\Rightarrow y+۱=x^{۲}+۲x+۱\Rightarrow y+۱=(x+۱)^{۲}\xrightarrow{\text{ریشهٔ دوم}}|x+۱|=\sqrt{y+۱}$$

$$\xrightarrow{x\le-۱}-x-۱=\sqrt{y+۱}\Rightarrow x=-\sqrt{y+۱}-۱\xrightarrow{\text{وارون}}y=-\sqrt{x+۱}-۱$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت $f^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۱}-۱$ است.

راه سوم x را برحسب y پیدا می‌کنیم: (با استفاده از فرمول Δ)

$$y=x^2+2x \Rightarrow x^2+2x-y=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{(+2)^2-4(1)(-y)}}{2(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4y}}{2}$$

$$=\frac{2(-1\pm\sqrt{y+1})}{2}=-1\pm\sqrt{y+1}$$

و چون $x\le -1$ است، پس باید $x=-1-\sqrt{y+1}$ باشد:

$$x=-\sqrt{y+1}-1 \xrightarrow{\text{وارون}} y=-\sqrt{x+1}-1$$

تست ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x^2-x|x|$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع وارون دارد، کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2|x|}\,,\ x\ge 0$

۲) $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2|x|}\,,\ x\le 0$

۳) $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{|x|}\,,\ x\ge 0$

۴) $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{|x|}\,,\ x\le 0$

پاسخ **گزینهٔ ۱** اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم تا ببینیم در چه بازه‌ای وارون‌پذیر است:

$$f(x)=x^2-x|x|=\begin{cases}0 & x\ge 0\\ 2x^2 & x<0\end{cases} \Rightarrow$$ تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$ یک‌به‌یک است.

حالا ضابطهٔ تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

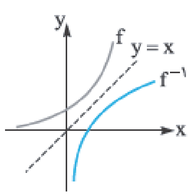
$$y=2x^2 \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0 \qquad \text{برد } f=[0,+\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}}=[0,+\infty)\\ y=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{y}{2} \xrightarrow{\text{ریشهٔ دوم}} |x|=\sqrt{\frac{y}{2}} \xrightarrow{x\le 0} -x=\sqrt{\frac{y}{2}} \xrightarrow{\text{وارون}} y=-\sqrt{\frac{x}{2}}\end{cases}$$

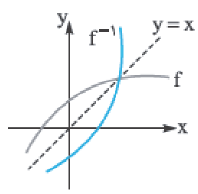
پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت $f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{x}{2}}$ یا $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2x}$ و دامنهٔ آن (که همان برد تابع است) برابر $D_{f^{-1}}: x\ge 0$

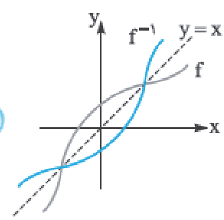
است و چون $x\ge 0$ است، پس ضابطهٔ $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2x}$ را می‌توانیم به صورت $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2|x|}$ هم بنویسیم.

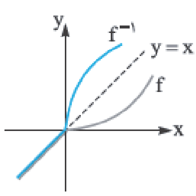
نقاط برخورد منحنی تابع و منحنی تابع وارون

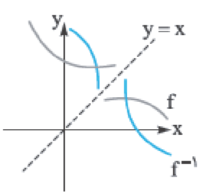
قبل از هر چیز شکل‌های زیر را نگاه کنید:

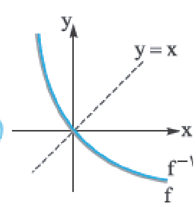
(الف)


(ب)


(پ)


(ت)


(ث)


(ج)


حالا به جدول زیر نگاه کنید.

شکل	تعداد نقاط برخورد f و f^{-1}	توضیح
(الف)	صفر	نمودار f و f^{-1} یکدیگر را قطع نمی‌کنند.
(ب)	یک	نمودار f و f^{-1} روی خط $y=x$ متقاطع‌اند.
(پ)	دو	نمودار f و f^{-1} دو نقطهٔ تقاطع دارند که خود این نقاط نسبت به $y=x$ متقارن‌اند.
(ت)	بی‌شمار	نمودار f و f^{-1} کاملاً بر هم منطبق‌اند.
(ث)	دو	نمودار f و f^{-1} در دو نقطه روی خط $y=x$ یکدیگر را قطع می‌کنند.
(ج)	بی‌شمار	یک قسمت از نمودار f و f^{-1} بر هم منطبق است.

حالا می‌توانیم نتیجه بگیریم:

۱) اگر مقدار تابع همواره زیاد شود (بعداً یاد می‌گیرید که می‌گوییم صعودی اکید باشد) نمودار f و f^{-1} یا یکدیگر را قطع نمی‌کنند و یا اگر یکدیگر را قطع کنند، نقطهٔ برخوردشان روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (یعنی خط $y=x$) است. (شکل‌های الف، ب، پ و ت)

۲) اگر مقدار تابع کم شود (بعداً یاد می‌گیرید که می‌گوییم نزولی اکید باشد) نمودار f و f^{-1} یا یکدیگر را قطع نمی‌کنند و یا ممکن است یکدیگر را روی خط $y=x$ و یا نقاط دیگری که دوتا دوتا نسبت به خط $y=x$ متقارن‌اند، قطع کنند. (شکل‌های ث و ج)

۳) اگر تمام یا قسمتی از نمودار f و f^{-1} بر هم منطبق باشند، می‌گوییم دو نمودار در بی‌شمار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. (شکل ج)

تست تابع $f(x)=x^{۳}+x-۸$ نمودار تابع وارونش را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

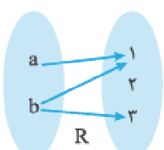
پاسخ گزینهٔ ۲ مقادیر تابع $f(x)=x^{۳}+x-۸$ همواره زیاد می‌شود (چون وقتی مقدار x زیاد می‌شود، هم مقدار $x^{۳}$ و هم مقدار x زیاد می‌شوند) پس اگر نمودار تابع، وارونش را قطع کند، آن را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. پس می‌توانیم نمودار تابع را با خط $y=x$ قطع دهیم:

$$\begin{cases} y=x^{۳}+x-۸ \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^{۳}+x-۸=x \Rightarrow x^{۳}-۸=۰ \Rightarrow x^{۳}=۸ \Rightarrow x=۲$$

پس نمودار f و f^{-1} در یک نقطه به طول $x=۲$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

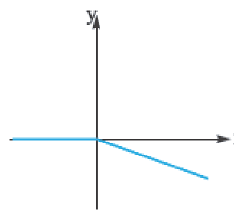
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

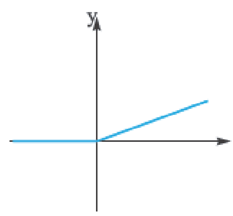
۹۷- رابطهٔ R با نمودار مقابل تعریف‌شده است، کدام گزاره درست است؟

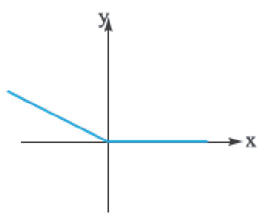


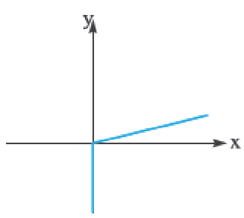
۱) R تابع است و R^{-1} تابع نیست.
۲) R و R^{-1} هیچ‌کدام تابع نیستند.
۳) R و R^{-1} هر دو تابع‌اند.
۴) R تابع نیست ولی R^{-1} تابع است.

۹۸- منحنی وارون تابع $y=۲x+|۲x|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹۹- اگر دو خط به معادلات $ax+by=8$ و $2x-3y=b$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول متقارن باشند، $a+b$ کدام است؟ (خارج ـ ۹۳)

۱) ± 3 ۲) ± 2 ۳) -3 و 2 ۴) 3 و -2

۱۰۰- اگر تابع $\{(-2,2),(m,3),(-1,3),(2m,a)\}$ یک‌به‌یک باشد، a کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۰۱- اگر رابطهٔ $f=\{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟ (خارج ـ ۸۶)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $(2,1)$ ۴) $(2,3)$

۱۰۲- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=|x-1|$ ۲) $y=x^2-1$ ۳) $y=x^3-x^2$ ۴) $y=x^3+1$

۱۰۳- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x^2+1$ ۲) $y^3=x^2+1$ ۳) $y^3=x^3+1$ ۴) $y^2=x^2+1$

۱۰۴- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ -x+1 & x<0 \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^3 & x<0 \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\geq 0 \\ -x^3 & x<0 \end{cases}$

۱۰۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \\ x+2 & x<0 \end{cases}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) یک‌به‌یک و یک‌به‌یک ۲) یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک ۳) غیر یک‌به‌یک و یک‌به‌یک ۴) غیر یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک

۱۰۶- تابع‌های $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 0 \\ 1-x^2 & x<0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \\ 1-x^2 & x<0 \end{cases}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک ۲) غیر یک‌به‌یک و یک‌به‌یک ۳) غیر یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک ۴) یک‌به‌یک و یک‌به‌یک

۱۰۷- تابع‌های $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+1 & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$ به ترتیب .... هستند.

