در این فصل ابتدا به چند تعریف در مورد چندضلعی‌ها، اضلاع و قطرهای آن‌ها می‌پردازیم. سپس چندضلعی‌های خاص و ویژگی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در نهایت اصول مساحت را در اشکال مهم بیان می‌کنیم.

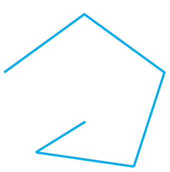
چندضلعی

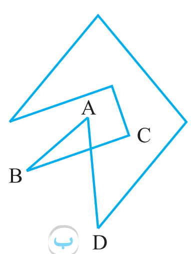
شکلی است بسته که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد (در حقیقت شامل $n \geq ۳$ پاره‌خط)، طوری‌که نقاط انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آن‌ها روی یک خط قرار نگرفته باشند. به عبارت دیگر هر دو پاره‌خطی که در یک انتها مشترک‌اند، خودشان در یک امتداد نباشند (با هم زاویه‌ی غیر از ۱۸۰° بسازند)؛ هم‌چنین پاره‌خط‌ها فقط در نقاط انتهایی‌شان، یکدیگر را قطع کنند.

مثلاً شکل‌های (الف) و (ب) که رسم شده‌اند چندضلعی نیستند:

(الف) به دلیل این‌که یک شکل بسته نیست، چندضلعی نمی‌باشد.

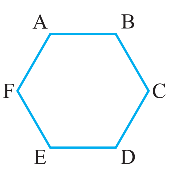
(ب) هم به دلیل این‌که AD و BC یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی خود قطع کرده‌اند، چندضلعی نخواهد بود.


الف



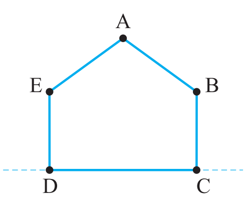
ب

اما شکل زیر یک چندضلعی است:



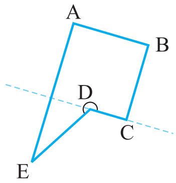
در این چندضلعی، پاره‌خط‌های AB، BC، CD، DE، EF و FA اضلاع چندضلعی ABCDEF (شش ضلعی) بوده و نقاط A، B، C، D، E و F رأس‌های چندضلعی خوانده می‌شوند. به عبارت دیگر هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطه‌ی مشترک آن دو ضلع را رأس می‌گوییم. هم‌چنین رئوس دو سر یک ضلع، رئوس مجاورند (مثل E و D). اگر تعداد اضلاع یا رئوس یک چندضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می‌گوییم.

تعریف n ضلعی محدب: یک n ضلعی را محدب می‌گوییم هرگاه با امتداد هر ضلع از طرفین، کل شکل (بقیه‌ی نقاط چندضلعی) در یک طرف آن واقع شوند. به عبارت دیگر تمام زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب، کم‌تر از ۱۸۰° است.

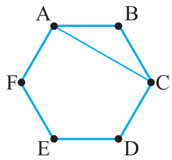


مطابق شکل، پنج‌ضلعی ABCDE یک پنج‌ضلعی محدب است. در این شکل ضلع CD را از طرفین امتداد داده‌ایم و کل شکل یک طرف این خط قرار گرفته است (شما هم هر دفعه یکی از اضلاع را امتداد دهید و محدب‌بودن پنج‌ضلعی ABCDE را بررسی کنید). هم‌چنین تمام زاویه‌های داخلی مثل $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$ قطعاً کم‌تر از ۱۸۰° است.

اگر n ضلعی، محدب نباشد آن را مقعر می‌گوییم. در n ضلعی مقعر با امتداد حداقل یکی از اضلاع، قسمتی از شکل در یک طرف و بقیه‌ی شکل در طرف دیگر خط موردنظر واقع می‌شود. در حقیقت حداقل یکی از زاویه‌های داخلی n ضلعی مقعر بیش از ۱۸۰° است.



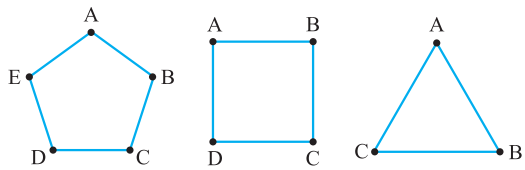
مطابق شکل پنج‌ضلعی ABCDE مقعر است. با امتداد ضلع CD از طرفین، قسمتی از شکل در یک طرف این خط قرار می‌گیرد؛ در حقیقت $\hat{CDE} > ۱۸۰^\circ$.

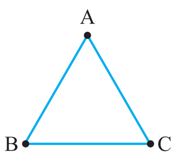


تعریف قطر در چندضلعی: پاره‌خطی است که رئوس غیرمجاور در یک n ضلعی را به هم وصل می‌کند.
در شکل روبه‌رو رئوس A و C غیرمجاور بوده و پاره‌خط AC را قطر این شش‌ضلعی می‌گوییم.

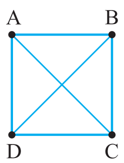
مثال و جواب

مثال **مطابق شکل‌های روبه‌رو یک سه‌ضلعی (مثلث)، یک چهارضلعی و یک پنج‌ضلعی وجود دارند. از هر رأس به تمام رئوس دیگر وصل کنید و تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده را بیابید.**

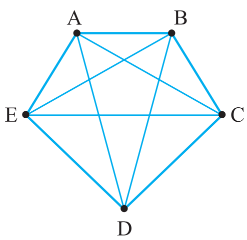




جواب الف) بررسی مثلث ABC: مطابق شکل روبه‌رو و با شروع از رأس A، از این رأس به دو رأس B و C می‌توان وصل کرد (تا این‌جا دو پاره‌خط). حال اگر از رأس B به رأس A وصل کنیم، پاره‌خط جدیدی حاصل نمی‌شود؛ ولی BC پاره‌خط جدیدی است و در نهایت از رأس C پاره‌خط جدیدی به رأس‌های دیگر وصل نمی‌شود. پس در کل $۳ = ۰ + ۱ + ۲$ پاره‌خط در مثلث ABC رسم می‌شود.



ب) بررسی چهارضلعی ABCD: ابتدا از رأس A به سه رأس B، C و D، سپس از رأس B به دو رأس C و D و بعد از رأس C به رأس D وصل می‌کنیم. در نهایت از رأس D پاره‌خط جدیدی به رئوس A، B و C رسم نمی‌شود؛ پس تعداد کل پاره‌خط‌ها $۶ = ۰ + ۱ + ۲ + ۳$ خواهد بود.



ج) بررسی پنج‌ضلعی ABCDE: مطابق شکل می‌توان نوشت:

$۱۰ = ۰ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ =$ تعداد کل پاره‌خط‌ها

از رأس A به ۴ رأس B، C، D و E
از رأس B به رئوس C، D و E
از رأس C به رئوس D و E
از رأس D به رأس E
از رأس E به صفر رأس

با استفاده از استدلال استقرایی، به نظر می‌رسد تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی، از جمله ضلع و قطر، عبارت است از $\frac{n(n-۱)}{۲}$. (البته با استفاده از خواص دنباله یا تصاعد حسابی می‌توان ثابت کرد که تعداد پاره‌خط‌های رسم‌شده در n ضلعی یعنی $(n-۱) + (n-۲) + \cdots + ۱ + ۰$ برابر است با $\frac{n(n-۱)}{۲}$.)

مثال و جواب

مثال **تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده (ضلع‌ها و قطرها) در یک ۱۰ ضلعی را بیابید.**

جواب با توجه به فرمول « $\frac{n(n-۱)}{۲} =$ تعداد پاره‌خط‌ها در n ضلعی» داریم:

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها در ۱۰ ضلعی} = \frac{۱۰(۱۰-۱)}{۲} = ۴۵$$

مثال و جواب

مثال **تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی برابر است با ۱۰. مقدار n را بیابید.**

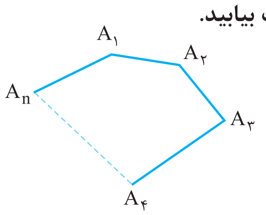
جواب طبق فرمول گفته‌شده داریم:

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها در n ضلعی} = ۱۰ \rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = ۱۰ \rightarrow \underbrace{n(n-۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = ۲۰ = ۴ \times ۵$$

حال بین n و $(n-۱)$ یکی از عبارت‌ها را در نظر می‌گیریم مثلاً n. چون n عامل بزرگ‌تر است پس باید با عدد بزرگ‌تر یعنی ۵ مساوی باشد.

مثال و جواب

مثال **با توجه به تعریف قطر، فرمولی برای پیداکردن تعداد کل قطرهای مرسوم در یک n ضلعی محدب بیابید.**



جواب **روش اول** مطابق شکل برای پیداکردن تعداد کل قطرهای n ضلعی، ابتدا تعداد قطرهای گذرنده از هر رأس را می‌یابیم.

از رأسی مثل $A_۱$، **به خودش و دو رأس کناری‌اش، قطری رسم نمی‌شود.**

بنابراین از این رأس $(n-۳)$ قطر می‌گذرد. به همین ترتیب از تمام n رأس دیگر نیز $(n-۳)$ قطر می‌گذرد؛ پس تا به این‌جا در کل $n(n-۳)$ قطر رسم می‌شود؛ اما اگر مثلاً قطر $A_۱A_۳$ را در نظر بگیریم، این قطر دو بار شمارش می‌شود (یک بار در کل قطرهای گذرنده از $A_۱$ و بار دیگر در کل قطرهای گذرنده از $A_۳$)؛ پس نصف این $n(n-۳)$ قطر، تکراری هستند. بنابراین:

$$\boxed{\text{تعداد کل قطرهای } n \text{ ضلعی محدب} = \frac{n(n-۳)}{۲} \ , \ n \geq ۳}$$

روش دوم طبق رابطه‌ی «$\frac{n(n-۱)}{۲}$ = تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در n ضلعی»، در این فرمول در بین $\frac{n(n-۱)}{۲}$ پاره‌خط (از جمله قطرها و اضلاع)، تعداد همه‌ی قطرها و همه‌ی اضلاع با یکدیگر جمع شده‌اند، پس داریم:

$$\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی محدب} = \underbrace{\text{تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده}}_{\text{تعداد اضلاع + تعداد قطرها}} - \text{تعداد اضلاع} = \frac{n(n-۱)}{۲} - n = \frac{n(n-۱)-۲n}{۲}$$

$$\rightarrow \text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی محدب} = \frac{n^۲-n-۲n}{۲} = \frac{n^۲-۳n}{۲} \rightarrow \boxed{\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی محدب} = \frac{n(n-۳)}{۲}}$$

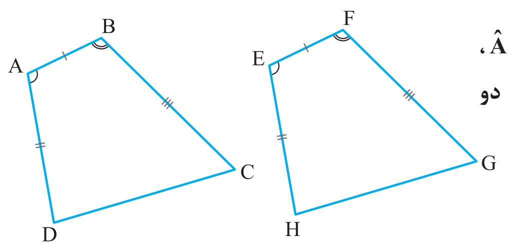
مثال و جواب

مثال **تعداد قطرهای یک هفت‌ضلعی را بیابید.**

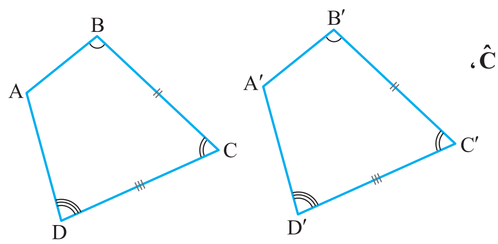
جواب با توجه به این‌که $n=۷$ است، داریم:

$$\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی} = \frac{n(n-۳)}{۲} \xrightarrow{n=۷} \text{تعداد قطرهای ۷ ضلعی} = \frac{۷(۷-۳)}{۲} = ۱۴$$

سوال‌های امتحانی



۱- در دو چهارضلعی مقابل $\hat{A}=\hat{E}$ ، $AD=EH$ ، $AB=EF$ ، $\hat{B}=\hat{F}$ و $BC=FG$. ثابت کنید این دو چهارضلعی همنهشت‌اند.



