

کتاب‌های  
سه‌بعدی



آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

# حسابان ۲

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

۱۲



انتشارات  
گرو

# فصل اول

تابع

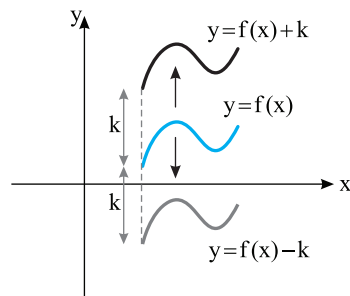
## درس اول: تبدیل نمودار توابع

## رسم نمودار به کمک نمودارهای دیگر

می‌توانیم نمودار برخی تابع‌ها را از روی نمودار تابع‌های دیگر رسم کنیم.

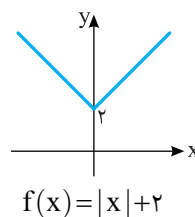
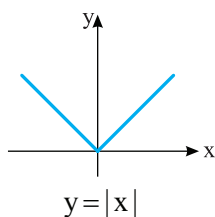
## انتقال عمودی

فرض کنید نمودار تابع  $f$  را داریم،  $k$  عددی حقیقی است و  $k > 0$ .  
 برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) + k$  کافی است نمودار تابع  $y = f(x)$  را  $k$  واحد به بالا منتقل کنیم.  
 برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) - k$  کافی است نمودار تابع  $y = f(x)$  را  $k$  واحد به پایین منتقل کنیم.  
 بنابراین نقطه  $(x_0, y_0 + k)$  از نمودار تابع  $y = f(x) + k$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $y = f(x)$  است.



**مثال:** برای رسم نمودار تابع  $f(x) = |x| + 2$  به طریق زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا نمودار تابع  $y = |x|$  را رسم می‌کنیم، سپس آن را ۲ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم:



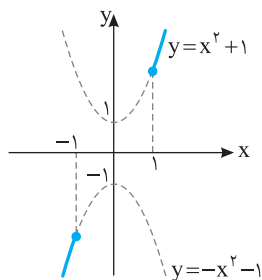
نمودار تابع زیر را رسم کنید.

### مسئله ۱

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ -x^2 - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

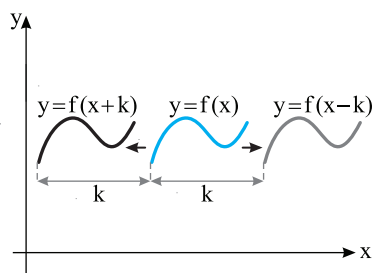
### راه حل

ابتدا نمودار تابع های  $y = x^2 + 1$  و  $y = -x^2 - 1$  را رسم می کنیم، سپس قسمت هایی از آنها را که مربوط به بازه های دامنه  $f$  هستند، انتخاب می کنیم. توجه کنید که نمودار  $y = x^2 + 1$  از انتقال نمودار  $y = x^2$  به اندازه یک واحد به بالا به دست آمده است. همچنین نمودار  $y = -x^2 - 1$  از انتقال نمودار  $y = -x^2$  به اندازه یک واحد به پایین به دست آمده است.



### انتقال افقی

فرض کنید نمودار تابع  $f$  را داریم،  $k > 0$ . برای رسم نمودار تابع  $y = f(x+k)$  کافی است نمودار تابع  $y = f(x)$  را  $k$  واحد به سمت چپ منتقل کنیم. برای رسم نمودار تابع  $y = f(x-k)$  کافی است نمودار تابع  $y = f(x)$  را  $k$  واحد به سمت راست منتقل کنیم. بنابراین نقطه  $(x_0 - k, y_0)$  از نمودار تابع  $y = f(x+k)$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $y = f(x)$  است.

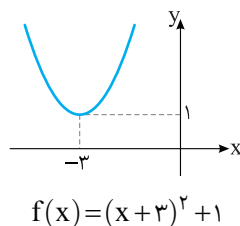
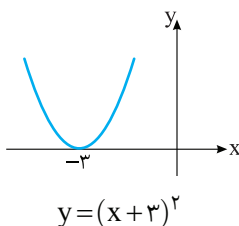
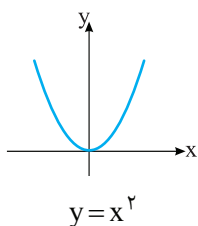


نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 6x + 10$  را رسم کنید.

### مسئله ۲

### راه حل

توجه کنید که  $f(x) = (x+3)^2 + 1$ . بنابراین، ابتدا نمودار  $y = x^2$  را رسم کرده، سپس آن را ۳ واحد به سمت چپ و یک واحد به بالا منتقل می کنیم.

