

بهنام خردی بصریان

اموزش و

پیشگیری بازدهی آمار و احتمال

• مصطفی دیداری
میر و ناظر علی کروه ریاضی: ھندس عباس اشرفی





Maryam Mirzakhani
May 3, 1977 - July 14, 2017

Professor of Mathematics at
Stanford University

تقدیم به همه فرزندان افتخارآفرین ایران

به مناسبت تقارن زمانی تدوین این کتاب با ضایعه درگذشت پروفسور مریم میرزاخانی بر آن شدیم تا برای ادای احترام، مختصری از افتخارات این نابغه بزرگ را برای شما بیان کنیم:
مریم میرزاخانی اولین دختری بود که به تیم المپیاد ریاضی ایران راه یافت و همچنین اولین دختری بود که در المپیاد ریاضی ایران، مدال طلا گرفت. وی اولین کسی بود که دو سال متوالی مدال طلا کسب کرد و اولین فردی بود که در آزمون المپیاد ریاضی نمره کامل گرفت. او دوره لیسانس و فوق لیسانس ریاضی را در دانشگاه صنعتی شریف سپری کرد و بعد از آن، با دریافت بورسیه از طرف دانشگاه هاروارد به آنجا رفت و دوره دکتری خود را در آن دانشگاه پشت سر گذاشت.
مریم در سال ۲۰۰۴ با اخذ مدرک دکترا از دانشگاه هاروارد به سپرستی کورتیس مکمولن، از برندهای جایزه فیلدز فارغ التحصیل شد، در دانشگاه‌های پرینستون و استنفورد به تدریس مشغول شد. یک سال بعد، در سال ۲۰۰۵ نشریه پاپیولار ساینس آمریکا، او را به عنوان یکی از ده ذهن جوان جهان برگزید و تجلیل کرد.

او مدتی در پرینستون درس می‌داد ولی بعد به استنفورد رفت و کار تدریس و پژوهش را در آنجا پی‌گرفت.
مریم در شهریور ۱۳۸۷ و در ۳۱ سالگی به درجه استادی این دانشگاه رسید.

مریم میرزاخانی، نخستین بانوی ریاضی‌دان تاریخ لقب گرفته که توانسته است مدال فیلدز را دریافت کند. این مدال معتبرترین جایزه دنیای ریاضیات است و به دانشمندان برگزیده زیر ۴۰ سال اهدا می‌شود. متاسفانه، پروفسور مریم میرزاخانی در تاریخ ۲۴ تیرماه ۱۳۹۶، در ۴۰ سالگی جان به جان آفرین تسلیم کرد و در میان بُهت همگان، وجودش از جهان دریغ شد.

مقدمه

تقدیم به جناب سرهنگ شاهرخی که
مثل پدر خودم دوستش دارم.



به نام او

ماکس پلانگ، پس از دریافت جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۱۸، به سراسر آلمان سفر کرد. او به هر شهری که دعوت می‌شد، سخنرانی یکسانی را که در مورد مکانیک کوانتمی آماده کرده بود، ارائه می‌داد. با گذشت زمان، راننده پلانگ سخنرانی او را موبه مو حفظ شده بود. یک روز به او گفت: «پروفسور پلانگ، حتماً برایتان کسل‌کننده است که یک سخنرانی را چندین بار تکرار کنید. نظرتان چیست که در مونیخ من به جای شما سخنرانی کنم؟ شما هم می‌توانید در ردیف جلو بنشینید و کلاه شوفری من را به سر بگذارید. این کار برای هر دوی ما تنوع خوبی است.»

پلانگ از پیشنهاد او استقبال کرد. بعدازظهر آن روز، راننده سخنرانی طولانی او در مورد مکانیک کوانتمی را در حضور مخاطبانی سرشناس ارائه داد. در پایان سخنرانی، یک پروفسور فیزیک از جای خود بلند شد و سوالی را از او پرسید. راننده پلانگ با خونسردی گفت: «هیچ وقت فکر نمی‌کرم یک نفر از اهالی شهر پیشرفت‌های مثل مونیخ، سوالی به این سادگی مطرح کند! حتی راننده من هم پاسخ این سوال را می‌داند. او پاسخ شما را خواهد داد.»

به نظر شما آیا دانش پلانگ و راننده‌اش در یک‌اندازه بود، با اینکه هر دو یک سخنرانی را ارائه کردند؟ مسلماً نه! بسیاری از کارشناسان با توجه به این داستان، افراد در یادگیری دانش به دو دسته تقسیم می‌شوند:

نوع اول، دانش را به صورت واقعی یاد می‌گیرند. این نوع دانش را در افرادی می‌بینیم که برای فهمیدن یک موضوع، زمان و انرژی زیادی صرف کرده و عمیقاً بر آن مسلط شده‌اند. نوع دوم دانش را شوفری (!) یاد می‌گیرند. حاملان این دانش معمولاً به صورت طوطی‌وار مثل این‌که چیزی را از روی دستنوشته‌ای می‌خوانند، کلمات را پشت‌سرهم ردیف می‌کنند، بی‌آنکه کمترین نظری در مورد آن‌ها داشته باشند.

شما جزء کدامیک از این دو دسته هستید؟

من مطمئنم حالا که این کتاب توی دستای توئه، پس جزء افرادی هستی که دانش نوع اول رو دنبال می‌کن. بنابراین لازمه که چیزهایی از این کتاب قبل از شروع بدلونی.

از ویژگی‌های این کتاب براتون می‌گم:

۱ هر فصل از کتاب درسی رو براتون به چند درس مثل کتاب درسیت تقسیم کردیم تا متناسب با جلسه‌های تدریس معلم محترمت بشه.

۲ اول هر فصل یه درخت دانش خیلی کامل از بخش‌های اون قرار دادیم تا توی یه نگاه بفهمی چی به چیه و چقدر از مطالب رو هنوز نخوندی!

۳ اول هر بخش یه درسنامه مختصر و مفید گذاشتیم تا وقتی معلمت درس میده بتونی سریع از روی اون، مطلب رو دوره کنی.

F سعی کردیم هیچ مطلبی از کتاب درسی جا نیفتاده، حتی فعالیتها و «تمرین در کلاس»‌ها.

۴ هر سوالی که توی امتحان‌های نهایی بوده و به کتاب جدید هم ربط داشته، تبدیل به تمرین شده و توی کتاب اومده.

F تمرین‌ها رو به ترتیب از ساده به دشوار آوردمیم تا روند یادگیریت راحت‌تر و سریع‌تر بشه.

۷ دوتا امتحان، یکی برای ترم اول و یکی برای ترم دوم توی کتاب گذاشتیم که شب امتحان خیلی بہت کمک می‌کنه.

۸ انواع و اقسام تیپ‌بندی‌های سوال مثل جای خالی‌ها و درست - غلط، مسئله، تمرین و ... آوردمیم تا یه مجموعه کامل برات آماده باشه.

۹ حواسمن به حجم کتاب بوده که تعادل حفظ بشه و نه خسته‌کننده باشه، نه فرایند یادگیری ناقص بمونه.

۱۰ برای سوال‌هایی که اهمیت قابل توجهی دارن، علامت ☎ در کنار شماره سوال قرار داده شده تا بدونی که این سوال‌ها در انتهای کتاب، پاسخ تشریحی دارن و جواب آخر بیشتر تمرین‌های محاسباتی در انتهای کتاب آورده شده است.

دیگه چی میخوای؟! این کتاب همه چی تمومه! 😊 این گوی و این میدان!

• نکته‌هایی برای استفاده بهتر از کتاب:

بعد از این‌که توی مدرسه، مبحث مورد نظر توسط دبیر درس داده شد، درسنامه کتاب برای اون مبحث رو با دقیق بخون تا آماده حل تمرینات شی. وقتی تمرین‌ها رو حل می‌کنی، دقت کن که برای پرسش‌های دشوارتر، نماد  در کنار شماره سوال قرار داده شده و پاسخ تشریحی اون‌ها در انتهای کتاب اومده. در ضمن، جواب آخر همه تمرین‌های محاسباتی هم انتهای کتاب آورديم.

با نزدیک شدن به شب امتحان، برای امتحان ارائه شده در انتهای کتاب، پاسخ بنویس. برای آمادگی بیشتر برای امتحان، می‌توانی در فاصله یکی دو روز مونده به امتحان، به کتاب «امتحان‌نون» مهر و ماه مراجعه کنی.

اما قدردانی:

در پایان لازم می‌دونم از همه کسانی که در تهیه و تولید این کتاب به من کمک کردند تشکر کنم، افرادی که اگه حتی یک نفر از اون‌ها نبود، شاید این کتاب به این مرحله نمی‌رسید.