۲- در شکل روبه‌رو دو چهارضلعی $ABCD$ و $A'B'C'D'$ با شرط‌های $\hat{D}=\hat{D'}$ ، $\hat{B}=\hat{B'}$ ، $\hat{C}=\hat{C'}$ ، $BC=B'C'$ و $CD=C'D'$ رسم شده‌اند. ثابت کنید این دو چهارضلعی همنهشت‌اند.

۳- تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی منتظم برابر است با ۲۸. در این صورت هر زاویه‌ی داخلی این n ضلعی چند درجه است؟

۴- تعداد قطرهای یک n ضلعی، برابر ۳۵ است. n را بیابید.

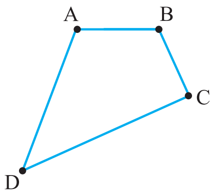
۵- تعداد قطرهای یک n ضلعی منتظم، ۳ برابر تعداد اضلاع آن است. هر زاویه‌ی داخلی این n ضلعی منتظم کدام است؟

۶- تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده (از جمله ضلع و قطر) در یک n ضلعی منتظم، چهار برابر تعداد اضلاع آن است. در این صورت هر زاویه‌ی خارجی این شکل را بیابید.

۷- مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی، سه برابر مجموع زاویه‌های خارجی آن است. تعداد قطرهای این شکل را بیابید.

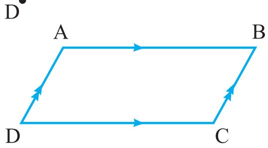
۸- اگر یک واحد به اضلاع یک n ضلعی اضافه شود، به تعداد قطرهای آن چند واحد اضافه می‌شود؟

چهارضلعی‌های مهم



در این قسمت می‌خواهیم چهارضلعی‌های مهم را بررسی کنیم و قضیه‌ها و مثال‌های متعددی را بیان نماییم. ابتدا مطابق شکل، چهارضلعی ABCD نمایش داده شده که AB و CD و همچنین BC و AD اضلاع مقابل (غیرمجاور) می‌باشند. در ضمن اضلاع AB و BC یا AD و CD یا ... مجاورند.

متوازی‌الاضلاع

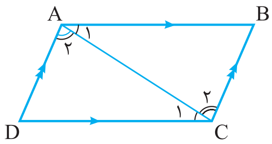


تعریف متوازی‌الاضلاع: یک چهارضلعی است که اضلاع روبه‌روی آن دوبه‌دو با هم موازی‌اند.

$$\text{ABCD}:\text{متوازی‌الاضلاع} \Leftrightarrow AB \parallel CD\,,\ AD \parallel BC$$

از این تعریف می‌توانیم قضایای مهمی را مطرح و اثبات نماییم.

قضیه **در هر متوازی‌الاضلاع، دو ضلع مقابل با هم مساوی‌اند.**



فرض	ABCD : متوازی‌الاضلاع
حکم	$AB = DC\,,\ AD = BC$

اثبات

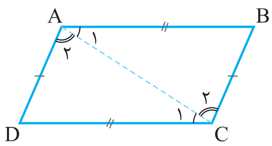
مطابق شکل یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع (مثل AC) را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} AB \parallel DC\ ,\ AC:\text{مورب} \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AD \parallel BC\ ,\ AC:\text{مورب} \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \end{cases}$$

برای اثبات حکم‌های مسئله، در دو مثلث مشاهده‌شده داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\,,\ \overset{\Delta}{ADC}:\begin{cases}\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AC = AC \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2\end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

عکس قضیه‌ی ۱: اگر در یک چهارضلعی، هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه باشند چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



اثبات

فرض	$AB = CD\,,\ AD = BC$
حکم	ABCD : متوازی‌الاضلاع

برای این‌که ثابت کنیم چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است، باید ثابت کنیم اضلاع روبه‌روی این چهارضلعی دوبه‌دو موازی‌اند؛ پس ابتدا یک قطر متوازی‌الاضلاع را می‌کشیم و ثابت می‌کنیم دو مثلث حاصل همنهشت‌اند.

$$\overset{\Delta}{ABC}\,,\ \overset{\Delta}{ADC}:\begin{cases}AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC\end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \quad (1) \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \quad (2) \end{cases}$$

حال طبق عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:

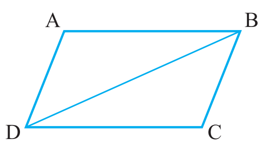
$$1)\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{AC\ \text{مورب}} AB \parallel DC$$

$$2)\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \xrightarrow{AC\ \text{مورب}} AD \parallel BC$$

و چهارضلعی ABCD که در آن اضلاع روبه‌رو، دوبه‌دو موازی‌اند، متوازی‌الاضلاع است.

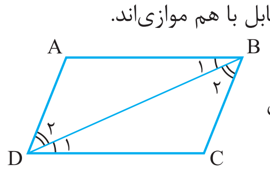
مثال و جواب

مثال **ثابت کنید هرگاه قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.**



فرض	$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{DBC}$
حکم	ABCD : متوازی‌الاضلاع

جواب **روش اول** از تعریف متوازی‌الاضلاع کمک می‌گیریم و ثابت می‌کنیم در چهارضلعی ABCD، اضلاع مقابل با هم موازی‌اند.



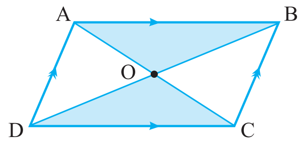
$$\text{طبق فرض}: \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BDC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \begin{cases} \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \xrightarrow[\text{عکس قضیه‌ی موازی و مورب}]{DB\ \text{مورب}} AB \parallel DC \\ \hat{D}_2 = \hat{B}_2 \xrightarrow[\text{عکس قضیه‌ی موازی و مورب}]{DB\ \text{مورب}} AD \parallel BC \end{cases}$$

پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

روش دوم می‌دانیم در هر چهارضلعی، اگر هر دو ضلع مقابل مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است (عکس قضیه‌ی ۱).

$$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BDC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases} \rightarrow \text{ABCD}:\text{متوازی‌الاضلاع}$$

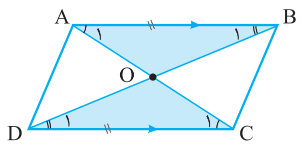
قضیه ۲ در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.



اثبات

فرض	متوازی‌الاضلاع : ABCD
حکم	$OA=OC\,,\,OB=OD$

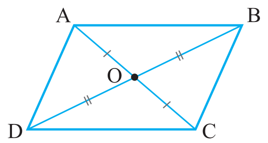
مطابق شکل باید ثابت کنیم دو مثلث بالا و پایین یا چپ و راست با یکدیگر، همنهشت‌اند. می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، دو ضلع روبه‌رو مساوی‌اند.



$$\overset{\Delta}{AOB}\,,\,\overset{\Delta}{DOC}:\begin{cases} AB=DC \\ AB\parallel DC, AC:\text{مورب} \rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1 \\ AB\parallel DC\,,\,BD:\text{مورب} \rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1 \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{AOB}\cong\overset{\Delta}{DOC}$$

و از اجزای برابر این دو مثلث، حکم $AO=OC$ و $BO=OD$ به راحتی نتیجه می‌شود.

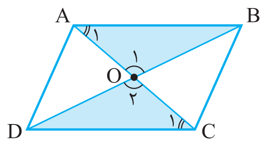
عکس قضیه‌ی ۲: هر چهارضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.



اثبات

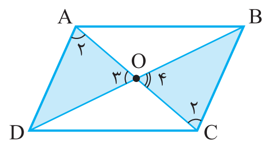
فرض	$OA=OC, OB=OD$
حکم	متوازی‌الاضلاع : ABCD

برای اثبات این قضیه، باید ثابت کنیم دو مثلث بالا و پایین با هم و دو مثلث چپ و راست هم با یکدیگر همنهشت‌اند:



$$\overset{\Delta}{AOB}\,,\,\overset{\Delta}{DOC}:\begin{cases} AO=OC \\ BO=OD \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AOB}\cong\overset{\Delta}{DOC}$$

$$\rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1 \xrightarrow[\text{عکس قضیه‌ی موازی و مورب}]{AC\ \text{مورب}} AB\parallel CD \quad (1)$$

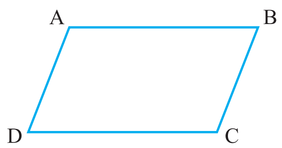


$$\overset{\Delta}{AOD}\,,\,\overset{\Delta}{BOC}:\begin{cases} AO=OC \\ BO=OD \\ \hat{O}_3=\hat{O}_4 \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AOD}\cong\overset{\Delta}{BOC}$$

$$\rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_2 \xrightarrow[\text{عکس قضیه‌ی موازی و مورب}]{AC\ \text{مورب}} AD\parallel BC \quad (2)$$

پس چهارضلعی ABCD که در آن هر دو ضلع روبه‌رو موازی‌اند، متوازی‌الاضلاع است.

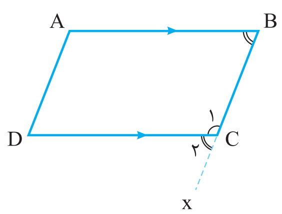
قضیه ۳ در هر متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل‌اند.



