

آزمون‌های مرحله‌ای

آزمون‌های مرحله‌ای

۹

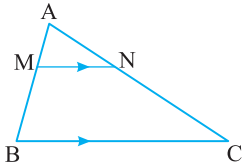
تشابه

فصل نهم: تشابه

قضیه تالس و نتایج آن

با توجه به شکل، اگر $MN \parallel BC$ ، داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \\ \frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} \end{cases}$$



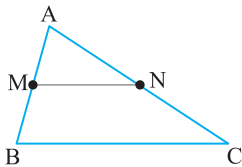
توجه

عکس قضیه تالس نیز درست است.

قضیه میان خط در مثلث

اگر نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و AC باشند، به MN میان خط می‌گوییم و داریم:

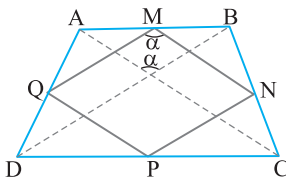
$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{1}{2} BC$$



کاربرد قضیه تالس در شکل حاصل از وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی

اگر وسط اضلاع یک چهارضلعی را مطابق شکل به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل (MNPQ) متوازی‌الاضلاع خواهد شد و داریم:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}, \quad \text{محیط } MNPQ = AC + BD$$



حالت‌های خاص

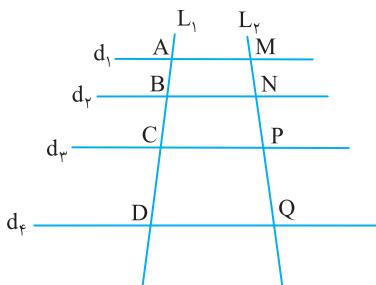
(۱) اگر قطرهای چهارضلعی ABCD بر هم عمود باشند، چهارضلعی MNPQ مستطیل است و برعکس.

(۲) اگر قطرهای چهارضلعی ABCD با هم برابر باشند، چهارضلعی MNPQ لوزی است و برعکس.

کاربرد قضیه تالس در خطوط موازی

اگر چند خط موازی دو خط مورب را قطع کنند، روی این دو خط مورب پاره‌های متناظر متناسب ایجاد می‌کنند.

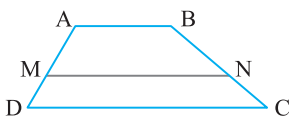
$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ}$$



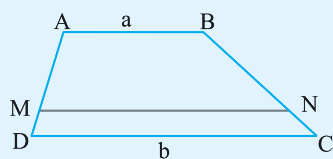
کاربرد قضیه تالس در دوزنقه

در شکل مقابل، اگر پاره خط MN موازی قاعده‌ها باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MD} &= \frac{BN}{NC} \\ \frac{AM}{AD} &= \frac{BN}{BC} \\ \frac{DM}{AD} &= \frac{CN}{BC} \end{aligned}$$



عکس این مطلب نیز درست می‌باشد.

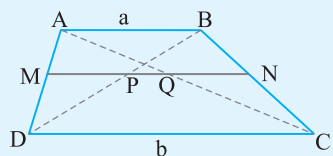


نکته: در دوزنقه‌ی ABCD با قاعده‌هایی به طول a و b (مطابق شکل) اگر MN موازی قاعده‌ها باشد و بدانیم $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{m}{n}$ ، در این صورت طول MN از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$MN = \frac{na + mb}{m + n}$$

نکته: در دوزنقه‌ی ABCD اگر M و N به ترتیب وسط AD و BC باشند، داریم:

$$MN = \frac{a + b}{2}$$



نکته: در این حالت، پاره‌خط MN قطرهای دوزنقه را نصف می‌کند. اگر P و Q نقاط برخورد MN با اقطار باشند، خواهیم داشت:

$$PQ = \frac{|b - a|}{2}$$

چندضلعی‌های متشابه

دو چندضلعی را متشابه می‌گوییم، هرگاه:

(الف) زاویه‌های آن‌ها، نظیر به نظیر مساوی باشند.

(ب) ضلع‌های متناظر در آن‌ها متناسب باشند.

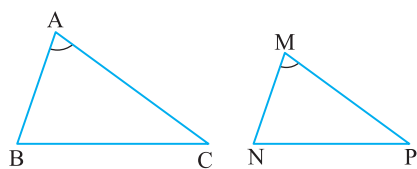
توجه: نسبت اضلاع نظیر در دو چندضلعی متشابه را نسبت تشابه می‌گوییم.

نکته: هر دو n ضلعی منتظم متشابه‌اند.

حالت‌های تشابه دو مثلث

(۱) حالت (ز-ز): اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

(۲) حالت (ض-ض-ض): اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر بوده و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آن‌گاه دو مثلث متشابه‌اند.



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{M} \\ \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

(۳) حالت (ض-ض-ض): هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

پاره‌خط‌های متناسب در دو شکل

اگر دو چندضلعی با نسبت k با هم متشابه باشند، نسبت همه‌ی پارامترهای خطی متناظر در دو چندضلعی برابر همان نسبت تشابه یعنی k است.