- از جناب آقای احمد اختیاری مدیریت محترم انتشارات مهره‌ماه به خاطر حمایت‌های بی‌دریغشان سپاس‌گزارم.
- از جناب آقای محمدحسین انوشه، مدیر محترم شورای تالیف انتشارات که با راهنمایی‌های خود، کمک فراوانی به من کردند.
- از جناب آقای عباس اشرفی که با حضور و پیشنهادهای سازنده نقش کلیدی و مهمی در تالیف این کتاب داشتند.
- از سرکار خانم زهرا خوشنود، مسئول تألیف کتاب‌های اختصاصی که همه زحمات من به دوش ایشان بود.
- از خانم سمیه جباری، مدیر تولید انتشارات که برای تهیه و تولید این کتاب زحمت بسیار کشیدند.
- سرکار خانم رویا طبیعی که صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند و این کار را به نحو احسن انجام دادند و آقایان امیر ماهر و محسن کامران‌پور که با دقت و صبر و حوصله مثال‌زدنی، حروفچینی کتاب را بر عهده داشتند. همچنین از جناب آقای گودرزی، مدیر فروش، خانم قنبری مدیر روابط عمومی و جناب آقای امیر انوشه مدیر سایت تشکر می‌کنم.
هیچ تالیفی بدون نگاه دقیق ویراستار کامل نمی‌شود. تشکر می‌کنم از ویراستار علمی کتاب، سرکار خانم ندا صالح‌پور، دانشجوی دکترای آمار که با دقت و ریزی‌بینی خط به خط کتاب را بررسی کردند و همین‌طور خانم نگار احمدی که زحمت ویراستاری چند بخش را برعهده داشتند.

لحظه‌هاتون پر از احتمال‌های مهر و ماهی
مصطفی دیداری

فهرست



جبر و معادله



تابع



مثلثات



توابع نمایی و لگاریتمی

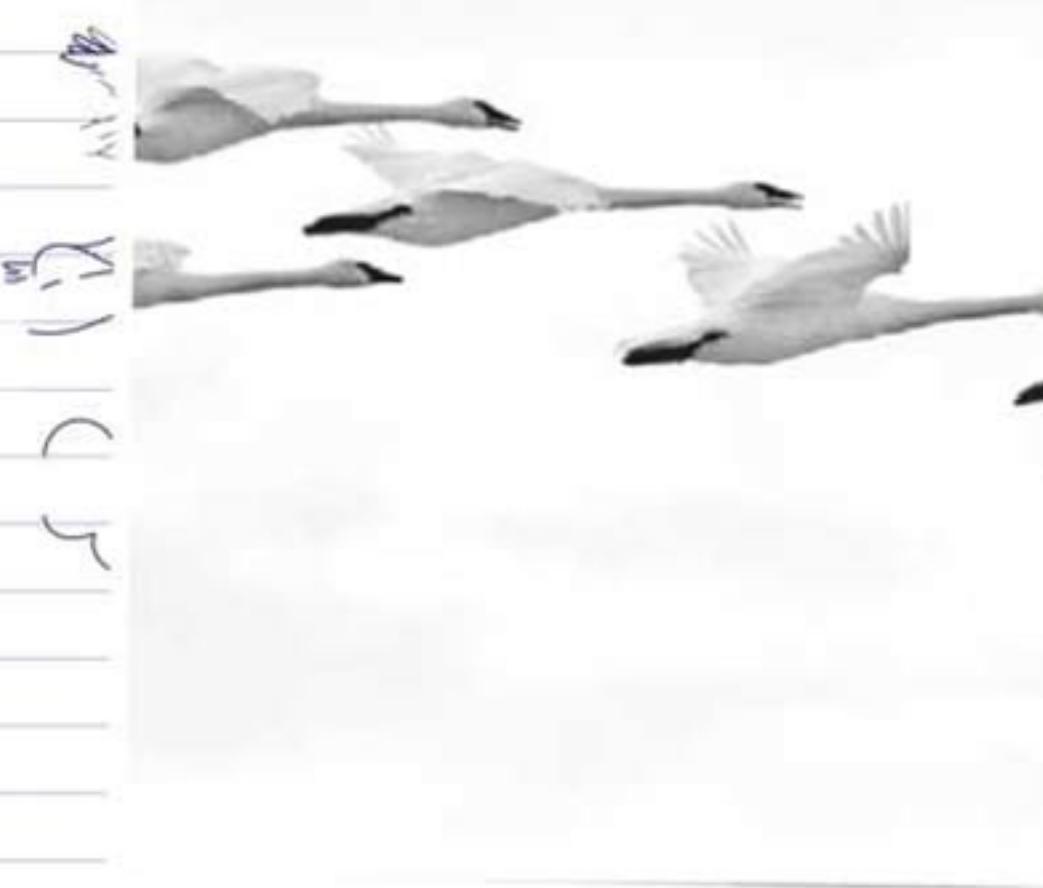
۱۱۷

۱۳۴ آزمون نیمسال اول

۱۳۶ آزمون نیمسال دوم

فصل یکم

آشنایی با مبانی ریاضیات



سورها ← عمومی ← وجودی ← نقیض سورها
ترکیب گزاره‌ها ← فصلی و عطفی ← نقیض ← شرطی و دو شرطی ← جدول
ارزش گزاره‌ها ← همارزی‌های منطقی
گزاره‌نما ← دامنه ← مجموعه جواب
گزاره

درس ۱

آشنایی با منطق ریاضی

تساوی دو مجموعه
اثبات با عضوگیری
مجموعه - زیرمجموعه
زیرمجموعه ← تعریف با نمادهای ریاضی ← تعداد

درس ۲

مجموعه - زیرمجموعه

ضرب دکارتی ← نمودار ضرب دکارتی ← ویژگی‌های ضرب دکارتی
افراز
قوانین اعمال بین مجموعه‌ها
(جبر مجموعه‌ها)
جبر مجموعه‌ها ← جابه‌جایی و توزیع‌پذیری ← دمورگان ← تفاضل به
اشتراک ← قضیه‌ها

درس ۳

برای مطالعه هر علمی اول باید زبان آن علم را به خوبی یاد بگیریم، منطق ریاضی یا منطق نمادی، دستور زبان ریاضی است که به مطالعه ساختار جمله‌هایی که در ریاضی به کار می‌رود، می‌پردازد. این شاخه از ریاضی، به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و درستی یا نادرستی یک استدلال را مشخص می‌کند.

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

◀ تعریف گزاره

به یک جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم. گزاره‌ها را معمولاً با حروف p و q و r نمایش می‌دهیم. مثلاً جمله‌های «عدد ۴ اول نیست» و «عدد ۷ زوج است» هر کدام یک گزاره هستند.

◀ ارزش گزاره

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد پس هر گزاره فقط یک ارزش دارد.



- ۱ ممکن است گزاره‌ای جز، حدسه‌های حل‌نشده ریاضی باشد، بنابراین درست یا نادرست بودن آن هنوز برای ما مشخص نیست، ولی با این حال، حدسه‌ها هم فقط یک ارزش داشته و گزاره به حساب می‌آیند.
- ۲ جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند. مثلاً جمله‌های «آیا هوا گرم است؟»، «درس بخوانید»، «چه باران لطیفی!» هیچ‌کدام گزاره نیستند.

◀ مقدمه و نتیجه استدلال

هر استدلال از چند گزاره تشکیل می‌شود. یکی از آن‌ها نتیجه استدلال و بقیه، مقدمه‌های استدلال هستند. مثلاً نتیجه استدلال‌های «هر عدد طبیعی زوج بر ۲ بخش‌پذیر است» و «عدد ۸ زوج است» می‌شود «عدد ۸ بر ۲ بخش‌پذیر است». دو گزاره اول، مقدمه‌های استدلال هستند.

◀ گزاره‌نما

- تعریف گزاره‌نما: هر جمله خبری شامل یک یا چند متغیر که با جای‌گذاری مقادیر به جای متغیرها، تبدیل به گزاره می‌شود، گزاره‌نما می‌گوییم. گزاره‌نما بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها یک‌متغیره، دو‌متغیره و ... است. مثلاً عبارت « $3x+1 > 0$ » یک گزاره‌نما است. به جای x ، هر عددی که قرار دهیم، یک گزاره به دست می‌آید که بالاخره یا درست است یا نادرست. عبارت «در پرتاپ تاس $\frac{1}{3} = P(A)$ است.» نیز یک گزاره‌نما است. اگر به جای A ، هر پیشامدی از فضای نمونه‌ای قرار دهیم گزاره حاصل درست است یا نادرست.