اثبات

فرض	متوازی‌الاضلاع : ABCD
حکم	$\hat{A}+\hat{B}=\hat{B}+\hat{C}=\hat{C}+\hat{D}=\hat{D}+\hat{A}=180^\circ$

مطابق شکل ثابت می‌کنیم $\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$. اثبات بقیه‌ی احکام، شبیه همین اثبات است. بدین منظور یکی از اضلاعی را که رئوس B یا C روی آن قرار دارد، امتداد می‌دهیم. مثلاً ضلع BC را از طرف همان رأس C امتداد داده‌ایم:

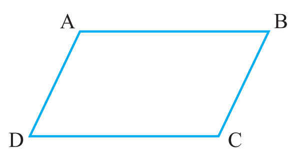


$$\left.\begin{array}{l} AB\parallel DC\,,\,BC:\text{مورب} \rightarrow \hat{B}=\hat{C}_2 \\ B\hat{C}x=180^\circ \rightarrow \hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \hat{C}_1+\hat{B}=180^\circ$$

دقت کنید زاویه‌ی C_1 همان زاویه‌ی داخلی رأس C (یا همان $D\hat{C}B$) است.

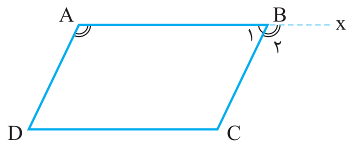
عکس قضیه‌ی ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

اثبات



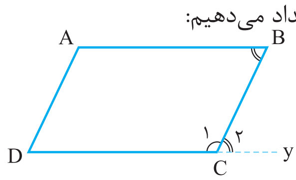
فرض	$\hat{A}+\hat{B}=\hat{B}+\hat{C}=\hat{C}+\hat{D}=\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$
حکم	متوازی‌الاضلاع : ABCD

مطابق شکل ضلع AB را از طرف B امتداد می‌دهیم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ : \text{طبق فرض} \\ A\hat{B}x=۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}=\hat{B}_۲$$

حال طبق عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $AD \parallel BC$. حال ضلع DC را از طرف C امتداد می‌دهیم:



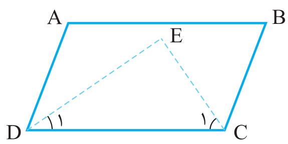
$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ : \text{طبق فرض} \\ D\hat{C}y=۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \hat{B}=\hat{C}_۲$$

حال طبق عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $AB \parallel DC$. پس چهارضلعی ABCD که در آن اضلاع روبه‌رو موازی‌اند، یک متوازی‌الاضلاع است.

مثال و جواب

مثال **اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD نیمساز دو زاویه‌ی مجاور دلخواه را رسم کنیم، زاویه‌ی حاصل بین این دو نیمساز کدام است؟**

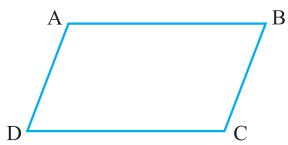
جواب مطابق شکل، نیمساز دو زاویه‌ی دلخواه و مجاور C و D را رسم کرده‌ایم. در این صورت می‌توان نوشت:



$$\overset{\Delta}{DEC}: \hat{E}+\hat{D}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ \rightarrow E=۱۸۰^\circ-(\hat{D}_۱+\hat{C}_۱)$$

$$\rightarrow E=۱۸۰^\circ-(\frac{\hat{D}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲})=۱۸۰^\circ-(\frac{\hat{D}+\hat{C}}{۲}) \xrightarrow[\text{دو زاویه‌ی مجاور متوازی‌الاضلاع مکمل‌اند.}]{\hat{D}+\hat{C}=۱۸۰^\circ} =۱۸۰^\circ-\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

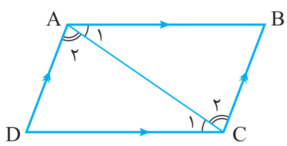
قضیه ۲ **در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی‌اند.**



فرض	متوازی‌الاضلاع : ABCD
حکم	$\hat{A}=\hat{C}\,,\,\hat{B}=\hat{D}$

اثبات

مطابق شکل یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع را به دلخواه رسم می‌کنیم:



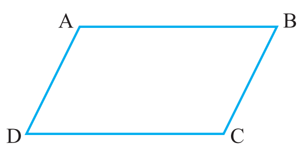
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD\,,\,AC : \text{مورب} \rightarrow \hat{A}_۱=\hat{C}_۱ \\ AD \parallel BC\,,\,AC : \text{مورب} \rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\hat{C}_۱+\hat{C}_۲ \rightarrow \hat{A}=\hat{C}$$

برای اثبات قسمت دیگر حکم، دو مثلث تشکیل‌شده را در نظر گرفته، ثابت می‌کنیم همنهشت‌اند.

$$\overset{\Delta}{ABC}\,,\,\overset{\Delta}{ACD} : \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_۱=\hat{C}_۱ \\ \hat{A}_۲=\hat{C}_۲ \\ AC=AC \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{زضز})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ACD} \rightarrow \hat{B}=\hat{D}$$

عکس قضیه‌ی ۴: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه‌ی مقابل، هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

جواب



فرض	$\hat{A}=\hat{C}\,,\,\hat{B}=\hat{D}$
حکم	متوازی‌الاضلاع : ABCD

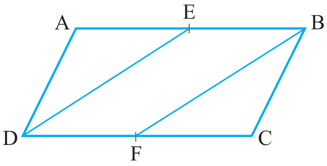
اثبات می‌دانیم در هر چهارضلعی محدب، جمع تمام زاویه‌های داخلی $۳۶۰^\circ=۱۸۰^\circ\times(۲-۴)$ است، پس $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$. حال به جای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ مساوی آن‌ها یعنی به ترتیب $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را در رابطه‌ی اخیر قرار می‌دهیم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{A}+\hat{B}=۳۶۰^\circ \rightarrow ۲(\hat{A}+\hat{B})=۳۶۰^\circ \rightarrow \hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$$

حال طبق عکس قضیه‌ی ۳، می‌دانیم اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های مجاور به هم، مکمل یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

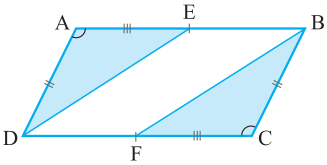
مثال و جواب

مثال **مطابق شکل، نقاط E و F به ترتیب وسط اضلاع AB و DC از متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. ثابت کنید $DE = FB$.**



فرض	ABCD : متوازی‌الاضلاع , $AE = EB, DF = FC$
حکم	$DE = FB$

جواب **روش اول** مطابق شکل چون E وسط AB است پس $AE = \frac{AB}{۲}$. به همین ترتیب $FC = \frac{DC}{۲}$ و چون $AB = CD$ پس $AE = FC$:



روش دوم چون اضلاع روبه‌روی متوازی‌الاضلاع با هم موازی و مساوی‌اند و

$$\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{FCB}: \begin{cases} AE = FC \\ AD = BC \text{ ضلع‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع مساوی‌اند} \\ \hat{A} = \hat{C} \text{ زاویه‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع مساوی‌اند} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{FCB} \xrightarrow{\text{اجزای برابر}} DE = FB$$

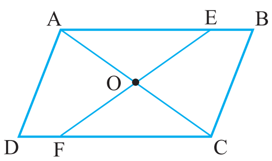
هم‌چنین $EB = \frac{AB}{۲}$ و $DF = \frac{DC}{۲}$، بنابراین $EB = DF$. از طرفی چون $AB \parallel CD$ پس $EB \parallel DF$ و می‌دانیم هر چهارضلعی که دو ضلع روبه‌رویش موازی و مساوی باشد متوازی‌الاضلاع است.

جواب EBFD : متوازی‌الاضلاع $\rightarrow DE = FB$

سوال‌های امتحانی

۹- ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع مقابل موازی و مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

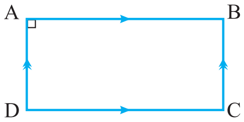
۱۰- نقاط E و F روی دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع قرار دارند طوری‌که پاره‌خط EF از نقطه‌ی O محل تلاقی دو قطر متوازی‌الاضلاع می‌گذرد. ثابت کنید $OE = OF$ و $EB = DF$.



۱۱- از محل برخورد دو قطر متوازی‌الاضلاع، خطی موازی دو ضلع روبه‌روی آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید این خط از وسط دو ضلع دیگر می‌گذرد.

۱۲- می‌دانیم اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. حال به کمک این مطلب، ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی تمام زاویه‌های مجاور مکمل هم باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مستطیل



نوعی متوازی‌الاضلاع است که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

نتیجه‌مهم می‌دانیم از بین دو خط موازی، اگر یکی بر خط سومی عمود باشد، دیگری هم عمود است پس در هر مستطیل تمام چهار زاویه قائمه‌اند.

در هر مستطیل، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است. از جمله:

۱ **در هر مستطیل قطرها منصف یکدیگرند.**

دقت کنید عکس این قضیه (حکم درست و کلی) برقرار نیست. یعنی اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، **لزومی ندارد** که این چهارضلعی مستطیل باشد. در حالی که فقط متوازی‌الاضلاع بودن آن قطعی است.

۲ **در هر مستطیل زاویه‌های روبه‌رو برابر و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.** (قطعاً با زاویه‌های ۹۰° چنین مطلبی درست است) عکس این قضیه برقرار نیست. یعنی از این‌که در یک چهارضلعی زاویه‌های روبه‌رو برابر یا زاویه‌های مجاور مکمل هم باشند **نمی‌توان گفت** این چهارضلعی مستطیل است (ولی حتماً متوازی‌الاضلاع هست).

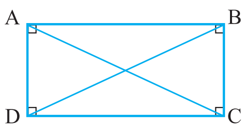
۳ **در هر مستطیل هر دو ضلع روبه‌رو برابرند.**

عکس این قضیه هم **برقرار نیست.** فقط از این‌که در یک چهارضلعی **هر دو ضلع روبه‌رو** مساوی باشند، می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و به ۹۰° بودن زاویه‌ها اصلاً ارتباط ندارد.

مثال و جواب

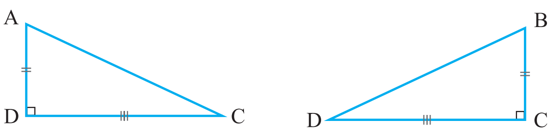
مثال **ثابت کنید در هر مستطیل قطرها برابرند.**

جواب



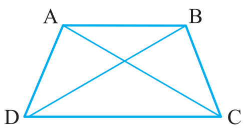
فرض	مستطیل: ABCD
حکم	$AC = BD$

دو مثلث ADC و BDC را از مستطیل بیرون می‌آوریم:



$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \text{ اضلاع روبه‌روی مستطیل} \\ DC = DC \\ \hat{D} = \hat{C} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{BDC}$$

و از اجزای برابر نتیجه می‌گیریم قطرهای مستطیل مساوی‌اند $(AC = BD)$.

