به نام پروردگار مهربان

مهروماه

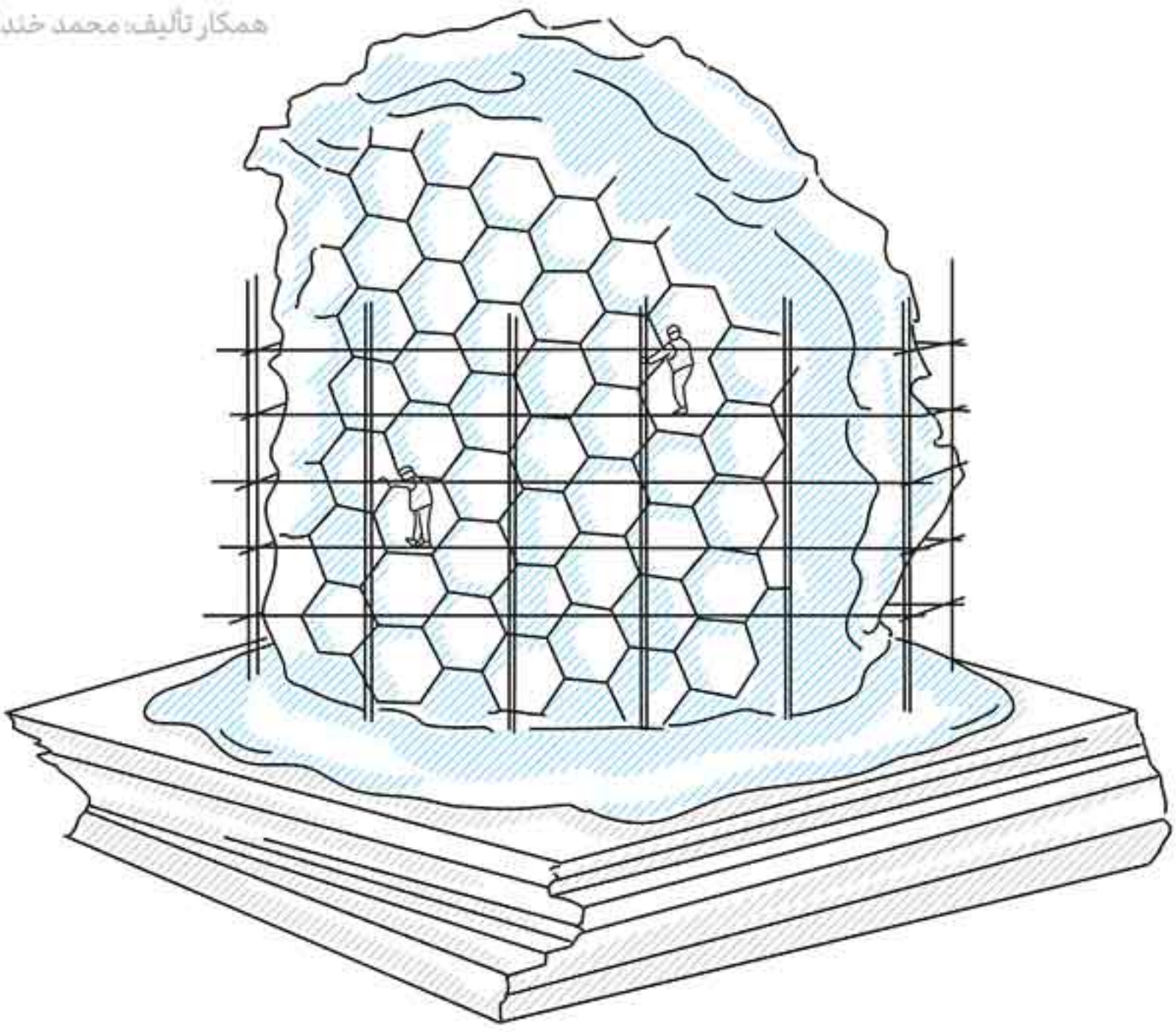
کنکور ۹۹
ویرایش جدید

# هندسه جامع

## پایهٔ دهم، یازدهم و دوازدهم


• جواد ترکمن • روح‌الله مصطفی‌زاده • هومن عقیلی

مدیر و ناظر گروه ریاضی: عباس اشرفی
همکار تألیف: محمد خندان

# فهرست


**پایه دوازدهم**

فصل ۱: ماتریس و کاربردها ۹

فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی ۵۵

فصل ۳: بردارها ۱۱۷

**پایه یازدهم**

فصل ۱: دایره ۱۷۱

فصل ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها ۲۱۱

فصل ۳: روابط طولی در مثلث ۲۳۵

**پایه دهم**

فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال ۲۵۳

فصل ۲: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن ۲۸۱

فصل ۳: چند ضلعی‌ها ۳۱۳

فصل ۴: تجسم فضایی ۳۴۳

پاسخ‌نامه ۳۵۹

پاسخ‌های کلیدی ۵۱۹

# ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

## ماتریس

ماتریس یک جدول مستطیل شکل از اعداد حقیقی است، (ماتریس را آرایهٔ مستطیل شکل نیز می‌نامند.) که اگر دارای m سطر و n ستون باشد، آن را ماتریس از مرتبهٔ $m\times n$ ( m در n ) می‌گوییم.

به عنوان مثال داریم:

$B=\begin{bmatrix} ۵ & \sqrt{۲} \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۲×۲ می‌باشد. (زیرا دو سطر و دو ستون دارد)

$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۴ & ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۳×۲ می‌باشد. (زیرا دو سطر و سه ستون دارد)

$D=\begin{bmatrix} ۱/۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \\ ۷ & ۱۰۰ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۲×۳ می‌باشد. (زیرا سه سطر و دو ستون دارد)

$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۴}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۳×۱ می‌باشد. (زیرا یک سطر و سه ستون دارد)

$E=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۱×۳ می‌باشد. (زیرا سه سطر و یک ستون دارد)

**تذکر:** معمولاً مرتبهٔ ماتریس را در کنار آن می‌نویسند.

## درایه

هر عضو ماتریس را یک درایه می‌نامند. هر درایه در یک سطر و در یک ستون مشخص قرار گرفته است، که این دو عدد (عدد سطر و عدد ستون)، در کنار هم آدرس درایه را مشخص می‌سازند. درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A را به‌صورت $a_{ij}$ نشان می‌دهیم.

درایهٔ واقع در سطر i و ستون j: $a_{ij}$ (i: سطر، j: ستون)

به عنوان مثال در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۵ \\ \sqrt{۳} & ۷ & ۰ \end{bmatrix}$، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول برابر با $\sqrt{۳}$ است، بنابراین $a_{۲۱}=\sqrt{۳}$.

**نتیجه:** معمولاً اگر بخواهیم یک ماتریس را به صورت یک آرایه مستطیل شکل در حالت کلی نشان دهیم، از آدرس درایه‌ها کمک می‌گیریم.

به عنوان مثال داریم:

$C=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$ (درایهٔ واقع در سطر ۱ و ستون ۳)

$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ (درایهٔ واقع در سطر ۲ و ستون ۱)

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ (درایهٔ واقع در سطر ۱ و ستون ۲)

## نمایش فشردهٔ ماتریس

ماتریس A را به‌طور کلی می‌توان به صورت فشردهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش داد، که در آن $a_{ij}$ نمایندهٔ تمام درایه‌های ماتریس A است و مرتبهٔ ماتریس $m\times n$ می‌باشد. بنابراین $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ است. به عبارت دیگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون می‌باشد.

به عنوان مثال، ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۲}$ عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ماتریس A دارای سه سطر و دو ستون می‌باشد.

**تذکر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر می‌باشد، ماتریس صفر نامیده می‌شود و با نماد $\bar{O}$ نشان داده می‌شود. گاهی اوقات ماتریس صفر مرتبهٔ $m\times n$ به‌صورت $\bar{O}_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود. پس: $\bar{O}_{m\times n}=[۰]_{m\times n}$

**تست:** اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$، با $a_{ij}=i+j^۲$ تعریف شده باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۰
۳) ۱۶
۴) ۱۴

**تست:** اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد و $A^2 = 3A - 5I$، آن‌گاه $A^4$ برابر کدام است؟

۱) $3A - 20I$ ۲) $3A + 20I$ ۳) $-3A + 20I$ ۴) $-(3A + 20I)$

پاسخ (گزینه ۴) می‌دانیم $A^4 = A^2.A^2$، پس:

$$A^4 = (3A - 5I)(3A - 5I) = 9A^2 - 15\underbrace{A \cdot I}_{A} - 15\underbrace{I \cdot A}_{A} + 25\underbrace{I \cdot I}_{I} = 9A^2 - 30A + 25I$$

$$= 9(3A - 5I) - 30A + 25I = 27A - 45I - 30A + 25I = -3A - 20I$$

اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $AB + BA = \bar{O}$، آن‌گاه ماتریس $A^2B$ با کدام ماتریس برابر است؟

۱) $-BA^2$ ۲) $BA^2$ ۳) $AB^2$ ۴) $B^2A$

پاسخ (گزینه ۲) با توجه به فرض داریم:

$$AB + BA = \bar{O} \Rightarrow AB = -BA$$

حال تساوی بالا را، از چپ، در $A$ ضرب می‌کنیم.

$$AB = -BA \xrightarrow{A\cdot} A(AB) = -A(BA)$$

$$\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}} (A \cdot A) \cdot B = -(A \cdot B) \cdot A$$

$$\Rightarrow A^2 \cdot B = -(-BA) \cdot A \xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}} A^2 \cdot B = B\underbrace{(A \cdot A)}_{A^2} \Rightarrow A^2B = BA^2$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $\alpha, \beta$ دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که $A^3 = \alpha A + \beta I_2$، آن‌گاه $\alpha + \beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ (گزینه ۱) ابتدا ماتریس $A^2$ و سپس ماتریس $A^3$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}$$

از طرفی می‌دانیم $\alpha A = \begin{bmatrix} 3\alpha & -\alpha \\ 2\alpha & 0 \end{bmatrix}$ و $\beta I_2 = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$، بنابراین طبق فرض داریم:

$$A^3 = \alpha A + \beta I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ 14 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha & -\alpha \\ 2\alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow 15 = 3\alpha + \beta \ , \ \underbrace{-7 = -\alpha + 0}_{\alpha = 7} \Rightarrow \beta = -6 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{10}$ کدام است؟

۱) $2^9$ ۲) $2^{10}$ ۳) $2^{11}$ ۴) $2^{12}$

پاسخ (گزینه ۳)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = 2^2 A$$

بنابراین می‌توان به‌طور استقرایی نتیجه گرفت $A^{10} = 2^9 A$. پس: $A^{10} = \begin{bmatrix} 2^9 & 2^9 \\ 2^9 & 2^9 \end{bmatrix}$ و در نتیجه مجموعه درایه‌های آن عبارت است از:

$$2^9 + 2^9 + 2^9 + 2^9 = 4 \times 2^9 = 2^2 \times 2^9 = 2^{11}$$

## بررسی اتحادهای جبری در ماتریس‌ها

اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آن‌گاه:

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

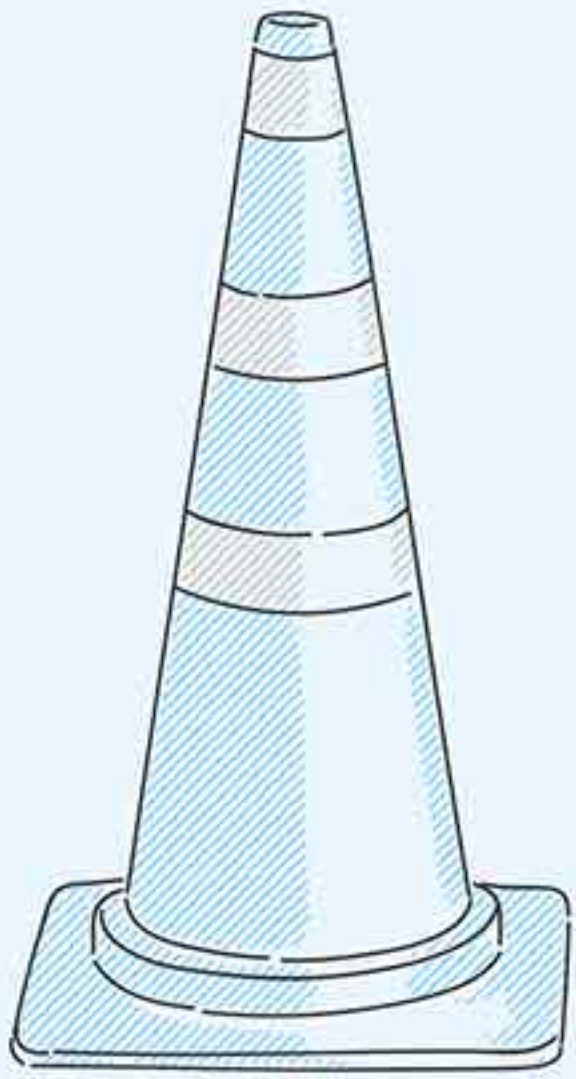
از آن‌جایی‌که می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد (یعنی $AB \neq BA$)، بنابراین سمت راست عبارت بالا تغییری نمی‌کند. بنابراین:

**نتیجه:** ۱ اتحادهای جبری در حالت کلی، در مجموعهٔ ماتریس‌ها برقرار نیستند.

حال فرض کنید $AB = BA$، یعنی $A$ و $B$ دو ماتریس تعویض‌پذیرند، بنابراین:

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + \underbrace{AB + BA}_{2AB} + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

فصل ۲



# آشنایی با مقاطع مخروطی

در این فصل ابتدا مفهوم مکان هندسی و سپس مقاطع مخروطی مورد بررسی قرار می‌گیرند. سپس معادلات دایره و سهمی در دستگاه مختصات دو بعدی و بیضی به‌صورت هندسی مطرح می‌شود.