◀ دامنه متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما، مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرها، قرار داد تا گزاره‌نما، تبدیل به گزاره شود، دامنه گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با D نمایش می‌دهیم.



نکته: دامنه گزاره‌نما را معمولاً بعد از آن داخل پرانتز می‌نویسیم. مثلًا می‌نویسیم $(D = \mathbb{R})$ $x^2 + x - 3 = 0$ یا $(D = \mathbb{N})$ عددی مثبت است. اگر دامنه گزاره‌نما نوشته نشده باشد آن را بزرگترین مجموعه ممکن در نظر می‌گیریم؛ به طوری‌که با قراردادن مقادیر به جای متغیرها، گزاره‌ای با معنی به دست آید. مثلًا اگر در گزاره‌نمای « x عددی فرد است»، دامنه ذکر نشده باشد، $D = \mathbb{Z}$ خواهد بود؛ چون زوج و فرد بودن اعداد، فقط در بین اعداد صحیح با معنی است یا در گزاره‌نمای « P عددی اول است»، دامنه را اعداد طبیعی در نظر می‌گیریم چون اعداد اول، روی اعداد طبیعی تعریف می‌شود.

◀ مجموعه جواب گزاره‌نما

مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر را گوییم که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما، تبدیل به گزاره‌ای با ارزش و درست می‌شود. مجموعه جواب را با حرف S نمایش می‌دهیم که همواره $D \subseteq S$ است.

مثلًا مجموعه جواب گزاره‌نمای « $x^2 - 1 = 0$ که $D = \mathbb{Z}$ است؛ $\{1, -1\} = S$ می‌شود. اگر در همین گزاره $D = \mathbb{N}$ باشد؛ $\{1\} = S$ است.

◀ ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌ها را می‌توانیم به وسیله رابطه‌های گزاره‌ای، ترکیب کرده و گزاره‌های مرکب به دست آوریم. کتاب درسی پنج نوع رابط تعریف کرده است:

۱ رابط ناقض با نماد « \neg »: رابط \neg ، گزاره p را نقیض (منفی) می‌کند.

گزاره $\neg p$ را «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

۲ رابط فاصل با نماد « \wedge »: p و q دو گزاره هستند. گزاره مرکب « $p \wedge q$ » را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. گزاره $p \wedge q$ به صورت « p و q » خوانده می‌شود.

۳ رابط عاطف با نماد « \wedge »: p و q دو گزاره هستند. گزاره مرکب « $p \wedge q$ » را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. گزاره $p \wedge q$ به صورت « p و q » خوانده می‌شود.

۴ رابط شرط با نماد « \Rightarrow »: p و q دو گزاره هستند. گزاره مرکب $q \Rightarrow p$ را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. گزاره $q \Rightarrow p$ به صورت‌های «اگر p آن‌گاه q »، « p شرط کافی برای q » (یعنی p برای رسیدن به q کافیت می‌کند) و « q شرط لازم برای p » (یعنی اگر q نباشد، p هم نیست) خوانده می‌شود. در این ترکیب شرطی، p را مقدم یا فرض، q را تالی یا حکم می‌نامیم.

۵ رابط دوشرطی با نماد « \Leftrightarrow »: p و q دو گزاره هستند. گزاره مرکب $q \Leftrightarrow p$ را ترکیب دوشرطی p و q می‌گوییم. ترکیب $q \Leftrightarrow p$ به صورت‌های «اگر p آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q » و «اگر p و تنها اگر q » خوانده می‌شود.

◀ جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره ممکن است درست یا نادرست باشد. اگر دو گزاره p و q را داشته باشیم، طبق اصل ضرب $2 \times 2 = 4$ حالت، برای ارزش این دو گزاره به وجود می‌آید که عبارت‌اند از: $\{(n, n), (d, n), (n, d), (d, d)\}$. جدول ارزش گزاره‌های مرکب در صفحه بعد آمده است.



برای به دست آوردن نقیض، \forall را تبدیل به \exists (یا برعکس) و (x) را نقیض می‌کنیم.

مثال: نقیض گزاره $\exists x \in \mathbb{R} ; (x < 0) \wedge (x^2 > 0)$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \neg (\exists x \in \mathbb{R} ; (x < 0) \wedge (x^2 > 0)) &\equiv \forall x \in \mathbb{R} ; \neg ((x < 0) \wedge (x^2 > 0)) \\ &\equiv \forall x \in \mathbb{R} ; \neg \underbrace{(x < 0)}_{\text{دموکران}} \vee \neg \underbrace{(x^2 > 0)}_{\text{دموکران}} \\ &\equiv \forall x \in \mathbb{R} ; (x \geq 0) \vee (x^2 \leq 0) \end{aligned}$$

تمرین‌ها • آشنایی با منطق ریاضی

۱ زیر یکی از کلمه‌های مناسب داخل پرانتز خط بکشید.

الف هر گزاره فقط دارای یک (نتیجه - ارزش) است.

ب جمله «آتش می‌سوزاند» گزاره (است - نیست) اما جمله «چرا آتش می‌سوزاند؟» گزاره (است - نیست)

پ ارزش جمله «هر معادله درجه دوم دو ریشه دارد» (درست - نادرست) است و این جمله یک (گزاره - گزاره‌نما) است.

ت مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیرهای (گزاره - گزاره‌نما) قرار داد تا تبدیل به (گزاره - گزاره‌نما) شود، (دامنه متغیر - مجموعه جواب) گزاره‌نما می‌گویند.

۲ جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

الف درست یا نادرست بودن یک گزاره را می‌گوییم. یک گزاره را هم درست و هم نادرست باشد.

ب یک استدلال از چندین جمله خبری تشکیل می‌شود که یکی از آن‌ها و بقیه هستند.

پ مجموعه عضوهایی از دامنه متغیرهای گزاره‌نما که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش می‌شود، گزاره‌نما می‌گوییم.

ت اگر ۱ گزاره داشته باشیم، جدول ارزش درستی گزاره‌ها دارای حالت خواهد بود.

۳ عبارت‌های درست با علامت \checkmark و عبارت‌های نادرست را با علامت \times مشخص کنید.

الف همه جمله‌های امری یک گزاره به حساب می‌آیند، چون خبر از انجام امری به ما می‌دهند.

ب جمله «در پرتاب سکه احتمال رخ دادن بیشامد A برابر $\frac{1}{3}$ است.» گزاره‌نما است.

پ عبارت «برای هر عدد مثبت x داریم: $x^2 \geq x$ » یک گزاره است.

ت «عدد π یک عدد گویا است» یک گزاره به حساب نمی‌آید.

ث ارزش جمله «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت» برای ما مشخص نیست، پس این جمله یک گزاره نیست.

ج اگر دامنه متغیر گزاره‌نما « a^2 » اعداد طبیعی باشد، مجموعه جواب، اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک خواهد بود.

ج اگر D دامنه متغیر گزاره‌نما و S مجموعه جواب گزاره‌نما باشد، $D \subseteq S$.

آمار و احتمال

۴ نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

<p>ب مجموع دو عدد منفی، منفی است. دو عدد y و x منفی هستند. نتیجه:</p>	<p>الف هر عدد اول، فقط دو مقسوم‌علیه مثبت دارد. عدد ۲۱ اول است. نتیجه:</p>
<p>ت اگر تیم والیبال ایران، بروزیل را ببرد، به دور بعد صعود می‌کند. ایران به دور بعد صعود نکرده است. نتیجه:</p>	<p>پ اگر هر دو نمره ریاضی و فیزیک علی برابر ۲۰ باشد، او برای مسابقة علمی انتخاب می‌شود. نمره ریاضی علی برابر $\frac{19}{5}$ شده است. نتیجه:</p>
<p>ج اگر هوا برفی باشد، راه بین دو شهر A و B بسته می‌شود. به احتمال زیاد فردا هوا برفی است. نتیجه:</p>	<p>ث بیماری فردی به علت بیماری کلیه یا بیماری کبد است. چنین نیست که بیماری فرد از کلیه باشد. نتیجه:</p>

۵ از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آن‌ها را تعیین کنید. (مانند نمونه)

ارزش گزاره	گزاره	جمله
نادرست	<input checked="" type="checkbox"/>	۱ در پرتاب تاس، احتمال ظاهر شدن عدد اول برابر $\frac{2}{3}$ است.
		۲ عجب مدیر قوی‌ای!
		۳ جمع هر دو عدد گویا، گویا است.
		۴ آیا جمع دو عدد گنگ، گنگ می‌شود؟
		۵ کسر $\frac{1}{x-1}$ به ازای $x=1$ تعریف نشده است.
		۶ عدد ۱۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

۶ با قرار دادن مقدار متغیرها در هر گزاره‌نما، ارزش گزاره حاصل را تعیین کنید.