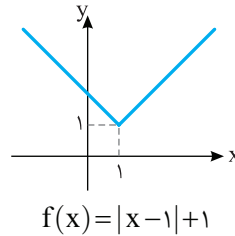
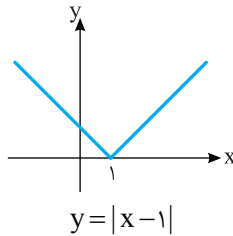
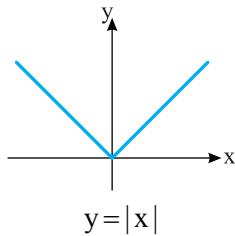


## مسئله ۳

نمودار تابع  $f(x) = |x-1| + 1$  را رسم کنید.

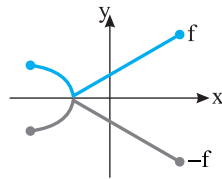
## راه حل

ابتدا نمودار  $y = |x|$  را رسم می‌کنیم. سپس این نمودار را ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار  $y = |x-1|$  به دست بیاید و در نهایت این نمودار را ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $f$  به دست بیاید.



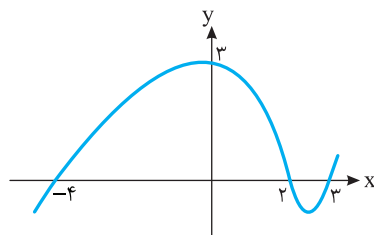
رسم نمودار تابع  $y = -f(x)$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$

نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  قرینه نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x)$  نسبت به محور  $x$  است. بنابراین نقطه  $(x_0, -y_0)$  از نمودار تابع  $y = -f(x)$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $y = f(x)$  است.



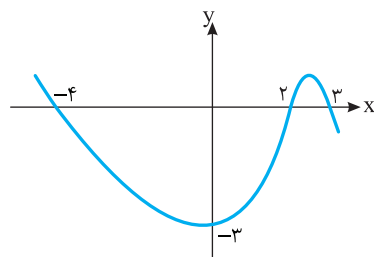
## مسئله ۴

نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع  $y = -f(x)$  را رسم کنید.



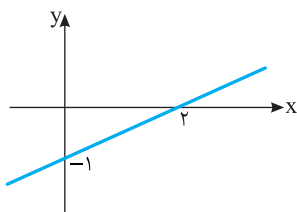
## راه حل

باید قرینه نمودار را نسبت به محور  $x$  رسم کنیم تا نمودار تابع  $y = -f(x)$  به دست بیاید.



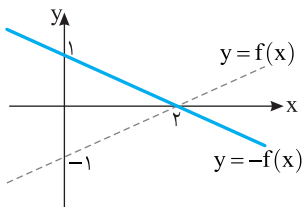
مسئله ۵

نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y=1-f(x)$  را رسم کنید.

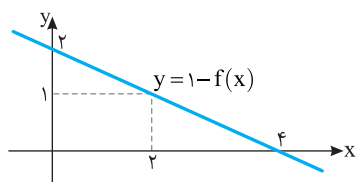


راه حل

ابتدا نمودار داده شده را نسبت به محور  $x$  قرینه می کنیم تا نمودار تابع  $y=-f(x)$  به دست بیاید.

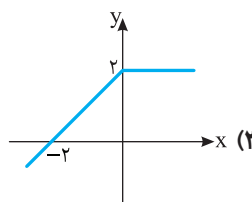
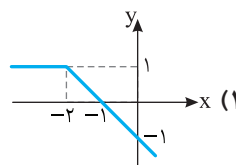
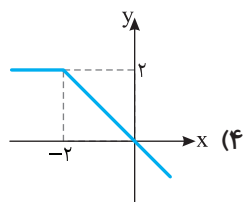
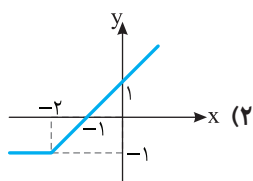
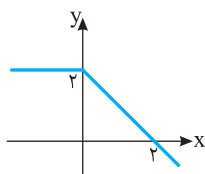


سپس، نمودار به دست آمده را ۱ واحد به بالا منتقل می کنیم تا نمودار تابع  $y=1-f(x)$  به دست بیاید.