**تست:** تمام خط‌های قائم بر دایرهٔ (C)، از نقطهٔ $(۳,-۳)$ می‌گذرند. اگر این دایره بر خط $x+y-۲=۰$ مماس باشد، کدام نقطه روی این دایره است؟

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(۲,-۲)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(-۱,۲)$

پاسخ گزینه ۲ چون تمام خط‌های قائم بر دایره، از نقطهٔ $(۳,-۳)$ می‌گذرند، پس این نقطه مرکز دایره است و از آن جایی که این دایره بر خط $x+y-۲=۰$ مماس می‌باشد، پس شعاع دایره با فاصلهٔ مرکز دایره تا این خط برابر است. یعنی: $R=\frac{|(۳)+(-۳)-۲|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$

بنابراین معادلهٔ دایره عبارت است از: $(C):\ (x-۳)^۲+(y+۳)^۲=۲$

که در بین گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(۲,-۲)$ در این دایره صدق می‌کند.

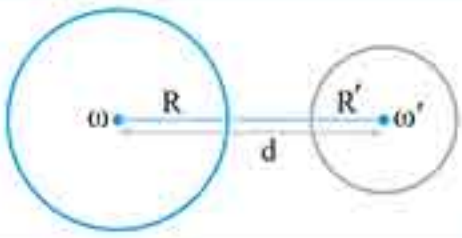
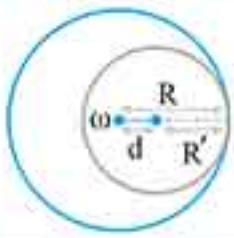
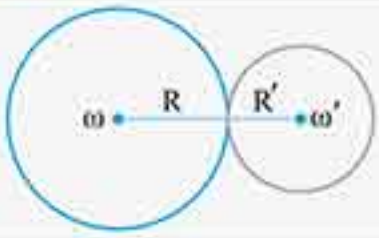
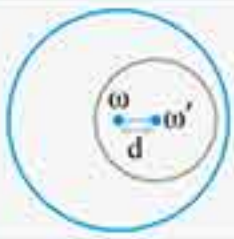
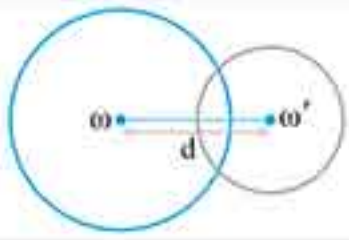
## وضعیت نسبی دو دایره

برای تشخیص وضعیت دو دایره نسبت به هم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱ از روی معادلهٔ هر دو دایره، مختصات مرکز و طول شعاع‌های آن‌ها را به دست می‌آوریم.

مرحلهٔ ۲ طول خط‌المرکزین (فاصلهٔ مرکزهای دو دایره از یکدیگر) را می‌یابیم و آن را d می‌نامیم.

مرحلهٔ ۳ طول خط‌المرکزین را مطابق جدول زیر، که از هندسه می‌دانیم، با جمع و تفریق شعاع‌های دو دایره مقایسه می‌کنیم، تا وضعیت دو دایره مشخص شود.

| طرز تشخیص | وضعیت دو دایره | شکل هندسی | طرز تشخیص | وضعیت دو دایره | شکل هندسی |
|---|---|---|---|---|---|
| $d>R+R'$ | متخارج |  | $d=\|R-R'\|$ | مماس داخل |  |
| $d=R+R'$ | مماس خارج |  | $d<\|R-R'\|$ | متداخل |  |
| $\|R-R'\|<d<R+R'$ | متقاطع |  | $d=۰$ | هم مرکز | |

**تست:** دو دایرهٔ $(C): x^۲+y^۲-۱۰x-۱۴y+۷۳=۰$ و $(C'): x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) متداخل ۲) مماس خارج ۳) مماس داخل ۴) متقاطع

پاسخ گزینه ۲ در دایرهٔ (C)، مختصات مرکز $\omega(۵,۷)$ و اندازهٔ شعاع آن $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱۰)^۲+(-۱۴)^۲-۴(۷۳)}=۱$ و در دایرهٔ $(C')$، مختصات مرکز $\omega'(۲,۳)$ و طول شعاع آن $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+(-۶)^۲-۴(-۳)}=۴$ است. حال به محاسبهٔ طول خط‌المرکزین دو دایره می‌پردازیم:

$$d=\omega\omega'=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۷-۳)^۲}=۵=۱+۴$$

و همان طور که می‌بینیم، $d=R+R'$ است. یعنی دو دایره مماس خارج‌اند.

به ازای کدام مقدار a دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲=۲۰$ و $x^۲+y^۲-۸x-۴y+۲a=۰$ مماس داخل‌اند؟

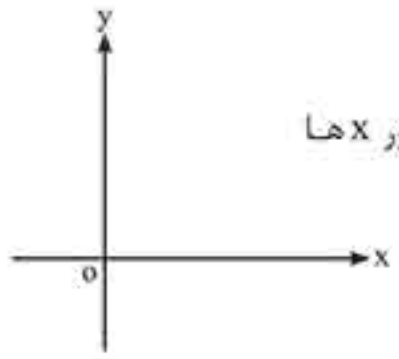
۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) $-۳۰$ ۴) هیچ مقدار a

پاسخ گزینه ۳ مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۰$، مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ $O(۰,۰)$ و طول شعاع آن $R=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$ می‌باشد. در مورد دایرهٔ $x^۲+y^۲-۸x+۴y+۲a=۰$، مختصات مرکز $\omega(۴,-۲)$ و طول شعاع $R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۸)^۲+۴^۲-۴(۲a)}=\sqrt{۲۰-۲a}$ است. حال به محاسبهٔ طول خط‌المرکزین دو دایره می‌پردازیم:

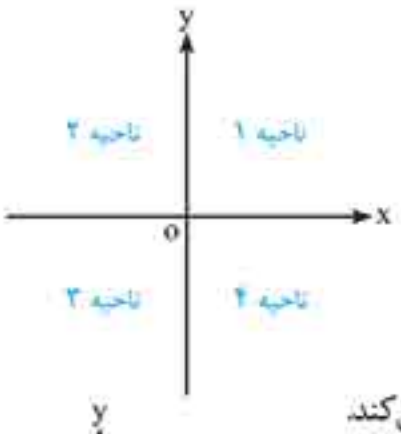
$$d=o\omega=\sqrt{(۴-۰)^۲+(-۲-۰)^۲}=۲\sqrt{۵}$$

# معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

## دستگاه مختصات دوبعدی (صفحهٔ $\mathbb{R}^2$)




از دو محور عمود بر هم تشکیل شده است، که در یک نقطه، به نام مبدأ مختصات متقاطع‌اند. محور افقی را محور x ها و محور عمودی را محور y ها می‌نامیم.

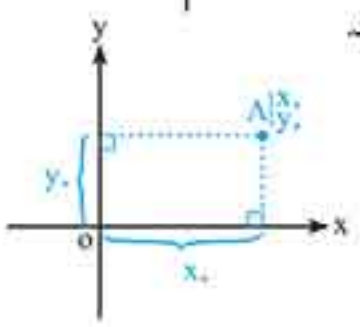



| ناحیه | x | y |
|---|---|---|
| ۱ | + | + |
| ۲ | − | + |
| ۳ | − | − |
| ۴ | + | − |

**تذکر:** ۱ دستگاه مختصات دوبعدی، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند. ناحیه‌ای که در آن مقادیر هر دو محور مثبت هستند، ناحیهٔ اول می‌باشد. سایر ناحیه‌ها در جدول زیر مشخص شده‌اند.

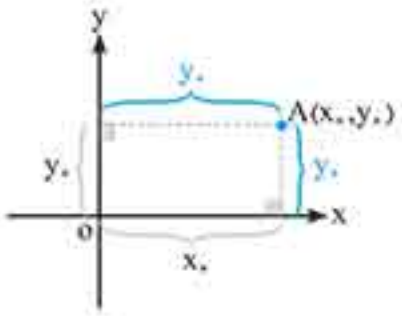
۲ دستگاه مختصات دوبعدی، از ضرب دکارتی مجموعهٔ (محور) اعداد حقیقی در خودش به‌دست می‌آید و لذا آن را صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ می‌نامیم. به عبارت دیگر $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

## نمایش نقطه در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$




هر نقطه از صفحه توسط یک زوج مرتب از اعداد حقیقی مشخص می‌شود و هر زوج مرتب از اعداد حقیقی، یک نقطه را مشخص می‌کند.

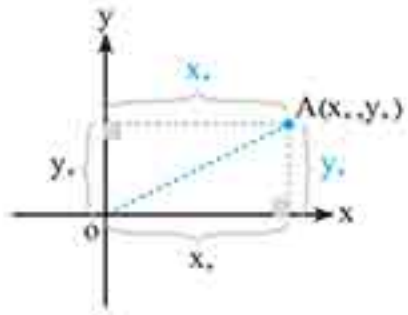
- بنابراین هر نقطه از صفحه را توسط زوج مرتب نشان می‌دهند که مؤلفه‌های آن اعداد حقیقی می‌باشند که توسط عمودهایی که از نقطه، بر محورها رسم می‌شود، به‌دست می‌آیند. پس مجموعه $\mathbb{R}^2$ شامل همهٔ نقاط صفحه است. یعنی: $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$




**تذکر:** ۱ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$

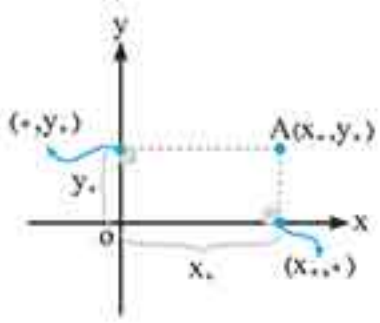
الف) از محور x ها برابر است با $|y_0|$ ب) از محور y ها برابر است با $|x_0|$

- فاصلهٔ یک نقطه از هر محور، با قدرمطلق مؤلفهٔ محورِ غایب برابر است.
- توجه کنید که فاصلهٔ یک نقطه از هر خط یا محور، برابر با طول عمودی است که از آن نقطه بر آن خط یا محور رسم می‌شود.
- به عنوان مثال فاصلهٔ نقطه $A(-3,2)$ از محور x ها برابر با ۲ و از محور y ها برابر با $|-3|=3$ است.




۲ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

- برای اثبات، کافی است قضیهٔ فیثاغورس را در یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه با وتر OA به کار ببرید.
- به عنوان مثال، فاصلهٔ نقطهٔ $A(-3,4)$ از مبدأ مختصات برابر با $\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ است.




۳ مختصات تصویر قائم (پای عمود) نقطهٔ $A(x_0,y_0)$

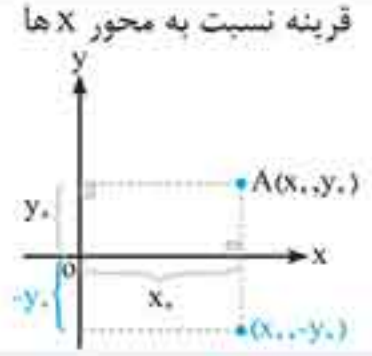
الف) روی محور x ها عبارت است از: $(x_0,0)$ ب) روی محور y ها عبارت است از: $(0,y_0)$

- برای یافتن مختصات تصویر قائم یک نقطه روی هر محور، مؤلفهٔ محورِ غایب، صفر می‌شود. (مؤلفهٔ همنام با محوری که تصویر قائم روی آن انجام می‌گیرد، ثابت است.)
- به عنوان مثال، مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(2,-1)$ روی محور x ها، نقطهٔ $(2,0)$ و روی محور y ها، نقطهٔ $(0,-1)$ است.

۴ مختصات قرینهٔ (بازتاب) نقطهٔ $A(x_0,y_0)$

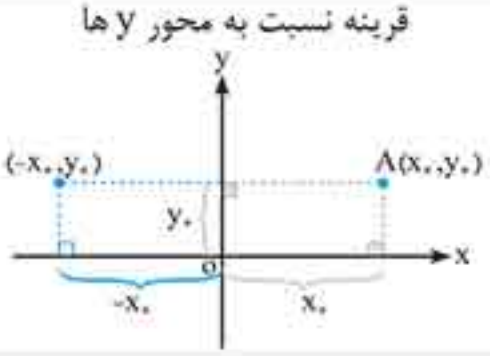
الف) نسبت به محور x ها عبارت است از: $(x_0,-y_0)$

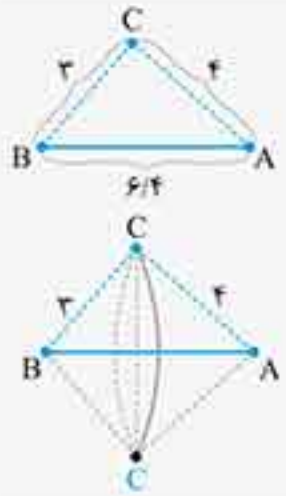
قرینه نسبت به محور x ها




ب) نسبت به محور y ها عبارت است از: $(-x_0,y_0)$

قرینه نسبت به محور y ها






**پاسخ** (گزینه ۴) ابتدا فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$|AB|=\sqrt{(۲+۲)^۲+(-۲-۳)^۲+(-۱+۱)^۲}=\sqrt{۴۱}\simeq ۶/۴$$

از طرفی طبق فرض مسأله، $|CA|=۴$ و $|CB|=۳$ و در نتیجه $|CA|+|CB|>|AB|$.