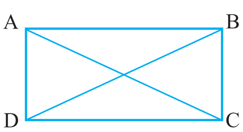


دقت کنید عکس این مثال (قضیه) برقرار نیست. در شکل روبه‌رو قطرهای چهارضلعی ABCD مساوی هستند ولی این چهارضلعی مستطیل نیست.

مثال و جواب

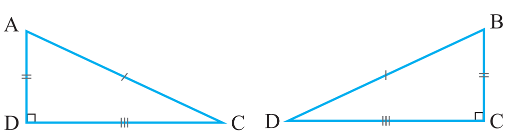
مثال **هر متوازی‌الاضلاع که در آن طول قطرها مساوی باشند، مستطیل است.**

جواب



فرض	ABCD: متوازی‌الاضلاع و $AC = BD$
حکم	مستطیل: ABCD

مطابق شکل دو مثلث ADC و BDC را از **متوازی‌الاضلاع** ABCD جدا می‌کنیم و ثابت می‌نماییم $\hat{D} = \hat{C} = ۹۰^\circ$:



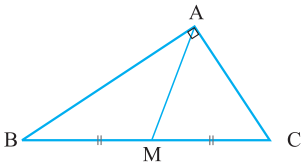
$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \text{ :طبق فرض} \\ AD = BC \text{ اضلاع رو به‌روی متوازی‌الاضلاع} \\ DC = DC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{BDC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \hat{D} = \hat{C}\ (*)$$

از طرفی اگر قطرها را در متوازی‌الاضلاع ABCD در نظر نگیریم، نتیجه می‌گیریم که دو زاویه‌ی مجاور $\hat{C}$ و $\hat{D}$ مکمل یکدیگرند یعنی $\hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ و طبق $(*)$ داریم: $\hat{D} = \hat{C} = ۹۰^\circ \xrightarrow{\text{یکی از زاویه‌های متوازی‌الاضلاع قائمه است}}$ مستطیل: ABCD

مثال ثابت کنید: الف) در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

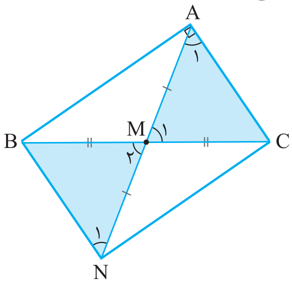
ب) اگر در مثلثی اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلعی، نصف آن ضلع باشد، زاویه‌ی روبه‌روی آن ضلع، قائم‌الزاویه است.

الف **جواب**



فرض	$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A}=۹۰^\circ\ ,\ BM=MC$
حکم	$AM=\frac{BC}{۲}$

مطابق شکل، میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش تا نقطه‌ی N امتداد می‌دهیم و ثابت می‌کنیم چهارضلعی ABNC مستطیل است:



$$\overset{\Delta}{AMC}\ ,\ \overset{\Delta}{BMN}:\begin{cases} AM=MN \text{ خودمان امتداد داده‌ایم} \\ BM=MC \text{ طبق فرض} \\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \text{ متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AMC}\cong\overset{\Delta}{BMN}$$

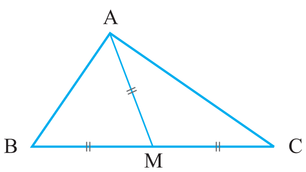
بنابراین چهارضلعی ABNC که در آن دو ضلع روبه‌رویش موازی و مساوی هستند متوازی‌الاضلاع خواهد بود و چون یک زاویه‌ی این چهارضلعی قائمه است $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ پس یک مستطیل داریم.

می‌دانیم در مستطیل قطرها با هم مساوی‌اند.

$$AN=BC \xrightarrow[AM=MN]{AN=AM+MN} ۲AM=BC \rightarrow AM=\frac{BC}{۲}$$

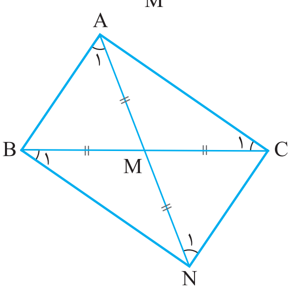
نتیجه‌ی مهم با رسم میانه‌ی نظیر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث متساوی‌الساقین به وجود می‌آید. (مثلث‌های AMC و AMB)

ب **روش اول**



فرض	AM : میانه و $AM=\frac{BC}{۲}$
حکم	$\hat{A}=۹۰^\circ$

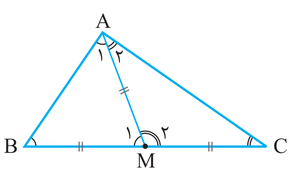
مطابق شکل، میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش تا N امتداد داده‌ایم.



$$\begin{cases} AN=AM+MN=AM+AM=۲AM \\ AM=\frac{BC}{۲}(\text{فرض}) \rightarrow BC=۲AM \end{cases} \rightarrow AN=BC$$

پس فعلاً در چهارضلعی ABNC، قطرها مساوی‌اند. اگر ثابت کنیم این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، با وجود دو قطر برابر، نتیجه می‌گیریم مستطیل خواهد بود.

دو مثلث ABM و MNC به حالت (ض ز ض) همنهشت بوده و در نتیجه $\hat{A}_۱=\hat{N}_۱$ و با توجه به این‌که AN مورب است، با توجه به عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم $AB \parallel CN$. به ترتیب مشابه پس از اثبات $\overset{\Delta}{AMC}\cong\overset{\Delta}{BMN}$ داریم $\hat{B}_۱=\hat{C}_۱$ و با توجه به عکس قضیه‌ی موازی و مورب (BC مورب است) نتیجه می‌گیریم $AC \parallel BN$.



پس چهارضلعی ABNC متوازی‌الاضلاع بوده و دو قطرش مساوی‌اند؛ $(AN=BC)$ پس این چهارضلعی مستطیل بوده و $\hat{A}=۹۰^\circ$.

روش دوم مطابق شکل با رسم میانه‌ی AM، دو مثلث متساوی‌الساقین AMB و AMC به وجود آمده است:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AMB}: AM=BM \rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۱ \xrightarrow{\hat{M}_۱+\hat{A}_۱+\hat{B}=۱۸۰^\circ} \hat{M}_۱+\hat{A}_۱+\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{M}_۱=۱۸۰^\circ-۲\hat{A}_۱ \\ \overset{\Delta}{AMC}: AM=CM \rightarrow \hat{C}=\hat{A}_۲ \xrightarrow{\hat{M}_۲+\hat{A}_۲+\hat{C}=۱۸۰^\circ} \hat{M}_۲+\hat{A}_۲+\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{M}_۲=۱۸۰^\circ-۲\hat{A}_۲ \end{cases}$$

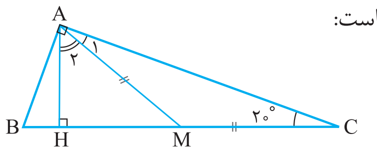
از طرفی $\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۱۸۰^\circ$ است، پس:

$$۱۸۰^\circ-۲\hat{A}_۱+۱۸۰^\circ-۲\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ \rightarrow ۲(\overbrace{\hat{A}_۱+\hat{A}_۲}^{\hat{A}\ \text{کل}})=۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{A}_{\text{کل}}=۹۰^\circ$$

مثال و جواب

مثال **یکی از زاویه‌های حاده در مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۲۰° است. زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث را بیابید.**

جواب مطابق شکل با رسم میانه‌ی وارد بر وتر مثلث متساوی‌الساقین AMC به وجود آمده است:



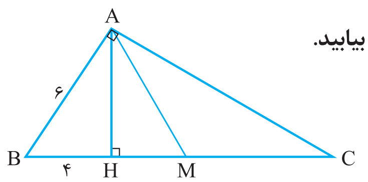
$$AM = MC \rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C} = ۲۰^\circ$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHC داریم:

$$\overset{\Delta}{AHC}: \hat{H} + H\hat{A}C + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \rightarrow ۹۰^\circ + (\underbrace{\hat{A}_۱}_{۲۰^\circ} + \hat{A}_۲) + ۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{A}_۲ = ۵۰^\circ$$

مثال و جواب

مثال **مطابق شکل AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه است. طول AM را بیابید.**



جواب می‌دانیم مربع هر ضلع قائم در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با ضرب وتر در تصویر همان ضلع قائم بر وتر، یعنی $AB^۲ = BH \times BC$، پس:

$$۶^۲ = ۴ \times BC \rightarrow BC = ۹ \rightarrow \underbrace{AM}_{\text{میانه‌ی وارد بر وتر}} = \frac{BC}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

مثال و جواب

مثال **ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه:**

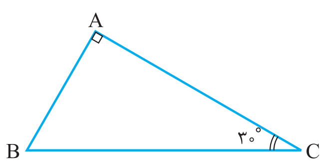
الف) یکی از زاویه‌ها ۳۰° باشد، ضلع روبه‌رو به آن زاویه نصف وتر است.

ب) یکی از زاویه‌ها ۶۰° باشد، ضلع روبه‌رو به آن زاویه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر وتر است.

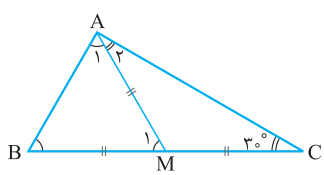
ج) یکی از زاویه‌ها ۴۵° باشد، اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر وتر است.

جواب الف

فرض	$\hat{A} = ۹۰^\circ , \hat{C} = ۳۰^\circ$
حکم	$AB = \frac{BC}{۲}$



مطابق شکل میانه‌ی وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. در این صورت مثلث‌های AMC و AMB متساوی‌الساقین هستند:

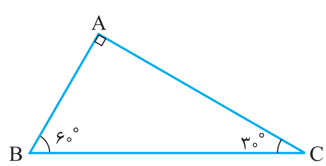


$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AMC}: AM = MC \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۳۰^\circ \Rightarrow \text{خارجی } \hat{M}_۱ = ۳۰^\circ + ۳۰^\circ = ۶۰^\circ \\ \overset{\Delta}{AMB}: AM = MB \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \underbrace{\hat{B}}_{\hat{A}_۱} + \underbrace{\hat{M}_۱}_{۶۰^\circ} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B} = ۶۰^\circ \end{cases}$$

پس مثلث AMB در حقیقت یک مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و $AB = AM$ و چون AM نصف وتر BC است پس AB هم که روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC است، نصف وتر می‌باشد.

ب) مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، یکی از زاویه‌ها ۳۰° بوده و ضلع مقابل به آن نصف وتر است یعنی $AB = \frac{BC}{۲}$.