ارزش	مقدار متغیرها	گزاره‌نما
نادرست	درست	
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$x = 2$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$x = -1$
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$n = 5$
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$n = 3$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$n = 3$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$x = -2, y = -4$



۱۴ عبارت‌های درست را با علامت \checkmark و عبارت‌های نادرست را با علامت \times مشخص کنید.

- $p \vee q$ وقتی نادرست است که حداقل یکی از p و q نادرست باشند.
- $p \wedge q$ وقتی نادرست است که حداقل یکی از p و q نادرست باشند.
- $\neg p$ درست و q نادرست باشد. ارزش گزاره $p \vee q \sim$ درست است.
- همواره $\neg(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.
- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
- عکس نقیض یک گزاره شرطی با خود آن هم ارز منطقی است.
- گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه شود وقتی نادرست است که جواب آن تهی باشد.

۱۵ فرض کنید p گزاره «درجه هوا منفی است» و q گزاره «هوا بارانی است» باشد. گزاره‌های زیر را به زبان فارسی بنویسید.

الف $\neg p$:

ب $p \vee q$:

پ $p \wedge q$:

ت $\neg p \vee q$:

ث $\neg q \wedge p$:

۱۶ گزاره‌های « $p : \sqrt{2}$ عددی گنگ است» و « $q : \text{عدد } 3 \text{ اول نیست}$ » را در نظر بگیرید. هر جمله را با زبان نمادها تماش دهید.

الف عدد ۳ غیر اول است.

ب $\sqrt{2}$ گنگ نیست یا ۳ اول نیست.

پ $\sqrt{2}$ گنگ است و ۳ اول است.

ت $\sqrt{2}$ گنگ نیست یا ۳ اول است.

۱۷ جدول ارزش درستی را کامل کنید. (مانند نمونه)

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee q$	$\neg p \wedge q$
د	د	ن	د	د	د	ن
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

۱۸ با تکمیل جدول ارزش زیر نشان دهید ارزش گزاره $(p \wedge q) \sim p \vee \sim (p \wedge q)$ همواره درست است.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن		
ن	د	ن		
ن	ن	ن		

۴۵

کدام یک از سورهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف $\forall (x, y \in \mathbb{R} \wedge x = y); x^r + y^r = 2xy$

ب $\forall (x, y \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge x + y = 1); (1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y}) = 1$

پ $\forall (a, b \in \mathbb{Z} \wedge a = 2k \wedge b = 2k'); a + b = 2k''$ سه عدد صحیح هستند) k, k', k''

۴۶

سورهای زیر را به زبان فارسی بیان کرده و ارزش آنها را مشخص کنید.

الف $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{N}; x \leq n$

ب $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}; x \leq n$

۴۷

گزاره‌های سوری زیر را به زبان فارسی بنویسید و درستی یا نادرستی آنها را مشخص کنید.

الف $\forall x \in \{1, 2, 3, 4\} \exists y \in \{2, 4, 5\}; x + y < 8$

ب $\exists x \in \{1, 2, 3, 4\} \forall y \in \{2, 4, 5\}; x + y < 8$

پ $\forall x \in \{1, 2, 3, 4\} \forall y \in \{2, 4, 5\}; x + y < 8$

درس دوم: مجموعه - زیرمجموعه

درس دوم کتاب در مورد مجموعه‌ها است. حتماً یادتان هست که مجموعه، دسته‌ای از اشیای کاملاً مشخص است. تعریف مجموعه باید به گونه‌ای باشد که بتوانیم معلوم کنیم هر شیئی به آن تعلق دارد یا نه. مثلًا اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۳، به صورت $\{3, 6, 9\} = A$ است. نماد علامت عضو بودن است: پس $6 \in A$ و $5 \notin A$. نمایش ریاضی مجموعه‌ها به صورت $\{x \in U | P(x)\}$ است. این نمایش می‌گوید فقط عضوهایی از مجموعه مرجع (U) که ویژگی $P(x)$ را داشته باشند، عضو مجموعه هستند.

تذکر: فرض کنید بهجای $U \in x$ عبارتی برحسب x مثل $(x) Q$ قرار گرفته باشد. اول x هایی که در $P(x)$ درست در می‌آیند را به دست می‌آوریم و بعد آنها را در $(x) Q$ قرار می‌دهیم تا عضوهای مجموعه به دست آیند. مثلًا عضوهای مجموعه A را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$A = \{x^r \mid \underbrace{x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 1}_{-1, 0, 1} \} = \{1, 0, 1\} = \{1, 0\}$$

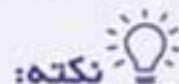
۲۸



تعريف زیرمجموعه

مجموعه A را زیرمجموعه B گفته و می‌نویسیم $A \subseteq B$ ، هرگاه هر عضو دلخواه A ، عضو B هم باشد. به زبان ریاضی می‌شود:

مثلثاً: اگر $\{1, 2, 5, 8\} = A$ و $\{1, 2, 5\} = B$ باشند، A زیرمجموعه B است، چون عضوهای A یعنی ۱ و ۲ عضو B هستند.



۱ به تفاوت دو علامت \subseteq و \subset توجه کنید. مثلثاً مجموعه $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = B$ را در نظر بگیرید. این مجموعه، ۳ عضو دارد که توسط ویرگول از هم جدا می‌شوند. یعنی: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in B$. پس $\emptyset \in B$ ، $\{\emptyset\} \in B$ و $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in B$. به عبارت دیگر وقتی علامت \subseteq می‌آید، باید آن شیء «بدون هیچ کم و کاستی عضو مجموعه باشد. اما وقتی $A \subseteq B$ است، حتماً باید عضوهای داخل مجموعه (داخل آکولاد) A ، عضوهایی از B باشند. مثلثاً اگر B همان مجموعه باشد؛ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq B$ ولی $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \neq B$ چون $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq B$.

۲ زیرمجموعه B نیست هرگاه عضوی در A وجود داشته باشد که در B نباشد. به زبان ریاضی:

$$\neg(A \subseteq B) \Leftrightarrow \exists x ; (x \in A \wedge x \notin B)$$

۳ برای هر مجموعه دلخواه A ، خود مجموعه و \emptyset زیرمجموعه A هستند؛ یعنی $\emptyset \subseteq A$ و $A \subseteq A$. اولی با تعریف واضح است و دومی هم با انتفای مقدم ثابت می‌شود.

تعداد زیرمجموعه‌ها

مجموعه $\{a, b, c\}$ را در نظر بگیرید. هر زیرمجموعه را با یک کد سه‌رقمی با ارقام ۰ و ۱ نظیر می‌کنیم. مثلثاً زیرمجموعه $\{a, b\}$ با کد ۱۱۰ نظیر می‌شود. یا کد ۱۱۱ نظیر زیرمجموعه $\{b, c\}$ می‌شود.

هر رقم کد سه‌رقمی، دو حالت دارد پس طبق اصل ضرب $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ کد سه‌رقمی یا زیرمجموعه، به دست می‌آید. در حالت کلی هر مجموعه n عضوی، 2^n زیرمجموعه دارد. اگر زیرمجموعه شامل عضو خاصی باشد، رقم نظیر در کد فقط ۱ می‌شود. بنابراین 2^{n-1} زیرمجموعه، که همه آنها عضو خاصی را داشته باشند، وجود دارد (شبیه همین 2^{n-1} زیرمجموعه فاقد عضو خاصی وجود دارد.)

زیرمجموعه مخصوص (سره)

اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$ ، به مجموعه A زیرمجموعه مخصوص B می‌گوییم.

به عبارت دیگر همه زیرمجموعه‌های B به غیر از خودش، زیرمجموعه مخصوص به حساب می‌آیند. اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، 2^{n-1} زیرمجموعه مخصوص دارد.

مجموعه توانی $P(A)$: مجموعه همه زیرمجموعه‌های A را مجموعه توانی گفته و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. مثلثاً زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, \emptyset\}$ عبارتند از: $\{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{1, \emptyset\}$. حالا همه آنها در یک مجموعه (آکولاد) قرار می‌دهیم تا $P(A)$ به دست آید. یعنی $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{1, \emptyset\}\}$.

یادآوری اعمال روی مجموعه‌ها

فرض کنید مجموعه مرجع برابر U باشد.