پس این سه نقطه در فضا تشکیل یک مثلث می‌دهند (شکل ۱).

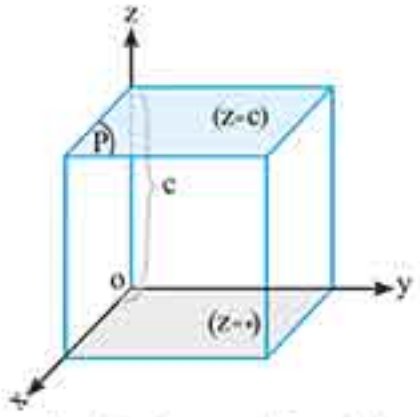
اما از آنجایی که این مثلث در فضا، تشکیل می‌شود، بنابراین نقطهٔ C می‌تواند حول پاره‌خط AB دوران کند و همواره فاصله‌اش از A و B را به اندازهٔ ۴ و ۳ حفظ نماید. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ C در فضا یک دایره است. (شکل ۲) پس برای نقطهٔ C در فضا، بی‌شمار جواب وجود دارد.

## صفحه‌های موازی با صفحات مختصات (عمود بر محورهای مختصات)

- اگر صفحه‌ای موازی با یکی از صفحات مختصات باشد، آن‌گاه عمود بر محور مختصاتی است که بر آن صفحهٔ مختصات عمود می‌باشد.
- اگر صفحه‌ای عمود بر یک محور مختصات باشد، در معادلهٔ آن صفحه مؤلفهٔ هم‌نام با آن محور، برابر با مقدار ثابتی است.

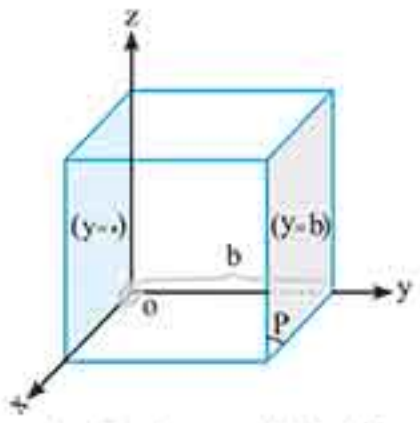
به طور کلی سه حالت وجود دارد:

۱) صفحهٔ P موازی با صفحهٔ xoy است.
↓ محور z ها عمود بر صفحهٔ xoy است.
↓ صفحهٔ P عمود بر محور z ها است.
↓ در معادلهٔ صفحهٔ P، مؤلفهٔ z برابر با مقدار ثابت است.
$P: z=c$



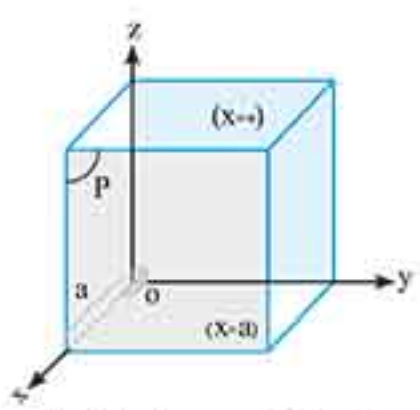

- توجه کنید در صفحهٔ P، مؤلفه‌های x و y هر مقدار دلخواه می‌توانند اختیار کنند. اما مؤلفهٔ z همواره ثابت است.

۲) صفحهٔ P موازی با صفحهٔ xoz است.
↓ محور y ها عمود بر صفحهٔ xoz است.
↓ صفحهٔ P عمود بر محور y ها است.
↓ در معادلهٔ صفحهٔ P، مؤلفهٔ y برابر با مقدار ثابت است.
$P: y=b$



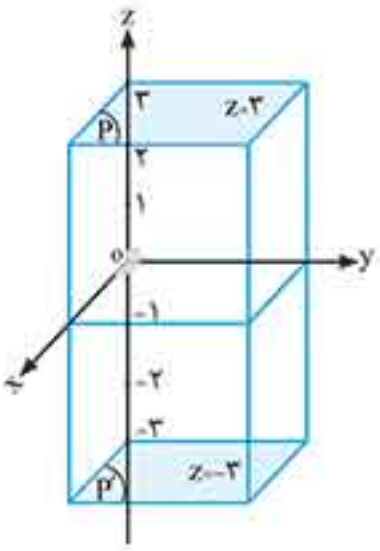

- توجه کنید در صفحهٔ P، مؤلفه‌های x و z هر مقدار دلخواه می‌توانند اختیار کنند. اما مؤلفهٔ y همواره ثابت است.

۳) صفحهٔ P موازی با صفحهٔ yoz است.
↓ محور x ها عمود بر صفحهٔ yoz است.
↓ صفحهٔ P عمود بر محور x ها است.
↓ در معادلهٔ صفحهٔ P، مؤلفهٔ x برابر با مقدار ثابت است.
$P: x=a$



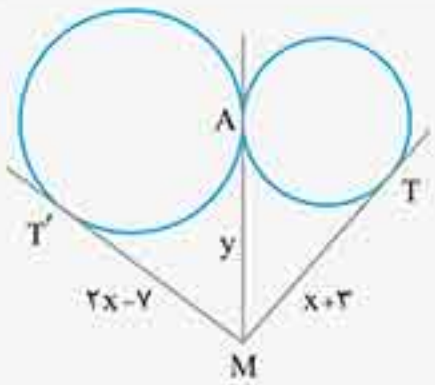

- توجه کنید در صفحهٔ P، مؤلفه‌های y و z هر مقدار دلخواه می‌توانند اختیار کنند. اما مؤلفهٔ x همواره ثابت است.
- به عنوان مثال،

◀ رسم صفحه‌های $P: z=۳$ و $P': z=-۳$




- صفحهٔ P در نقطه‌ای به ارتفاع ۳ و صفحهٔ $P'$ در نقطه‌ای به ارتفاع ۳− بر محور z ها عمود است. (هر دو موازی با صفحهٔ xoy می‌باشند.)
- تمام نقطه‌های واقع بر صفحهٔ P دارای $z=۳$ و تمام نقطه‌های واقع بر صفحهٔ $P'$ دارای $z=-۳$ می‌باشند. یعنی مؤلفهٔ z تمام نقاط آن‌ها ثابت است.
- تمام نقطه‌های واقع بر صفحهٔ P و $P'$ دارای x و y متغیرند (یعنی x و y هر عددی می‌توانند باشند.)

**تست:** در شکل مقابل، دوتایی $(x,y)$ کدام است؟

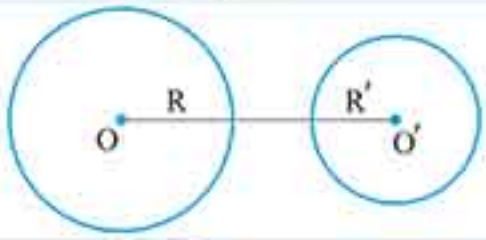
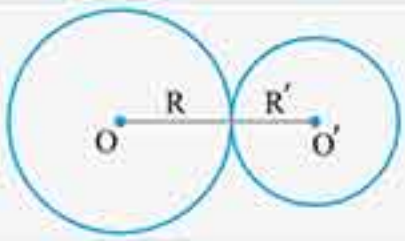
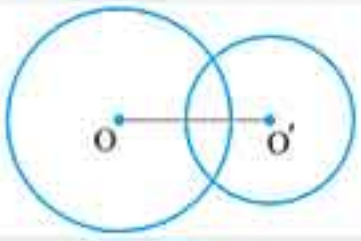
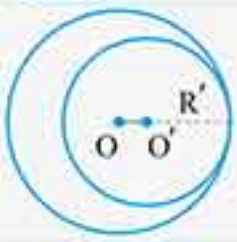
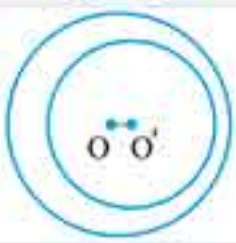



۱) $(۱۱,۱۲)$ ۲) $(۱۰,۱۳)$
۳) $(۹,۱۱)$ ۴) $(۱۰,۱۲)$

پاسخ گزینه ۲ با توجه به قضیهٔ دو مماس، واضح است که $MT = MA$ و $MT' = MA$.
پس $MT = MT'$. داریم: $MT = MT' \Rightarrow x+۳ = ۲x-۷ \Rightarrow x = ۱۰ \Rightarrow y = x+۳ = ۱۳$

## اوضاع نسبی دو دایره

دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با توجه به فاصلهٔ $d = OO'$ (در اصطلاح طول خط‌المرکزین) و با فرض $R > R'$، نسبت به هم می‌توانند وضعیت‌های زیر را داشته باشند:

| وضعیت | طرز تشخیص | شکل |
|---|---|---|
| متخارج (نقطهٔ اشتراکی ندارند) | $d > R + R'$ |  |
| مماس خارج (یک نقطهٔ اشتراک دارند) | $d = R + R'$ |  |
| متقاطع (دو نقطهٔ اشتراک دارند) | $R - R' < d < R + R'$ |  |
| مماس داخل (یک نقطهٔ اشتراک دارند) | $d = R - R'$ |  |
| متداخل (نقطهٔ اشتراکی ندارند) | $d < R - R'$ |  |

(حالت دو دایرهٔ هم‌مرکز، حالت خاصی از دو دایرهٔ متداخل است که $d = ۰$ است.)

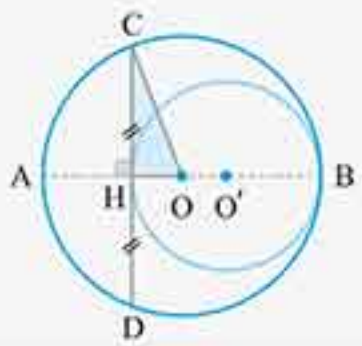
**تست:** طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل، مساوی ۲ واحد و مساحت ناحیهٔ محدود بین آن‌ها مساوی $۱۶\pi$ است. طول وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس و بر خط‌المرکزین عمود است، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۶}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

پاسخ گزینه ۱ اگر دو دایرهٔ مماس داخل را $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $R > R'$ در نظر بگیریم، در این صورت مطابق فرض داده‌شده، داریم: $d = OO' = R - R' = ۲$

از طرفی طبق فرض سؤال، داریم:

$$S_C - S_{C'} = ۱۶\pi \Rightarrow \pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۱۶\pi \xrightarrow{\div \pi} R^۲ - R'^۲ = ۱۶ \Rightarrow \underbrace{(R-R')}_{۲}(R+R') = ۱۶ \Rightarrow R + R' = ۸$$

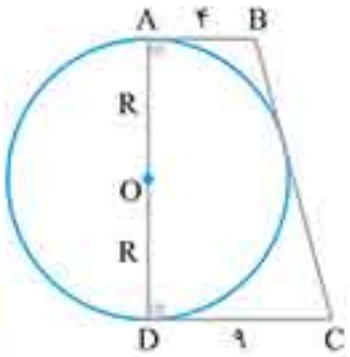



بنابراین دستگاه دو مجهولی $\begin{cases} R + R' = ۸ \\ R - R' = ۲ \end{cases}$ به‌دست می‌آید، که پس از حل این دستگاه $R = ۵$ و $R' = ۳$ است.