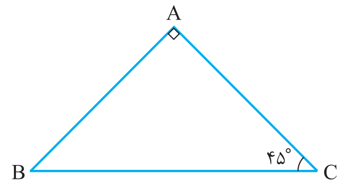
فرض	$\hat{A} = ۹۰^\circ , \hat{B} = ۶۰^\circ$
حکم	$AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} BC$



حال طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \rightarrow (\frac{BC}{۲})^۲ + AC^۲ = BC^۲ \rightarrow AC^۲ = BC^۲ - \frac{BC^۲}{۴} = \frac{۴BC^۲ - BC^۲}{۴} = \frac{۳BC^۲}{۴} \Rightarrow \boxed{AC = \sqrt{\frac{۳BC^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}BC}{۲}}$$

ج) مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، زاویه‌ی B هم 45° است:



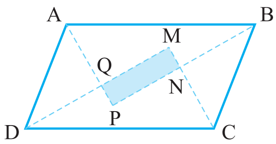
فرض	$\hat{A}=90^\circ , \hat{C}=45^\circ$
حکم	$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC$

$$\hat{B}=\hat{C} \Rightarrow AB=AC \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BC^2=AB^2+AC^2=AB^2+AB^2=2AB^2$$

$$\rightarrow BC=\sqrt{2AB^2}=\sqrt{2}AB \rightarrow AB=\frac{BC}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{AB=\frac{\sqrt{2}BC}{2}} \text{ و } \boxed{AC=\frac{\sqrt{2}BC}{2}}$$

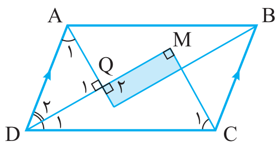
مثال و جواب

مثال **ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع نامساوی، یک مستطیل پدید می‌آید.**



فرض	نیمسازهای داخلی متوازی‌الاضلاع ABCD رسم‌شده
حکم	MNPQ : مستطیل

جواب



می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور با هم مکمل‌اند:

$$\hat{C}_{\text{کل}}+\hat{D}_{\text{کل}}=180^\circ$$

$$\xrightarrow[\text{رسم شده‌اند}]{\text{نیمسازهای } \hat{C},\hat{D}} 2\hat{C}_1+2\hat{D}_1=180^\circ \xrightarrow{\div 2} \hat{C}_1+\hat{D}_1=90^\circ$$

پس زاویه‌ی M هم در مثلث DMC برابر 90° می‌شود.

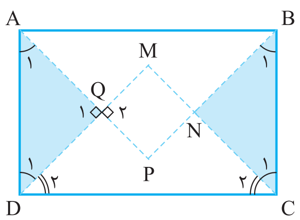
به ترتیب مشابه ثابت می‌شود بقیه‌ی زاویه‌های چهارضلعی MNPQ همگی 90° هستند، پس این چهارضلعی مستطیل است. مثلاً در مورد $\hat{Q}_2$ داریم:

$$\hat{A}_{\text{کل}}+\hat{D}_{\text{کل}}=180^\circ \rightarrow 2\hat{A}_1+2\hat{D}_2=180^\circ \xrightarrow{\div 2} \hat{A}_1+\hat{D}_2=90^\circ$$

$$\rightarrow \overset{\Delta}{ADQ}:\hat{Q}_1=90^\circ \xrightarrow[\text{متقابل به رأس}]{Q_1=Q_2} \hat{Q}_2=90^\circ$$

مثال و جواب

مثال **ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع به وجود می‌آید اگر ابعاد این مستطیل a و b باشد طول ضلع مربع حاصل را برحسب a و b بیابید.**



فرض	نیمسازهای داخلی مستطیل ABCD رسم‌شده
حکم	MNPQ : مربع

جواب

مطابق شکل چون نیمساز زاویه‌های مستطیل ABCD رسم شده است، پس $\hat{D}_2=\hat{C}_2=\hat{A}_1=\hat{D}_1=\hat{B}_1=\hat{C}_1=45^\circ$، پس در مثلث AQD زاویه‌ی $\hat{Q}_1=90^\circ$ بوده و در نتیجه $\hat{Q}_2$ هم قائمه است. به ترتیب مشابه بقیه‌ی زاویه‌های داخلی چهارضلعی MNPQ هم قائمه است.

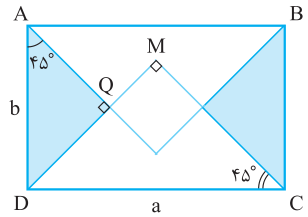
$$\overset{\Delta}{AQD},\overset{\Delta}{BNC}:\left\{\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{B}_1=45^\circ\\ \hat{D}_1=\hat{C}_1=45^\circ\\ AD=BC=\text{عرض مستطیل}\end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{زض}ز)} \overset{\Delta}{AQD}\cong\overset{\Delta}{BNC} \rightarrow DQ=NC \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{DMC}:\hat{D}_2=\hat{C}_2=45^\circ \rightarrow DM=MC \quad (2)$$

حال طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را نظیر به نظیر کم می‌کنیم.

$$DM-DQ=MC-NC \rightarrow MQ=MN$$

پس چهارضلعی MNPQ علاوه بر این‌که تمام زاویه‌هایش قائمه است، دو ضلع مجاورِ مساوی هم دارد پس مربع است حال برای این‌که طول ضلع مربع را برحسب مقادیر $AD = b$ و $DC = a$ به دست آوریم، دقت می‌کنیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه که دارای زاویه‌ی ۴۵° است، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۴۵°، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر وتر است:



$$\overset{\Delta}{DMC} : DM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\overbrace{DC}^{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

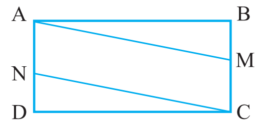
$$\overset{\Delta}{ADQ} : DQ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\overbrace{DA}^{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b$$

$$\rightarrow \underbrace{QM}_{\text{ضلع مربع}} = x = DM - DQ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a - \frac{\sqrt{۲}}{۲}b \rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b)}$$

این فرمول را به خاطر بسپارید.

سوال‌های امتحانی

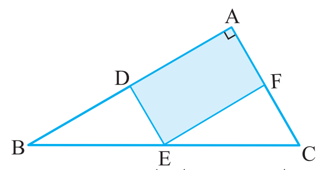
۱۳- در شکل روبه‌رو ABCD یک مستطیل است. ثابت کنید:



الف) اگر $AM \parallel CN$ آن‌گاه $BM = DN$.

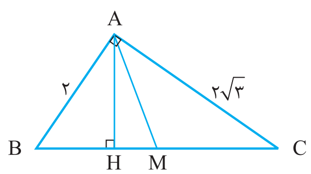
ب) اگر $BM = DN$ آن‌گاه $AM \parallel CN$.

۱۴- در شکل روبه‌رو $\hat{A} = ۹۰^\circ$ بوده و نقاط D، E و F وسط اضلاع مثلث ABC می‌باشند. ثابت کنید چهارضلعی AFED یک مستطیل است.

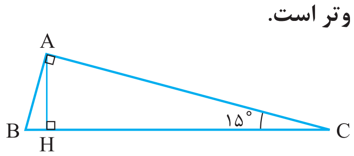


۱۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول دو ضلع قائم ۳ و ۴ است. طول میانه‌ی وارد بر وتر را بیابید.

۱۶- مطابق شکل $AB = ۲$ و $AC = ۲\sqrt{۳}$. در این صورت اگر AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، طول MH را بیابید.



۱۷- ثابت کنید اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی از زاویه‌ها ۱۵° (یا ۷۵°) باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است.



فرض	$\hat{A} = ۹۰^\circ , \hat{C} = ۱۵^\circ , AH \perp BC$
حکم	$AH = \frac{۱}{۴}BC$

۱۸- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، یکی از زاویه‌ها ۳۰° است. ثابت کنید ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

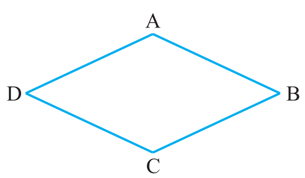
۱۹- در یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی از زاویه‌های حاده ۲۵° است. زاویه‌ی بین میانه‌ی وارد بر وتر و نیمساز داخلی زاویه‌ی قائمه را بیابید.

۲۰- در مستطیلی با ابعاد ۸ و ۴ نیمسازهای داخلی را رسم کرده‌ایم. مساحت شکل حاصل را بیابید.

۲۱- مستطیلی به محیط ۲۰ و مساحت ۹ مفروض است. نیمسازهای داخلی این مستطیل را رسم کرده‌ایم. محیط شکل حاصل را بیابید.

۲۲- نیمسازهای داخلی یک مستطیل را رسم کرده‌ایم و طول قطر مربع حاصل از رسم این نیمسازها ۸ شده است. اگر طول مستطیل سه برابر عرض آن باشد، مساحت مستطیل را بیابید.

لوزی



تعریف لوزی: نوعی متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع مجاور آن مساوی باشد. می‌توان گفت هر چهارضلعی که دارای چهار ضلع مساوی باشد یک لوزی است، زیرا وقتی مطابق شکل $AB = BC = CD = AD$ باشد، خودبه‌خود اضلاع روبه‌رو، دوبه‌دو مساوی شده و یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که هر دو ضلع مجاورش مساوی‌اند؛ پس ABCD در نهایت یک لوزی می‌باشد.

در هر لوزی، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است. از جمله:

① **در هر لوزی قطرها منصف یکدیگرند.**

دقت کنید عکس این قضیه **برقرار نیست**. یعنی هر چهارضلعی که قطرهایش منصف یکدیگرند، **لزومی ندارد** لوزی باشد.

② **در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.**

عکس این قضیه هم در حالت کلی **برقرار نیست.**

③ **در هر لوزی اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.**

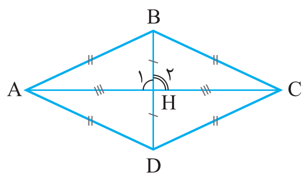
عکس این قضیه هم در حالت کلی **درست نخواهد بود.**

مثال و جواب

مثال ثابت کنید در هر لوزی:

الف) قطرها بر هم عمودند. **ب)** قطرها نیمساز زاویه‌های لوزی می‌باشند.