۱) یک‌به‌یک و یک‌به‌یک ۲) یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک ۳) غیر یک‌به‌یک و یک‌به‌یک ۴) غیر یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک

۱۰۸- توابع زیر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند. کدام‌یک از آن‌ها معکوس‌پذیرند؟

۱) $y=x^4-2x^2$ ۲) $y=[x]$ ۳) $y=x^3-3x^2$ ۴) $y=x^3+x+1$

۱۰۹- ضابطهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ کدام تابع است؟

۱) $g(x)=\frac{1}{x+1}$ ۲) $g(x)=\frac{x}{x-1}$ ۳) $g(x)=1-\frac{1}{x}$ ۴) $g(x)=1+\frac{1}{x}$

۱۱۰- معکوس تابع $y=x^3-8$ کدام است؟

۱) $y=\sqrt[3]{x+2}$ ۲) $y=\sqrt[3]{x-8}$ ۳) $y=\sqrt[3]{x-2}$ ۴) $y=\sqrt[3]{x+8}$

۱۱۱- تابع وارون تابع $y=\sqrt{1-x}$ کدام است؟

۱) $y=1-x^2\ ,\ x\geq 0$ ۲) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ۳) $y=\sqrt{1+x}$ ۴) $y=1+x^2$

۱۱۲- وارون تابع $y=x^3+\sqrt{x}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(4,66)$ ۲) $(3,1)$ ۳) $(66,4)$ ۴) $(1,2)$

۱۱۳- اگر ضابطهٔ تابع f، $f(x)=x^2-x+1$ باشد، نمودار f^{-1} الزاماً از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(0,-1)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(0,1)$

۱۱۴- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2x+1}$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-2}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

۱۱۵- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$، مقدار $f^{-1}(۴)$ کدام است؟ (سراسری ـ ۸۸)

۱) -۸ ۲) -۵ ۳) -۲ ۴) تعریف‌نشده

۱۱۶- ضابطهٔ معکوس تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$ به کدام صورت است؟ (سراسری ـ ۹۲)

۱) $y=x^۲-۴x+۵;x\le ۲$ ۲) $y=-x^۲-۴x+۵;x\le ۲$ ۳) $y=x^۲-۴x+۵;x\ge ۱$ ۴) $y=-x^۲+۴x-۵;x\ge ۱$

۱۱۷- وارون تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۱\\ ۲x-۱ & x<۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}\frac{x}{۲}+۱ & x<۱\\ \sqrt{x} & x\ge ۱\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\frac{x}{۲}-۱ & x<۱\\ \sqrt{x} & x\ge ۱\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}۲x+۱ & x<۱\\ \frac{x}{۲}-۱ & x\ge ۱\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x+۱) & x<۱\\ \sqrt{x} & x\ge ۱\end{cases}$

۱۱۸- ضابطهٔ وارون تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$ کدام است؟ (خارج ـ ۹۱)

۱) $y=x|x|;x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=-x^۲;x<۰$ ۳) $y=\pm x^۲;x\in\mathbb{R}$ ۴) $y=\pm x|x|;x\in\mathbb{R}$

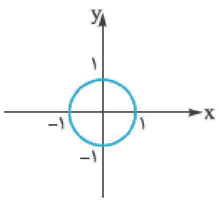
۱۱۹- ضابطهٔ معکوس $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\ne ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (خارج ـ ۹۲)

۱) $y=x\sqrt{|x|};x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=x\sqrt{|x|};x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $y=x|x|;x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $y=x|x|;x\in\mathbb{R}$

۱۲۰- تابع $f(x)=-x^۲+۴x$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ تابع وارون دارد. اگر a بیشترین مقدار خود را اختیار کند، ضابطهٔ تابع وارون در این بازه کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=۲+\sqrt{۴-x}$ ۲) $f^{-1}(x)=۲-\sqrt{۴-x}$ ۳) $f^{-1}(x)=۲-\sqrt{۴+x}$ ۴) $f^{-1}(x)=۲+\sqrt{۴+x}$

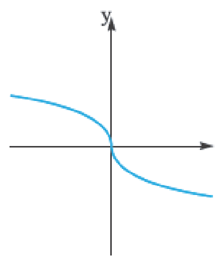
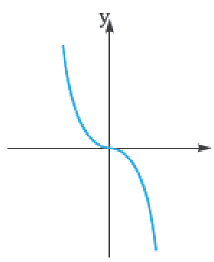
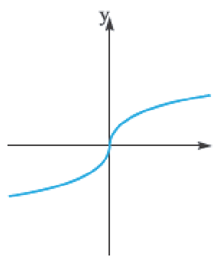
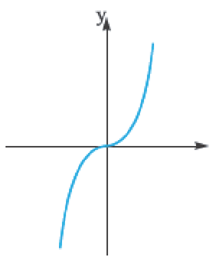
۱۲۱- می‌دانیم معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ نمایش یک دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ است. کدام‌یک از تابع‌های زیر، نمودارش بخشی از منحنی این دایره است که در بازهٔ $(-۱,۱)$ یک‌به‌یک است؟



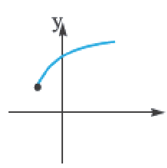
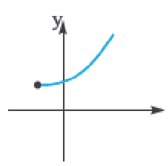
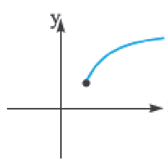
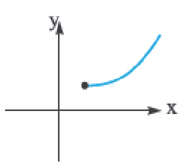
۱) $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ ۲) $f(x)=-\sqrt{۱-x^۲}$

۳) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x^۲} & -۱\le x<۰\\ -\sqrt{۱-x^۲} & ۰\le x\le ۱\end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{۱-x^۲} & -۱<x<۰\\ \sqrt{۱-x^۲} & ۰\le x<۱\end{cases}$

۱۲۲- اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟ (تجربی ـ ۹۵)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۲۳- منحنی تابع وارون تابع $f(x)=x^۲-۲x,x\ge ۱$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۲۴- دامنهٔ تابع وارون تابع $f(x)=۲+\sqrt{x-۱}$ برابر کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۱,۲]$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۲۵- برد تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ برابر کدام است؟

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۲]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $[۰,۲]$

۱۲۶- تابع $f(x)=x^۲+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع *(سراسری ـ ۹۲)*

۱۲۷- معکوس تابع $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۱}$، خود تابع را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) بی‌شمار ۳) ۱ ۴) ۲

سری Z

۱۲۸- تابع با کدام ضابطهٔ زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x+[x]$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=x-|x|$ ۴) $y=x+|x|$

۱۲۹- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=|x+۲|+۴x$ ۲) $y=|x+۲|+|۴x|$

۳) $y=|x+۲|+x$ ۴) $y=|x+۲|+|x|$

۱۳۰- تابع معکوس تابع $y=x^۳+۳x^۲+۳x+۲$ کدام است؟

۱) $y=۱-\sqrt[۳]{x-۱}$ ۲) $y=۱-\sqrt[۳]{x+۱}$ ۳) $y=-۱+\sqrt[۳]{x-۱}$ ۴) $y=-۱+\sqrt[۳]{x+۱}$

۱۳۱- تابع معکوس تابع $y=x^۲-۴x$ با شرط $x<۲$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$ ۲) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x+۴}$

۳) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x-۴}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۴}$

۱۳۲- ضابطهٔ تابع معکوس $f(x)=x^۴-۲x^۲+۱$ با شرط $x\geq ۱$ کدام است؟

۱) $y=\sqrt{۱+\sqrt{x}}$ ۲) $y=\sqrt{۱-\sqrt{x}}$ ۳) $y=-\sqrt{۱+\sqrt{x}}$ ۴) $y=-\sqrt{۱-\sqrt{x}}$

۱۳۳- تابع $f(x)=۲x-|۴-۲x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ در آن بازه کدام است؟ *(خارج ـ ۹۲)*

۱) $\frac{۱}{۴}x+۱, x\geq ۴$ ۲) $\frac{۱}{۴}x-۱, x\leq ۴$ ۳) $\frac{۱}{۴}x-۱, x\geq ۴$ ۴) $\frac{۱}{۴}x+۱, x\leq ۴$