پس وضعیت دو دایره به‌صورت مقابل می‌شود. وتر $CD$، وتر عمود بر خط‌المرکزین و مماس بر دایرهٔ کوچک‌تر است. برای یافتن طول $CD$، ابتدا از مرکز $O$ به نقطهٔ $C$ وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OHC$، به کمک فیثاغورس داریم:

$$OC^۲ = OH^۲ + HC^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۱^۲ + HC^۲ \Rightarrow HC = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow CD = ۲HC = ۲ \times ۲\sqrt{۶} = ۴\sqrt{۶}$$

## برای ۱۰۰٪




۵۸۷. در شکل مقابل، ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD با قاعده‌های به طول ۹ و ۴ مفروض است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۶

۲) $\frac{۲۵}{۶}$

۳) ۱۲

۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۵۸۸. از نقطهٔ M خارج دایره‌ای به مرکز O، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم می‌کنیم. شعاع OB را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ C خارج دایره امتداد می‌دهیم. زاویهٔ AMC چند برابر زاویهٔ BMC است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸۹. دایره‌ای به شعاع ۳ واحد در رأس‌های B و C بر ساق‌های AB و AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC (به زاویهٔ رأس $A = ۱۲۰^\circ$)، مماس است. محیط مثلث کدام است؟

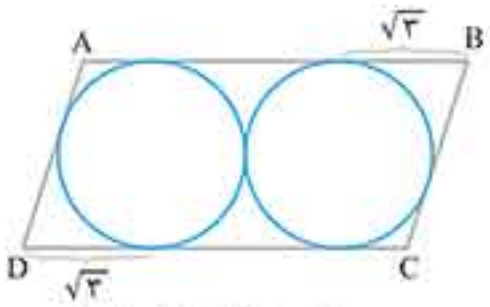
۱) $۳+۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲+۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳+\sqrt{۳}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۵۹۰. اگر بین شعاع‌های دو دایره و d طول خط‌المرکزین آن‌ها روابط $r_۱ + r_۲ = \frac{۳d}{۴}$ و $r_۱ - r_۲ = \frac{d}{۴}$ برقرار باشد، شعاع کوچک‌ترین دایره که به هر دو دایره مماس است، کدام است؟

۱) $\frac{d}{۴}$ ۲) $\frac{d}{۱۶}$ ۳) $\frac{d}{۲}$ ۴) $\frac{d}{۸}$

۵۹۱. دو دایره در نقطهٔ C بر یکدیگر مماس برون هستند و AB مماس مشترک آن‌هاست. اگر $AC = ۸$ و $BC = ۶$، نسبت شعاع‌های دو دایره کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\frac{۱۶}{۹}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$




۵۹۲. در شکل مقابل شعاع دو دایره برابر ۱ و چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $(۲\sqrt{۳} + ۳)$ است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

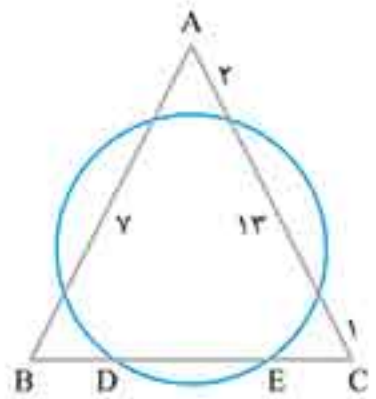
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵۹۳. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۴ واحد، به مرکزهای A، B و C و به شعاع ۲ واحد، سه دایره رسم می‌کنیم. تفاضل شعاع‌های دو دایره‌ای که بر این سه دایره مماس‌اند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $MO^۲$ ۳) $MA^۲$ ۴) $OA^۲$

۵۹۴. دایره‌های $C(O, ۸)$ و $C'(O', ۳)$، با طول خط‌المرکزین ۱۳ مفروض‌اند. اگر A و B نقاط برخورد یکی از مماس مشترک‌های داخلی دو دایره با مماس مشترک‌های خارجی آن‌ها باشند، طول AB کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴




۵۹۵. در شکل مقابل دایره‌ای ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در شش نقطه قطع کرده است. با توجه به اندازه‌های داده شده، طول DE کدام است؟

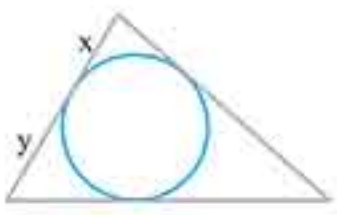
۱) $۷\sqrt{۳}$ ۲) ۹

۳) $۲\sqrt{۱۱}$ ۴) ۱۳

### چندضلعی‌های محاطی و محیطی

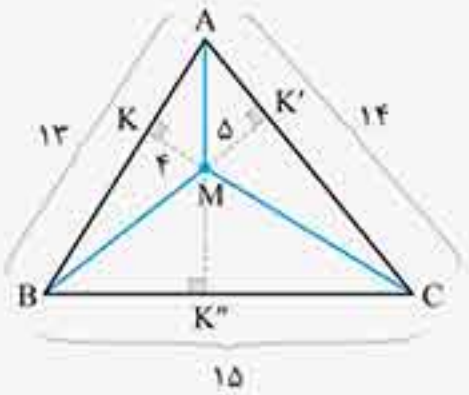
۵۹۶. اگر ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۸ واحد باشد، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵




۵۹۷. دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳، ۹ و ۸، در نقطهٔ تماس کوچکترین ضلع را به دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$




پاسخ (گزینه ۱) به کمک قضیهٔ هرون مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$۲P=۱۳+۱۴+۱۵=۴۲ \Rightarrow P=۲۱ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}=۸۴$$

بنابراین:

$$S_{\overset{\triangle}{MAB}}+S_{\overset{\triangle}{MAC}}+S_{\overset{\triangle}{MBC}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

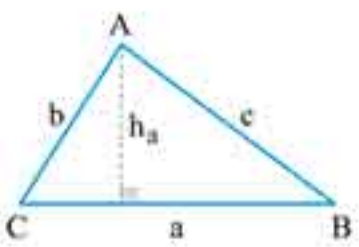
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۳+\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۴+\frac{۱}{۲}\times MK''\times ۱۵=۸۴ \Rightarrow MK''=۳\frac{۱}{۱۵}$$

## محاسبهٔ ارتفاع مثلث از روی اندازه‌های سه ضلع:

مرحلهٔ ۱ از روی اندازه‌های سه ضلع مثلث، به کمک قضیهٔ هرون، مساحت مثلث (S) را می‌یابیم.

مرحله ۲ می‌دانیم مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر همان ضلع.

پس $S=\frac{۱}{۲}a\cdot h_a$ و در نتیجه $h_a=\frac{۲S}{a}$.




بنابراین:

اگر $h_a$، $h_b$ و $h_c$ سه ارتفاع مثلث ABC باشند، آن‌گاه: $h_a=\frac{۲S}{a}\ ,\ h_b=\frac{۲S}{b}\ ,\ h_c=\frac{۲S}{c}$

**تست: اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۴، ۵ و ۷ می‌باشد. طول ارتفاع وارد بر کوچک‌ترین ضلع کدام است؟**

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ (گزینه ۲) فرض می‌کنیم در این مثلث $a=۴$، $b=۵$ و $c=۷$ است.

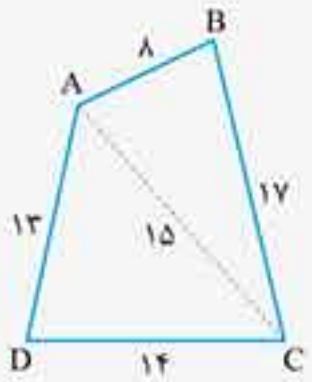
ابتدا محیط مثلث را می‌یابیم: $۲P=۴+۵+۷=۱۶ \Rightarrow P=۸$

حال مساحت مثلث به کمک قضیهٔ هرون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S=\sqrt{P\cdot(P-a)\cdot(P-b)\cdot(P-c)}=\sqrt{۸\times(۸-۴)\cdot(۸-۵)\cdot(۸-۷)}=۴\sqrt{۶}$$

طول ارتفاع وارد بر ضلع $a=۴$ موردنظر است، داریم: $h_a=\frac{۲S}{a}=\frac{۲\times ۴\sqrt{۶}}{۴}=۲\sqrt{۶}$

**مساحت چهارضلعی مقابل، با توجه به اطلاعات داده‌شده، کدام است؟**




۱) ۱۴۴ ۲) ۱۳۵
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۰۵

پاسخ (گزینه ۱) قضیهٔ هرون را در مورد مثلث‌های ABC و ADC به کار می‌بریم سپس مساحت دو مثلث را با هم جمع می‌کنیم:

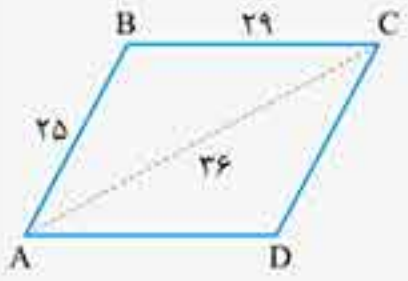
$$\overset{\triangle}{ABC}: ۲P=۸+۱۷+۱۵=۴۰ \Rightarrow P=۲۰ \xrightarrow{\text{هرون}} S=\sqrt{۲۰(۲۰-۸)(۲۰-۱۵)(۲۰-۱۷)}=۶۰$$

$$\overset{\triangle}{ADC}: ۲P=۱۳+۱۴+۱۵=۴۲ \Rightarrow P=۲۱ \xrightarrow{\text{هرون}} S=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}=۸۴$$

پس مساحت چهارضلعی $۶۰+۸۴=۱۴۴$ است.

**در یک متوازی‌الاضلاع، اندازهٔ دو ضلع مجاور ۲۵ و ۲۹ واحد و اندازهٔ قطر بزرگ‌تر برابر ۳۶ واحد است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند واحد مربع است؟**

۱) ۲۵۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰




پاسخ (گزینه ۴) با توجه به شکل، کافی است مساحت مثلث ABC را با قضیهٔ هرون بیابیم و آن را دو برابر کنیم تا مساحت متوازی‌الاضلاع به دست آید (توجه کنید که هر قطر متوازی‌الاضلاع، آن را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند).

$$\overset{\triangle}{ABD}: ۲P=۲۵+۲۹+۳۶=۹۰ \Rightarrow P=۴۵ \xrightarrow{\text{هرون}} S=\sqrt{۴۵(۴۵-۲۵)(۴۵-۲۹)(۴۵-۳۶)}=۳۶۰$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع $۲\times ۳۶۰=۷۲۰$ است.

# آزمون فصل

## ۱ آزمون اول

۱. مثلث ABC و دو نقطهٔ M و N مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه روی ضلع‌های مثلث وجود دارد که از دو نقطهٔ M و N به یک فاصله باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

۲. نقاط A و B در صفحه ثابت هستند و نقطهٔ C طوری در صفحه تغییر می‌کند که $A\hat{B}C = ۲B\hat{A}C$ وقتی C تغییر می‌کند، مجموعه نقاطی که محل تلاقی نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ با پاره‌خط AC هستند، کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) یک دایره ۳) خطی موازی با AB ۴) عمودمنصف AB

۳. اگر O نقطهٔ همرسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث ABC باشد و داشته باشیم $OA = x + ۲$ و $OB = ۳x - ۴$ و $OC = y + ۲$، حاصل $x + y$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴. کدام چهارضلعی را نمی‌توان رسم کرد؟

۱) مستطیلی که طول یک ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۱۰ باشد.
۲) متوازی‌الاضلاعی که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.
۳) مستطیلی که طول قطر آن ۱۰ و زاویهٔ بین دو قطر $۶۰^\circ$ باشد.
۴) لوزی که طول ضلع آن ۵ و طول یک قطر آن ۱۲ باشد.

۵. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا این پاره‌خط را در نقطهٔ H قطع کند. حال به مرکز H و به شعاع AH دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD دقیقاً کدام است؟

۱) مربع ۲) لوزی‌ای که یک زاویهٔ آن $۶۰^\circ$ است.
۳) ذوزنقه ۴) مستطیلی که طول آن، دو برابر عرض آن است.

۶. طول دو ضلع متوازی‌الاضلاع ABCD برابر ۵ و ۴ و طول یک قطر آن $\sqrt{۳}$ است. با این سه طول داده شده چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷. در مثلث ABC، روی ضلع AC، به اندازهٔ $AD = AB$ جدا می‌کنیم. عمودمنصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. زاویهٔ $A\hat{B}E$ چند برابر زاویهٔ $D\hat{B}C$ است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸. نقطهٔ P در صفحهٔ دایرهٔ C و در خارج آن واقع است. حداکثر چند نقطه روی دایرهٔ C و به فاصله ۳ واحد از نقطهٔ P وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۹. دو خط موازی d و d' و دایرهٔ C در صفحه‌ای قرار دارند. حداکثر چند نقطه روی دایرهٔ C می‌توان یافت که از دو خط d و d' به یک فاصله باشند؟

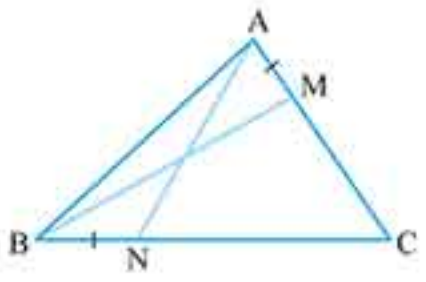
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰. به مرکز O واقع بر خط d، کمانی به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ A قطع کند. سپس به مرکز A و همان شعاع قبلی کمان دیگری رسم می‌کنیم تا کمان قبلی را در نقطهٔ B قطع کند. زاویهٔ $A\hat{O}B$ چند درجه است؟

۱) $۲۲/۵^\circ$ ۲) $۳۰^\circ$ ۳) $۴۵^\circ$ ۴) $۶۰^\circ$

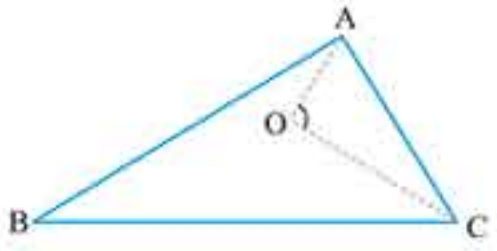
## ۲ آزمون دوم

۱. در شکل مقابل، اگر $AM = BN$ و $BM > AN$، آن‌گاه کدام نامساوی همواره درست است؟

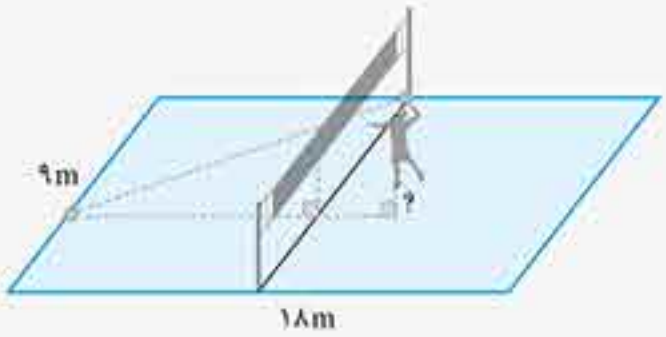



۱) $AB > AC$ ۲) $AB < AC$
۳) $BC > AC$ ۴) $BC < AC$

۲. در شکل مقابل، نقطهٔ O، نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC است. کدام نتیجه‌گیری همواره صحیح است؟




۱) $A\hat{O}C > \hat{A}$ ۲) $A\hat{O}C > \hat{B}$
۳) $A\hat{O}C > \hat{C}$ ۴) $A\hat{O}C > O\hat{A}C$




**تست: ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ ۲ متری از تور، به هوا می‌پرد و توپ را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور، روانهٔ زمین حریف می‌کند و توپ به خط انتهای زمین حریف برخورد می‌کند. این بازیکن برای ضربه زدن چند سانتی‌متر به هوا پریده است؟**

۱) ۹۴ ) ۹۵

۳) ۸۶ ) ۸۷

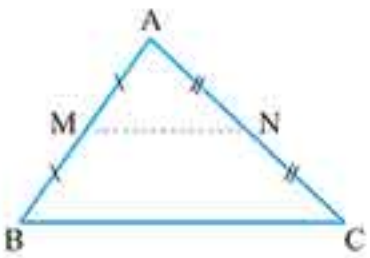
پاسخ (گزینه ۱) با توجه به شکل و خطوط موازی، مطابق قضیهٔ تالس، تناسب جزء به کل زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{۲/۴۳}{۰/۳+۱/۸+x}=\frac{۹}{۱۱}\Rightarrow x=۰/۸۷$$

پس بازیکن ۸۷ سانتی‌متر به هوا پریده است.