۱) $A \cup B =$ اشیایی که در A و B هستند = اشیایی که در A یا در B هستند.

$$= \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

۲) $A \cap B =$ اشیای مشترک B و A = اشیایی که هم در A و هم در B هستند.

۳) $A - B =$ اشیایی که در A هستند ولی در B نیستند = اشیایی که در A هستند.

$$= \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

۴) $A' = U - A$ = اشیایی که در A نیستند

اثبات روابط زیرمجموعه بودن با عضوگیری

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم $E \subseteq F$. عضو دلخواهی مانند x در E می‌گیریم. از فرض‌های مسئله استفاده کرده و نشان می‌دهیم $F \ni x$. با این کار هر عضو دلخواه E در F بوده و $E \subseteq F$ ثابت می‌شود. به زبان ریاضی:

$$\forall x; x \in E \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in F$$

مثال: ثابت کنید اگر $A' \subseteq B'$ آن‌گاه $B \subseteq A'$.

پاسخ: به تالی (حکم) توجه کنید! می‌خواهیم ثابت کنیم $A' \subseteq B$. پس x دلخواهی عضو B می‌گیریم:

$$\forall x; x \in B \Rightarrow x \notin B' \xrightarrow{A' \subseteq B'} x \notin A' \Rightarrow x \in A$$

پس از $\forall x \in B$ رسیدیم به $x \in A'$: بنابراین $A' \subseteq B$ ثابت می‌شود.

نکته: روابط زیر که درستی آنها با توجه به تعریف یا نمودار ون واضح هستند، به روش عضوگیری ثابت می‌شود.

۱) $A \subseteq A \cup B$

۲) $A \cap B \subseteq A$

۳) $A \cap B \subseteq A \cup B$

۴) $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

۵) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۶) $\emptyset \subseteq A$

۷) $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

۸) $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

تساوی دو مجموعه

دو مجموعه A و B را مساوی می‌گوییم هرگاه هر کدام زیرمجموعه دیگری باشد. به زبان ریاضی:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

برای اثبات یک رابطه تساوی، باید دو مطلب را ثابت کنید: اول طرف راست زیرمجموعه طرف چپ، دوم طرف چپ زیرمجموعه طرف راست. برای اثبات هر کدام می‌توانید از عضوگیری کمک بگیرید.

نکته: با روش عضوگیری می‌توانیم ثابت کنیم: (سعی کنید آنها را با نمودار ون، هم درک کنید.)

۱) $A \cap B = B \cap A$

۲) $A \cup B = B \cup A$

۳) $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

۴) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A - B) = A \wedge (B - A) = B$

۵) $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

۶) $U \subseteq A \Rightarrow A = U$



افراز یک مجموعه

تقسیم‌بندی مجموعه به چند زیرمجموعه ناتهی است به طوری که زیر مجموعه‌ها، اشتراکی ندارند. مثلاً یک افزار برای یک مجموعه $\{a, b, c\}$ به صورت $\{a\}, \{b, c\}$ است. به زبان ریاضی:

می‌گوییم مجموعه غیرتھی A به زیر مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_n افراز شده است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱ $\forall i \leq n ; A_i \neq \emptyset$ (یعنی زیر مجموعه‌ها ناتهی باشند)

۲ $\forall i \neq j ; A_i \cap A_j = \emptyset$ (یعنی اشتراک دوبه‌دوی زیر مجموعه‌ها، تھی باشد)

۳ $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$ (یعنی اجتماع زیر مجموعه‌ها، برابر با A باشد)

تمرین‌ها

۴۸ زیر یکی از کلمه‌های درست داخل پرانتز خط بکشید.

الف مجموعه‌های $\{\cdot\}$ و $\{\emptyset\}$ مجموعه‌های (تک عضوی - تھی) در حالی که مجموعه‌های \emptyset یا $\{\cdot\}$ (تک عضوی - تھی) هستند.

ب مجموعه ۵ عضوی دارای (۳۲-۲۵) زیر مجموعه است.

ب مجموعه ۶ عضوی دارای (۳۵-۶۳) زیر مجموعه مخف است.

ت اگر $x \in A \cup B$ آن‌گاه $x \in A \cap B$ (یعنی $x \in A \vee x \in B$) و اگر $x \in A \cap B$ آن‌گاه $x \in A \cup B$ (یعنی $x \in A \wedge x \in B$)

ث ارزش گزاره شرطی $A \subseteq \emptyset \rightarrow \forall x \in A$ با (انتفای مقدم - انتفای تالی) همواره (درست - نادرست) است. بنابراین $(A \subseteq \emptyset \rightarrow \emptyset \subseteq A)$.

۴۹ جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

الف اگر هر عضو دلخواه مجموعه A بوده و می‌نویسیم B مجموعه B هم باشد می‌گوییم

ب اگر $B \not\subseteq A$ یعنی عضوی در B وجود دارد که عضو A نیست. به زبان ریاضی

ب اگر $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ گزاره‌ای درست باشد نتیجه می‌گیریم

ت اگر $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ زیر مجموعه $\{a_1, a_2\}$ را می‌توانیم با کد مشخص کنیم.

ث از درستی گزاره $\forall x \in A \Rightarrow x \notin B$ نتیجه می‌شود

۵۰ عبارت‌های درست را با علامت ✓ و عبارت‌های نادرست را با علامت ✗ مشخص کنید.

الف مجموعه $A = \{2, 3\}$ دو عضو دارد.

ب دو مجموعه $\{0, 1, 2\}, \{-2, 0, \frac{3}{4}\}$ و $\{0, 25, -8, \emptyset\}$ مساوی‌اند.

ب $\emptyset \not\subseteq \{\emptyset\}$

ت اگر $A \subseteq B$ باشد، $A - B = \emptyset$.

ث مجموعه‌های $\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}$ افرازی برای مجموعه $\{1, 2, 3\}$ به حساب می‌آیند.

$$a \in B \wedge a \notin A \Rightarrow a \in A - B \quad \text{ج}$$

برای اثبات گزاره $A \subseteq B \Rightarrow \forall x \notin B \Rightarrow x \notin A$ کافی است ثابت کنیم: **ج**

اگر به عضوهای مجموعه، یکی اضافه شود تعداد زیرمجموعه‌ها دو برابر می‌شوند. **ج**

فرض کنید $A = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, \emptyset\}\}$ است. درستی یا نادرستی هر گزاره را مشخص کنید. **۵۱**

الف $\{2\} \in A \quad \square$

ب $\{\ } \in A \quad \square$

ج $\{\emptyset\} \in A \quad \square$

ت $\{1, 2\} \in A \quad \square$

ث $\{\emptyset\} \subseteq A \quad \square$

ج $\{2, \{2\}\} \not\subseteq A \quad \square$

ز $\{\{\}\} \not\subseteq A \quad \square$

ج $\{\emptyset, \{\ \}\} \subseteq A \quad \square$

خ $\{1, 2, \{\emptyset\}\} \subseteq A \quad \square$

درستی یا نادرستی هر گزاره را مشخص کنید. **۵۲**

الف $\cdot \in W \wedge \cdot \notin N \Rightarrow W \not\subseteq N \quad \square$

الف $(\forall x \in N \Rightarrow x \in Z) \Leftrightarrow N \subseteq Z \quad \square$

ت $B \subseteq A \wedge B \in A \text{ باشد. آنگاه } B \in A \quad \square$

ت $A = \emptyset \subseteq A \text{ باشد. آنگاه } A = \emptyset \quad \square$

ز $\exists x \in A - B \Rightarrow A \subseteq B \quad \square$

ث $(\exists x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B \quad \square$

نهی یا ناتهی بودن هر مجموعه را مشخص کنید. **۵۳**

الف $\{m \in \mathbb{N} \mid m^2 + m = \cdot\}$

ب $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 = 1) \wedge (2x = 6)\}$

ت $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 = 4) \vee (2x = 1)\}$

ت $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq -1\}$

اگر $A = \{a\}$ و $B = \{a, \{a\}\}$ و $C = \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ باشد درستی یا نادرستی هر رابطه را مشخص کنید. **۵۴**

الف $A \subseteq B \quad \square$

ب $B \subseteq C \quad \square$

ج $A \in B \quad \square$

ت $B \in C \quad \square$

ث $A \cup B \subseteq C \quad \square$

ج $A \cap B \not\subseteq C \quad \square$

در هر قسمت مثال‌هایی از سه مجموعه A و B و C بیاورید که شرایط داده شده برقرار باشد. **۵۵**

الف $A \subseteq B, B \in C$

ب $A \in B, B \in C$

ج $A \in B, C \in B, A \subseteq C$

ت $A \in B, B \in C, A \in C$



۵۶ اعضای مجموعه‌های زیر را به دست آورید و عضوهای مجموعه‌های خواسته شده را بنویسید. (مجموعه مرجع را \mathbb{Z} در نظر بگیرید.)