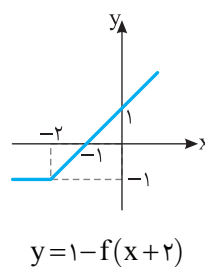
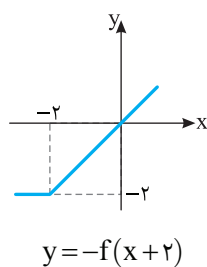
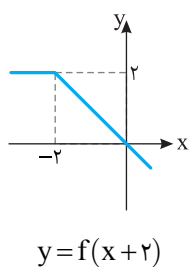
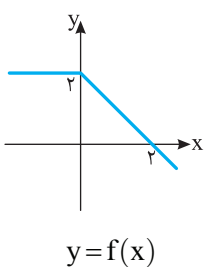
تست ۱

نمودار تابع  $f$  در شکل روبه رو رسم شده است. نمودار تابع  $y=1-f(x+2)$  کدام است؟



راه حل

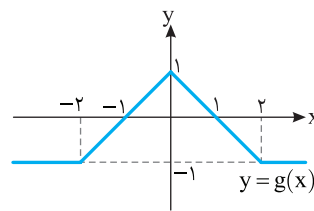
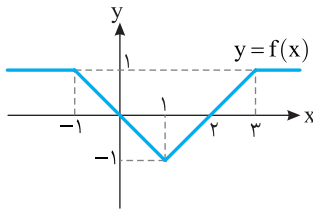
ابتدا نمودار  $y=f(x)$  را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می کنیم تا نمودار  $y=f(x+2)$  به دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور  $x$  قرینه می کنیم تا نمودار  $y=-f(x+2)$  به دست بیاید. در آخر، این نمودار را ۱ واحد به سمت بالا منتقل می کنیم تا نمودار  $y=1-f(x+2)$  به دست بیاید.



## تست

۲

نمودار تابع های  $f$  و  $g$  در شکل های زیر رسم شده است. تابع  $g$  کدام تابع است؟



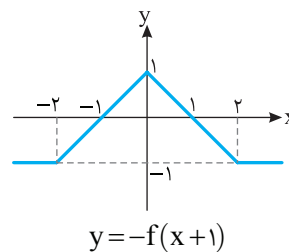
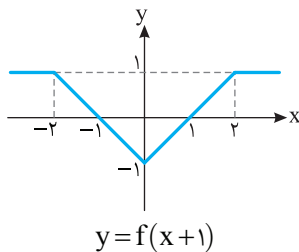
$$y = -f(x) - 1 \quad (۴)$$

$$y = -f(x-1) \quad (۳)$$

$$y = -f(x)+1 \quad (۲)$$

$$y = -f(x+1) \quad (۱)$$

ابتدا توجه کنید که اگر نمودار تابع  $f$  را ۱ واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(x+1)$  به دست می آید. اکنون اگر قرینه این نمودار را نسبت به محور  $x$  رسم کنیم، نمودار تابع  $g$  به دست می آید. بنابراین  $g(x) = -f(x+1)$ .



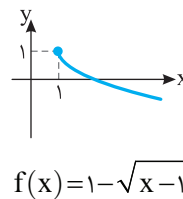
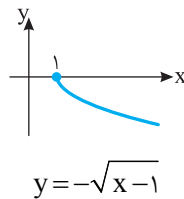
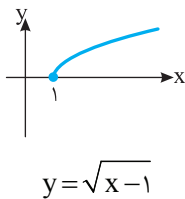
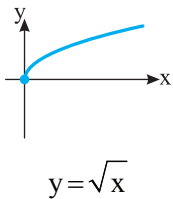
را حل

## مسئله ۶

نمودار تابع  $f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$  را رسم کنید.

را حل

ابتدا نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را رسم می کنیم. سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم تا نمودار تابع  $y = \sqrt{x-1}$  به دست آید. نمودار اخیر را نسبت به محور طول ها قرینه می کنیم تا نمودار تابع  $y = -\sqrt{x-1}$  به دست آید. اکنون این نمودار را یک واحد به بالا منتقل می کنیم تا نمودار تابع  $f$  رسم شود.

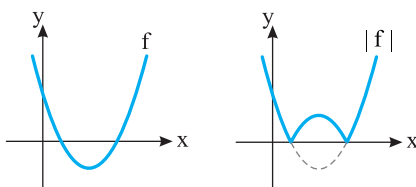


رسم نمودار تابع  $y = |f(x)|$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$