جواب الف



لوزی: ABCD	فرض
$AC \perp BD$	حکم

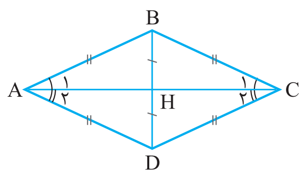
می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع از جمله لوزی، قطرها منصف یکدیگرند. همچنین همه‌ی اضلاع لوزی مساوی‌اند.

$$\overset{\Delta}{AHB}, \overset{\Delta}{BHC}: \begin{cases} AB = BC = \text{ضلع لوزی} \\ AH = HC \\ BH = BH \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AHB} \cong \overset{\Delta}{BHC}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای برابر}} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \ (*) \xrightarrow{A\hat{H}C = 180^\circ} \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \xrightarrow{\text{طبق}(*)} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \rightarrow AC \perp BH$$

$$\xrightarrow[\text{یک امتدادند}]{\text{BD و BH در}} AC \perp BD$$

ب



لوزی: ABCD	فرض
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2$	حکم

$$\overset{\Delta}{AHB}, \overset{\Delta}{AHD}: \begin{cases} AB = AD = \text{ضلع لوزی} \\ AH = AH \\ BH = HD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AHB} \cong \overset{\Delta}{AHD} \xrightarrow{\text{اجزای برابر}} \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

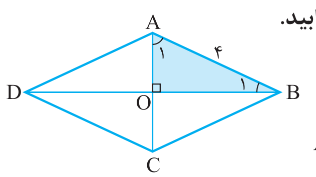
$$\overset{\Delta}{BHC}, \overset{\Delta}{CHD}: \begin{cases} BC = CD = \text{ضلع لوزی} \\ CH = CH \\ BH = HD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{BHC} \cong \overset{\Delta}{CHD} \xrightarrow{\text{اجزای برابر}} \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

نتیجه **قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگر و همچنین نیمساز زاویه‌های آن می‌باشند.**

مثال و جواب

مثال **در یک لوزی به طول ضلع ۴، اندازه‌ی یک زاویه 120° است. قطر کوچک و بزرگ لوزی را بیابید.**

جواب می‌دانیم زاویه‌های لوزی توسط قطرها نصف می‌شوند:



$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}_{\text{کل}}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \rightarrow \overset{\Delta}{AOB}: \hat{B}_1 = 30^\circ$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 30°، نصف وتر است:

$$\overset{\Delta}{AOB}: \hat{O} = 90^\circ, \hat{B}_1 = 30^\circ \rightarrow OA = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

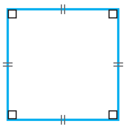
همچنین ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 60° (یعنی $\hat{A}_1$) در مثلث رنگی، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر وتر است:

$$OB = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

(البته با داشتن AB و OA در این مثلث، طبق قضیه‌ی فیثاغورس هم می‌توان به $OB = 2\sqrt{3}$ رسید) در نهایت قطرهای لوزی منصف یکدیگرند (خاصیت کلی هر متوازی‌الاضلاع):

$$\begin{cases} \text{قطر کوچک}: AC = 2 \times AO = 2 \times 2 = 4 \\ \text{قطر بزرگ}: BD = 2 \times BO = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

مربع



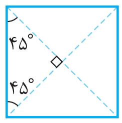
تعریف مربع: نوعی مستطیل است که اضلاع مجاور آن مساوی‌اند. یا این‌که نوعی لوزی است که تمام زاویه‌هایش ۹۰° است.

در هر مربع، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است، از جمله:

۱) **در هر مربع قطرها منصف یکدیگرند. دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست.**

۲) **در هر مربع زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند. (همه‌ی زاویه‌ها ۹۰° هستند)**

۳) **در هر مربع اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند. دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست.**

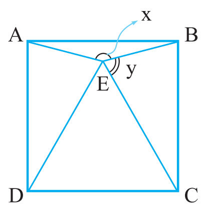


چون مربع یک نوع مستطیل خاص است پس قطرهایش مساوی‌اند و چون یک نوع لوزی خاص است، پس قطرهایش بر هم عمود بوده و نیمساز زاویه‌های مربع نیز می‌باشند.

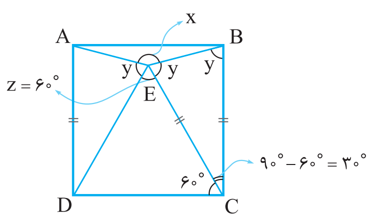
از برخورد نیمسازهای یک لوزی یا مربع (که همان قطرها هستند) شکلی حاصل نمی‌شود (فقط یک نقطه درمی‌آید).

مثال و جواب

مثال **مطابق شکل، چهارضلعی ABCD مربع و مثلث DEC متساوی‌الاضلاع است. مقادیر x و y را بیابید.**



جواب طبق شکل، با توجه به این‌که مثلث DEC متساوی‌الاضلاع است $DE = EC = DC$ می‌باشد. از طرفی چون ABCD مربع است پس $DC = BC$ بنابراین $EC = BC$، یعنی مثلث BEC متساوی‌الاضلاع است. به همین ترتیب مثلث AED هم متساوی‌الاضلاع خواهد بود:



$$y = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ \ , \ z = ۶۰^\circ \ \text{زاویه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع}$$

$$\rightarrow x + \underbrace{y + z + y}_{۲۱۰^\circ} = \underset{\text{یک دور کامل حول نقطه‌ی E}}{۳۶۰^\circ} \rightarrow x = ۱۵۰^\circ$$

سوال‌های امتحانی

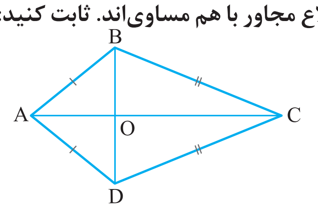
۲۳- ثابت کنید اگر در یک متوازی‌الاضلاع الف) قطرها بر هم عمود باشند، ب) قطرها نیمساز زاویه‌ها باشند، آن متوازی‌الاضلاع لوزی است.

۲۴- در یک لوزی قطرها ۸ و ۶ هستند. محیط لوزی را بیابید.

۲۵- در چهارضلعی ABCD (که آن را شبه‌لوزی یا کایت می‌گوییم) اضلاع مجاور با هم مساوی‌اند. ثابت کنید:

الف) قطر AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

ب) قطرها بر هم عمودند.

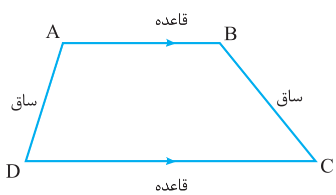


۲۶- مطابق شکل، چهارضلعی ABCD یک مربع و همچنین مثلث‌های ABF و BCE متساوی‌الاضلاع هستند. ثابت کنید مثلث BEF متساوی‌الساقین است.

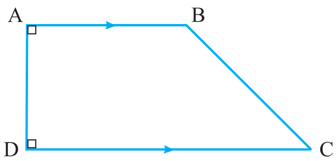
ذوزنقه

تعریف ذوزنقه: چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن با هم موازی باشند.

مطابق شکل، ذوزنقه‌ی ABCD نمایش داده شده است. هریک از دو ضلع موازی با هم را قاعده و هر یک از دو ضلعی که با هم غیر موازی‌اند را ساق می‌گوییم. دو نوع ذوزنقه‌ی خاص و بسیار مهم داریم که به معرفی آن‌ها می‌پردازیم:

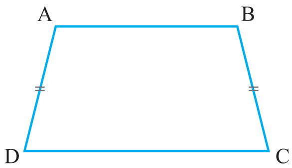


الف) ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه: اگر در یک ذوزنقه، یکی از ساق‌ها بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌گوییم.



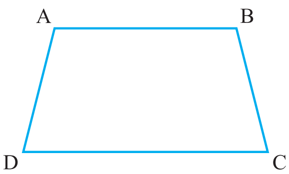
دقت کنید در شکل روبه‌رو یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه نشان داده شده است. چون قاعده‌ها با هم موازی‌اند، پس وقتی ساق AD بر قاعده‌ی AB عمود است بر پاره‌خط موازی آن یعنی قاعده‌ی DC هم عمود خواهد بود. در این حالت AD را ساق قائم و BC را ساق غیرقائم (مایل) ذوزنقه می‌گوییم.

ب) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین: اگر در یک ذوزنقه، طول ساق‌ها با یکدیگر مساوی باشد، ذوزنقه را متساوی‌الساقین می‌نامیم.



مثال و جواب

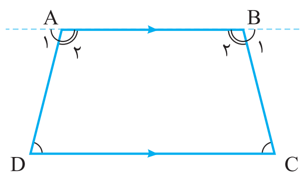
مثال **ثابت کنید در هر ذوزنقه، دو زاویه‌ی مجاور به هر ساق، مکمل یکدیگرند.**



جواب

فرض	ABCD: ذوزنقه و $AB \parallel CD$
حکم	$\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

مطابق شکل روبه‌رو ذوزنقه‌ی ABCD رسم شده است. یکی از قاعده‌ها مثل AB را از طرفین امتداد می‌دهیم:



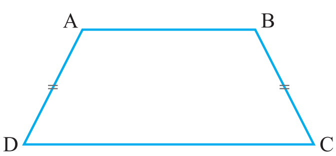
$$\begin{cases} AB \parallel DC\,,\ AD:\text{مورب} \rightarrow \hat{A}_۱=\hat{D} \\ \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{A}_۲+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

و این رابطه همان حکم $\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ خواهد بود. به همین ترتیب داریم:

$$\begin{cases} AB \parallel DC\,,\ BC:\text{مورب} \rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C} \\ \hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{B}_۲+\hat{C}=۱۸۰^\circ \rightarrow \boxed{\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ}$$

مثال و جواب

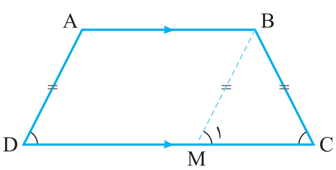
مثال **ثابت کنید در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به دو ساق هم‌اندازه‌اند.**



جواب

فرض	ABCD: ذوزنقه و $AB \parallel CD\,,\ AD=BC$
حکم	$\hat{D}=\hat{C}\,,\ \hat{A}=\hat{B}$

مطابق شکل، از یکی از دو سر قاعده‌ی کوچک AB، مثلاً B، خطی به موازات ساق AD رسم می‌کنیم. چهارضلعی ABMD که در آن اضلاع روبه‌روی هم با یکدیگر موازی‌اند، یک متوازی‌الاضلاع است؛ پس ضلع‌های روبه‌روی آن با هم مساوی‌اند.



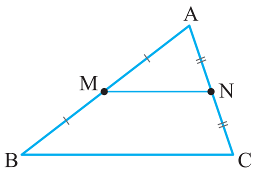
$$\begin{cases} AD=BM \xrightarrow[AD=BC]{\text{ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین}} BM=BC \rightarrow \overset{\Delta}{BMC}: \hat{M}_۱=\hat{C} \\ BM \parallel AD\ \text{خودمان رسم کرده‌ایم} \xrightarrow{DC\ \text{مورب}} \hat{D}=\hat{M}_۱ \end{cases} \rightarrow \hat{D}=\hat{C}$$

و چون $\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$، پس از $\hat{D}=\hat{C}$ نتیجه می‌شود $\hat{A}=\hat{B}$.