۱۳۴- وارون تابع $y=\dfrac{x^۳+۳x^۲+۳x+۴}{x^۳+۳x^۲+۳x-۱}$ محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) $-۱+\sqrt[۳]{۳}$ ۲) $-۱-\sqrt[۳]{۳}$ ۳) $۱-\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $۱+\sqrt[۳]{۳}$

۱۳۵- ضابطهٔ تابع معکوس تابع با ضابطهٔ $y=x+۴+۴\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $y=x+۴-۴\sqrt{x}$ ۲) $y=x+۴+۴\sqrt{x}$ ۳) $y=x-۲\sqrt{x}$ ۴) $y=x+۲\sqrt{x}$

۱۳۶- دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۲x+۲$ را برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر تعریف کنیم تا تابع یک‌به‌یک باشد؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $(-\infty,۲)$ ۴) $[۲,۳]$

۱۳۷- تابع $f(x)=|x-۱|-|x-۳|$ در بازهٔ $[a,b]$ وارون‌پذیر است. اگر طول این بازه حداکثر مقدار ممکن باشد، ضابطهٔ تابع وارون در این بازه کدام است؟

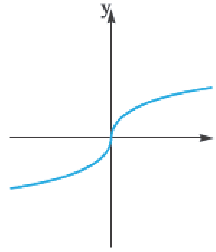
۱) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x-۲, ۱\leq x\leq ۳$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x-۲, -۲\leq x\leq ۲$

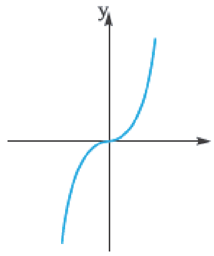
۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۲, ۱\leq x\leq ۳$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۲, -۲\leq x\leq ۲$

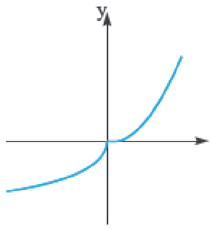
۱۳۸- نمودار کدام تابع زیر، بر نمودار تابع وارونش منطبق است؟

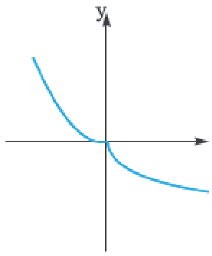
۱) $y=x^۳$ ۲) $y=x^۲$ ۳) $y=|x|$ ۴) $y=-x$

۱۳۹- نمایش هندسی تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$ کدام است؟

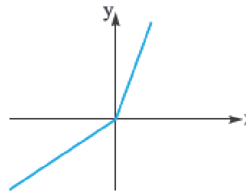
۱) 

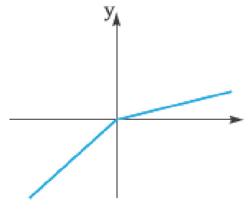
۲) 

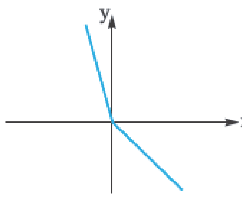
۳) 

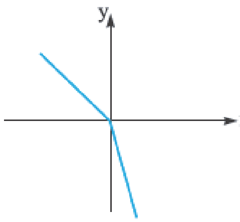
۴) 

۱۴۰- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=۲x+|x|$ کدام است؟

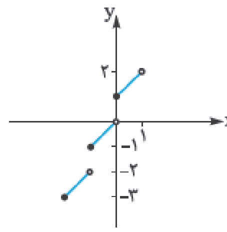
۱) 

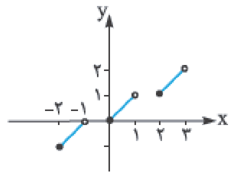
۲) 

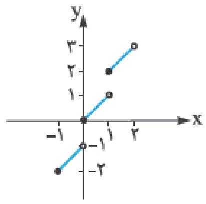
۳) 

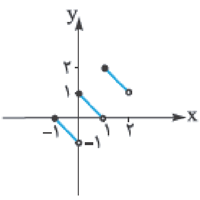
۴) 

۱۴۱- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x+[x]$ در بازهٔ $-۱\leq x<۲$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۴۲- دامنهٔ تابع معکوس تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۱,۱۰]$ ۳) $[۰,\sqrt{۳}]$ ۴) $[۱,+\infty)$

۱۴۳- دامنه و برد تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}-۱$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{cases}D_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)\\ R_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}D_{f^{-۱}}=[-۱,+\infty)\\ R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}\\ R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}D_{f^{-۱}}=[-۱,+\infty)\\ R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}\end{cases}$

۱۴۴- ضابطهٔ تابع وارون تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟ (سراسری ـ ۹۱)

۱) $y=\frac{x}{۱-|x|};|x|<۱$ ۲) $y=\frac{۱-|x|}{|x|};|x|>۱$ ۳) $y=\frac{x}{|x|-۱};|x|>۱$ ۴) $y=\frac{|x|-۱}{x};|x|<۱$

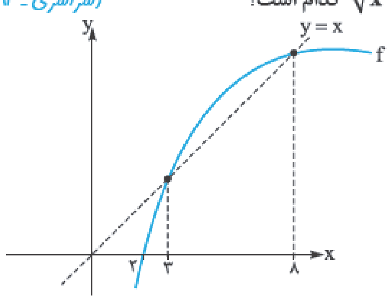
۱۴۵- در تابع با ضابطهٔ $x^{۲}\neq ۱$; $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^{۲}}$ و $f(۰)=۰$، ضابطهٔ تابع وارون آن برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۱)

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $x.f(x)$ ۴) $-x.f(x)$

۱۴۶- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(\sin x)$ کدام است؟ (سراسری ـ ۹۰)

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ ۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

۱۴۷- شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟ (سراسری ـ ۹۴)



۱) $(۰,۲]$
۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$
۴) $[۳,۸]$

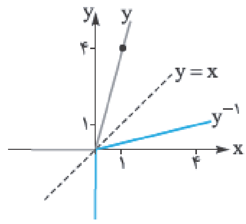
۹۷- گزینهٔ ۲ اگر رابطهٔ R و وارون آن را به شکل زوج مرتب بنویسیم:

$$R=\{(a,۱),(b,۱),(b,۳)\}$$
$$R^{-۱}=\{(۱,a),(۱,b),(۳,b)\}$$

می‌بینیم که هیچ‌کدامشان تابع نیستند.

۹۸- گزینهٔ ۴ گفتیم منحنی وارون (معکوس) یک تابع، قرینهٔ نمودار تابع نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است، پس اول نمودار تابع $y=۲x+|۲x|$ را رسم و سپس قرینه‌اش را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم به دست می‌آوریم.

$$y=۲x+|۲x|=\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$



۹۹- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در ضابطهٔ تابع (یا معادلهٔ خط) و قرینه‌اش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم جای x و y عوض می‌شود، پس:

$$ax+by=۸\xrightarrow[\text{نیمساز ربع اول}]{\text{قرینه نسبت به}}bx+ay=۸$$

یعنی معادلهٔ $ay+bx=۸$ باید همان معادلهٔ $۲x-۳y=b$ باشد، پس:

$$\begin{cases}bx+ay=۸\\ ۲x-۳y=b\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{۲}=\frac{a}{-۳}=\frac{۸}{b}\Rightarrow\frac{b}{۲}=\frac{۸}{b}\Rightarrow b^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=۴\Rightarrow\frac{a}{-۳}=\frac{b}{۲}\Rightarrow\frac{a}{-۳}=\frac{۴}{۲}\Rightarrow a=-۶\\ b=-۴\Rightarrow\frac{a}{-۳}=\frac{b}{۲}\Rightarrow\frac{a}{-۳}=\frac{-۴}{۲}\Rightarrow a=۶\end{cases}$$

بنابراین باید $a=-۶$ و $b=۴$ یا $a=۶$ و $b=-۴$ باشد و در نتیجه $a+b=-۲$ یا $a+b=۲$ است.

۱۰۰- گزینهٔ ۴ در تابع زیر:

$$\{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$$

در دو زوج مرتب $(m,۳)$ و $(-۱,۳)$ مؤلفه‌های دوم (yها) مساوی است؛ پس باید $m=-۱$ باشد، یعنی تابع به شکل $\{(-۲,۲),(-۱,۳),(-۱,۳),(-۲,a)\}$ تبدیل می‌شود. حالا برای این‌که رابطهٔ نوشته‌شده تابع باشد، باید با توجه به $(-۲,۲)$ و $(-۲,a)$ داشته باشیم $a=۲$.