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^r \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^r - x = 0) \vee |x| \leq 2\}$$

$$C = \{t \in \mathbb{Z} \mid (t^r \leq 2t) \wedge 2^t \leq 1\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + |x| = 0\}$$

$$E = \{x+1 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Z}\}$$

$$F = \{2x-1 \mid (x \in P) \wedge (1 \leq x \leq 10)\}$$

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

$$C' =$$

$$A - B =$$

$$B - A =$$

$$A \cap B' =$$

۵۷ در هر یک از موارد زیر به جای S یکی از مجموعه‌های \mathbb{N} , \mathbb{Z} یا \mathbb{R} را طوری جایگزین کنید تا تساوی درستی حاصل شود.

الف $\{x \in S \mid x^r = 2\} = \emptyset$

S = ب

ب $\{x \in S \mid -5 \leq x < 2\} = \{1\}$

S =

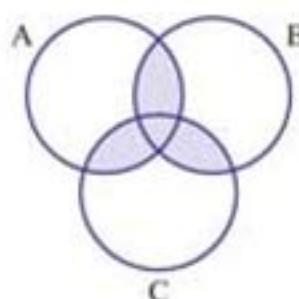
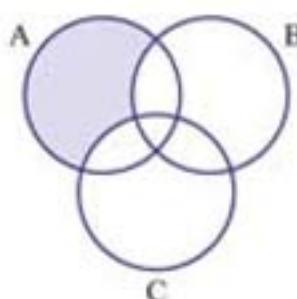
پ $\{x \in S \mid 1 \leq x^r < 5\} - \{x \in S \mid x > 2\} = \{-2\}$

S =

ت $\{x \in S \mid 1 < x \leq 6\} = \{x \in S \mid x^r = 4\} \cup \{x \in S \mid 9 \leq x^r < 27\}$

S =

۵۸ در هر نمودار، قسمت رنگی را با یک عبارت مجموعه‌ای، مشخص کنید.



۵۹ همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, \{a\}\}$ را بنویسید.

۶۰ همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, 1\}$ را بنویسید.

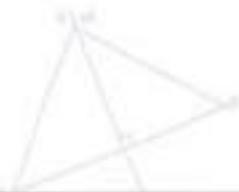
۶۱ اگر $A = \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$ باشد همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A - \{A\}$ را بنویسید.

۶۲ مجموعه \mathbb{N} عضوی $A = 32^{38-14}$ زیرمجموعه دارد.

الف \mathbb{N} را به دست بیاورید.

ب مجموعه A چند زیرمجموعه ناتهی دارد؟

ب مجموعه A چند زیرمجموعه سره دارد؟



۸۹) مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ را در نظر بگیرید. کدام حالت‌های زیر یک افزار برای A به حساب می‌آید؟

- الف $\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}$
ب $\{6\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}$
ت $\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}$

- ب $\{6\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}$
ت $\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}$

۹۰) همه افزارهای مجموعه ۳ عضوی $\{a, b, c\}$ را بنویسید.

۹۱) مجموعه‌های $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = -x\} \cdot \{x \in \mathbb{Z} \mid x(x-1)(x-2) = 0\}$ را مشخص کنید.

۹۲) مجموعه $\{a, b, c, d\}$ را به چند حالت می‌توان به ۳ زیرمجموعه افزار کرد؟ آن‌ها را بنویسید.

۹۳) مجموعه $\{a, b, c, d\}$ را به چند حالت می‌توان به دو زیرمجموعه با تعداد عضوهای نابرابر، افزار کرد؟ آن‌ها را بنویسید.

درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

این درس ادامه مطالب درس قبلی است. می‌خواهیم قوانین و ویژگی‌های اعمال اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم را بررسی کنیم.

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

۱) خاصیت جابه‌جایی اجتماع و اشتراک:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری اجتماع و اشتراک:

این ویژگی می‌گوید این‌که کدام دو مجموعه را ابتدا با هم بگیریم و بعد با مجموعه سوم، تفاوتی ندارد.

۳) خاصیت توزیع‌پذیری (پخشی) اشتراک روی اجتماع و اجتماع روی اشتراک:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

توجه دارید اگر از سمت راست نگاه کنیم مثل این می‌ماند که از $A \cap A$ یا از $A \cup A$ فاکتور گرفته‌ایم.

$$A - B = A \cap B'$$

۴) خاصیت تفاضل به اشتراک:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

۵) قانون‌های دمورگان:

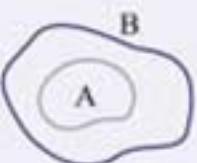
۶ قضیه‌های مقدماتی:



با توجه به شکل مقابل به سادگی در می‌یابیم: (U مجموعه مرجع و) علامت اجتماع است)

$$A \cap A' = \emptyset \quad A \cup A' = U \quad A' - A = A' \quad A - A' = A$$

$$(A')' = A \quad U' = \emptyset \quad (\emptyset)' = U$$



$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \quad , \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

Y

به دو شرطی بودن دقت کنید خیلی به کارتان می‌آید.

$$A \cup \emptyset = A \quad , \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad , \quad A \cup U = U \quad , \quad A \cap U = A \quad \text{نتیجه ۱:}$$

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A \quad , \quad (A \cap B) \subseteq A \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A \quad \text{نتیجه ۲:}$$

روابطی که در نتیجه ۲ بیان کردیم، معروف به قانون‌های جذب هستند.

A اگر B و C باشد، آن‌گاه $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$ و $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

نکته: تمام خواص و ویژگی‌های بالا با تعریف یا عضوگیری ثابت می‌شوند.

◀ اثبات با جبر مجموعه‌ها

اگر از ویژگی‌ها و قوانین ۸ گانه بالا برای اثبات یک تساوی مجموعه‌ای استفاده کنیم، در اصطلاح گفته می‌شود که درستی تساوی با جبر مجموعه‌ها ثابت شده است. پس اگر مسئله، اثبات را با جبر مجموعه‌ها از شما خواسته باشد، دیگر مجاز به استفاده از روش عضوگیری نیستید.

$$A - (A \cap B) = A - B$$

مثال: با جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

پاسخ: از سمت چپ (شلوغ‌تر) شروع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)' \\ &= A \cap (A' \cup B') \\ &= (A \cap A') \cup (A \cap B') \\ &= \emptyset \cup (A \cap B') \\ &= A \cap B' = A - B \end{aligned}$$

تفاضل به اشتراک
دموگان
پخشی روی U

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$$

مثال: با جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap B = B$$

از $\cap B$ فاکتور می‌گیریم:

مثال: نشان دهید اگر $X \subseteq A$ و $X' \subseteq A$ باشد، آن‌گاه $U = A$ است.

$$\left. \begin{aligned} X \subseteq A \\ X' \subseteq A \end{aligned} \right\} \Rightarrow (X \cup X') \subseteq (A \cup A) \Rightarrow U \subseteq A \xrightarrow{A \subseteq U} A = U$$

پاسخ:

مثال: با جبر مجموعه‌ها نشان دهید اگر $A' \subseteq B'$ باشد، آن‌گاه $A' \subseteq B$ است.

پاسخ: باید از ویژگی ۷ استفاده کنیم:

$$A \subseteq B' \rightarrow A \cap B' = A \xrightarrow{\substack{\text{از دو طرف} \\ \text{متفق می‌گیریم}}} (A \cap B')' = A' \xrightarrow{\substack{\text{دموگان} \\ \text{ویژگی ۷}}} (A' \cup B) = A' \xrightarrow{\substack{\text{از} \\ \text{ویژگی ۷}}} B \subseteq A'$$

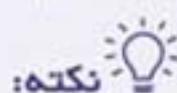


زوج مرتب

دو شی، هانند y و x که بین آن‌ها ترتیب قابل باشیم، زوج مرتب (y, x) می‌گوییم. x را مؤلفه اول (طول) و y را مؤلفه دوم (عرض) می‌گوییم. نمایش هر زوج مرتب در دستگاه به صورت یک نقطه خواهد بود. دو زوج مرتب $x = a \wedge y = b$ و $(x, y) = (a, b)$ مساوی‌اند، هرگاه:

ضرب دکارتی

دو مجموعه A و B داریم. ضرب دکارتی A در B ، شامل زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه اول عضو A و مؤلفه دوم عضو B است. به زبان ریاضی:



۱ در حالت کلی $B \times A$ با $A \times B$ مساوی نیست.