توجه کنید که

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

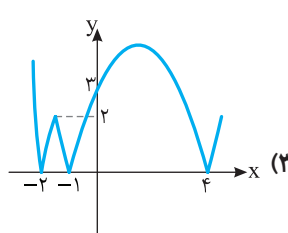
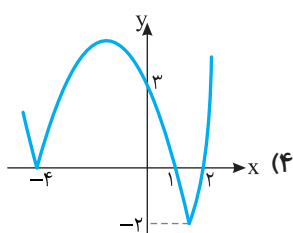
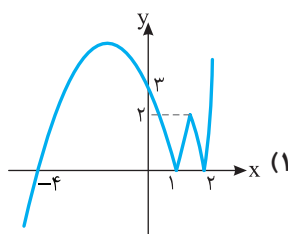
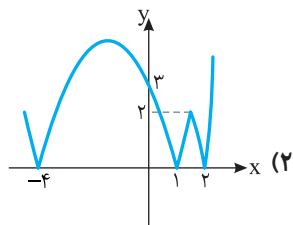
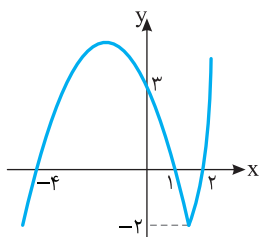
بنابراین نمودار تابع  $|f|$  به ازای  $x$  هایی که  $f(x) \geq 0$  همان نمودار تابع  $f$  است و به ازای  $x$  هایی که  $f(x) < 0$ ، قرینه نمودار تابع  $f$  نسبت به محور  $x$  است.



برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = |f(x)|$  از روی نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x)$ ، قرینه قسمت هایی را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می کنیم و این قسمت ها را حذف می کنیم.

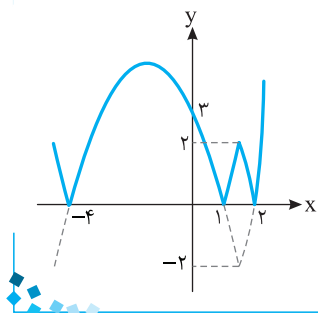
تست ۳

نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = |f(x)|$  کدام است؟



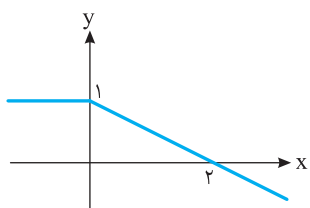
را حل

باید قرینه قسمتی از نمودار  $f$  را که زیر محور  $x$  است رسم کنیم، سپس این قسمت را حذف کنیم. به این ترتیب نمودار گزینه (۲) به دست می‌آید.



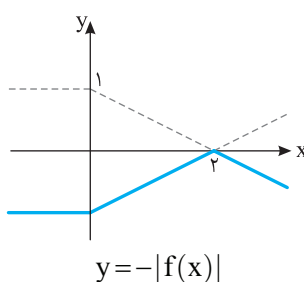
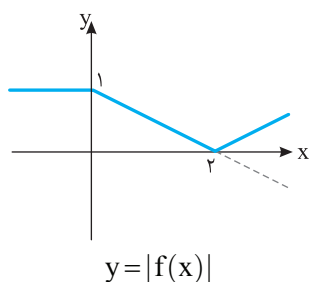
مسئله ۷

نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = -|f(x)|$  را رسم کنید.



را حل

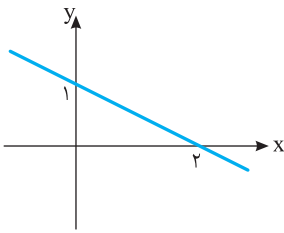
ابتدا قرینه قسمتی از نمودار را که زیر محور  $x$  است رسم می‌کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = |f(x)|$  به دست بیاید. سپس قرینه نمودار به دست آمده را نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -|f(x)|$  به دست بیاید.





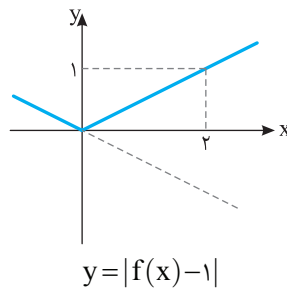
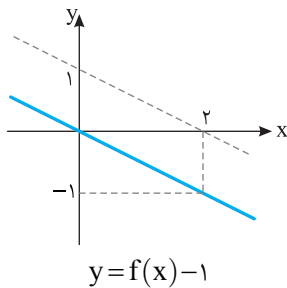
## مسئله ۸

نمودار تابع  $f$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع  $y = |1 - f(x)|$  را رسم کنید.



## راه‌حل

ابتدا توجه کنید که  $y = |1 - f(x)| = |f(x) - 1|$ . بنابراین ابتدا نمودار  $y = f(x) - 1$  را رسم می‌کنیم، سپس قرینه قسمتی از آن را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  پیدا می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم.

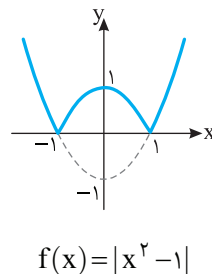
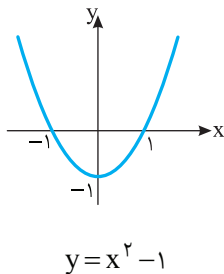


## مسئله ۹

نمودار تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را رسم کنید.

