آزمون‌های مرحله‌ای

هندسه ۱

۹

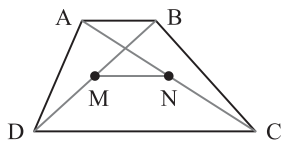
تشابه

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل ۹

پاسخ تشریحی آزمون ۵۵

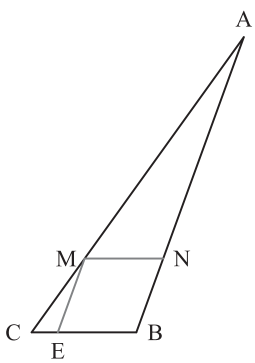
۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳a}{۳b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳a+۱}{۳b+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۳m=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=\frac{۱}{۶}$$



۲- گزینه‌ی ۳ اندازه‌ی پاره‌خطی که وسط دو قطر ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، نصف قدرمطلق تفاضل دو قاعده است.

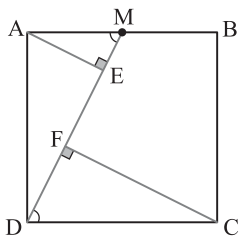
$$\begin{cases} M \text{ وسط } BD \\ N \text{ وسط } AC \end{cases}\Rightarrow MN=\frac{DC-AB}{۲}=\frac{۳AB-AB}{۲}=AB=\frac{۱}{۳}DC$$



۳- گزینه‌ی ۱ اگر طول ضلع لوزی را برابر x درنظر بگیریم، آن‌گاه بنابر قضیه‌ی تالس نتیجه می‌گیریم:

$$MN\|BC\Rightarrow\frac{AN}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{AB-x}{AB}=\frac{x}{BC}\Rightarrow\frac{۱۲-x}{۱۲}=\frac{x}{۴}\Rightarrow ۱۲x=۴۸-۴x\Rightarrow ۱۶x=۴۸\Rightarrow x=۳$$

بنابراین محیط لوزی $۴\times۳=۱۲$ می‌باشد.



۴- گزینه‌ی ۲ بنابر فرض تست $AE+CF=۶$. اگر $AM=a$، آن‌گاه اندازه‌ی ضلع مربع برابر $۲a$ است. دو مثلث AME و CDF به نسبت $\frac{۱}{۲}$ متشابه‌اند.

$$\frac{AM}{DC}=\frac{AE}{CF}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow CF=۲AE$$

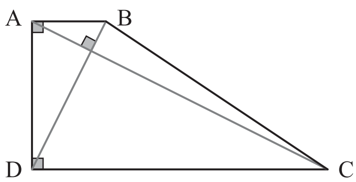
$$\overset{\Delta}{ADM}: DM^۲=AD^۲+AM^۲=۴a^۲+a^۲=۵a^۲\Rightarrow DM=\sqrt{۵}a \qquad (۱)$$

بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\overset{\Delta}{ADM}: AE\times DM=AD\times AM\Rightarrow AE=\frac{AD\times AM}{DM}=\frac{۲a\times a}{\sqrt{۵}a}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}a$$

$$AE+CF=۶\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt{۵}}a+\frac{۴}{\sqrt{۵}}a=۶\Rightarrow\frac{۶}{\sqrt{۵}}a=۶\Rightarrow a=\sqrt{۵}$$

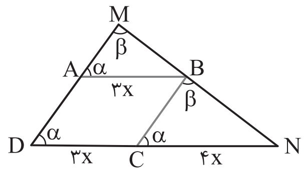
بنابراین طبق رابطه‌ی (۱) داریم $DM=\sqrt{۵}a=\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}=۵$.



۵- گزینه‌ی ۱ از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADB و ADC نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DC}\Rightarrow AD^۲=AB\times DC\Rightarrow ۴=۱\times DC\Rightarrow DC=۴$$

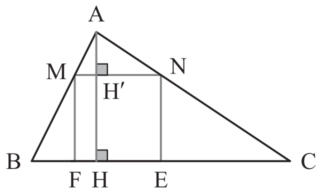
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AD(AB+DC)=\frac{۱}{۲}(۲)(۱+۴)=۵$$



۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا فرض می‌کنیم $DC=۳x$ و $CN=۴x$ تا شرط $DN=\frac{۷}{۳}DC$ برقرار باشد. طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب (مطابق شکل) مشاهده می‌شود که دو مثلث AMB و CBN به حالت تساوی دو زاویه با نسبت تشابه $k=\frac{AB}{CN}=\frac{۳x}{۴x}=\frac{۳}{۴}$ متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{S_{MAB}}{S_{NBC}}=(\frac{۳}{۴})^{۲}=\frac{۹}{۱۶}$$

بنابراین مساحت مثلث MBA، برابر $\frac{۹}{۱۶}\times ۱۰۰=۵۶/۲۵$ درصد مساحت مثلث NBC می‌باشد.