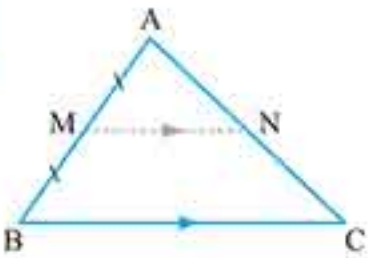
## حالت خاص قضیهٔ تالس

**پاره‌خطی که وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی با ضلع سوم و مساوی با نصف اندازهٔ آن ضلع است.**




$$\begin{cases}AM=MB\\AN=NC\end{cases}\Rightarrow (MN\parallel BC\ ,\ MN=\frac{۱}{۲}BC)$$

توجه کنید که چون تناسب جزء به کل $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۲}$ برقرار است، پس طبق عکس قضیهٔ تالس $MN\parallel BC$ و $\frac{MN}{BC}=\frac{۱}{۲}$ است.



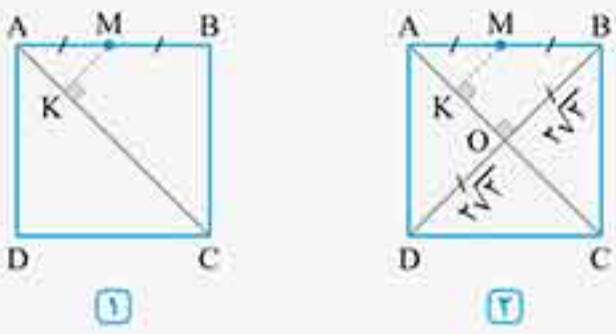

- در هر مثلث، پاره‌خطی که از وسط یک ضلع مثلث، موازی با ضلع دیگر مثلث رسم می‌شود، به وسط ضلع سوم برخورد می‌کند.

$$(AM=MB, MN\parallel BC)\Rightarrow AN=NC$$

توجه کنید که چون $MN\parallel BC$ است، پس طبق قضیهٔ تالس $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ برقرار است. از طرفی چون $AM=MB$ است، پس $\frac{AM}{MB}=۱$ و در نتیجه $\frac{AN}{NC}=۱$، لذا $AN=NC$.

**تست: در مربع به ضلع ۴ واحد، فاصلهٔ وسط یک ضلع از قطر مربع کدام است؟**

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

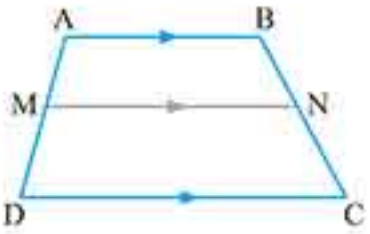



پاسخ (گزینه۳) با توجه به شکل (۱)، فاصلهٔ MK موردنظر است. توجه کنید که قطر مربع، $۴\sqrt{۲}$ است (چرا؟).

اکنون با توجه به شکل (۲)، درمی‌یابیم که در مثلث ABO، پاره‌خط MK از وسط ضلع AB، موازی با ضلع BO، به وسط ضلع AO برخورد کرده است. پس MK، پاره‌خط واصل وسط‌های دوضلع مثلث ABO است و طبق حالت خاص قضیهٔ تالس، برابر با نصف ضلع سوم، یعنی $\frac{۱}{۲}BO=\sqrt{۲}$ است.

## قضیهٔ تالس در ذوزنقه

اگر خطی موازی با دو قاعدهٔ ذوزنقه، ساق‌های آن را قطع کند، بر روی ساق‌ها چهار پاره‌خط متناسب پدید می‌آورد و برعکس.

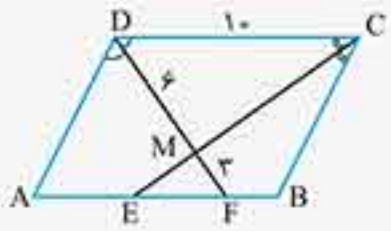



- تناسب بالا به صورت جزء به جزء نوشته شده است.

$$MN\parallel AB\parallel DC\Leftrightarrow\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

- تناسب بالا به صورت جزء به کل نیز قابل بیان است.

$$MN\parallel AB\parallel DC\Leftrightarrow\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}$$




**تست:** در متوازی‌الاضلاع مقابل، نیم‌سازهای دو زاویهٔ مجاور $\hat{C}$ و $\hat{D}$ رسم شده‌اند. اگر $DM=۶$ ، $DC=۱۰$ و $MF=۳$ باشد، آن‌گاه مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

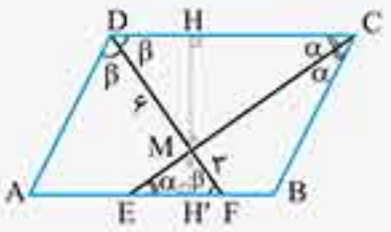
۱) ۶۲ ۲) ۷۰

۳) ۷۲ ۴) ۸۰

**پاسخ** گزینه ۳ می‌دانیم $\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$، پس با رسم نیمسازها، هر دو زاویه نصف می‌شوند و در نتیجه مثلث MDC قائم‌الزاویه است و $\hat{M}=۹۰^\circ$.

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس $MC=۸$. از طرفی ارتفاع وارد بر وتر، در این مثلث برابر است با: $MH=\frac{MD\times MC}{DC}=\frac{۶\times ۸}{۱۰}=۴/۸$

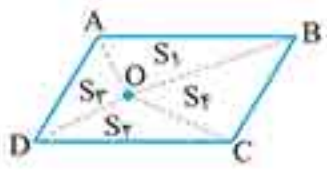
از طرفی به کمک خطوط موازی و مورب در می‌یابیم در مثلث قائم‌الزاویه MEF ، مطابق شکل، $\hat{E}=\alpha$ و $\hat{F}=\beta$ است. پس:




$$\overset{\triangle}{MEF}\sim\overset{\triangle}{MCD}\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}}k=\frac{MF}{MD}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{نسبت ارتفاع‌ها}}\frac{MH'}{MH}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow MH'=۲/۴$$

$$\Rightarrow HH'=۴/۸+۲/۴=۷/۲\Rightarrow S_{ABCD}=HH'\cdot DC=۷/۲\times ۱۰=۷۲$$

**تذکر:** در هر متوازی‌الاضلاع، اگر از نقطه‌ای دلخواه درون آن به چهار رأس وصل کنیم، چهار مثلث پدید می‌آید که مجموع مساحت هر دو مثلثی که شامل دو ضلع مقابل متوازی‌الاضلاع است با نصف مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است.




$$S_{\overset{\triangle}{OAB}}+S_{\overset{\triangle}{ODC}}=S_{\overset{\triangle}{OAD}}+S_{\overset{\triangle}{OBC}}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\Rightarrow S_۱+S_۲=S_۳+S_۴=\frac{S}{۲}$$

(توجه کنید که S، مساحت متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد.)

## مستطیل

**تعریف:** چهار ضلعی است که همهٔ زاویه‌های آن قائمه است.

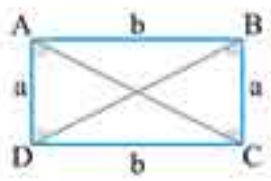
چهارضلعی ABCD مستطیل است $\Leftrightarrow \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=۹۰^\circ$

**نتیجه:** **مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویهٔ قائمه دارد.**

بنابراین مستطیل تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد. به عبارت دیگر در مستطیل:

- هر دو ضلع مقابل، موازی و مساوی هستند.
- هر دو زاویهٔ مقابل، هم‌اندازه و هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.
- قطرها منصّف یکدیگرند.
- هر قطر، مستطیل را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.
- با رسم دو قطر، چهار مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید.

### ویژگی‌های مهم مستطیل




**ویژگی ۱:** **در هر مستطیل قطرها هم‌اندازه هستند.**

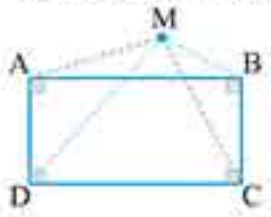
چهارضلعی ABCD مستطیل است $\Rightarrow AC=BD$

- اگر اندازهٔ دو ضلع مجاور مستطیل a و b باشند، طول قطر آن $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است. (چرا؟)

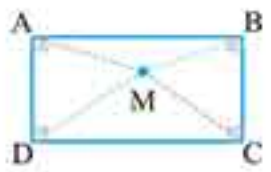
**نتیجه:** **متوازی‌الاضلاعی که دو قطر آن هم‌اندازه باشند، مستطیل است.**

**هشدار:** اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، نمی‌توان نتیجه گرفت که آن چهارضلعی مستطیل است. (چرا؟)

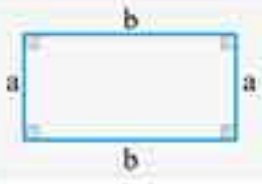
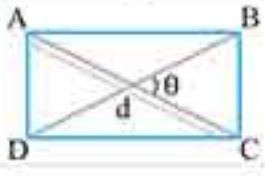
**ویژگی ۲:** **در هر مستطیل مجموع مربع فاصله‌های هر نقطهٔ دلخواه از دو رأس مقابل، با مجموع مربع فاصله‌های آن نقطه از دو رأس دیگر برابر است.**




$$MA^۲+MC^۲=MB^۲+MD^۲$$




### مساحت مستطیل

| | | |
|---|---|---|
| • حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع مجاور (طول × عرض) | $S=a\cdot b$ |  |
| • نصف مربع اندازهٔ یک قطر در سینوس زاویهٔ بین دو قطر | $S=\frac{۱}{۲}d^۲\cdot\sin\theta$ |  |

## وضعیت دو صفحه در فضا

دو صفحه در فضا باهم موازی یا متقاطع هستند.

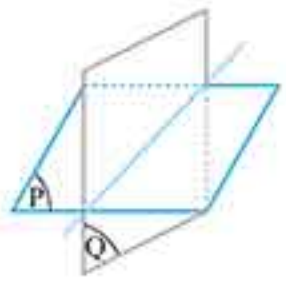
۱ **موازی:** اگر دو صفحه باهم نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم موازی هستند.

$P \cap Q = \varnothing \Leftrightarrow P \parallel Q$

موازی Q , P

۲ **متقاطع:** اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم متقاطع هستند.
خط راستی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

$P \cap Q = d$



متقاطع Q , P

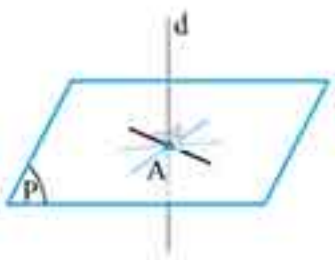
**تذکر:** اگر دو صفحه برهم منطبق شوند، آن‌گاه آن‌ها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.

**نکته:** از هر نقطه خارج یک صفحه، یک و تنها یک صفحه به موازات آن می‌گذرد.

### تعامد

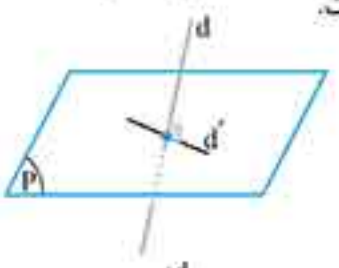
**تعریف:** خط d بر صفحهٔ P عمود است، هرگاه صفحهٔ P را در نقطهٔ A قطع کند و بر تمام خط‌های صفحهٔ P که از نقطهٔ A می‌گذرند، عمود باشد.

$d \perp P$

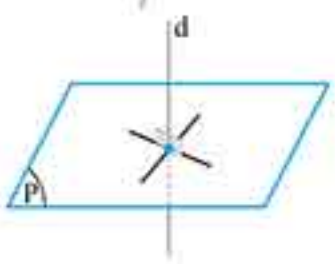


d بر P عمود است

**نکته:** ۱ گر خطی فقط بر یکی از خطوط صفحه‌ای عمود باشد، **نمی‌توان** گفت که آن خط بر آن صفحه عمود است.
در شکل مقابل خط d برخط $d'$ که واقع در صفحه P است، عمود است ولی خط d بر صفحهٔ P عمود نیست.