## راه‌حل

ابتدا نمودار  $y = x^2 - 1$  را رسم می‌کنیم. سپس قرینه قسمتی از آن را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع  $f$  به‌دست بیاید.

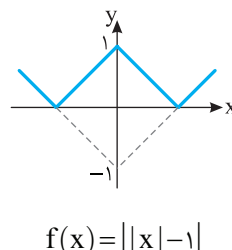
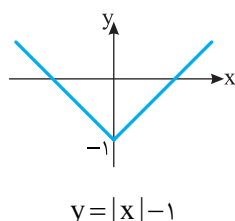
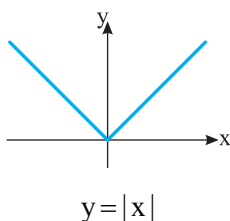


## مسئله ۱۰

نمودار تابع  $f(x) = ||x| - 1|$  را رسم کنید.

## راه‌حل

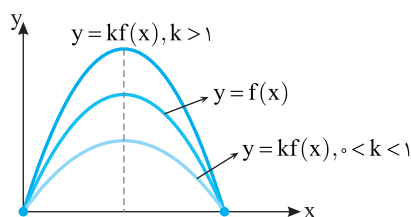
ابتدا نمودار تابع  $y = |x|$  را رسم می‌کنیم، بعد ۱ واحد آن را پایین می‌آوریم تا نمودار  $y = |x| - 1$  به‌دست بیاید. سپس قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  پیدا می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع  $f$  به‌دست بیاید.



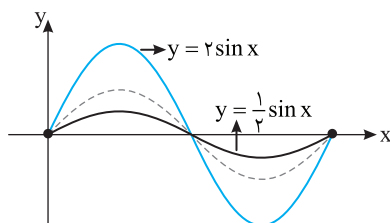
### رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$

اگر  $k$  عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x)$  کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $y = f(x)$  را  $k$  برابر کنیم. اگر  $k > 1$ ، نمودار تابع  $y = kf(x)$  از انبساط عمودی نمودار تابع  $y = f(x)$  به دست می‌آید و اگر  $0 < k < 1$ ، نمودار تابع  $y = kf(x)$  از انقباض عمودی نمودار تابع  $y = f(x)$  به دست می‌آید. اگر  $k$  عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x)$  کافی است ابتدا نمودار تابع  $y = |k|f(x)$  را رسم کنیم، سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور  $x$  رسم کنیم. دامنه تابع  $y = kf(x)$  همان دامنه تابع  $f$  است ولی هر مقدار در برد تابع  $y = kf(x)$ ،  $k$  برابر مقدار متناظرش در برد تابع  $f$  است.

نقطه  $(x_0, ky_0)$  از نمودار تابع  $y = kf(x)$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $y = f(x)$  است.

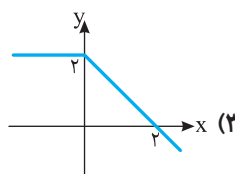
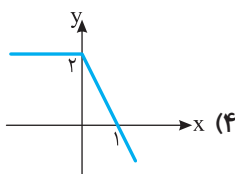
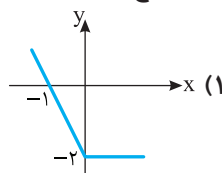
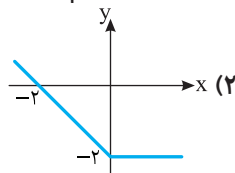
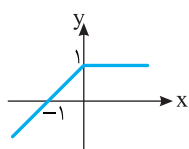


**مثال:** نمودار تابع‌های  $y = \frac{1}{2} \sin x$  و  $y = 2 \sin x$  را روی بازه  $[0, 2\pi]$  در شکل زیر رسم کرده‌ایم.



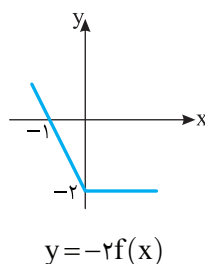
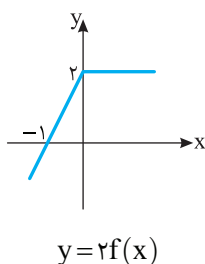
نمودار تابع  $f$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع  $y = -2f(x)$  کدام است؟

تست ۴

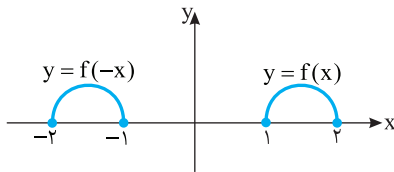


ابتدا نمودار تابع  $y = 2f(x)$  را رسم می‌کنیم. برای این کار، عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $y = f(x)$  را ۲ برابر می‌کنیم. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -2f(x)$  به دست بیاید.