نتیجه: در دو مثلث متشابه، نسبت دو ارتفاع نظیر، دو نیمساز نظیر، دو میانه‌ی نظیر و محیط دو مثلث، با نسبت تشابه برابر است.

نکته: نسبت مساحت دو شکل متشابه برابر مربع نسبت تشابه (k^2) است.

مبحث آزمون	زمان پیشنهادی	شماره صفحات پاسخ تشریحی
تشابه	۲۰ دقیقه	۱۴۸ و ۱۴۹

۱- اگر $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ و $\frac{3a+1}{3b+2} = 3m$ ، مقدار m کدام است؟

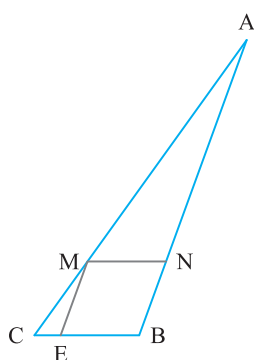
- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲- در دوزنقه‌ی ABCD قاعده‌ی بزرگ سه برابر قاعده‌ی کوچک است. طول پاره‌خطی که وسط دو قطر را به هم وصل می‌کند، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ قاعده‌ی بزرگ (۲) $\frac{1}{6}$ قاعده‌ی بزرگ (۳) $\frac{1}{3}$ قاعده‌ی بزرگ (۴) $\frac{4}{9}$ قاعده‌ی بزرگ

۳- در شکل مقابل اگر $AB = 3BC = 12$ ، آن‌گاه محیط لوزی MNBE برابر کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۸

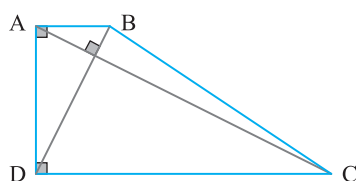


۴- در مربع ABCD نقطه‌ی M وسط ضلع AB می‌باشد. اگر مجموع فواصل دو رأس A و C از DM برابر ۶ باشد، طول DM کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) $\frac{5}{2}$

۵- در دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ی ABCD دو قطر AC و BD برهم عمودند. اگر $AD = 2AB = 2$ ، آن‌گاه مساحت این دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

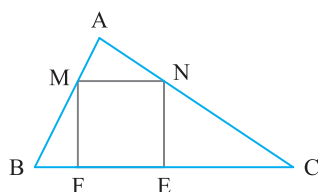


۶- در متوازی‌الاضلاع ABCD خط گذرا بر B امتداد دو ضلع DA و DC را به ترتیب در M و N قطع می‌کند. اگر $DN = \frac{7}{3}DC$ ، مساحت مثلث MAB چند درصد مساحت مثلث NBC است؟

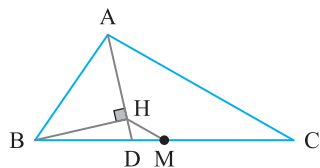
- (۱) $\frac{37}{5}$ (۲) $\frac{42}{75}$ (۳) $\frac{56}{25}$ (۴) $\frac{62}{5}$

۷- در مثلث ABC مربعی به ضلع ۲ محاط شده است. اگر $BC = 6$ ، آن‌گاه مساحت مثلث AMN کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱



محاسبات



۸- در مثلث ABC از رأس B عمود BH را بر نیمساز زاویه ی A رسم کرده ایم.

اگر M وسط ضلع BC باشد و $MH = \frac{1}{3} AB$ ، آن گاه نسبت $\frac{AC}{AB}$ برابر

کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۹- در مثلث ABC داریم $AB=9$ ، $AC=7$ و $\hat{A}=2\hat{C}$. اندازه ی BC کدام است؟

$13/5$ (۴)

13 (۳)

$12/5$ (۲)

12 (۱)

۱۰- اندازه ی قاعده های یک دوزنقه ۶ و ۹ واحد و طول پاره خطی که دو نقطه ی وسط قاعده ها را به هم وصل می کند برابر

۱۲ واحد است. فاصله ی نقطه ی تلاقی دو قطر این دوزنقه از وسط قاعده ی کوچک تر چقدر است؟

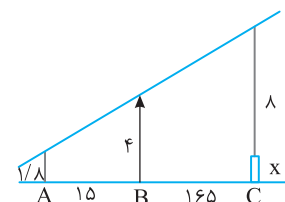
$5/4$ (۴)

$4/8$ (۳)

$4/2$ (۲)

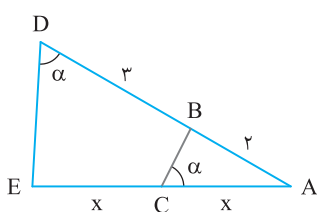
$3/6$ (۱)