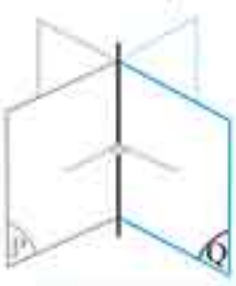

۲ می‌توان نشان داد که اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد، آن‌گاه بر آن صفحه عمود است.




## عمود بودن دو صفحه

دو صفحه برهم عمودند، هرگاه هر کدام شامل خطی باشد که بر صفحهٔ دیگر عمود است. به بیان دیگر می‌توان گفت دو صفحه برهم عمودند، هرگاه یک خط از یکی بر دو خط متقاطع از صفحهٔ دیگر عمود باشد.

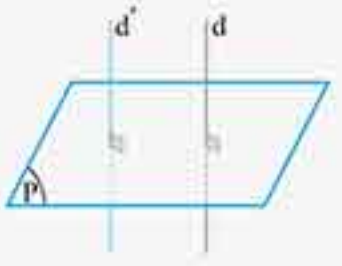
$P \perp Q$




**نکته:**

۱ دو خط عمود بر یک صفحه همواره باهم موازی‌اند.

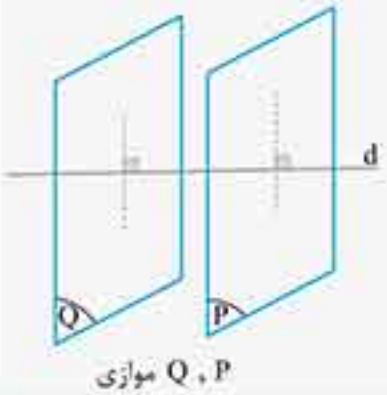
$\begin{cases} d \perp P \\ d' \perp P \end{cases} \Rightarrow d \parallel d'$



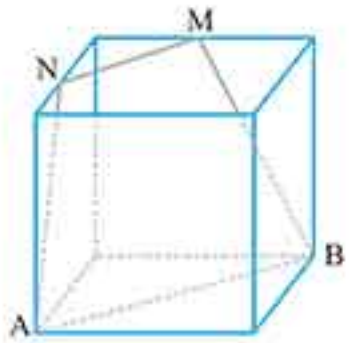
موازی $d'$ , d

۲ دو صفحهٔ عمود بر یک خط همواره باهم موازی‌اند.

$\begin{cases} P \perp d \\ Q \perp d \end{cases} \Rightarrow P \parallel Q$

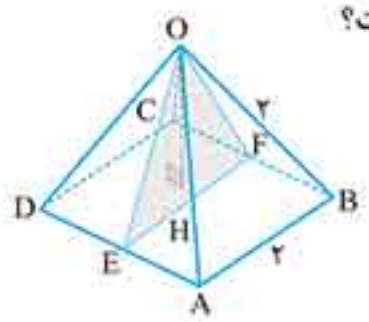


موازی Q , P




**۱۳۰۳.** شکل مقابل یک مکعب به طول یال ۴ واحد است. اگر نقاط M و N وسط‌های یال‌های مکعب باشند، مساحت سطح مقطع صفحهٔ گذرنده از M و N و رأس‌های A و B با مکعب کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۳۶




**۱۳۰۴.** شکل مقابل یک هرم مربع‌القاعده است که وجه‌های جانبی‌اش مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند. این هرم را با صفحه‌ای که از O می‌گذرد و بر قاعده عمود است، برش داده‌ایم. اگر اندازهٔ هر یال این هرم ۲ واحد باشد، آن‌گاه مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

**۱۳۰۵.** در یک مکعب، صفحهٔ گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

**۱۳۰۶.** در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

**۱۳۰۷.** نیم‌کره‌ای به شعاع ۵ واحد را با دو صفحه یکی به فاصلهٔ ۲ واحد از مرکز و دیگری به فاصلهٔ ۴ واحد از مرکز قطع می‌کنیم. نسبت مساحت‌های سطح مقطع‌های ایجاد شده چقدر است؟

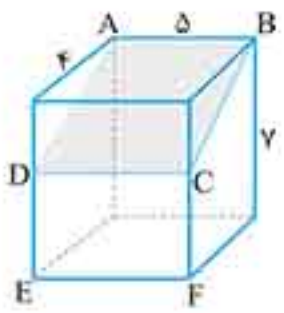
۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

**۱۳۰۸.** شعاع قاعده و ارتفاع مخروطی به‌ترتیب برابر ۵ و ۱۰ واحد است. سطح مقطع صفحه‌ای که موازی قاعدهٔ آن و به فاصلهٔ ۸ واحد از آن مخروط را قطع می‌کند، کدام است؟

۱) $\pi$ ۲) $۴\pi$ ۳) $۸\pi$ ۴) $۱۶\pi$

**۱۳۰۹.** یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ارتفاع ۹ را حول ارتفاع دوران می‌دهیم. جسم حاصله را با فلز پر می‌کنیم و سپس آن را با صفحه‌ای به موازات قاعده‌ها به فاصلهٔ ۳ واحد از قاعدهٔ بزرگ برش می‌زنیم. سطح مقطع حاصل کدام است؟

۱) $۱۶\pi$ ۲) $۹\pi$ ۳) $۱۲\pi$ ۴) $۲۰\pi$




**۱۳۱۰.** در مکعب مستطیل شکل زیر، صفحهٔ ABCD به گونه‌ای این مکعب مستطیل را برش زده است که سطح مقطع ایجاد شده مربع است. مساحت مستطیل CDEF کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۱۷/۵

## دوران حول محور

**۱۳۱۱.** از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن، کدام شکل فضایی حاصل می‌شود؟

۱) یک مخروط ۲) یک استوانه
۳) دو مخروط که در قاعده به هم چسبیده‌اند. ۴)دو مخروط که در رأس به هم چسبیده‌اند.

**۱۳۱۲.** مثلث مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم، شکل فضایی حاصل کدام است؟

۱) مخروط ناقص
۲) یک استوانه که یک مخروط از آن برداشته شده است.
۳) یک مخروط ناقص که یک مخروط از آن برداشته شده است.
۴) یک مخروط ناقص یک استوانه از آن برداشته شده است.

در ماتریس‌های برابر، درایه‌های متناظر با هم برابرند. اما در این مسئله نیازی به پیدا کردن همهٔ پارامترها نداریم. مقدار $c-a$ خواسته شده است. پارامترهای $c,a$ در درایهٔ $x_{۱۲}$ از هریک از ماتریس‌ها قرار دارند. پس فقط کافیست که همین درایه از هریک از آن‌ها را مساوی هم بگذاریم:

$$(AB)_{۱۲}=(BA)_{۱۲}\Rightarrow c+۳۵=۱۵+a\Rightarrow c-a=-۲۰$$

**۱۰.** گزینه ۱ از آن‌جایی که حاصل‌ضرب ماتریسی، یک ماتریس قطری است، پس درایه‌هایی که روی قطر اصلی قرار نگرفته‌اند، باید صفر باشند. یعنی درایه‌های $x_{۱۲}$ و $x_{۲۱}$ از ماتریس حاصل باید صفر باشند. برای راحتی کار، فقط همین دو درایه را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}-۲a & -۲\\ ۲ & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots & ۲a+۴\\ ۶-۲b & \dots\end{bmatrix}$$

از معادلات $۲a+۴=۰$ و $۶-۲b=۰$ مقادیر $b,a$ به‌ترتیب برابر $-۲$ و ۳ به‌دست می‌آیند. در نتیجه حاصل $a+b$ برابر با ۱ می‌باشد.

**۱۱.** گزینه ۲ می‌دانیم ماتریس حاصل، یک ماتریس $۲\times۲$ است (چرا؟)، پس برای آن‌که یک ماتریس قطری $۲\times۲$ داشته باشیم، باید درایه‌های $a_{۱۲}$ و $a_{۲۱}$ برابر صفر باشند. پس:

$$a_{۱۲}=۰\Rightarrow[x\quad -۱\quad ۴]\cdot\begin{bmatrix}-۲\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow -۲x+۴=۰\Rightarrow x=۲$$

$$a_{۲۱}=۰\Rightarrow[۲\quad ۳\quad ۱]\cdot\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ y\end{bmatrix}=۰\Rightarrow ۴+۳+y=۰\Rightarrow y=-۷$$

**۱۲.** گزینه ۱ برای پیدا کردن ماتریس $A^۳$، ابتدا باید ماتریس $A^۲$ را محاسبه کرده و سپس در ماتریس $A$ ضرب کنیم. برای راحتی کار، با توجه به این‌که در این سؤال فقط درایهٔ سطر دوم و ستون سوم خواسته شده، پس سطر دوم ماتریس $A^۲$ را محاسبه کرده و سپس در ستون سوم ماتریس $A$ ضرب می‌کنیم:

$$\text{درایهٔ سطر دوم و ستون سوم } A^۳=\underline{(\overline{A^۲\cdot A})}\text{ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم}\quad (۱)$$

پس به سطر دوم $A^۲$ نیاز داریم:

$$\text{سطر دوم } A^۲=\text{سطر دوم}(A\cdot A)=(\text{سطر دوم } A)\cdot A$$

$$=[۰\quad ۱\quad x]\begin{bmatrix}۱ & x & y\\ ۰ & ۱ & x\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=[۰\quad ۱\quad ۲x]$$

با قرار دادن سطر دوم به‌دست آمده در رابطهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$\text{درایهٔ سطر دوم و ستون سوم } A^۳=(\text{سطر دوم } A^۲)\cdot(\text{ستون سوم } A)$$

$$=[۰\quad ۱\quad ۲x]\begin{bmatrix}y\\ x\\ ۱\end{bmatrix}=[۳x]$$

**۱۳.** گزینه ۴ ماتریس‌های $B$ و $C$ از مرتبهٔ $۲\times۳$ هستند می‌دانیم در ضرب ماتریسی $AB$ تعداد سطر از ماتریس $A$ می‌باشد. پس ماتریس $A$ حتماً دارای ۲ سطر است. از طرفی ضرب ماتریسی $AB$ وقتی ممکن است که تعداد ستون ماتریس $A$ با تعداد سطر ماتریس $B$ برابر باشد پس ماتریس $A$ دارای ۲ ستون می‌باشد.

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$C=AB\Rightarrow\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۱\\ ۱ & ۳ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳ & ۱ & ۲\\ ۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳a+b & a-b & ۲a+b\\ -۳c+d & c-d & ۲c+d\end{bmatrix}$$

از تساوی درایه‌های متناظر سطر اول از هر دو ماتریس مساوی داریم:

$$-۳a+b=-۱\ ,\ a-b=۲\ ,\ ۲a+b=۱$$

از حل معادلات $a-b=۲\ ,\ -۳a+b=-۱$ مقادیر $a$ و $b$ به‌ترتیب برابر $-\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۵}{۲}$ به‌دست می‌آیند. که این مقادیر در رابطهٔ $۲a+b=۱$ صادق نیستند، زیرا $۲(\frac{-۱}{۲})-\frac{۵}{۲}=-\frac{۷}{۲}\neq۱$. پس ماتریسی مانند $A$ نداریم.

**۱۴.** گزینه ۲ ماتریس سمت راست دارای سه سطر است. بنابراین ماتریس $A$ به‌طور حتم سه سطر دارد. از طرفی برای این‌که به‌توان ماتریس $A$ را در ماتریس $B=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ ضرب کرد، باید تعداد ستون‌های ماتریس $A$ با تعداد سطرهای ماتریس $B$ برابر باشد. پس ماتریس $A$ از مرتبهٔ $۳\times۲$ می‌باشد.

$$A\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a & d\\ c & d\\ e & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۳a+۴b & -a+۲b\\ ۳c+۴d & -c+۲d\\ ۳e+۴f & -e+۲f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$$

از برابر قرار دادن درایه‌های متناظر هر سطر به‌ترتیب مقادیر دوتایی‌های $(a,b)$ و $(c,d)$ و $(e,f)$ به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}۳a+۴b=۱\\ -a+۲b=۲\end{cases}\Rightarrow a=\frac{-۳}{۵}\ ,\ b=\frac{۷}{۱۰}$$

$$\begin{cases}۳c+۴d=-۱\\ -c+۲d=۰\end{cases}\Rightarrow c=-\frac{۱}{۵}\ ,\ d=-\frac{۱}{۱۰}$$

$$\begin{cases}۳e+۴f=۳\\ -e+۲f=۵\end{cases}\Rightarrow e=-\frac{۷}{۵}\ ,\ f=\frac{۹}{۵}$$

بنابراین بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A$ برابر $f=\frac{۹}{۵}$ است.

**۱۵.** گزینه ۱

$$\underbrace{[x\quad ۲x\quad -۱]\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۱\\ ۴ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}}_{[۱۱x-۱\quad -x-۲\quad -۳x]}\begin{bmatrix}x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow[۱۱x-۱\quad -x-۲\quad -۳x]\begin{bmatrix}x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow(۱۱x-۱)\cdot x+(-x-۲)\cdot(۲x)+)-(-۳x)(-۱)=۰$$

$$\Rightarrow ۹x^۲-۲x=۰\Rightarrow x\cdot(۹x-۲)=۰\Rightarrow x=x\ ,\ \frac{۲}{۹}$$

**۱۶.** گزینه ۱ ماتریس $A$ را جای‌گذاری کرده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c & -d\\ -a & -b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-c & -d\\ -a & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & c\\ b & a\end{bmatrix}$$

**۱۷.** گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها، ابتدا توان دوم ماتریس $A+B-AB$ را به‌دست می‌آوریم: $(A+B-AB)^۲=(A+B-AB)(A+B-AB)$

$$=A^۲+AB-A^۲B+BA+B^۲-BAB-ABA-AB^۲+ABAB$$

طبق فرض می‌دانیم $AB=BA$ ، $B^۲=B$ و $A^۲=A$ ، پس:

$$=A+\cancel{AB}-\cancel{AB}+\cancel{AB}+B-ABB-BAA-\cancel{AB}+BAAB$$

$$-ABB-BAA-\cancel{AB}+BAAB$$

طول خط‌المرکزین دو دایره عبارت است از:

$$\omega\omega' = \sqrt{(5-0)^2+(0-0)^2} = 5$$

چون $\omega\omega' = R+R'$ است، پس دو دایره مماس خارج‌اند و سه مماس مشترک دارند (دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی).