مثال و جواب

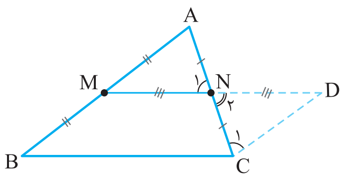
مثال **به کمک همنهشتی مثلث‌ها ثابت کنید پاره‌خطی که وسط دو ضلع از مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم بوده و طول آن نصف ضلع سوم است.**

جواب



فرض	$AM = BM\ ,\ AN = CN$
حکم	$MN \overset{\parallel}{=} \frac{BC}{۲}$

مطابق شکل MN را از طرف N به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی D برسیم:



$$\overset{\Delta}{AMN}\ ,\ \overset{\Delta}{NDC} : \begin{cases} MN = ND \\ \hat{N}_۱ = \hat{N}_۲ : \text{متقابل به رأس} \\ AN = NC : \text{فرض} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AMN} \cong \overset{\Delta}{NDC}$$

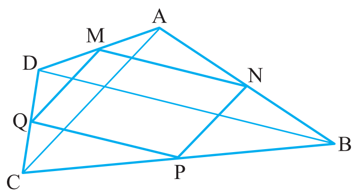
$$\xrightarrow{\text{اجزای برابر}} \begin{cases} \hat{A} = \hat{C}_۱ \xrightarrow[\text{عکس قضیه‌ی موازی و مورب}]{AC\ \text{مورب}} AB \parallel CD \rightarrow BM \parallel CD \quad (۱) \\ AM = CD\ (۲) \end{cases}$$

از طرفی چون $AM = MB$ پس طبق (۲) می‌توان گفت $MB = CD$. در نتیجه با توجه به (۱) چهارضلعی $MDCB$ که در آن دو ضلع روبه‌رو مساوی و موازی‌اند، یک متوازی‌الاضلاع بوده و $MD \overset{\parallel}{=} CB$ و چون $MD = ۲MN$ است بنابراین $۲MN \overset{\parallel}{=} BC$ و در نهایت $MN \overset{\parallel}{=} \frac{BC}{۲}$.

مثال و جواب

مثال **ثابت کنید اگر وسط اضلاع یک چهارضلعی را به یکدیگر به صورت متوالی وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است. محیط این متوازی‌الاضلاع را بیابید.**

جواب



فرض	وسط اضلاع $ABCD$ به هم وصل شده
حکم	$MNPQ$ یک متوازی‌الاضلاع است

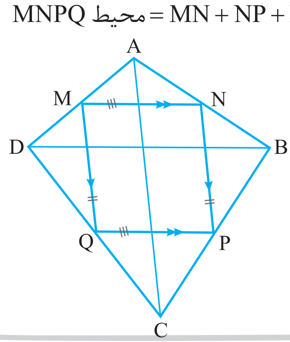
می‌دانیم پاره‌خطی در مثلث که وسط دو ضلع را به هم وصل می‌کند، موازی و مساوی نصف ضلع سوم است. در مثلث ADB داریم:

$$\begin{cases} AM = MD \\ AN = NB \end{cases} \rightarrow MN \overset{\parallel}{=} \frac{DB}{۲}$$

به همین ترتیب در مثلث BDC، $PQ \overset{\parallel}{=} \frac{DB}{۲}$ (زیرا P و Q وسط اضلاع این مثلث هستند)، بنابراین PQ و MN هم با یکدیگر موازی‌اند و هم مساوی و می‌دانیم که چهارضلعی که دو ضلع روبه‌رویش هم موازی و هم مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

طبق موارد گفته‌شده $NP \overset{\parallel}{=} QM \overset{\parallel}{=} \frac{AC}{۲}$، پس:

$$\text{محیط}\ MNPQ = MN + NP + PQ + MQ = \frac{BD}{۲} + \frac{AC}{۲} + \frac{BD}{۲} + \frac{AC}{۲} = BD + AC$$



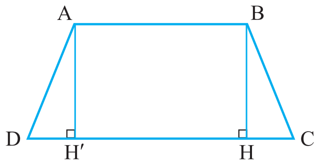
نتیجه‌مهم **اگر اضلاع یک چهارضلعی، متوالیاً به یکدیگر وصل شوند، چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاعی است که ضلع‌هایش موازی و مساوی نصف قطرهای چهارضلعی اولیه خواهد بود و محیط این چهارضلعی داخلی برابر است با جمع قطرهای چهارضلعی اولیه.**

حال ممکن است بپرسید متوازی‌الاضلاع $MNPQ$ تحت چه شرایطی به متوازی‌الاضلاع‌های خاص (مستطیل و مربع و لوزی) تبدیل می‌شود. به سؤال‌های امتحانی مطرح‌شده توجه کنید.

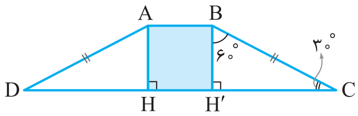
سوال‌های امتحانی

۲۷- ثابت کنید اگر در یک ذوزنقه، دو زاویه‌ی مجاور به ساق‌ها هم‌اندازه باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

۲۸- مطابق شکل، ذوزنقه‌ی ABCD متساوی‌الساقین است. از رئوس A و B بر قاعده‌ی بزرگ عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $CH = DH' = \frac{DC - AB}{۲}$



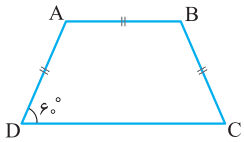
۲۹- مطابق شکل، ABCD یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و چهارضلعی ABH′H یک مربع است. اگر مساحت این مربع ۱۶ باشد، محیط ذوزنقه را بیابید.



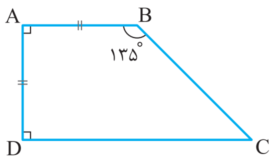
۳۰- ثابت کنید در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، قطرها مساوی‌اند.

۳۱- ثابت کنید اگر در یک ذوزنقه، قطرها مساوی باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

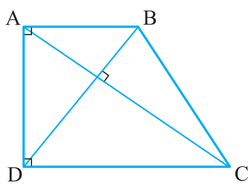
۳۲- در شکل روبه‌رو ذوزنقه‌ی **ABCD** متساوی‌الساقین بوده و قاعده‌ی کوچک با ساق‌ها هم‌اندازه است. ثابت کنید قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه دو برابر قاعده‌ی کوچک می‌باشد.



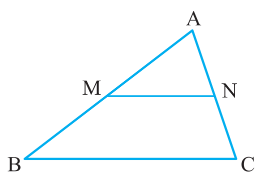
۳۳- در ذوزنقه‌ی روبه‌رو ثابت کنید طول قاعده‌ی بزرگ، دو برابر طول قاعده‌ی کوچک است.



۳۴- با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، ثابت کنید اگر در یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه، قطرها بر هم عمود باشند، ساق قائم واسطه‌ی هندسی بین دو قاعده است.

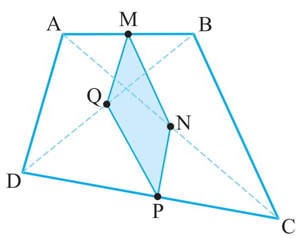


۳۵- مطابق شکل، مثلث ABC با اضلاع $AB = BC = ۱۰$ و $AC = ۶$ مفروض است. وسط دو ضلع AB و AC را به هم وصل کرده‌ایم. مطلوب است محیط چهارضلعی MNCB.



۳۶- ثابت کنید اگر وسط سه ضلع مثلثی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، چهار مثلث همنهشت به وجود می‌آید.

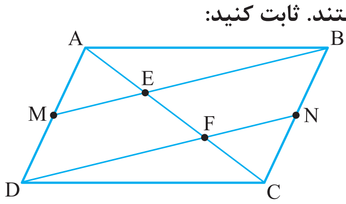
۳۷- ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب غیرمتوازی‌الاضلاع، اگر از اتصال وسط‌های دو ضلع مقابل و هم‌چنین وسط‌های دو قطر، یک چهارضلعی حاصل شود، این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است.



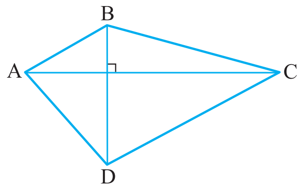
۳۸- مطابق شکل، چهارضلعی **ABCD** متوازی‌الاضلاع بوده و **M** و **N** به ترتیب وسط **AD** و **BC** هستند. ثابت کنید:

الف) $MB \parallel DN$

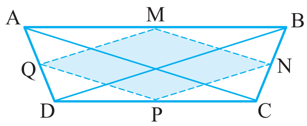
ب) $AE = EF = FC$



۳۹- مطابق شکل در چهارضلعی ABCD قطرها بر هم عمودند، ثابت کنید از به هم وصل‌کردن متوالی وسط اضلاع این چهارضلعی، یک مستطیل پدید می‌آید.



۴۰- مطابق شکل در چهارضلعی ABCD قطرها با هم مساوی‌اند. ثابت کنید اگر وسط اضلاع این چهارضلعی را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل یک لوزی است.



۴۱- تحت چه شرایطی از به هم وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی ABCD، یک مربع حاصل می‌شود؟

۴۲- ثابت کنید اگر وسط اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک لوزی است.

۴۳- ثابت کنید اگر وسط اضلاع یک لوزی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک مستطیل است.

۴۴- اگر وسط اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را به هم وصل کنیم، چه شکلی حاصل می‌شود؟

مساحت و کاربردهای آن

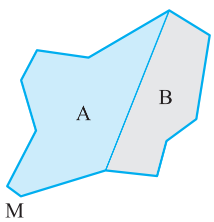
از این قسمت از درس، با بررسی اصول مهم مساحت، فرمول مساحت چندضلعی‌های مهم را بیان می‌کنیم. سپس برای هر کدام مسائل متنوعی طرح نموده و در نهایت مسئله‌ها را به صورت ترکیبی درمی‌آوریم.

اصول مهم مساحت در چند ضلعی‌ها

فرض می‌کنیم A ناحیه‌ی یک چندضلعی باشد. عدد مثبتی به نام مساحت به A نسبت داده و آن را با $S(A)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت موارد زیر برقرار است:

۱) $S(A) > 0$؛ به عبارت دیگر مساحت هر ناحیه در صفحه، عددی مثبت است.

۲) اگر اشتراک دو ناحیه‌ی چندضلعی فقط روی اضلاع یا رئوس آن‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشند مساحت اجتماع آن‌ها برابر است با مجموع مساحت‌های آن‌ها.



مثلاً در شکل روبه‌رو، ناحیه‌ی M به دو ناحیه‌ی A و B، تفکیک شده است. در این صورت $S(M) = S(A) + S(B)$.