را حل



### رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

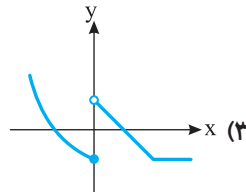
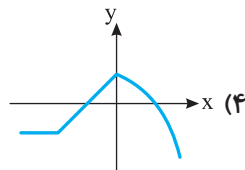
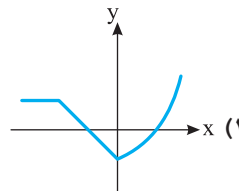
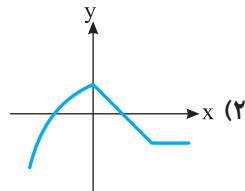
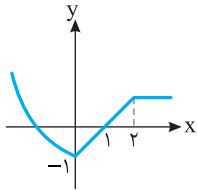


نمودار تابع با ضابطه  $y=f(-x)$  قرینه نمودار تابع با ضابطه  $y=f(x)$  نسبت به محور  $y$  است.

بنابراین نقطه  $(-x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $y=f(-x)$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $y=f(x)$  است.

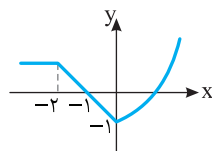
### تست

نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y=f(-x)$  کدام است؟



برای اینکه نمودار تابع  $y=f(-x)$  را رسم کنیم، باید قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  رسم کنیم.

راه حل

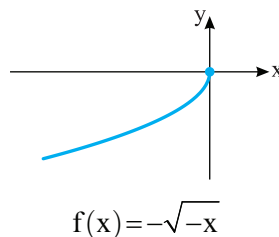
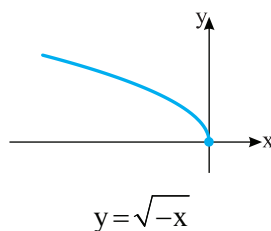
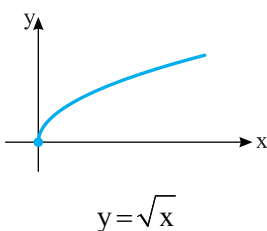


توضیح دهید نمودار تابع  $f(x)=-\sqrt{-x}$  چگونه از روی نمودار تابع  $y=\sqrt{x}$  به دست می آید.

### مسئله ۱۱

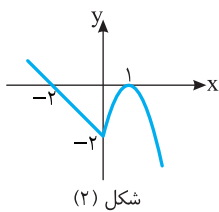
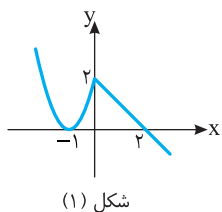
ابتدا نمودار تابع  $y=\sqrt{x}$  را رسم می کنیم، سپس قرینه آن را نسبت به محور  $y$  رسم می کنیم تا نمودار تابع  $y=\sqrt{-x}$  به دست بیاید و در نهایت این نمودار را نسبت به محور  $x$  قرینه می کنیم تا نمودار تابع  $f$  به دست بیاید.

راه حل



تست ۶

شکل (۱) نمودار تابع  $f$  است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



(۱)  $y = f(-x)$

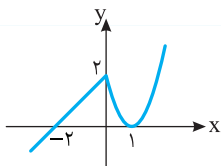
(۲)  $y = -f(-x)$

(۳)  $y = |f(x)|$

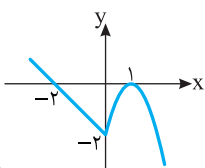
(۴)  $y = -f(x)$

راه حل

برای اینکه نمودار تابع  $y = f(-x)$  را به دست بیاوریم باید نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  قرینه کنیم، که می شود:

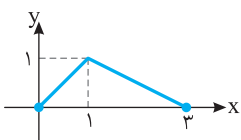


اکنون اگر این نمودار را نسبت به محور  $x$  قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = -f(-x)$  به دست می آید، که می شود:



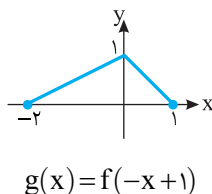
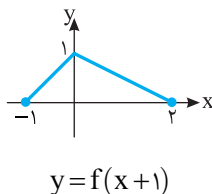
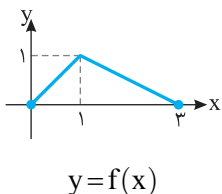
مسئله ۱۲

اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $g(x) = f(-x+1)$  را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



راه حل

برای رسم نمودار تابع  $g$  ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ منتقل می کنیم، سپس قرینه آن را نسبت به محور  $y$  رسم می کنیم.