**۲۱۷. گزینه ۳** برای این‌که دو دایره، دارای چهار مماس مشترک باشند، لازم است که نسبت به هم متخارج باشند. شرط این‌که دو دایره به مرکزهای $\omega$ و $\omega'$ و شعاع‌های $R$ و $R'$ نسبت به هم متخارج باشند، آن است که $\omega\omega' > R+R'$. اکنون مراکز و شعاعهای دو دایره را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+m=0 \\ \Rightarrow \omega(4,0)\ ,\ R=\frac{1}{2}\sqrt{8^2-4m}=\sqrt{16-m} \\ x^2+y^2=4 \Rightarrow \omega'(0,0)\ ,\ R'=2 \end{cases}$$

از طرفی $\omega\omega'=4$، پس:

$$\omega\omega' > R+R' \Rightarrow 4 > \sqrt{16-m}+2 \Rightarrow 2 > \sqrt{16-m}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 > 16-m \Rightarrow m > 12$$

از طرفی $16-m>0$ (چرا؟)، پس $m<16$. بنابراین $12<m<16$.

**۲۱۸. گزینه ۲** می‌دانیم که برای پیدا کردن طول مماس مشترک داخلی دو دایره به اندازهٔ شعاع‌های دایره‌ها و همچنین مراکز آن‌ها نیاز داریم.

**یادآوری:** طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های $R$ و $R'$ برابر است با: $\sqrt{d^2-(R+R')^2}$

که $d$ طول خط‌المرکزین دو دایره است.

برای دایره‌ها به ترتیب زیر، مراکز و شعاع‌ها عبارتند از:

$$(C):(x-1)^2+(y-3)^2=1 \Rightarrow \omega(1,3)\ ,\ R=1$$

$$(C'):(x-4)^2+y^2=4 \Rightarrow \omega'(4,0)\ ,\ R'=2$$

خط‌المرکزین دو دایره برابر با:

$$d=\omega\omega'=\sqrt{(4-1)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$$

می‌باشد و در نتیجه طول مماس مشترک داخلی برابر است با:

$$\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(1+2)^2}=3$$

**۲۱۹. گزینه ۲** می‌دانیم مماس مشترک‌های دو دایره، روی خط‌المرکزین دایره‌ها، یکدیگر را قطع می‌کنند. پس معادلهٔ خط‌المرکزین دایره‌ها را پیدا می‌کنیم و نقطه‌ای را که از بین نقاط گزینه‌ها در آن صادق باشد، انتخاب می‌کنیم. مرکزهای دایره‌های $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ و $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ به ترتیب نقاط $\omega(2,1)$ و $\omega'(-2,2)$ هستند. پس معادلهٔ خط‌المرکزین آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$y-1=\frac{2-1}{-2-2}(x-2) \Rightarrow x+4y-6=0$$

با توجه به گزینه‌ها فقط مختصات گزینه $(6,0)$ در معادله خط‌المرکزین صدق می‌کند.

**۲۲۰. گزینه ۴** در ابتدا به بررسی مراکز و شعاع‌های دایره‌های داده شده می‌پردازیم:

$$C: x^2+y^2=8 \Rightarrow \omega(0,0)\ ,\ R=2\sqrt{2}$$

$$C': x^2+y^2-2x-2y=0 \Rightarrow \omega'(1,1)\ ,\ R'=\sqrt{2}$$

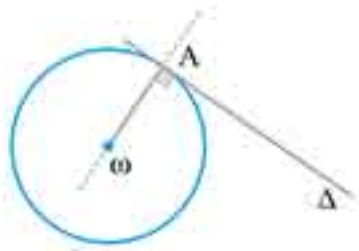
اندازهٔ خط‌المرکزین را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega\omega'=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

از آن‌جایی که اندازه خط‌المرکزین دو دایره با قدر مطلق تفاضل شعاع‌هایشان برابر است، می‌توان نتیجه گرفت که دو دایره با هم مماس داخل هستند و لذا برای یافتن معادلهٔ مماس مشترک آن‌ها، کافی است معادلهٔ دو دایره را از هم کم کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x^2+y^2-2x-2y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2x+2y=8 \xrightarrow{\div 2} x+y=4$$

**۲۲۱. گزینه ۱** شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب خط گذرنده از نقطهٔ $A$ و مرکز دایره ($\omega(0,0)$) می‌باشد:

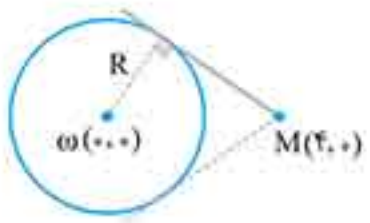



$$m_\Delta = -\frac{1}{m_{A\omega}} = -\frac{3}{4}$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $A(3,4)$ با شیب $-\frac{3}{4}$ به‌صورت زیر است:

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow 4y+3x=25$$

**۲۲۲. گزینه ۳** معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $M(4,0)$ می‌گذرد، به‌صورت $y-0=m(x-4)$ یا $y-mx+4m=0$ است. از طرفی چون این خط قرار است بر دایره مماس باشد، پس فاصلهٔ مرکز دایره، یعنی نقطه $\omega(0,0)$، از این خط با طول شعاع دایره ($R=2$) برابر است. بنابراین:




$$\frac{|0-m(0)+4m|}{\sqrt{1^2+(-m)^2}}=2 \Rightarrow \frac{|4m|}{\sqrt{1+m^2}}=2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{16m^2}{1+m^2}=4$$

$$\Rightarrow 4m^2=1+m^2 \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین دو خط مماس داریم:

$$\begin{cases} m=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}=0 \\ m=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y+\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}=0 \end{cases}$$

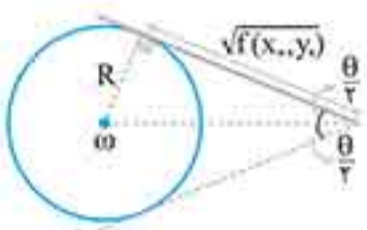
در تقاطع با محور $y$ها، مقدار $x$ را در هریک از معادلات خطوط مماس به‌دست آمده برابر صفر قرار می دهیم و به مقادیر $y=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$ می‌رسیم.

**۲۲۳. گزینه ۲** می‌دانیم که طول قطعه مماسی که از نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ بر دایره‌ای به معادلهٔ $f(x,y)=0$ رسم می‌شود، برابر با $\sqrt{f(x_0,y_0)}$ است.

معادلهٔ دایره به‌صورت $f(x,y)=x^2+y^2+7x+6y=0$ است. پس طول مماس برابر است با:

$$\sqrt{f(3,-1)}=\sqrt{3^2+(-1)^2+7(+3)+6(-1)}=\sqrt{25}=5$$

**۲۲۴. گزینه ۴** می‌دانیم اگر زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطهٔ $A(x_0,y_0)$، خارج دایرهٔ به معادلهٔ $f(x,y)=0$ برابر $\theta$ باشد، آنگاه:




$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{R}{\sqrt{f(x_0,y_0)}}$$

شعاع دایرهٔ $x^2+y^2-2x-4y+2=0$ برابر:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2-4(2)}=\sqrt{3}$$

است. از طرفی داریم:

$$f(1,4)=1^2+4^2-2(1)-4(4)+2=1$$

بنابراین:

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{R}{\sqrt{f(1,4)}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2}=60^\circ \Rightarrow \theta=120^\circ$$

شعاع OP را رسم می‌کنیم (شکل ۲)، می‌دانیم شعاع OP بر خط مماس گذرنده از P عمود است، پس $\hat{P}=۹۰^\circ$ است. حال باتوجه به فیثاغورس در مثلث AOP داریم:

$$\overset{\Delta}{AOP}: AO^۲=AP^۲+OP^۲ \Rightarrow ۵^۲=AP^۲+۳^۲ \Rightarrow AP=۴$$

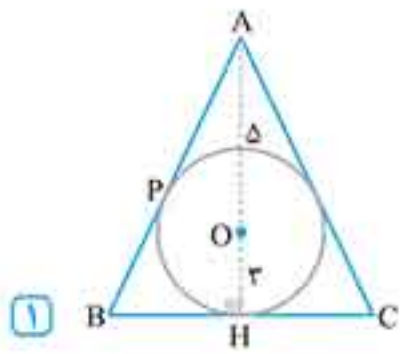
در نهایت باتوجه به تشابه دو مثلث AOP و ABH داریم:

$$\begin{cases}\hat{P}=\hat{H}=۹۰^\circ\\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۱\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOP}\sim\overset{\Delta}{ABH} \Rightarrow \frac{AP}{AH}=\frac{OP}{BH}$$

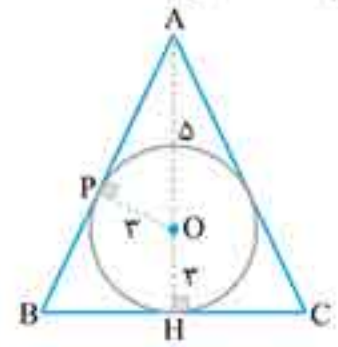
$$\Rightarrow \frac{۴}{۸}=\frac{۳}{BH} \Rightarrow BH=۶$$

حال باتوجه به این‌که در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نیز هست، داریم:

$$BH=CH=۶ \Rightarrow BC=۲BH=۱۲$$



۱



۲

**۶۰۰.** گزینه ۳ از آن‌جایی $A\hat{C}B=۹۰^\circ$ (زیرا مقابل به قطر AB است)، پس:

$$AC=BC=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲R)=R\sqrt{۲}$$

بنابراین محیط این مثلث:

$$۲P=AC+BC+AB=R\sqrt{۲}+R\sqrt{۲}+۲R=۲R(\sqrt{۲}+۱)$$

و درنتیجه $P=R(\sqrt{۲}+۱)$ است. از طرفی مساحت این مثلث

$$S=\frac{AC\cdot BC}{۲}=\frac{(R\sqrt{۲})\cdot(R\sqrt{۲})}{۲}=R^۲$$

پس شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن برابر است با:

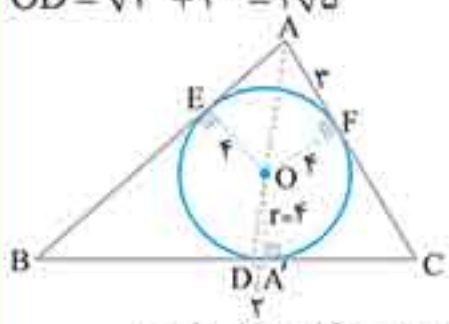
$$r=\frac{S}{P}=\frac{R^۲}{R(\sqrt{۲}+۱)}=\frac{R}{\sqrt{۲}+۱}\overset{\text{گویا}}{=\!=}R(\sqrt{۲}-۱)$$

**۶۰۱.** گزینه ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOF، طبق قضیهٔ فیثاغورس، $OA=۵$ است. هم‌چنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ODA'$ چون $OA'=r=۴$ و $DA'=۲$، پس:

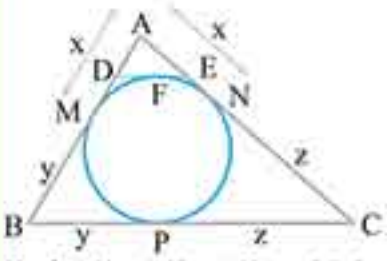
$$OD=\sqrt{۴^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$AD=OA+OD$$
$$=۵+۲\sqrt{۵}$$




**۶۰۲.** گزینه ۱ باتوجه به قضیه دو مماس، در شکل مقابل داریم:




$$\begin{cases}AM=AN=x\\ BM=BP=y\\ CP=CN=z\end{cases}$$

پس محیط مثلث ABC برابر است با $۲x+۲y+۲z=۱۸$ و لذا $x+y+c=۹$ می‌باشد. از طرفی چون $DE \parallel BC$، پس طبق قضیهٔ اساسی تشابه $\overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ و درنتیجه نسبت محیط‌های این دو مثلث برابر است با $\frac{DE}{BC}$. بنابراین:

$$\frac{\text{محیط مثلث } ADE}{\text{محیط مثلث } ABC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{\text{محیط مثلث } ADE}{۱۸}=\frac{۲}{y+z} \quad ۱$$

از طرفی محیط مثلث ADE برابر است با:

$$AD+DE+AE=AD+(\underbrace{DF}_{DM}+\underbrace{EF}_{EN})+AE$$
$$=\underbrace{AD+DM}_{AM}+\underbrace{AE+EN}_{AN}=۲x$$

بنابراین طبق رابطهٔ ۱ داریم:

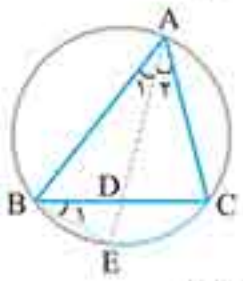
$$\frac{۲x}{۱۸}=\frac{۲}{y+z} \Rightarrow x=\frac{۱۸}{y+z}$$

دقت شود که $y+z=BC$ و یا $y+z=a$، اکنون داریم:

$$\begin{cases}x=\frac{۱۸}{y+z} \Rightarrow x=\frac{۱۸}{a} \Rightarrow x\cdot a=۱۸\\ x+\underbrace{y+z}_{a}=۹ \Rightarrow x+a=۹\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x=۶, a=۳) \text{ یا } (x=۳, a=۶)$$

**۶۰۳.** گزینه ۱ چون AD نیمساز داخلی زاویهٔ A می‌باشد، پس $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ است. از طرفی $\hat{B}_۱$ و $\hat{A}_۲$ هر دو محاطی و روبه‌روی به یک کمان هستند:




$$\hat{B}_۱=\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \xrightarrow{\hat{A}_۲=\hat{A}_۱} \hat{B}_۱=\hat{A}_۱$$

زاویهٔ E در هر دو مثلث DBE و BAE مشترک است، پس:

$$\overset{\Delta}{BAE}\sim\overset{\Delta}{DBE} \Rightarrow \frac{BE}{DE}=\frac{AE}{BE} \Rightarrow AE\cdot DE=BE^۲$$

**۶۰۴.** گزینه ۳ به دلیل تساوی زاویهٔ‌محاطی ABC و زاویهٔ ظلّی TAC (زیرا هر دو روبه‌رو به مکان AC می‌باشند) و باتوجه به زاویهٔ مشترک T داریم:

$$\overset{\Delta}{BAT}\sim\overset{\Delta}{ACT} \Rightarrow \frac{BT}{AT}=\frac{AT}{CT}=\frac{BA}{AC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{BT}{AT}=\frac{AB}{AC}\\ \frac{AT}{CT}=\frac{AB}{AC}\end{cases} \overset{\times}{\Rightarrow} \frac{BT}{AT}\times\frac{AT}{CT}=(\frac{AB}{AC})^۲ \Rightarrow \frac{BT}{CT}=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}$$

**۶۰۵.** گزینه ۳ چون نقطهٔ O، نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی است، پس BO نیمساز داخلی زاویهٔ B می‌باشد. باتوجه به این‌که AD نیز نیمساز داخلی زاویه A است، پس مطابق شکل ۱، زاویهٔ BOM برای مثلث ABO، زاویهٔ خارجی می‌باشد، لذا:

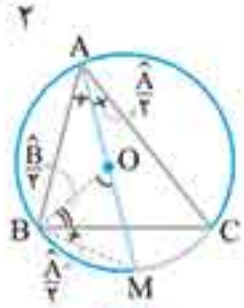
$$B\hat{O}M=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲} \quad (*)$$

از طرفی در شکل ۲ دو زاویهٔ محاطی $D\hat{B}M$ و $M\hat{A}C$ مقابل به کمان MC می‌باشند و با هم برابرند. پس:

$$D\hat{B}M=M\hat{A}C=\frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow O\hat{B}M=O\hat{B}D+D\hat{B}M$$

$$\Rightarrow O\hat{B}M=\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{A}}{۲}$$

۱



۲

پس باتوجه به رابطهٔ (*) نتیجه می‌گیریم $B\hat{O}M=O\hat{B}M$ و لذا مثلث MBO متساوی‌الساقین است. ($MB=MO$)

**۶۰۶.** گزینه ۲ باتوجه به مماس DA و قاطع DCD داریم:

$$DA^۲=DC\cdot DB \Rightarrow (۵\sqrt{۶})^۲$$
$$=DC\times(DC+۵) \xrightarrow{\text{ساده‌سازی}} DC=۱۰$$

# پاسخ‌های کلیدی

## دوازدهم / فصل اول

### پاسخ آزمون «۱»

۱. ۱
۲. ۱
۳. ۴
۴. ۳
۵. ۳
۶. ۳
۷. ۴
۸. ۴
۹. ۳
۱۰. ۳

### پاسخ آزمون «۲»

۱. ۴
۲. ۲
۳. ۱
۴. ۱
۵. ۳
۶. ۳
۷. ۴
۸. ۴
۹. ۴

### پاسخ آزمون «۳»

۱. ۴
۲. ۴
۳. ۴
۴. ۲
۵. ۳
۶. ۳
۷. ۴
۸. ۴
۹. ۴
۱۰. ۳
۱۱. ۳
۱۲. ۴
۱۳. ۴
۱۴. ۴
۱۵. ۴
۱۶. ۴
۱۷. ۴
۱۸. ۴
۱۹. ۴
۲۰. ۴
۲۱. ۴
۲۲. ۴
۲۳. ۴
۲۴. ۴
۲۵. ۴
۲۶. ۴
۲۷. ۴
۲۸. ۴
۲۹. ۴
۳۰. ۴
۳۱. ۴
۳۲. ۴
۳۳. ۴
۳۴. ۴
۳۵. ۴
۳۶. ۴
۳۷. ۴
۳۸. ۴
۳۹. ۴
۴۰. ۴
۴۱. ۴
۴۲. ۴
۴۳. ۴
۴۴. ۴
۴۵. ۴
۴۶. ۴
۴۷. ۴
۴۸. ۴
۴۹. ۴
۵۰. ۴
۵۱. ۴
۵۲. ۴
۵۳. ۴
۵۴. ۴
۵۵. ۴
۵۶. ۴
۵۷. ۴
۵۸. ۴
۵۹. ۴
۶۰. ۴
۶۱. ۴
۶۲. ۴
۶۳. ۴
۶۴. ۴
۶۵. ۴
۶۶. ۴
۶۷. ۴
۶۸. ۴
۶۹. ۴
۷۰. ۴
۷۱. ۴
۷۲. ۴
۷۳. ۴
۷۴. ۴
۷۵. ۴
۷۶. ۴
۷۷. ۴
۷۸. ۴
۷۹. ۴
۸۰. ۴
۸۱. ۴
۸۲. ۴
۸۳. ۴
۸۴. ۴
۸۵. ۴
۸۶. ۴
۸۷. ۴
۸۸. ۴
۸۹. ۴
۹۰. ۴
۹۱. ۴
۹۲. ۴
۹۳. ۴
۹۴. ۴
۹۵. ۴
۹۶. ۴
۹۷. ۴
۹۸. ۴
۹۹. ۴
۱۰۰. ۴

## دوازدهم / فصل دوم

### پاسخ آزمون «۱»

۱. ۴
۲. ۴
۳. ۱
۴. ۴
۵. ۳
۶. ۴
۷. ۱
۸. ۴

### پاسخ آزمون «۲»

۱. ۳
۲. ۱
۳. ۴
۴. ۳
۵. ۴
۶. ۴
۷. ۴
۸. ۴
۹. ۴
۱۰. ۴
۱۱. ۴
۱۲. ۴
۱۳. ۴
۱۴. ۴
۱۵. ۴
۱۶. ۴
۱۷. ۴
۱۸. ۴
۱۹. ۴
۲۰. ۴
۲۱. ۴
۲۲. ۴
۲۳. ۴
۲۴. ۴
۲۵. ۴
۲۶. ۴
۲۷. ۴
۲۸. ۴
۲۹. ۴
۳۰. ۴
۳۱. ۴
۳۲. ۴
۳۳. ۴
۳۴. ۴
۳۵. ۴
۳۶. ۴
۳۷. ۴
۳۸. ۴
۳۹. ۴
۴۰. ۴
۴۱. ۴
۴۲. ۴
۴۳. ۴
۴۴. ۴
۴۵. ۴
۴۶. ۴
۴۷. ۴
۴۸. ۴
۴۹. ۴
۵۰. ۴
۵۱. ۴
۵۲. ۴
۵۳. ۴
۵۴. ۴
۵۵. ۴
۵۶. ۴
۵۷. ۴
۵۸. ۴
۵۹. ۴
۶۰. ۴
۶۱. ۴
۶۲. ۴
۶۳. ۴
۶۴. ۴
۶۵. ۴
۶۶. ۴
۶۷. ۴
۶۸. ۴
۶۹. ۴
۷۰. ۴
۷۱. ۴
۷۲. ۴
۷۳. ۴
۷۴. ۴
۷۵. ۴
۷۶. ۴
۷۷. ۴
۷۸. ۴
۷۹. ۴
۸۰. ۴
۸۱. ۴
۸۲. ۴
۸۳. ۴
۸۴. ۴
۸۵. ۴
۸۶. ۴
۸۷. ۴
۸۸. ۴
۸۹. ۴
۹۰. ۴
۹۱. ۴
۹۲. ۴
۹۳. ۴
۹۴. ۴
۹۵. ۴
۹۶. ۴
۹۷. ۴
۹۸. ۴
۹۹. ۴
۱۰۰. ۴

### پاسخ آزمون «۳»

۱. ۴
۲. ۴
۳. ۴
۴. ۴
۵. ۴
۶. ۴
۷. ۴
۸. ۴
۹. ۴
۱۰. ۴
۱۱. ۴
۱۲. ۴
۱۳. ۴
۱۴. ۴
۱۵. ۴
۱۶. ۴
۱۷. ۴
۱۸. ۴
۱۹. ۴
۲۰. ۴
۲۱. ۴
۲۲. ۴
۲۳. ۴
۲۴. ۴
۲۵. ۴
۲۶. ۴
۲۷. ۴
۲۸. ۴
۲۹. ۴
۳۰. ۴
۳۱. ۴
۳۲. ۴
۳۳. ۴
۳۴. ۴
۳۵. ۴
۳۶. ۴
۳۷. ۴
۳۸. ۴
۳۹. ۴
۴۰. ۴
۴۱. ۴
۴۲. ۴
۴۳. ۴
۴۴. ۴
۴۵. ۴
۴۶. ۴
۴۷. ۴
۴۸. ۴
۴۹. ۴
۵۰. ۴
۵۱. ۴
۵۲. ۴
۵۳. ۴
۵۴. ۴
۵۵. ۴
۵۶. ۴
۵۷. ۴
۵۸. ۴
۵۹. ۴
۶۰. ۴
۶۱. ۴
۶۲. ۴
۶۳. ۴
۶۴. ۴
۶۵. ۴
۶۶. ۴
۶۷. ۴
۶۸. ۴
۶۹. ۴
۷۰. ۴
۷۱. ۴
۷۲. ۴
۷۳. ۴
۷۴. ۴
۷۵. ۴
۷۶. ۴
۷۷. ۴
۷۸. ۴
۷۹. ۴
۸۰. ۴
۸۱. ۴
۸۲. ۴
۸۳. ۴
۸۴. ۴
۸۵. ۴
۸۶. ۴
۸۷. ۴
۸۸. ۴
۸۹. ۴
۹۰. ۴
۹۱. ۴
۹۲. ۴
۹۳. ۴
۹۴. ۴
۹۵. ۴
۹۶. ۴
۹۷. ۴
۹۸. ۴
۹۹. ۴
۱۰۰. ۴

## یازدهم / فصل اول

### پاسخ آزمون «۱»

۱. ۱
۲. ۱
۳. ۴
۴. ۴
۵. ۳
۶. ۳
۷. ۲
۸. ۴
۹. ۴

### پاسخ آزمون «۲»

۱. ۳
۲. ۴
۳. ۴
۴. ۴
۵. ۴
۶. ۴
۷. ۳
۸. ۴
۹. ۴
۱۰. ۴
۱۱. ۴
۱۲. ۴
۱۳. ۴
۱۴. ۴
۱۵. ۴
۱۶. ۴
۱۷. ۴
۱۸. ۴
۱۹. ۴
۲۰. ۴
۲۱. ۴
۲۲. ۴
۲۳. ۴
۲۴. ۴
۲۵. ۴
۲۶. ۴
۲۷. ۴
۲۸. ۴
۲۹. ۴
۳۰. ۴
۳۱. ۴
۳۲. ۴
۳۳. ۴
۳۴. ۴
۳۵. ۴
۳۶. ۴
۳۷. ۴
۳۸. ۴
۳۹. ۴
۴۰. ۴
۴۱. ۴
۴۲. ۴
۴۳. ۴
۴۴. ۴
۴۵. ۴
۴۶. ۴
۴۷. ۴
۴۸. ۴
۴۹. ۴
۵۰. ۴
۵۱. ۴
۵۲. ۴
۵۳. ۴
۵۴. ۴
۵۵. ۴
۵۶. ۴
۵۷. ۴
۵۸. ۴
۵۹. ۴
۶۰. ۴
۶۱. ۴
۶۲. ۴
۶۳. ۴
۶۴. ۴
۶۵. ۴
۶۶. ۴
۶۷. ۴
۶۸. ۴
۶۹. ۴
۷۰. ۴
۷۱. ۴
۷۲. ۴
۷۳. ۴
۷۴. ۴
۷۵. ۴
۷۶. ۴
۷۷. ۴
۷۸. ۴
۷۹. ۴
۸۰. ۴
۸۱. ۴
۸۲. ۴
۸۳. ۴
۸۴. ۴
۸۵. ۴
۸۶. ۴
۸۷. ۴
۸۸. ۴
۸۹. ۴
۹۰. ۴
۹۱. ۴
۹۲. ۴
۹۳. ۴
۹۴. ۴
۹۵. ۴
۹۶. ۴
۹۷. ۴
۹۸. ۴
۹۹. ۴
۱۰۰. ۴