۱۰۱- گزینهٔ ۴ اولاً برای این‌که:

$$f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

تابع باشد، با توجه به دو زوج مرتب $(۳,a^۲-a)$ و $(۳,۲)$ باید داشته باشیم:

$$a^۲-a=۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰\Rightarrow(a-۲)(a+۱)=۰$$
$$\Rightarrow a=۲,a=-۱$$

حالا رابطهٔ f را با مقادیر به دست آمده برای a می‌نویسیم:

$$a=۲\Rightarrow f=\{(۳,۲),(۲,۵),(۳,۲),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

در این حالت برای این‌که f یک‌به‌یک باشد، باید با توجه به $(b,۲)$ و $(۳,۲)$ داشته باشیم $b=۳$.

$$a=-۱\Rightarrow f=\{(۳,۲),(-۱,۵),(۳,۲),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

در این حالت با توجه به دو زوج مرتب $(-۱,۵)$ و $(-۱,۴)$، f تابع نیست؛ پس جواب همان $a=۲$ و $b=۳$ است، یعنی دوتایی مرتب (a,b) برابر است با $(۲,۳)$.

۱۰۲- گزینهٔ ۴ برای هر کدام از گزینه‌ها که بتوانیم مثال نقض می‌آوریم، یعنی سعی می‌کنیم دو مقدار برای x مثال بزنیم که yهای یکسان داشته باشند که نشان دهیم تابع موردنظر یک‌به‌یک نیست:

$$①\ y=|x-۱|\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=۱\\ x=۲\Rightarrow y=۱\end{cases}\ \times$$

$$②\ y=x^۲-۱\Rightarrow\begin{cases}x=۱\Rightarrow y=۰\\ x=-۱\Rightarrow y=۰\end{cases}\ \times$$

$$③\ y=x^۳-x^۲\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=۰\\ x=۱\Rightarrow y=۰\end{cases}\ \times$$

پس جواب ④ است، چون در رابطهٔ $y=x^۳+۱$ به ازای هر مقدار مشخص x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

۱۰۳- گزینهٔ ۳ باید هر کدام از گزینه‌ها را بررسی کنیم. سعی می‌کنیم برای هر کدام که می‌شود مثال نقض بیاوریم:

$$①\ y=x^۲+۱\Rightarrow\begin{cases}x=۱\Rightarrow y=۲\\ x=-۱\Rightarrow y=۲\end{cases}\Rightarrow\text{یک‌به‌یک نیست.}$$

$$②\ y^۲=x^۲+۱\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\Rightarrow y^۳=۲\Rightarrow y=\sqrt[۳]{۲}\\ x=۱\Rightarrow y^۳=۲\Rightarrow y=\sqrt[۳]{۲}\end{cases}$$

⇐ یک‌به یک نیست.

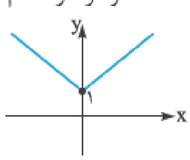
$$④\ y^۲=x^۲+۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۱\Rightarrow y^۲=۲\Rightarrow y=\sqrt{۲},y=-\sqrt{۲}\\ x=-۱\Rightarrow y^۲=۲\Rightarrow y=\sqrt{۲},y=-\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow\text{یک‌به‌یک نیست.}$$

پس جواب ③ است. البته می‌توانیم در مورد ③ بگوییم که چون $y^۳=x^۳+۱$ است، پس $y=\sqrt[۳]{x^۳+۱}$ و در نتیجه به ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

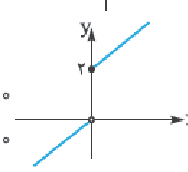
۱۰۴- گزینهٔ ۲ نمودار هر کدام از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

$$①\ f(x)=\begin{cases}x+۱ & x\geq ۰\\ -x+۱ & x<۰\end{cases}$$



یک‌به‌یک نیست.

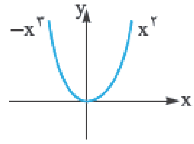
$$②\ f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$



یک‌به‌یک است.

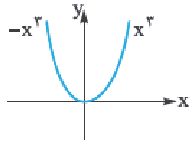
جواب (۲) است اما نمودار بقیه را هم ببینید:

(۳) $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۰\\ -x^{۳} & x<۰\end{cases}$



یک‌به‌یک نیست.

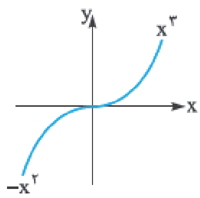
(۴) $f(x)=\begin{cases}x^{۳} & x\geq ۰\\ -x^{۳} & x<۰\end{cases}$



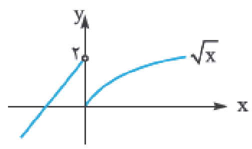
یک‌به‌یک نیست.

۱۰۵- گزینهٔ (۲) نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^{۳} & x\geq ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$$



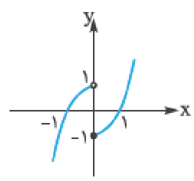
$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ x+۲ & x<۰\end{cases}$$



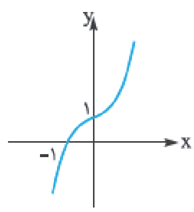
همان‌طور که می‌بینیم f یک‌به‌یک و g غیریک‌به‌یک است.

۱۰۶- گزینهٔ (۲) نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم تا یک‌به‌یک بودنشان را بررسی کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۱ & x\geq ۰\\ ۱-x^{۲} & x<۰\end{cases}$$



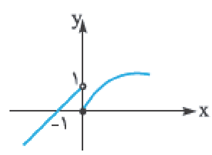
$$g(x)=\begin{cases}x^{۲}+۱ & x\geq ۰\\ ۱-x^{۲} & x<۰\end{cases}$$



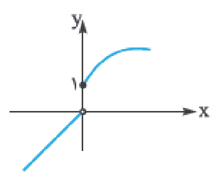
همان‌طور که در شکل‌ها می‌بینیم f یک‌به‌یک نیست اما g یک‌به‌یک است.

۱۰۷- گزینهٔ (۳) نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ x+۱ & x<۰\end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۱ & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$



همان‌طور که در شکل‌ها می‌بینیم f غیر یک‌به‌یک و g یک‌به‌یک است.

۱۰۸- گزینهٔ (۴) برای شما که تا الان این چیزها را در مورد تابع‌ها خوانده‌اید، روش حل این سؤال رد گزینه‌های غلط است. برای هر کدام از گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم، یعنی دو یا چند x مثال می‌زنیم که یک y داشته باشند که نشان دهیم یک‌به‌یک نیستند.

(۱) $y=x^{۴}-۲x^{۲}:\quad y=۰ \Rightarrow x^{۲}(x^{۲}-۲)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\sqrt{۲}\\ x=-\sqrt{۲}\end{cases} \Rightarrow (۰,۰),(\sqrt{۲},۰),(-\sqrt{۲},۰) \Rightarrow$$ یک‌به یک نیست

(۲) $y=[x]:\quad (۱,۱),(۱/۵,۱),\ldots \Rightarrow$ یک‌به یک نیست

(۳) $y=x^{۳}-۳x^{۲}:\quad y=۰ \Rightarrow x^{۲}(x-۳)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=۳\end{cases} \Rightarrow (۰,۰),(۳,۰) \Rightarrow$$ یک‌به یک نیست

پس (۴) یک‌به‌یک است. البته سال آینده یاد می‌گیرید که چه‌طور ثابت کنید که (۴) یک‌به‌یک است!

۱۰۹- گزینهٔ (۴) x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{x-۱} \Rightarrow yx-y=۱ \Rightarrow yx=۱+y$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱+y}{y} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{۱+x}{x} \Rightarrow y=\frac{۱}{x}+۱$$

۱۱۰- گزینهٔ (۴) x را برحسب y پیدا می‌کنیم و بعد جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=x^{۳}-۸ \Rightarrow x^{۳}=y+۸$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۸} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\sqrt[۳]{x+۸}$$

۱۱۱- گزینهٔ (۱) همان‌طور که گفتیم برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و بعد جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{۱-x} \Rightarrow y^{۲}=۱-x$$

$$\Rightarrow x=۱-y^{۲} \xrightarrow{\text{وارون}} y=۱-x^{۲}$$

فقط چون در خود تابع $y=\sqrt{۱-x}$، مقدار $y\geq ۰$ است، پس تابع وارون باید داشته باشیم $x\geq ۰$.