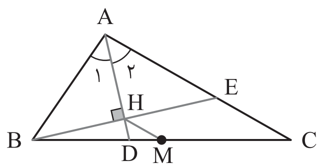


۷- گزینه‌ی ۴ دو مثلث AMN و ABC متشابه هستند. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{AH'}{AH}=\frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow\frac{AH'}{AH}=\frac{۲}{۶}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل از}}\frac{AH'}{HH'}=\frac{۲}{۴}\xrightarrow{HH'=NE=۲}\frac{AH'}{۲}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow AH'=۱$$

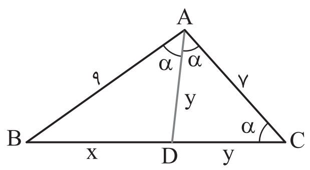
$$S_{AMN}=\frac{۱}{۲}AH'\times MN=\frac{۱}{۲}(۱)(۲)=۱$$



۸- گزینه‌ی ۴ عمود BH را امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در E قطع کند. مثلث ABE متساوی‌الساقین اســت، زیرا AH هم نیمســاز و هم ارتفاع است. پس $AB=AE$. از طرفی در مثلث ABE پاره‌خط AH میانه اســت، پس H وســط BE قرار دارد و چون M نیز وسط BC اســت، درنتیجه بنابر عکس قضیه‌ی تالس MH موازی EC و مساوی نصف آن است.

$$MH=\frac{۱}{۲}EC\xrightarrow{MH=\frac{۱}{۳}AB}\frac{۱}{۳}AB=\frac{۱}{۲}EC\Rightarrow EC=\frac{۲}{۳}AB$$

$$AC=AE+EC=AB+\frac{۲}{۳}AB=\frac{۵}{۳}AB\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{۵}{۳}$$

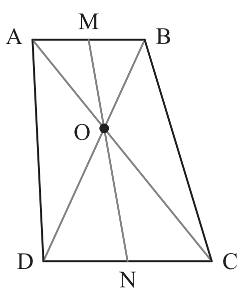


۹- گزینه‌ی ۱ نیمساز زاویه‌ی A را رسم می‌کنیم، با توجه به شکل مثلث ADC متساوی‌الساقین است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}B\hat{A}D=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{B}\end{cases}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{۹}{x+y}=\frac{x}{۹}=\frac{y}{۷}\Rightarrow\begin{cases}۷x=۹y\\ x^{۲}+xy=۸۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+x(\frac{۷}{۹}x)=۸۱\Rightarrow x^{۲}+\frac{۷}{۹}x^{۲}=۸۱\Rightarrow ۱۶x^{۲}=۸۱\times۹\Rightarrow x^{۲}=\frac{۸۱\times۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۹\times۳}{۴}=\frac{۲۷}{۴}\ ,\ y=\frac{۷}{۹}\times\frac{۲۷}{۴}=\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow BC=x+y=\frac{۲۷}{۴}+\frac{۲۱}{۴}=\frac{۴۸}{۴}=۱۲$$



۱۰- گزینه‌ی ۳ در هر ذوزنقه نقطه‌ی تلاقی دو قطر و نقاط وســط دو قاعده روی یک خط قرار دارند. با توجه به شکل داریم:

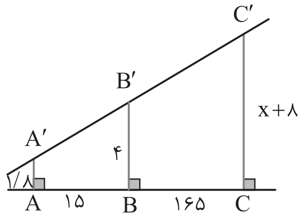
$$AB\parallel DC\Rightarrow\overset{\Delta}{AOB}\sim\overset{\Delta}{ODC}$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت میانه‌های نظیر با نسبت تشابه برابر است.

$$\frac{OM}{ON}=\frac{AB}{DC}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{OM}{MN}=\frac{۲}{۵}\xrightarrow{MN=۱۲}\frac{OM}{۱۲}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow OM=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

پاسخ تشریحی آزمون ۵۶

۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به نکته‌ی بیان شده در درسنامه داریم:

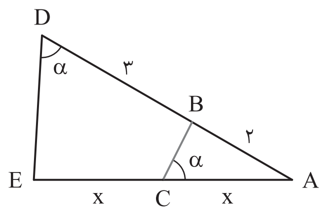


$$\frac{AB}{BC}=\frac{۱۵}{۱۶۵}=\frac{۱}{۱۱}=\frac{m}{n}$$

در نتیجه:

$$BB'=\frac{n\times AA'+m\times CC'}{m+n}\Rightarrow ۴=\frac{۱۱\times ۱/۸+۱(۸+x)}{۱۱+۱}\Rightarrow ۴۸=۱۹/۸+۸+x\Rightarrow x=۲۰/۲$$

۲- گزینه‌ی ۴ دو مثلث ABC و ADE متشابه هستند زیرا:

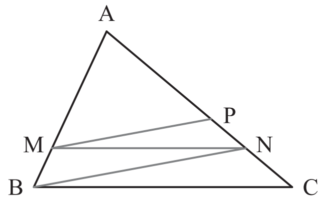


$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}\\ B\hat{C}A=\hat{D}=\alpha\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ADE}\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow\frac{۲}{۲x}=\frac{x}{۵}\Rightarrow x^{۲}=۵\Rightarrow x=\sqrt{۵}$$

پس نسبت تشابه این دو مثلث $\frac{AB}{AE}=\frac{۲}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ می‌باشد. داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^{۲}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل از}}\frac{S_{ABC}}{S_{BCED}}=\frac{۱}{۴}$$

۳- گزینه‌ی ۲ در شکل داده شده دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده می‌کنیم:



$$MN\|BC\xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}}\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\xrightarrow{\frac{AM}{MB}=۳}۳=\frac{AN}{NC}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{۳}{۴}=\frac{AN}{AC}$$

$$\Rightarrow AN=\frac{۳}{۴}AC \qquad (۱)$$

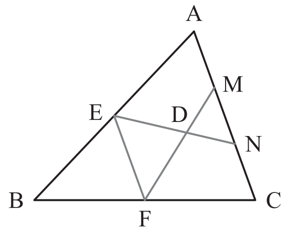
$$MP\|BN\xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}}\frac{AM}{MB}=\frac{AP}{PN}\xrightarrow{\frac{AM}{MB}=۳}۳=\frac{AP}{PN}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب}}۴=\frac{AN}{PN}$$

$$\Rightarrow AN=۴PN \qquad (۲)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{۳}{۴}AC=۴PN\Rightarrow\frac{PN}{AC}=\frac{۳}{۱۶}$$

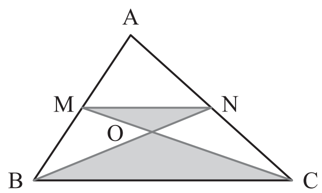
۴- گزینه‌ی ۱ از E به F وصل می‌کنیم. بنابر عکس قضیه‌ی تالس EF موازی AC و مساوی نصف AC می‌باشد. از طرفی $MN=\frac{۱}{۳}AC$، بنابراین خواهیم داشت:



$$EF\|MN\Rightarrow\overset{\Delta}{DEF}\sim\overset{\Delta}{DMN}\Rightarrow\frac{DM}{DF}=\frac{MN}{EF}=\frac{\frac{۱}{۳}AC}{\frac{۱}{۲}AC}=\frac{۲}{۳}$$

قلم‌چی

۵- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم پاره‌خطی که وسط دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و نصف آن می‌باشد، پس $MN\|BC$ و $MN=\frac{۱}{۲}BC$. چون O مرکز ثقل مثلث ABC است، پس مساحت مثلث OBC مساوی $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC است.



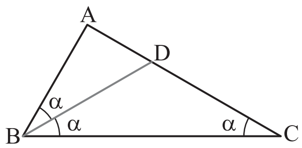
$$MN\|BC\Rightarrow\overset{\Delta}{OMN}\sim\overset{\Delta}{OBC}\Rightarrow\frac{S_{OMN}}{S_{OBC}}=(\frac{MN}{BC})^{۲}=(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow S_{OMN}=\frac{۱}{۴}S_{OBC}=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۳}S_{ABC})=\frac{۱}{۱۲}S_{ABC}$$

بنابراین داریم:

$$S_{OMN}+S_{OBC}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABC}+\frac{۱}{۳}S_{ABC}=\frac{۵}{۱۲}S_{ABC}$$

۶- گزینه‌ی ۲ نیمساز زاویه‌ی B را رسم می‌کنیم، در این‌صورت مثلث BDC متساوی‌الساقین است، درنتیجه $BD=DC$. داریم:



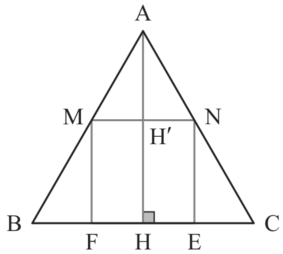
$$\overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow AB^{۲}=AC\times AD$$

$$\xrightarrow{AD=AC-DC}AB^{۲}=AC\times(AC-DC)\xrightarrow{BD=DC}AB^{۲}=AC^{۲}-AC\times BD$$

از طرفی با توجه به تناسب $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{BC}$ نتیجه می‌گیریم $BD=\frac{AB\times BC}{AC}$، داریم:

$$AB^{۲}=AC^{۲}-AC\times\frac{AB\times BC}{AC}\Rightarrow AB^{۲}=AC^{۲}-AB\times BC$$

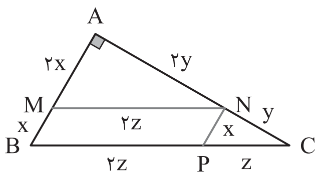
۷- گزینه‌ی ۱ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها با نسبت تشابه برابر است.



$$MN\|BC\Rightarrow\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{AH'}{AH}\xrightarrow[\text{از صورت}]{\text{تفضیل}}\frac{BC-MN}{BC}=\frac{AH-AH'}{AH}\Rightarrow\frac{a-MN}{a}=\frac{MN}{h_a}$$

$$\Rightarrow ah_a-MN\times h_a=a\times MN\Rightarrow MN(a+h_a)=ah_a\Rightarrow MN=\frac{ah_a}{a+h_a}$$

۸- گزینه‌ی ۲ با فرض $AM=۲MB$ اگر MB را برابر x درنظر بگیریم، آن‌گاه $AM=۲x$. با توجه به قضیه‌ی تالس شکل مقابل را خواهیم داشت.



$$\text{محیط متوازی الاضلاع}=۲۰\Rightarrow ۲(x+۲z)=۲۰\Rightarrow x+۲z=۱۰\quad(۱)$$

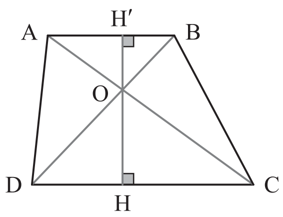
$$BC=۱۲\Rightarrow ۳z=۱۲\Rightarrow z=۴\xrightarrow{(۱)}x=۲$$

$$\overset{\Delta}{AMN}:AM^{۲}+AN^{۲}=MN^{۲}\xrightarrow[MN=۲z=۸]{AM=۲x=۴}۴^{۲}+AN^{۲}=۸^{۲}\Rightarrow AN^{۲}=۴۸\Rightarrow AN=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

$$AN=۲y\xrightarrow{AN=۴\sqrt{۳}}y=۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}(۳x)(۳y)=\frac{۱}{۲}(۶)(۶\sqrt{۳})=۱۸\sqrt{۳}$$

۹- گزینه‌ی ۱ بنابر فرض تست $OH=۳$ ، $AB=۴$ و $DC=۷$، پس داریم:

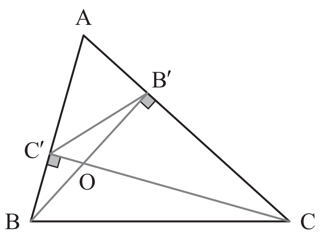


$$AB\|DC\Rightarrow\overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{ODC}\Rightarrow\frac{AB}{DC}=\frac{OH'}{OH}\Rightarrow\frac{۴}{۷}=\frac{OH'}{۳}\Rightarrow OH'=\frac{۱۲}{۷}$$

$$\text{ارتفاع ذوزنقه}=HH'=۳+\frac{۱۲}{۷}=\frac{۳۳}{۷}$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}HH'(AB+DC)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳۳}{۷}(۴+۷)=\frac{۱۱}{۱۴}\times۳۳$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ دو مثلث ABB' و ACC' متشابه‌اند زیرا:



$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}\\ A\hat{B'}B=A\hat{C'}C=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABB'}\sim\overset{\Delta}{ACC'}\Rightarrow\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$$

حال می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث $AB'C'$ و ABC متشابه‌اند زیرا:

$$\begin{cases}\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}\\ \hat{A}=\hat{A}\end{cases}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{AB'C'}\Rightarrow\frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{۹}=\frac{B'C'}{۱۲}\Rightarrow B'C'=\frac{۱۶}{۳}$$