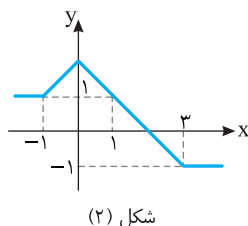
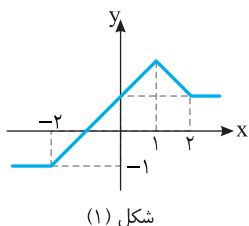


با توجه به نمودار تابع  $g$  دامنه و برد آن به صورت زیر مشخص می شوند:

$$D_g = [-2, 1], \quad R_g = [0, 1]$$

تست ۷

شکل (۱) نمودار تابع  $f$  است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



(۲)  $y = f(-x-1)$

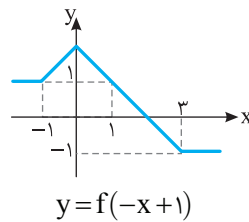
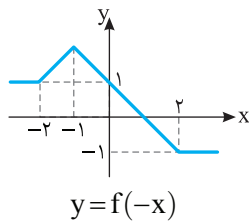
(۴)  $y = f(-x+1)$

(۱)  $y = -f(x+1)$

(۳)  $y = -f(-x+1)$

## راهنما

اگر قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  رسم کنیم، نمودار تابع  $y=f(-x)$  به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(-(x-1))=f(-x+1)$  به دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.

رسم نمودار تابع  $y=f(|x|)$  از روی نمودار تابع  $y=f(x)$ 

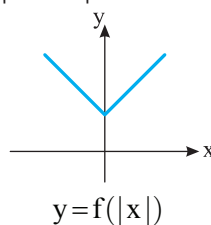
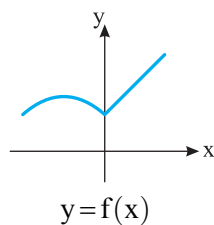
توجه کنید که

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

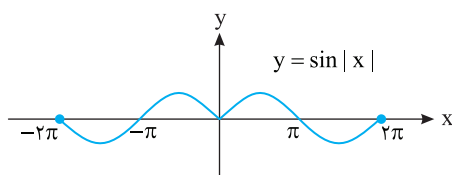
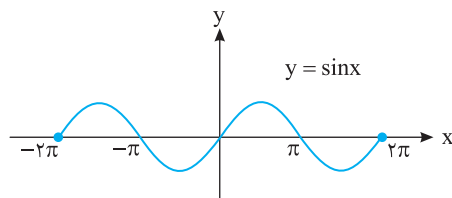
بنابراین نمودار تابع با ضابطه زیر

$$y=f(|x|)$$

به ازای  $x \geq 0$  همان نمودار تابع  $f$  است و به ازای  $x < 0$  قرینه قسمتی از نمودار  $f$  است که سمت راست محور  $y$  است. برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y=f(|x|)$  از روی نمودار تابع با ضابطه  $y=f(x)$ ، قسمتی از نمودار تابع  $f$  را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم.

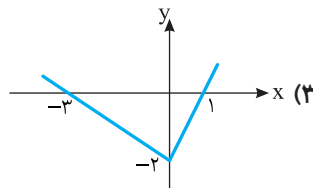
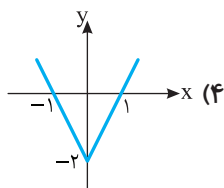
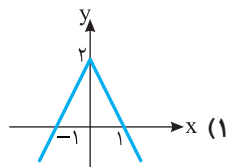
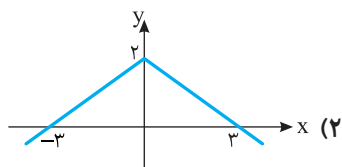
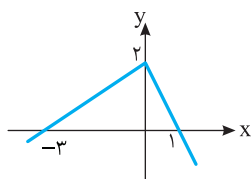


**مثال:** در شکل زیر نمودار تابع  $y=\sin|x|$  را روی بازه  $[-2\pi, 2\pi]$  رسم کرده‌ایم.



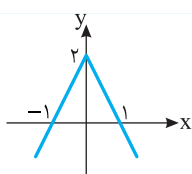
تست ۸

نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y=f(|x|)$  کدام گزینه است؟



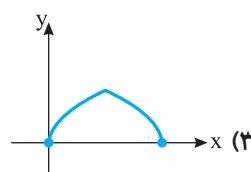
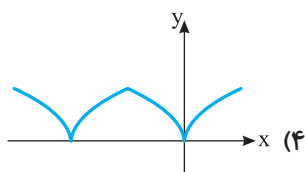
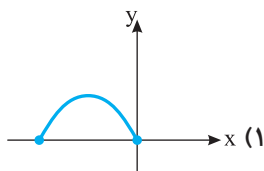
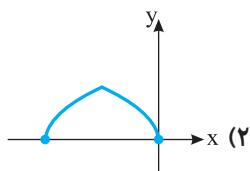
راه حل

برای رسم نمودار تابع  $y=f(|x|)$ ، قسمتی از نمودار  $f$  را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می‌کنیم و قرینه‌ی قسمتی را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم.