۱۱۲- گزینهٔ (۳) می‌دانیم اگر نقطهٔ (a,b) روی نمودار خود تابع باشد، نقطه (b,a) روی نمودار تابع وارون است؛ پس جابه‌جاشدهٔ مختصات نقطه‌ها را در تابع $y=x^{۳}+\sqrt{x}$ امتحان می‌کنیم:

$$y=x^{۳}+\sqrt{x}:\quad x=۴ \Rightarrow y=۴^{۳}+\sqrt{۴}=۶۶$$

$$\Rightarrow (۴,۶۶)\in f \Rightarrow (۶۶,۴)\in f^{-۱}$$

۱۱۳- گزینهٔ (۳) مثل سؤال قبل جابه‌جاشدهٔ مختصات نقطه‌ها را در تابع f امتحان می‌کنیم تا ببینیم کدامشان روی تابع وارون است:

$$f(x)=x^{۲}-x+۱:\quad x=۰ \Rightarrow y=۱$$

$$\Rightarrow (۰,۱)\in f \Rightarrow (۱,۰)\in f^{-۱}$$

۱۱۴- گزینهٔ ۳ از مختصات نقطهٔ روی منحنی تابع و تابع وارون استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳},x=۴ \Rightarrow y=۹ \Rightarrow (۴,۹)\in f$$

$$\Rightarrow (۹,۴)\in f^{-۱}$$

و از بین گزینه‌ها مختصات نقطهٔ $(۹,۴)$ تنها در ۳ یعنی $f^{-۱}(x)=\frac{۳x+۱}{x-۲}$ صدق می‌کند.

راه دوم x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x+۱}{x-۳} \Rightarrow yx-۳y=۲x+۱$$

$$\Rightarrow yx-۲x=۳y+۱ \Rightarrow x(y-۲)=۳y+۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳y+۱}{y-۲} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{۳x+۱}{x-۲}$$

۱۱۵- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$ را داریم و می‌خواهیم $f^{-۱}(۴)$ را پیدا کنیم. $f^{-۱}(۴)$ یعنی در $f^{-۱}$ مقدار $x=۴$ است، پس در خود تابع مقدار $y=۴$ است، بنابراین:

$$f(x)=-x+\sqrt{-۲x} \xrightarrow{y=۴} ۴=-x+\sqrt{-۲x}$$

$$\Rightarrow ۴+x=\sqrt{-۲x} \Rightarrow ۱۶+۸x+x^۲=-۲x$$

$$\Rightarrow x^۲+۱۰x+۱۶=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-۴(۱۶)}}{۲}=\frac{-۱۰\pm\sqrt{۳۶}}{۲}=\frac{-۱۰\pm۶}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۸ \\ x=-۲ \end{cases}$$

جواب $x=-۸$ در معادلهٔ $۴+x=\sqrt{-۲x}$ صدق نمی‌کند، پس نقطهٔ $x=-۲$ است. بنابراین داریم $f(-۲)=۴$ و در نتیجه $f^{-۱}(۴)=-۲$. دقت کنید که برای پیداکردن جواب معادلهٔ $x+\sqrt{-۲x}=۴$ می‌توانستیم گزینه‌ها را امتحان کنیم تا برای حل معادله این‌قدر وقت صرف نکنیم!

۱۱۶- گزینهٔ ۱ باز هم x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم. برای پیداکردن محدودهٔ x در تابع وارون باید محدودهٔ y در تابع اصلی یا همان برد تابع را پیدا کنیم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow \text{برد}: y\le ۲$$

$$y=۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y$$

$$\Rightarrow x-۱=۴-۴y+y^۲$$

$$\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵ \xrightarrow{\text{وارون}} y=x^۲-۴x+۵$$

پس تابع وارون تابع بالا عبارت است از: $y=x^۲-۴x+۵, x\le ۲$

راه دوم قبل از هر چیز می‌رویم سراغ برد تابع، در $y=۲-\sqrt{x-۱}$ داریم $y\le ۲$؛ پس در ضابطهٔ تابع وارون باید $x\le ۲$ باشد، یعنی ۳ و ۴ حذف می‌شوند. حالا برای پیداکردن ضابطهٔ وارون از مختصات یک نقطه روی خود تابع و بررسی نقطه با مختصات جابه‌جاشده‌اش روی تابع وارون استفاده می‌کنیم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱}: \quad x=۲ \Rightarrow y=۲-\sqrt{۲-۱}=۱$$

$$\Rightarrow (۲,۱)\in f$$

$$\Rightarrow (۱,۲)\in f^{-۱} \Rightarrow \begin{cases} ۱\ \ y=x^۲-۴x+۵ \Rightarrow ۲=۱-۴+۵ ✓ \\ ۲\ \ y=-x^۲-۴x+۵ \Rightarrow ۲=-۱-۴+۵ ✗ \end{cases}$$

پس جواب ۱ است.

۱۱۷- گزینهٔ ۴ از مختصات نقطه استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۱ \\ ۲x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

$$x=۲ \Rightarrow y=۴ \Rightarrow (۲,۴)\in f \Rightarrow (۴,۲)\in f^{-۱}$$

$$x=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow (۰,-۱)\in f \Rightarrow (-۱,۰)\in f^{-۱}$$

با قراردادن مختصات دو نقطهٔ $(۴,۲)$ و $(-۱,۰)$ در گزینه‌ها می‌بینیم که در ۱ صدق می‌کند. پس جواب ۴ است.

راه دوم وارون هر کدام از ضابطه‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم. فقط برای تعیین محدودهٔ x در تابع وارون باید برد هر کدام از ضابطه‌ها را در f پیدا کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۱ \Rightarrow \text{برد}: y\ge ۱ \\ ۲x-۱ & x<۱ \Rightarrow \text{برد}: y<۱ \end{cases}$$

$$x\ge ۱ \Rightarrow y=x^۲ \Rightarrow x=\sqrt{y}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=\sqrt{x}, x\ge ۱$$

$$x<۱ \Rightarrow y=۲x-۱ \Rightarrow ۲x=y+۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(y+۱)$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{۱}{۲}(x+۱), x<۱$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}(x+۱) & x<۱ \\ \sqrt{x} & x\ge ۱ \end{cases}$$

دقت کنید این‌که حدود x در خود تابع و تابع وارون یکسان است، تصادفی است و قرار نیست همیشه این‌طور باشد!

۱۱۸- گزینهٔ ۱ از مختصات نقطه روی تابع و تابع وارون استفاده می‌کنیم:

$$y=\begin{cases} \sqrt{x} \quad x\ge ۰ \quad x=۴ \Rightarrow y=۲ \\ \Rightarrow (۴,۲)\in f \Rightarrow (۲,۴)\in f^{-۱} \\ -\sqrt{-x} \quad x<۰ \quad x=-۴ \Rightarrow y=-۲ \\ \Rightarrow (-۴,-۲)\in f \Rightarrow (-۲,-۴)\in f^{-۱} \end{cases}$$

مختصات دو نقطهٔ $(۲,۴)$ و $(-۲,-۴)$ فقط در ۱ یعنی $y=x|x|$ صدق می‌کنند، پس جواب ۱ است.

راه دوم وارون هر کدام از ضابطه‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge ۰ \quad y=\sqrt{x} \quad (\text{برد}: y\ge ۰)\\ \Rightarrow y^۲=x \xrightarrow{\text{وارون}} y=x^۲, x\ge ۰ \\ x<۰ \quad y=-\sqrt{-x} \quad (\text{برد}: y<۰)\\ \Rightarrow y^۲=-x \Rightarrow y=-x^۲, x<۰\end{cases}$$

پس ضابطهٔ $f^{-۱}$ به صورت $y=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ است که می‌توانیم (با توجه به خاصیت قدرمطلق) آن را به شکل $y=x|x|$ بنویسیم.

۱۱۹- گزینهٔ ۴ برای آن‌که ضابطهٔ معکوس تابع را پیدا کنیم، بهتر است مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را به دو بازهٔ $x>۰$ و $x<۰$ تقسیم کنیم:

$$y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\ne ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

$$x>۰ \Rightarrow y=\frac{x}{x}\sqrt{x}=\sqrt{x} \Rightarrow x=y^۲$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=x^۲, x>۰$$

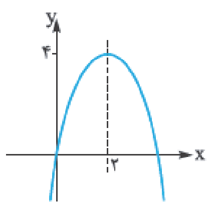
$$x<۰ \Rightarrow y=\frac{-x}{x}\sqrt{-x}=-\sqrt{-x} \Rightarrow -x=y^۲$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=-x^۲, x<۰$$

بنابراین ضابطهٔ تابع وارون به‌صورت $f^{-۱}(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ است.

در نقطهٔ $x=۰$ هم که $y=۰$ است که در هر دو ضابطه صدق می‌کند. از طرف دیگر هر دو ضابطهٔ تابع را می‌توانیم به صورت $y=x|x|, x\in\mathbb{R}$ خلاصه کنیم؛ پس تابع وارون برابر است با $y=x|x|, x\in\mathbb{R}$.

۱۲۰- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=-x^۲+۴x$ یک سهمی است، نمودار تابع را رسم می‌کنیم. رأس سهمی نقطه‌ای به طول ۲ است؛



پس حداکثر a برای این‌که تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ تابع وارون داشته باشد (یعنی یک‌به‌یک باشد) برابر ۲ است.