۲ تعداد عضوهای $A \times B$ برابر است با حاصل ضرب تعداد عضوهای A در تعداد عضوهای B . بنابراین تعداد $n(B \times A) = n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ عضوهایی مساوی بوده و داریم:

۳ ضرب دکارتی $A \times A$ را به صورت A^2 نمایش می‌دهیم.

مثال: اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 \leq 4\} = \{-1, 1, 2\}$ باشند، مجموعه $A \times B$ و $B \times A$ را با اعضاء نمایش دهید.

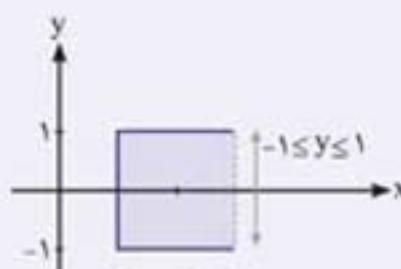
پاسخ: اول عضوهای A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{-1, 1, 2\}$$

$$A \times B = \{-1, 1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(-1, 1), (-1, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$B \times A = \{1, 2\} \times \{-1, 1, 2\} = \{(1, -1), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 1), (2, 2)\}$$

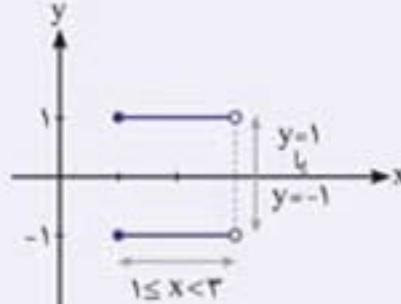
مثال: اگر $A = [1, 3]$ و $B = [-1, 1]$ باشند، نمودار $A \times B$ را رسم کنید.



پاسخ: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\} = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$

توجه دارید چون $= x$ نمی‌تواند باشد، عرض سمت راست مستطیل را به صورت نقطه‌چین رسم می‌کنیم. قسمت رنگی به همراه سه ضلع دیگر مستطیل، نمودار $A \times B$ را نشان می‌دهند. به عبارت دیگر $A \times B$ شامل این زوج مرتب‌ها خواهد بود.

مثال: اگر $A = [1, 3]$ و $B = \{-1, 1\}$ باشند، نمودار $A \times B$ را رسم کنید.



پاسخ: B دیگر بازه نیست و فقط دو عضو دارد.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\} = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3 \wedge (y = -1 \vee y = 1)\}$$

پس نمودار، دو قطعه خط خواهد بود.

قضیه‌های ضرب دکارتی

$$\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset \quad 1$$

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B \quad 2$$

۳ ضرب دکارتی روی \cap و \cup - خاصیت توزیع پذیری و فاکتورگیری دارد. مثلا $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

قانون حذف: $A \times C = B \times C \xrightarrow{C \neq \emptyset} A = B$

(این قانون برای اعمال \cap و \cup برقرار نیست)

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2$$

نکته: از قضیه ۵ نتیجه می‌شود:

اثبات همه قضیه‌های فوق با روش عضوگیری انجام می‌شود.

مثال: قضیه ۴ را ثابت کنید.

پاسخ: $C \neq \emptyset$ است، پس: $\exists c \in C$. باید نشان دهیم هر عضو A در B و هر عضو B در A است.

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in A \Rightarrow (x, c) \in A \times C \xrightarrow{A \times C = B \times C} (x, c) \in B \times C \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B \\ \forall y \in B \Rightarrow (y, c) \in B \times C \xrightarrow{B \times C = A \times C} (y, c) \in A \times C \Rightarrow y \in A \Rightarrow B \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A = B$$

تمرین‌ها

۹۴ زیر یکی از کلمه‌های درست داخل پرانتز خط بکشید.

الف عمل (ضرب - جمع) روی (ضرب - جمع) خاصیت توزیع پذیری دارد.

ب چون ترکیب (فصلی - عطفی) ویژگی جابه‌جایی دارد می‌توان گفت $A \cup B = B \cup A$.

ب به دلیل توزیع پذیری (\wedge - \vee) روی (\wedge - \vee) می‌توان نتیجه گرفت $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

۹۵ جدول‌های زیر را کامل کنید (مانند نمونه).

U	A	A'	\emptyset	U
A				

U	A	A'	\emptyset	U
A				

-	A	A'	\emptyset	U
A				$A - U = \emptyset$
A'				
\emptyset				
U				

۹۶ عبارت‌های درست را با علامت و عبارت‌های نادرست را با علامت مشخص کنید.

- ب اگر $A' \subseteq B'$ ، $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A' \subseteq B'$.
- ت اگر $A = B$ ، $A \cup C = B \cup C$ ، آن‌گاه $A = B$.
- ج اگر $A = B - C$ ، آن‌گاه $B = A \cup C$.
- س اگر $A = \emptyset$ و $B = \emptyset$ آن‌گاه $A \cup B \subseteq \emptyset$.

- الف اگر $B \subseteq A$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $B \subseteq C$ و $D \subseteq A$.
- ب اگر $B \subseteq A'$ ، آن‌گاه $B \subseteq A$.
- ث اگر $A = B$ ، آن‌گاه $A \cap C = B \cap C$.
- ج اگر $A \subseteq B$ باشد ، آن‌گاه $A \cap B = B$ یا $A \cup B = A$.



۹۷ با استفاده از تعریف اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترتیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

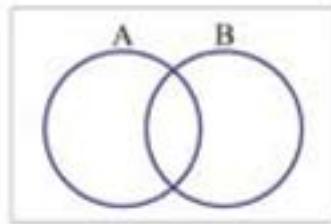
- الف $A \cup B = B \cup A$
- ب $A \cap B = B \cap A$
- پ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- ت $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- ث $A - B = A \cap B'$

۹۸ با استفاده از روش عضوگیری، تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

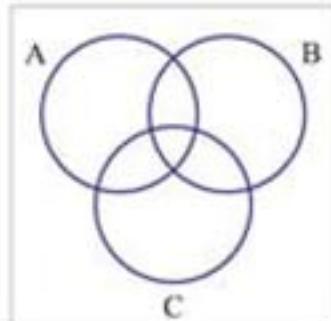
- الف $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ب $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- پ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- ت $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ث $A \cap B \subseteq C' , A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$
- چ $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap B' \subseteq C$

۹۹ روی هر شکل، بخشی را که به صورت توصیفی نوشته شده است هاشور بزنید.

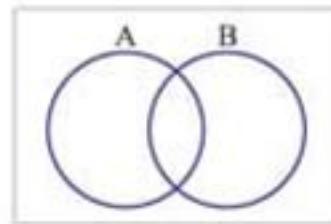
اشیایی که فقط عضو یکی از مجموعه‌ها هستند.



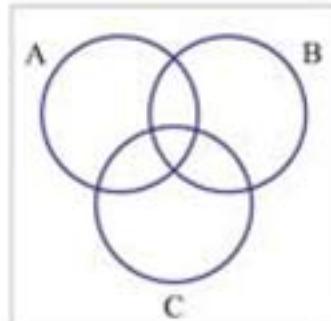
اشیایی که در A هستند ولی عضو هر دو مجموعه C و B نیستند.



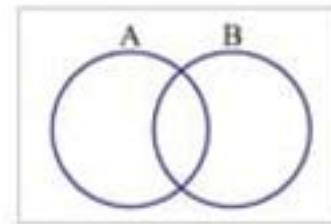
اشیایی که فقط عضو B هستند.



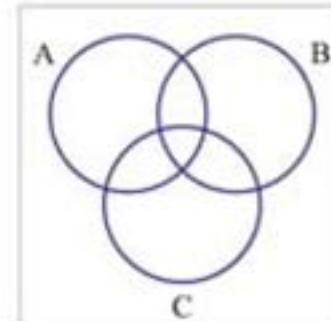
اشیایی که فقط عضو دو تا از مجموعه‌ها هستند.



اشیایی که عضو هیچ‌کدام از دو مجموعه نیستند یا عضو هر دو مجموعه هستند.



اشیایی که عضو A یا C هستند ولی عضو B نیستند.