۳) اگر دو مثلث همنهشت باشند، مساحت آن‌ها مساوی خواهد بود.

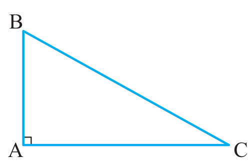
۴) مساحت مستطیلی با طول a و عرض b (ابعاد a و b) عبارت است از $S = ab$.

نتیجه مساحت مربعی به ضلع a برابر است با a^2.

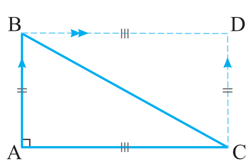
مثال و جواب

مثال به کمک فرمول مساحت مستطیل، ثابت کنید مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع قائم.

جواب



فرض	$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A} = 90^\circ$
حکم	$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} AB \times AC$



مطابق شکل از رأس B خطی به موازات AC و همچنین از رأس C، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا این دو خط موازی، یکدیگر را در D قطع کنند. چهارضلعی ABDC یک متوازی‌الاضلاع است که در آن یک زاویه‌ی قائمه وجود دارد، پس در حقیقت یک مستطیل خواهد بود. کاملاً مشخص است که دو مثلث ABC و BCD به حالت (ض‌ض‌ض) $(AC = BD, AB = DC, BC = BC)$ با یکدیگر همنهشت‌اند.

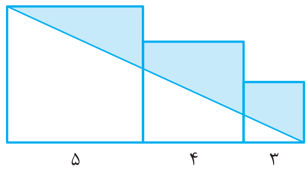
پس طبق یکی از اصول مساحت، این دو مثلث دارای مساحت یکسان هستند.

از طرفی مستطیل ABDC، از اجتماع این دو مثلث هم‌مساحت تشکیل شده است. پس مساحت کل برابر است با جمع مساحت اجزا:

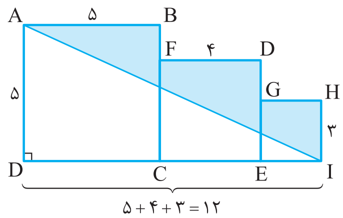
$$S_{ABDC} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{BCD}} \xrightarrow[S_{ABDC} = AB \times AC]{S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BCD}}} AB \times AC = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ABC}} \rightarrow AB \times AC = 2S_{\overset{\Delta}{ABC}} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} AB \times AC$$

مثال و جواب

مثال در شکل روبه‌رو سه مربع به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ در کنار هم واقع‌اند. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



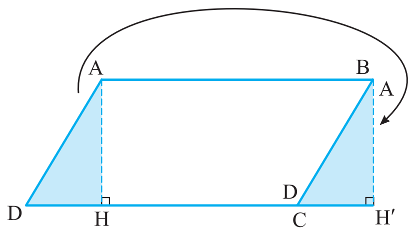
جواب مطابق شکل مساحت قسمت‌های رنگی روی هم برابر است با جمع مساحت سه مربع، منهای مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADI :



$$S_{\text{هاشور}} = (\underbrace{۵^۲+۴^۲+۳^۲}_{\text{جمع مساحت سه مربع}}) - \overbrace{\frac{۵\times ۱۲}{۲}}^{\text{ضرب دو ضلع قائم}} = ۲۰$$

مساحت متوازی الاضلاع

برای این‌که مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD را بیابیم، مطابق شکل از رأس A، ارتفاع AH را بر DC وارد می‌کنیم. حال مثلث AHD را بریده و طوری به سمت راست متوازی‌الاضلاع منتقل می‌کنیم که ضلع AD، روی ضلع BC منطبق شود. چهارضلعی ABH′H یک مستطیل است، زیرا متوازی‌الاضلاعی است با یک زاویه‌ی °۹۰. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD با مساحت مستطیل ABH′H یکسان است:

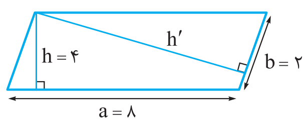


$$S_{\square ABH'H} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{طول مستطیل}}}{AB} \times \underset{\substack{\downarrow\\ \text{عرض مستطیل}}}{AH} \xrightarrow{S_{\square ABCD}=S_{\square ABH'H}} S_{\square ABCD} = AB\times AH = CD\times AH$$

به‌عبارت دیگر مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع در ارتفاع وارد بر آن.

مثال طول دو ضلع متوازی‌الاضلاعی ۲ و ۸ و ارتفاع نظیر ضلع بزرگ‌تر برابر ۴ است. طول ارتفاع دیگر این متوازی‌الاضلاع را بیابید.

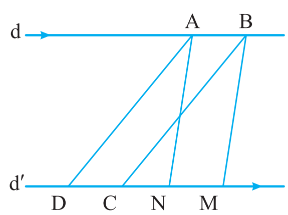
جواب مطابق شکل نشان داده شده که هر متوازی‌الاضلاع دو ارتفاع با طول‌های متمایز دارد، یکی نظیر ضلع بزرگ‌تر و دیگری نظیر ضلع کوچک‌تر. طبق فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع داریم:



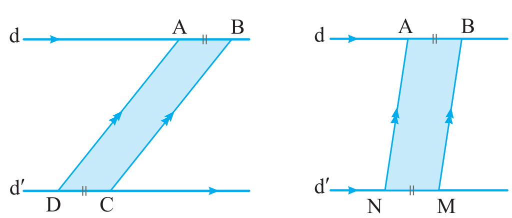
$$S_{\square} = ah = bh' \to ۸\times ۴ = ۲h' \to h' = ۱۶$$

مثال و جواب

مثال در شکل روبه‌رو $d \parallel d'$ بوده و چهارضلعی‌های ABCD و ABMN هر دو متوازی‌الاضلاع هستند. مساحت این دو شکل چه رابطه‌ای با هم دارند؟



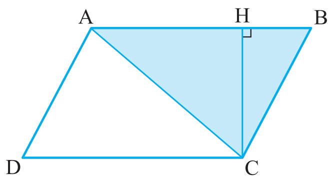
جواب مطابق شکل چهارضلعی‌های رنگی، هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند، پس ضلع‌های روبه‌روی آن‌ها با یکدیگر برابرند.



به‌عبارت دیگر هر دو متوازی‌الاضلاع ABCD و ABMN قاعده‌ی مشترک AB دارند. از طرفی چون $d \parallel d'$ است، پس طول ارتفاع وارد بر قاعده‌ی این دو متوازی‌الاضلاع (که فاصله‌ی دو قاعده‌ی موازی آن‌هاست) نیز ثابت است. بنابراین طبق فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع (حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع نظیرش)، داریم:

$$S_{\square ABCD} = S_{\square ABMN}$$

مساحت مثلث غیر مشخص برای محاسبه‌ی مساحت یک مثلث غیرمشخص، از فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع استفاده می‌کنیم. مطابق شکل یک قطر دلخواه از متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم می‌نماییم. سپس از یکی از دو رأس این قطر عمودی بر ضلع مقابلش وارد می‌کنیم:

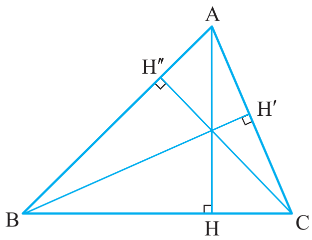


$$\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADC}: \begin{cases} AD = BC \\ AB = DC \\ AC = AC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ADC}} \qquad (1)$$

$$\rightarrow S_{\underset{ABCD}{\square}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ADC}} \overset{\text{طبق}(1)}{=} S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ABC}} \rightarrow \boxed{S_{\underset{ABCD}{\square}} = 2S_{\overset{\Delta}{ABC}}} \qquad (2)$$

از طرفی مساحت یک متوازی‌الاضلاع برابر است با ضرب ارتفاع در قاعده، یعنی $S_{\underset{ABCD}{\square}} = AB \times CH$، پس طبق (۲) داریم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} AB \times CH$

به‌عبارت‌دیگر **مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده (هر کدام از اضلاع) در ارتفاع نظیرش.** دقت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر هر کدام از اضلاع قائم را قاعده بگیریم، ارتفاع نظیر آن، ضلع دیگر قائم است.



قرارداد: مطابق شکل، مثلث ABC با اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ مفروض است. در این صورت اندازه‌ی ارتفاع AH نظیر ضلع $BC = a$ را با h_a نشان می‌دهیم:

به همین ترتیب اندازه‌ی ارتفاع نظیر ضلع $AC = b$ را با h_b و اندازه‌ی ارتفاع نظیر ضلع $AB = c$ را با h_c نمایش خواهیم داد. در این صورت داریم:

$$\boxed{S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c}$$

نتیجه‌بسیارمهم **طبق فرمول مساحت مثلث، حاصل‌ضرب هر ضلع در ارتفاع نظیرش، دو برابر مساحت مثلث است:**

$$\boxed{a h_a = b h_b = c h_c = 2S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

مثال و جواب

مثال **قاعده‌ی مثلثی ۴h و ارتفاع آن h است. اگر مساحت مثلث ۳۲ باشد، طول قاعده را بیابید.**

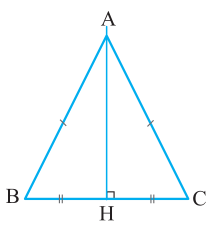
جواب با توجه به فرمول مساحت مثلث داریم:

$$S_{\Delta} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} \rightarrow 32 = \frac{4h \times h}{2} \rightarrow 32 = 2h^2 \rightarrow h^2 = 16 \rightarrow h = 4$$

$$\rightarrow \text{قاعده} = 4h = 4 \times 4 = 16$$

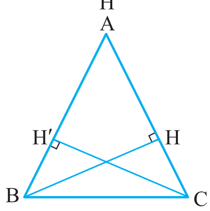
در مثلث متساوی‌الساقین:

① **ارتفاع وارد بر قاعده، طول قاعده را نصف می‌کند.**



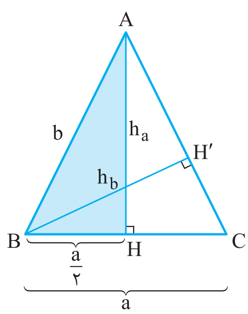
$$AB = AC , AH \perp BC \rightarrow BH = HC = \frac{BC}{2}$$

② **طول ارتفاع وارد بر ساق‌ها، با یکدیگر برابرند.**



$$AB = AC , BH \perp AC , CH' \perp AB \rightarrow CH' = BH$$

اگر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی را a و ارتفاع وارد بر آن را h_a و همچنین ساق این مثلث را b و ارتفاع وارد بر ساق را h_b بگیریم، می‌توان نوشت:



$$\overset{\Delta}{ABH}: b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: a h_a = b h_b = 2S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$