حالا می‌توانیم ضابطهٔ تابع وارون را در بازهٔ $(-\infty,۲]$ با دو روش پیدا می‌کنیم:

① از مختصات نقطه روی تابع و روی تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$x\le ۲, y=-x^۲+۴x: \quad x=۱ \Rightarrow y=۳$$

$$\Rightarrow (۱,۳)\in f \Rightarrow (۳,۱)\in f^{-۱}$$

و از بین گزینه‌ها مختصات $(۳,۱)$ تنها در ضابطهٔ ② یعنی $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{۴-x}$ صدق می‌کند؛ پس جواب ② است.

② x را برحسب y پیدا می‌کنیم (و البته به این‌که $x\le ۲$ است هم توجه می‌کنیم): $y=-x^۲+۴x \Rightarrow y=-(x^۲-۴x+۴)+۴$

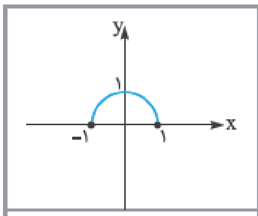
$$\Rightarrow y=-(x-۲)^۲+۴ \Rightarrow (x-۲)^۲=۴-y$$

$$\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{۴-y}$$

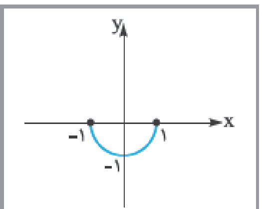
$$\xrightarrow{x\le ۲} -x+۲=\sqrt{۴-y} \Rightarrow x=۲-\sqrt{۴-y}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=۲-\sqrt{۴-x}$$

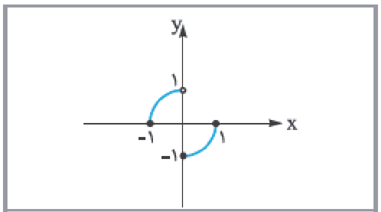
۱۲۱- گزینهٔ ۴ از معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ نتیجه می‌گیریم $y=\sqrt{۱-x^۲}$ یا $y=-\sqrt{۱-x^۲}$؛ پس گزینه‌ها همگی نشان‌دهندهٔ قسمتی از این دایره‌اند. با توجه به بازه‌های داده‌شده برای x و y، نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



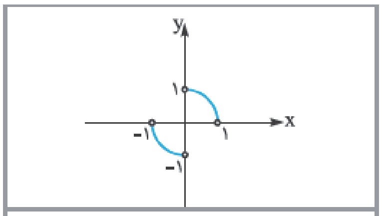
① $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$



② $f(x)=-\sqrt{۱-x^۲}$



③ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x^۲} & -۱\le x<۰\\ -\sqrt{۱-x^۲} & ۰\le x\le ۱\end{cases}$

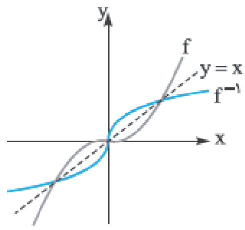


④ $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{۱-x^۲} & -۱<x<۰\\ \sqrt{۱-x^۲} & ۰<x<۱\end{cases}$

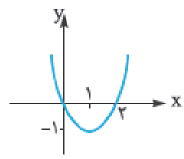
با توجه به نمودارها می‌بینیم که تنها ④ یک‌به‌یک است.

۱۲۲- گزینهٔ ۳ اول نمودار تابع $f(x)=x|x|$ را رسم می‌کنیم و بعد برای رسم نمودار $f^{-۱}$، قرینهٔ نمودار f را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم می‌کنیم:

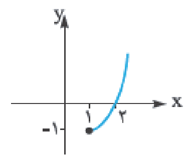
$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases} \Rightarrow$$



۱۲۳- گزینهٔ ۱ منحنی تابع $f(x)=x^2-2x, x\ge 1$ را رسم می‌کنیم: نمودار یک سهمی است با رأس $(1,-1)$ که از نقاط $(0,0)$ و $(2,0)$ می‌گذرد:

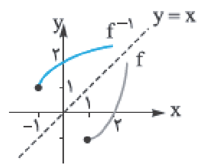


$y=x^2-2x$



$y=x^2-2x, x\ge 1$

حالا قرینهٔ نمودار رسم‌شده را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم می‌کنیم:



پس جواب ۱ است.

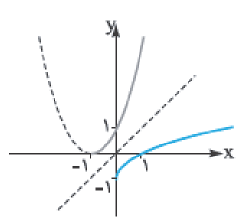
۱۲۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم دامنهٔ تابع وارون برابر با برد خود تابع است. در تابع $f(x)=2+\sqrt{x-1}$ چون همواره $\sqrt{x-1}\ge 0$، پس $y\ge 2$ است یعنی برد تابع برابر $[2,+\infty)$ و در نتیجه دامنهٔ تابع وارون نیز برابر $D_{f^{-1}}=[2,+\infty)$ است.

۱۲۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم برد تابع وارون برابر با دامنهٔ تابع است. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ برابر است با:

$$2-x\ge 0 \Rightarrow x\le 2 \Rightarrow D_f=(-\infty,2]$$

پس برد تابع وارون هم برابر بازهٔ $(-\infty,2]$ است.

۱۲۶- گزینهٔ ۴ اول نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$ به ازای $x>-1$ و نمودار تابع وارونش را رسم می‌کنیم: همان‌طور که در شکل می‌بینیم f و f^{-1} یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



۱۲۷- گزینهٔ ۲ تابع را به صورت $y=\frac{2x-1-x+1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$ می‌نویسیم. ضابطهٔ وارون f را پیدا می‌کنیم:

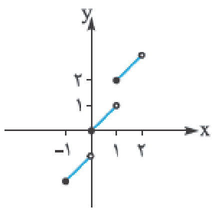
$$y=\frac{x}{x-1}\Rightarrow yx-y=x\Rightarrow yx-x=y$$

$$\Rightarrow x(y-1)=y\Rightarrow x=\frac{y}{y-1}\xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{x}{x-1}$$

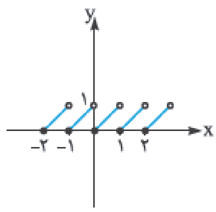
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}$$

همان‌طور که می‌بینیم ضابطه‌های f و f^{-1} یکسان هستند پس دو نمودار روی هم منطبق می‌شوند یعنی یکدیگر را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کنند.

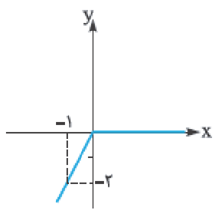
۱۲۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌هایی که در گزینه‌های این سؤال هستند از نمودارهای مهمی هستند که بهتر است بلد باشید تا سریع رسمشان کنید. به نمودار هر کدام توجه کنید:



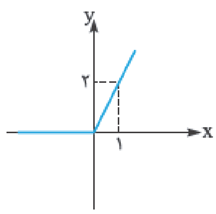
۱) $y=x+[x]$



۲) $y=x-[x]$



۳) $y=x-|x|$



۴) $y=x+|x|$

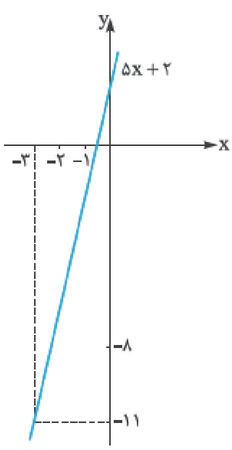
با توجه به نمودارها فقط تابع $y=x+[x]$ از بین گزینه‌ها یک‌به‌یک است.

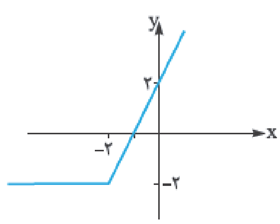
۱۲۹- گزینهٔ ۱ نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم می‌کنیم:

۱) $y=|x+2|+4x=\begin{cases}5x+2 & x\ge -2\\ 3x-2 & x<-2\end{cases}$

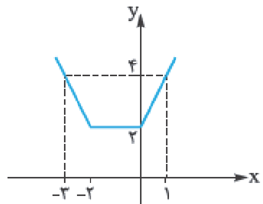
همین تابع ۱ یک‌به‌یک است پس نیازی به ادامه نیست اما برای این‌که بهتر یاد بگیرید نمودار بقیهٔ گزینه‌ها را هم رسم کنید.

نمودار هر کدام را برایتان رسم می‌کنم که ببینید درست رسم کرده‌اید یا نه!