آزمون نیمسال اول

درس: آمار و احتمال | تاریخ امتحان: دی ماه | رشته: ریاضی فیزیک | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه



ردیف	سوالات	نمره
۱	<p>جای خالی را کامل کنید.</p> <p>الف) درست یا نادرست بودن یک گزاره را می‌گوییم. ب) اگر $\{1, \{1\}, \emptyset\}$ باشد، $A = \{1, \{1\}\}$.</p> <p>پ) شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های معلوم در علم مورد بررسی قرار می‌گیرد.</p> <p>ت) اگر برای دو پیشامد A, B داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$ آن‌گاه A, B را می‌گوییم.</p>	۱
۲	جدول ارزش گزاره $p \vee \sim q \Rightarrow q$ را تشکیل دهید.	۱
۳	<p>نقیض گزاره زیر را بنویسید.</p> <p>«عدد ۷ مربع کامل است و عدد ۶ اول نیست»</p>	۰/۵
۴	a عددی صحیح است. عکس نقیض گزاره «اگر a^2 زوج باشد آن‌گاه a هم زوج است» را نوشه و سپس آن را ثابت کنید.	۱
۵	<p>درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) $(2 \times 2 = 5) \vee (1+1=2)$ ب) $(2 \times 2 = 5) \wedge (1+1=2)$ ت) $\sim(2 \times 2) = 5 \Rightarrow 1+1=2$ پ) $1+1=2 \Rightarrow 2 \times 2 = 5$</p>	۱
۶	ارزش و نقیض گزاره سوری مقابل را بنویسید.	۱
۷	با حذف ۳ عضو از عضوهای یک مجموعه تعداد زیرمجموعه‌ها ۴۴۸ تا کم می‌شود. این مجموعه چند عضو دارد؟	۱
۸	فرض کنید $B \subseteq A$ به روش عضوگیری ثابت کنید $B' \subseteq A'$.	۱
۹	ثابت کنید \emptyset زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.	۰/۵
۱۰	همه افرادی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ به دو زیرمجموعه را بنویسید.	۱
۱۱	<p>با استفاده از جبر مجموعه‌ها احکام زیر را ثابت کنید.</p> <p>الف) $(B \subseteq A) \wedge (B \subseteq A') \Rightarrow B = \emptyset$ ب) $(A \cap B) - (B \cup C) = (A - B) - C$</p>	۲
۱۲	<p>اگر $\{1\} \subseteq A \times B - A^2$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 \leq 2\}$ باشد، عضوهای مجموعه A را مشخص و نمودار آن رارسم کنید.</p>	۱
۱۳	اگر $[-1, 2]$ و $A = (-1, 1)$ باشد، نمودار $A \times B$ رارسم و آن را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.	۰/۵

جواب آخر تمرینات محاسباتی

در این بخش برای اینکه از پاسخی که به آن رسیده‌اید اطمینان پیدا کنید و اگر به جواب صحیح نرسیده‌اید بیشتر تلاش کنید تا به این پاسخ دست یابید، جواب آخر تمرین‌هایی که راه حل محاسباتی دارند آورده‌ایم.



فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

۱۹	الف $n = 5$	۲۱	۶۲
۲۰	$n = 2$	۲۲	۶۳
۲۱	۶ عضو	۲۳	۶۴
۲۲	۱۰ عضو	۲۴	۶۵
۲۳	$k = 8$	۲۵	۶۶
۲۴	$n(B) = 5$ ، $n(A) = 9$	۲۶	۶۷
۲۵	۴	۲۷	۶۹
۲۶	۸	۲۸	۷۰
۲۷	۵۱۲ الف	۲۹	۷۱
۲۸	۳۲ ت	۳۰	۷۲
۲۹	۴۴۸ ث	۳۱	۷۳
۳۰	مجموعه ج	۳۲	۷۴
۳۱	۶۴ مجموعه ج	۳۳	۷۵
۳۲	۱۲۶ الف	۳۴	۷۶
۳۳	۳۵ ت	۳۵	۷۷
۳۴	۲۵۶ ث	۳۶	۷۸
۳۵	۵۶ ب	۳۷	۷۹
۳۶	۲۵۶ ت	۳۸	۸۰
۳۷	۷	۳۹	۸۱
۳۸	$x = \frac{3}{2}$	۴۰	۸۲
۳۹	الف $x = -2, y = \pm\sqrt{2}$	۴۱	۸۳
۴۰	ب $x = 4, y = 1$	۴۲	۸۴
۴۱	الف $x = 5, y = 2$	۴۳	۸۵
۴۲	ب $x = 5, y = 2$	۴۴	۸۶
۴۳	ت $x = 4, y = 2$	۴۵	۸۷
۴۴	الف ۴ عضو	۴۶	۸۸
۴۵	ت ۱۲ عضو	۴۷	۸۹
۴۶	ب ۲۴ عضو	۴۸	۹۰
۴۷	الف $\frac{13}{15}$	۴۹	۹۱
۴۸	ب $\frac{1}{5}$	۵۰	۹۲
۴۹	$P(A) = \frac{8}{15}$	۵۱	۹۳
۵۰	$P(B) = \frac{7}{15}$	۵۱	۹۴

فصل دوم: احتمال

۱۶	۰/۶
۱۷	الف $\frac{13}{15}$
۱۸	ب $\frac{1}{5}$
۱۹	$P(A) = \frac{8}{15}$
۲۰	$P(B) = \frac{7}{15}$



پاسخ تشریحی تعدادی از تمرین‌های دشوار

در این بخش می‌توانید پاسخ تشریحی سؤال‌های دشواری را که با علامت مشخص شده‌اند ببینید.

ب 82

$$\begin{cases} B' \subseteq A \cup B' & (1) \\ \forall x \in A \cup B' \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \notin B \Rightarrow x \in B' \\ \vee \\ x \in B' \end{cases} \\ \Rightarrow A \cup B' \subseteq B' & (2) \end{cases}$$

87

$$\xrightarrow{\text{۱۲}} A \cup B' = B'$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \wedge 2^x \leq 1\} = \{-1, 0\} \\ A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \wedge 2^x \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1\} \\ A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \wedge 2^x \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\} \\ A_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \wedge 2^x \leq 4\} = \{-4, -3, \dots, 2\} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^4 A_i = \{-4, -3, \dots, 2\} = A_4, \quad \bigcap_{i=1}^4 A_i = \{-1, 0\} = A_1$$

الف $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$ 97

$$= \{x \in U \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$$

101

ب $A \cap A \subseteq B \cap B' \rightarrow A \subseteq \emptyset \xrightarrow{\emptyset \subseteq A} A = \emptyset$ طبق قضیه

الف $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow (A \cup B)' = B'$ 102

$$\Rightarrow A' \cap B' = B' \subseteq A'$$

104

ت $(A - B) \cup (A \cup B)' = (A \cap B') \cup (A' \cap B')$

$$= (A \cup A') \cap B' = U \cap B' = B'$$

106

ب $A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C')$

$$= (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$$

118

الف $A = \{k^r \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\} = \{1, 4\}$

B $= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^r = x\} = \{0, 1\}$

ب $A \times A = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (4, 0), (4, 1)\}$

$A \times B - B \times B =$

$\{(1, 0), (1, 1), (4, 0), (4, 1)\} - \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

$= \{(4, 0), (4, 1)\}$

ب $A \times B$ عضو دارد پس $2^4 = 16$ زیرمجموعه دارد.

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

الف حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متولی زوج است چون یکی زوج و دیگری فرد است پس به ازای هر عدد صحیح x داریم $x \in E$, بنابراین مجموعه جواب برابر \mathbb{Z} است.

ب 24

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
d	d	d	n	n	n	n
d	n	d	n	n	d	n
n	d	d	n	d	n	n
n	n	n	d	d	d	d

یکان

الف 27

$$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) = (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) =$$

دموگان

$$\sim p \wedge (\sim q \vee q) \equiv \sim p$$

ب عکس نقیض: اگر n^r مضرب 5 نباشد آن‌گاه n^r مضرب 5 نیست و وقتی n بر 5 بخشید نباشد پس در تقسیم بر 5 باقیمانده‌ای

غیرصفر مثل r دارد و $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, $n = 5q + r$, $n^r = 5q^r + r^r$

$$n^r = (5q + r)^r = 25q^r + 1 \cdot qr + r^r$$

$$= 5(5q^r + qr) + r^r = 5q' + r^r$$

بنابراین n^r مضرب 5 نیست.

ج نقیض:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{Z}; \left(\frac{x+1}{r} = 0\right) \wedge (x^r = 1))$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z}; \sim\left(\frac{x+1}{r} = 0\right) \vee \sim(x^r = 1)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z}; \left(\frac{x+1}{r} \neq 0\right) \vee (x^r \neq 1)$$

ارزش گزاره: خود گزاره نادرست است چون به ازای هر عدد صحیحی

مثل X , دو شرط برقرار نیست. مثلاً اگر $X = 1$ باشد $0 \neq \frac{X+1}{r}$.

نقیض گزاره درست است.

ب 56

$$x^r - x = 0 \Rightarrow x(x^r - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$|x| \leq 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$