مبحث آزمون	زمان پیشنهادی	شماره صفحات پاسخ تشریحی
تشابه	۲۰ دقیقه	۱۵۰ و ۱۵۱



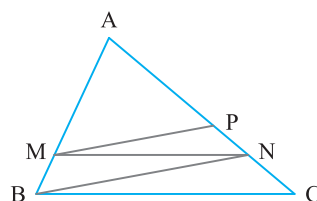
- ۱- در شکل مقابل، دکلی به طول ۸ متر بر بالای برج C نصب شده است. دید چشم ناظر A به ارتفاع ۱/۸ متر از بالاترین نقطه‌ی دکل و بالاترین نقطه‌ی تیرک ۴ متری B در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟

- (۱) ۱۹/۸ (۲) ۲۰/۲ (۳) ۲۰/۸ (۴) ۲۱/۲



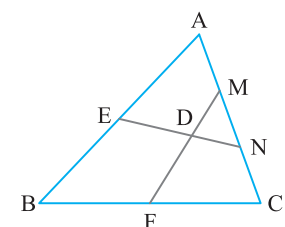
- ۲- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث کوچک تر به مساحت چهارضلعی برابر کدام است؟

- (۱) ۱/۵ (۲) ۱/۴ (۳) ۳/۴ (۴) ۱/۵



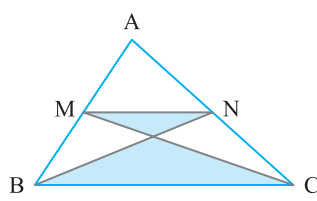
- ۳- در شکل زیر می‌دانیم $MN \parallel BC$ و $MP \parallel BN$. اگر $AM = 3MB$ ، آن گاه حاصل $\frac{PN}{AC}$ کدام است؟

- (۱) ۴/۱۵ (۲) ۳/۱۶ (۳) ۱/۸ (۴) ۱/۴



- ۴- در شکل مقابل $AM = MN = NC$ ، نقطه‌ی E وسط ضلع AB و نقطه‌ی F وسط ضلع BC است. $\frac{DM}{DF}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۲/۳ (۲) ۳/۴ (۳) ۱/۲ (۴) ۱/۳



- ۵- در شکل مقابل M و N وسط اضلاع مثلث هستند. مساحت قسمت هاشورزده چه کسری از مساحت مثلث است؟

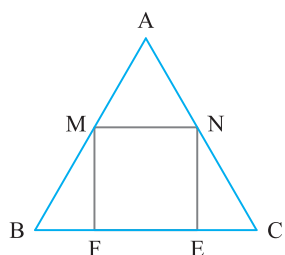
- (۱) ۱/۳ (۲) ۳/۸ (۳) ۵/۱۲ (۴) ۱/۲

- ۶- در مثلث ABC زاویه‌ی B دو برابر زاویه‌ی C می‌باشد. کدام رابطه بین اضلاع مثلث ABC برقرار است؟

- (۱) $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (۲) $AC^2 - AB^2 = AB \times BC$ (۳) $AB^2 - AB \times BC = AC^2$ (۴) $BC^2 = AC^2 - AB^2$

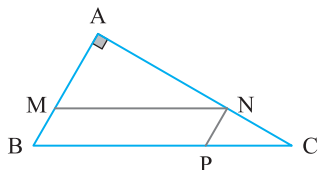
- ۷- مربعی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a محاط شده است. اندازه‌ی ضلع مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{ah_a}{a + h_a}$ (۲) $\frac{a^2}{a + h_a}$ (۳) $\frac{2ah_a}{a + h_a}$ (۴) $\frac{2a^2}{a + h_a}$



محاسبات

- ۸- در شکل زیر مثلث ABC قائم الزاویه و چهارضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع به محیط ۲۰ می باشد. اگر $AM = ۲MB$ و $BC = ۱۲$ ، آن گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

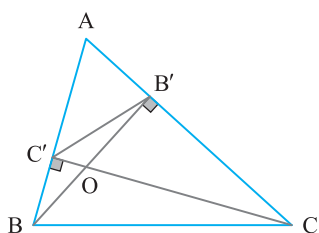


- (۱) ۱۸
(۲) $۱۸\sqrt{۳}$
(۳) ۳۶
(۴) $۳۶\sqrt{۳}$

- ۹- در دوزنقه‌ای به قاعده‌های ۴ و ۷ فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو قطر از قاعده‌ی بزرگ‌تر ۳ می باشد. مساحت این دوزنقه چه مضربی از ۳۳ می باشد؟

- (۱) $\frac{۱۱}{۱۴}$ (۲) $\frac{۱۱}{۷}$ (۳) $\frac{۱}{۷}$ (۴) $\frac{۱}{۱۴}$

- ۱۰- در مثلث ABC ارتفاع اضلاع AB و AC در O متقاطع اند. اگر $AB' = ۴$ ، $AB = ۹$ و $BC = ۱۲$ ، اندازه‌ی $B'C'$ کدام است؟



- (۱) $\frac{۱۴}{۳}$
(۲) ۴
(۳) $\frac{۱۶}{۳}$
(۴) ۶