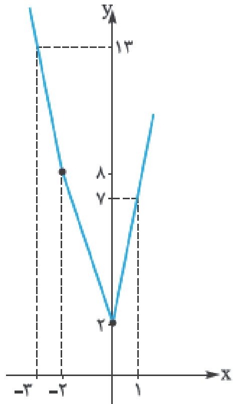




$y=|x+2|+x$



$y=|x+2|+|x|$



$y=|x+2|+|4x|$

۱۳۰- گزینهٔ ۳ برای پیداکردن x برحسب y در تابع $y=x^3+3x^2+3x+2$ باید از اتحاد مکعب استفاده کنیم:

$$y=x^3+3x^2+3x+1+1 \Rightarrow y=(x+1)^3+1$$
$$\Rightarrow (x+1)^3=y-1$$
$$\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}-1$$
$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=\sqrt[3]{x-1}-1$$

راه دوم از مختصات نقطهٔ روی تابع و روی تابع وارون استفاده می‌کنیم:

$$y=x^3+3x^2+3x+2,\ x=1 \Rightarrow y=9$$
$$\Rightarrow (1,9)\in f \Rightarrow (9,1)\in f^{-1}$$

با امتحان‌کردن نقطهٔ $(9,1)$ در گزینه‌ها می‌بینیم که این نقطه فقط در ۳ صدق می‌کند.

۱۳۱- گزینهٔ ۱ از مختصات نقطهٔ روی تابع و جابه‌جاشده‌اش روی تابع وارون استفاده می‌کنیم:

$$x<2,\ f(x)=x^2-4x$$
$$x=1 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow (1,-3)\in f \Rightarrow (-3,1)\in f^{-1}$$

از بین گزینه‌ها مختصات $(-3,1)$ تنها در ۱ یعنی $f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+4}$ صدق می‌کند پس جواب ۱ است.

راه دوم x را برحسب y پیدا می‌کنیم (دقت کنید که هنگام پیداکردن جواب آخر باید به شرط $x<2$ توجه کنیم):

$$y=x^2-4x \Rightarrow x^2-4x-y=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4(1)(-y)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4y+16}}{2}$$
$$=\frac{2(2\pm\sqrt{y+4})}{2}$$
$$=2\pm\sqrt{y+4} \xrightarrow{x<2} x=2-\sqrt{y+4}$$
$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=2-\sqrt{x+4}$$

۱۳۲- گزینهٔ ۱ از مختصات نقاط استفاده می‌کنیم:

$$x\geq 1,\ f(x)=x^4-2x^2+1 \qquad x=2$$
$$\Rightarrow y=9 \Rightarrow (2,9)\in f \Rightarrow (9,2)\in f^{-1}$$

از بین گزینه‌ها نقطهٔ $(9,2)$ فقط در ۱ یعنی $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ صدق می‌کند پس جواب ۱ است.

راه دوم x را برحسب y پیدا می‌کنیم. برای این کار عبارت x^4-2x^2+1 را به شکل اتحاد می‌نویسیم و به شرط $x\geq 1$ هم توجه می‌کنیم:

$$y=x^4-2x^2+1 \Rightarrow (x^2-1)^2=y \Rightarrow |x^2-1|=\sqrt{y}$$
$$\xrightarrow{x\geq 1} x^2-1=\sqrt{y} \Rightarrow x^2=1+\sqrt{y}$$
$$\Rightarrow |x|=\sqrt{1+\sqrt{y}}$$
$$\xrightarrow{x\geq 1} x=\sqrt{1+\sqrt{y}} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۴ اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم تا ببینیم در چه بازه‌ای یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است: $f(x)=2x-|4-2x|$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>2 \Rightarrow y=2x+4-2x=4 \\ x\leq 2 \Rightarrow y=2x-4+2x=4x-4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 4 & x>2 \\ 4x-4 & x\leq 2 \end{cases}$$

پس تابع در بازهٔ $x\leq 2$ وارون‌پذیر و یک‌به‌یک است. حالا ضابطهٔ تابع وارون را پیدا می‌کنیم (برای پیداکردن محدودهٔ x در تابع وارون باید محدودهٔ y (یعنی برد تابع) را در خود تابع پیدا کنیم):

$$y=4x-4 \xrightarrow{x\leq 2} y\leq 4,\ y=4x-4$$
$$\Rightarrow 4x=y+4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}y+1$$
$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{1}{4}x+1,\ x\leq 4$$

۱۳۴- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد وارون تابع زیر:

$$y=\frac{x^3+3x^2+3x+4}{x^3+3x^2+3x-1}$$

با محور yها یعنی نقطه‌ای که روی تابع وارون طولش برابر صفر است. پس نقطهٔ متناظر این نقطه روی خود تابع، نقطه‌ای است که عرضش برابر صفر است، یعنی باید در ضابطهٔ تابع y را برابر صفر قرار دهیم:

$$y=0 \Rightarrow x^3+3x^2+3x+4=0$$
$$\Rightarrow \overbrace{x^3+3x^2+3x+1}^{\text{اتحاد مکعب}}+3=0 \Rightarrow (x+1)^3+3=0$$
$$\Rightarrow (x+1)^3=-3 \Rightarrow x+1=-\sqrt[3]{3} \Rightarrow x=-1-\sqrt[3]{3}$$

پس نقطهٔ برخورد منحنی تابع با محور طول‌ها نقطهٔ $(-1-\sqrt[3]{3},0)$ است و در نتیجه منحنی تابع وارون محور yها را در نقطه‌ای به عرض $-1-\sqrt[3]{3}$ قطع می‌کند.

۱۳۵- گزینهٔ ۱ از مختصات نقطه استفاده می‌کنیم:

$$y=x+۴+۴\sqrt{x}\,,\,x=۴\ \Rightarrow\ y=۱۶$$

$$\Rightarrow\ (۴,۱۶)\in f\ \Rightarrow\ (۱۶,۴)\in f^{-۱}$$

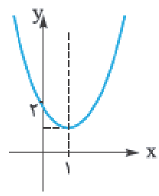
و نقطهٔ $(۱۶,۴)$ از بین گزینه‌ها فقط در ۱ یعنی $y=x+۴-۴\sqrt{x}$ صدق می‌کند؛ پس جواب ۱ است.

راه دوم x را برحسب y پیدا می‌کنیم. برای این کار اول عبارت $x+۴+۴\sqrt{x}$ را به شکل اتحاد مربع یعنی $(\sqrt{x}+۲)^{۲}$ می‌نویسیم:

$$y=(\sqrt{x}+۲)^{۲}\ \Rightarrow\ \sqrt{y}=\sqrt{x}+۲\ \Rightarrow\ \sqrt{x}=\sqrt{y}-۲$$

$$\Rightarrow\ x=y-۴\sqrt{y}+۴\ \xrightarrow{\text{وارون}}\ y=x-۴\sqrt{x}+۴$$

۱۳۶- گزینهٔ ۴ می‌دانیم نمودار $f(x)=x^{۲}-۲x+۲$ یک سهمی است که طول رأسش برابر $-\dfrac{b}{۲a}=۱$ است، پس بازهٔ داده‌شده باید طوری باشد که فقط یک طرف نقطهٔ $x=۱$ قرار گیرد، یعنی از بین گزینه‌ها فقط ۴ یعنی $[۲,۳]$ چنین است. البته می‌توانستیم نمودار منحنی را هم رسم کنیم:



۱۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم تا ببینیم در چه بازه‌ای وارون‌پذیر است:

$$f(x)=|x-۱|-|x-۳|=\begin{cases}-x+۱+x-۳ & x\le ۱\\ x-۱+x-۳ & ۲۸-۴\\ x-۱-x+۳ & x>۳\end{cases}$$

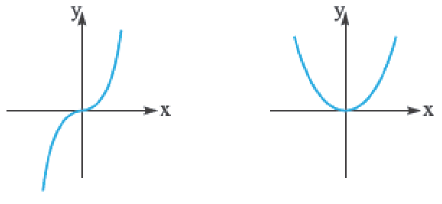
$$\Rightarrow\ f(x)=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲x-۴ & ۱\le x\le ۳\\ ۲ & x>۳\end{cases}$$

با توجه به این‌که تابع در بازه‌های $x<۱$ و $x>۳$ ثابت است، پس تنها در بازهٔ $۱\le x\le ۳$ یا $[۱,۳]$ وارون دارد. حالا ضابطهٔ تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم: $۱\le x\le ۳\ \Rightarrow\ y=۲x-۴$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲\le ۲x\le ۶\Rightarrow -۲\le ۲x-۴\le ۲\Rightarrow -۲\le y\le ۲\\ y=۲x-۴\Rightarrow x=\dfrac{۱}{۲}y+۲\xrightarrow{\text{وارون}} y=\dfrac{۱}{۲}x+۲\end{cases}$$

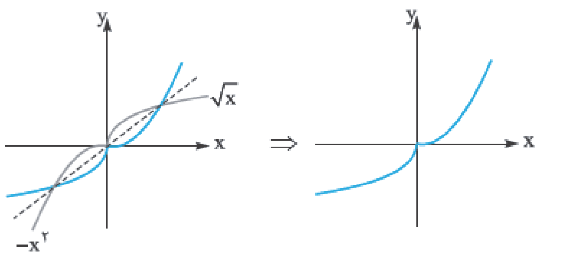
پس ضابطهٔ تابع وارون به شکل $-۲\le x\le ۲$ و $f^{-۱}(x)=\dfrac{۱}{۲}x+۲$ است.

۱۳۸- گزینهٔ ۴ از آن‌جا که نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند، نمودار f و $f^{-۱}$ وقتی بر هم منطبق می‌شوند که خود نمودار f نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن باشد، یعنی خط $y=x$ محور تقارن نمودار f باشد. اگر نمودار هر کدام از تابع‌های گزینه‌ها را رسم کنیم:



می‌بینیم که نمودار تابع ۴ یعنی $y=-x$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن است.

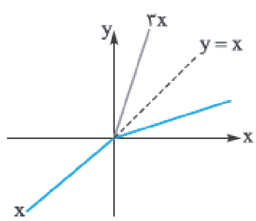
۱۳۹- گزینهٔ ۳ می‌دانیم نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه‌اند، پس نمودار خود تابع
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$$
را رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌اش را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم می‌کنیم:



پس نمودار تابع وارون ۳ است.

۱۴۰- گزینهٔ ۲ نمودار خود تابع را رسم می‌کنیم و بعد قرینه‌اش را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم می‌کنیم:

$$f(x)=۲x+|x|=\begin{cases}۳x & x\ge ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$



با توجه به گزینه‌ها و شیب خط‌های رسم‌شده جواب ۲ است.

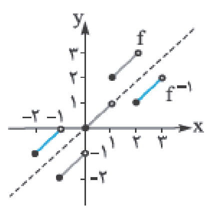
۱۴۱- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $f(x)=x+[x]$ را در بازهٔ $[-۱,۲)$ رسم می‌کنیم و سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم به دست می‌آوریم:

$$-۱\le x<۰\Rightarrow y=x+[x]=x+(-۱)$$

$$\Rightarrow\ y=x-۱\qquad \begin{array}{|c}-۱\\ -۲\end{array}\qquad\begin{array}{|c}۰\\ -۱\end{array}$$

$$۰\le x<۱\ \Rightarrow\ y=x+[x]=x+۰$$

$$\Rightarrow\ y=x\qquad \begin{array}{|c}۰\\ ۰\end{array}\qquad\begin{array}{|c}۱\\ ۱\end{array}$$



$$۱\le x<۲ \Rightarrow y=x+[x]=x+۱$$

$$\Rightarrow y=x+۱ \qquad \begin{array}{|c|c} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{array}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۳ می‌دانیم دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر برد f است، پس باید برد تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}$ را پیدا کنیم. در تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}$ از یک طرف $y\ge ۰$ است و از طرف دیگر چون $۳-\sqrt{x-۱}\le ۳$ است، پس $y=\sqrt{۳\sqrt{x-۱}}\le\sqrt{۳}$، یعنی برد تابع برابر است با $۰\le y\le\sqrt{۳}$؛ پس دامنهٔ $f^{-۱}$ هم برابر است با $[۰,\sqrt{۳}]$.

۱۴۳- گزینهٔ ۲ دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}-۱$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x-۲}-۱$$

دامنه: $x-۲\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۲ \Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$

برد: $\sqrt{x-۲}\ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۲}-۱\ge -۱ \Rightarrow y\ge -۱$

$$\Rightarrow R_f=[-۱,+\infty)$$

حالا چون دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر برد f و برد $f^{-۱}$ برابر دامنهٔ f است، پس:

$$D_{f^{-۱}}=[-۱,+\infty), R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$$

۱۴۴- گزینهٔ ۱ برای پیداکردن ضابطهٔ وارون از مختصات نقطه استفاده می‌کنیم:

$$y=\frac{x}{۱+|x|}, x=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\Rightarrow (۱,\frac{۱}{۲})\in f$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲},۱)\in f^{-۱}$$

مختصات نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ در ۱ و ۲ یعنی $y=\frac{x}{۱-|x|}$ و $y=\frac{۱-|x|}{|x|}$ صدق می‌کند، پس می‌رویم سراغ یک نقطهٔ دیگر:

$$y=\frac{x}{۱+|x|}, x=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow (۰,۰)\in f\Rightarrow (۰,۰)\in f^{-۱}$$

مختصات نقطهٔ $(۰,۰)$ فقط در ۱ صدق می‌کند (بین ۱ و ۲)،

پس جواب ۱ است.

راه دوم یک بار x را $x\ge ۰$ و بار دیگر $x<۰$ در نظر می‌گیریم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{x}{۱+|x|}\xrightarrow{x\ge ۰} y=\frac{x}{۱+x}\Rightarrow y+yx=x$$

$$\Rightarrow x-yx=y\Rightarrow x(۱-y)=y$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{۱-y}\xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{x}{۱-x}$$

$$y=\frac{x}{۱+|x|}\xrightarrow{x\le ۰} y=\frac{x}{۱-x}\Rightarrow y-yx=x$$

$$\Rightarrow x+yx=y\Rightarrow x(۱+y)=y$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{۱+y}\xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{x}{۱+x}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به ازای $x\ge ۰$ برابر $\frac{x}{۱-x}$ و به ازای $x<۰$ برابر $\frac{x}{۱+x}$ است، یعنی $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱-|x|}$ است. (شرط $|x|<۱$ را هم خودتان پیدا کنید.)

۱۴۵- گزینهٔ ۱ یک بار x را $۰<x<۱$ و بار دیگر $-۱<x<۰$ در نظر می‌گیریم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$۰<x<۱ \Rightarrow y=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow y=\frac{x}{x}\sqrt{۱-x^۲}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow y^۲=۱-x^۲ \Rightarrow x^۲=۱-y^۲$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{۱-y^۲} \Rightarrow -۱<x<۰ \Rightarrow y=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}$$

$$\Rightarrow y=\frac{-x}{x}\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow y=-\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow y^۲=۱-x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲=۱-y^۲ \Rightarrow x=-\sqrt{۱-y^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=-\sqrt{۱-x^۲}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به شکل زیر است:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} -\sqrt{۱-x^۲} & -۱<x<۰ \\ ۰ & x=۰ \\ \sqrt{۱-x^۲} & ۰<x<۱ \end{cases}$$

که با توجه به این‌که برای $-۱<x<۰$ حاصل $\frac{|x|}{x}=-۱$ و برای $۰<x<۱$ حاصل $\frac{|x|}{x}$ برابر ۱ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f^{-۱}(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt{۱-x^۲}, f(۰)=۰$$

یعنی $f^{-۱}(x)=f(x)$.

راه دوم مختصات یک نقطه را در تابع و تابع وارون امتحان می‌کنیم:

$$۰<x<۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})\in f \Rightarrow (\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})\in f^{-۱}$$

از طرفی چون $f(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۱}{۲}$ است؛ پس $f^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=f(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$،

یعنی $f^{-۱}(x)=f(x)$.

۱۴۶- گزینهٔ ۴ x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم تا ضابطهٔ f^{-1} را پیدا کنیم:

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow y^2+y^2x^2=x^2$$

$$\Rightarrow x^2-x^2y^2=y^2 \Rightarrow x^2(1-y^2)=y^2$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2} \xrightarrow{\text{y, x هم‌علامت‌اند.}} x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

پس $f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$، حالا $f^{-1}(\sin x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{|\cos x|}$$

راه دوم می‌خواهیم $f^{-1}(\sin x)$ را پیدا کنیم، پس در تابع f^{-1}، باید مقدار x را برابر $\sin x$ فرض کنیم؛ یعنی y خود تابع برابر $\sin x$ است. برای این‌که بین x در ضابطهٔ f و x در $\sin x$ اشتباه نکنیم، به جای $\sin x$ می‌نویسیم $\sin\alpha$ و x را پیدا می‌کنیم (و در آخر دوباره به جای α می‌گذاریم x):

$$\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1+x^2}{x^2} \Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{x^2}+1$$

$$\Rightarrow \cot^2\alpha=\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2=\frac{1}{\cot^2\alpha}=\tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow |x|=\frac{|\sin\alpha|}{|\cos\alpha|} \xrightarrow[\text{هم‌علامت‌اند.}]{\sin\alpha,\, x} x=\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

پس $f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{|\cos x|}$.

۱۴۷- گزینهٔ ۴ اول نمودار f^{-1} (یعنی قرینهٔ نمودار f نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) را رسم می‌کنیم. دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $x\ge f^{-1}(x)$ باشد؛ پس با توجه به شکل، دامنهٔ $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ یا جواب نامعادلهٔ $x\ge f^{-1}(x)$ برابر بازهٔ $[3,8]$ است.