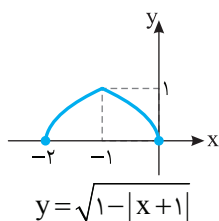
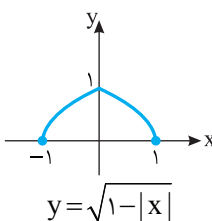
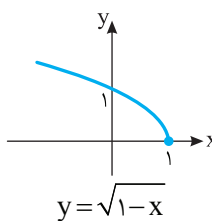
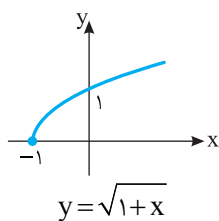
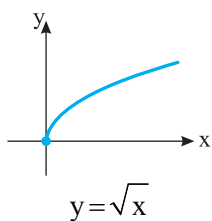
تست ۹

نمودار تابع  $f(x)=\sqrt{1-|x+1|}$  کدام است؟

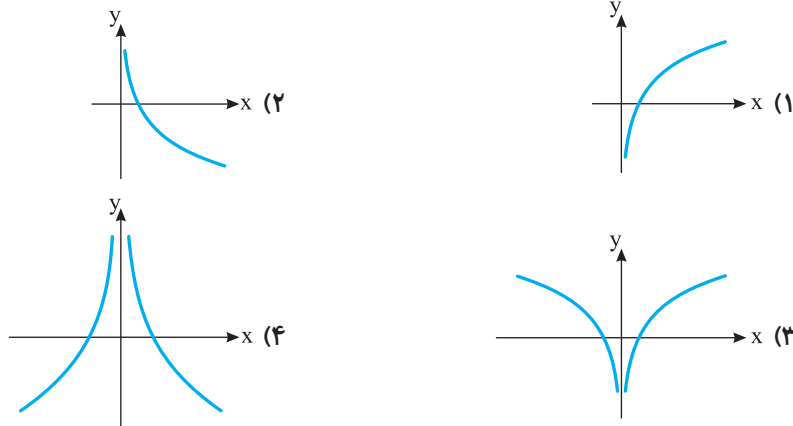


راه حل

مراحل رسم نمودار به شکل زیر است:

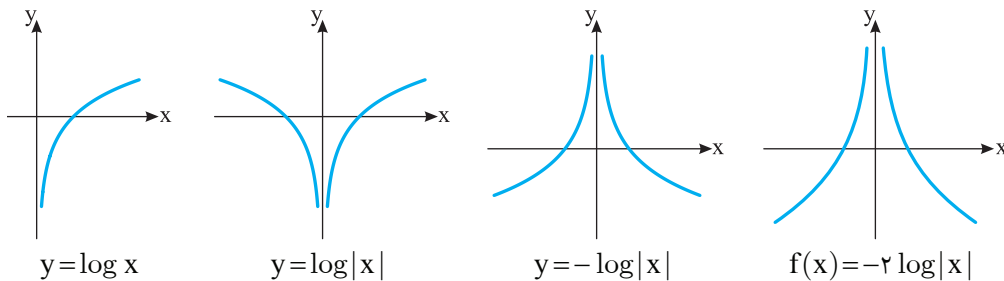


**تست ۱۰**

 نمودار تابع  $f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2}\right)$  کدام است؟

 توجه کنید که **راه حل**

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) = \log\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = \log |x|^{-2} = -2 \log |x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع  $y = \log x$  را رسم می‌کنیم. سپس قرینه‌ی قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور  $y$  است به این نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \log |x|$  به‌دست بیاید (توجه کنید که هیچ قسمتی از نمودار تابع  $y = \log x$  سمت چپ محور  $y$  نیست). اکنون این نمودار را نسبت به محور  $x$  قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -\log |x|$  به‌دست بیاید. در آخر عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $f$  به‌دست بیاید.

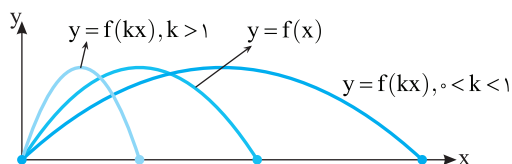

**رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$** 

اگر  $k$  عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$  کافی است طول هر نقطه روی نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $\frac{1}{k}$  ضرب کنیم.

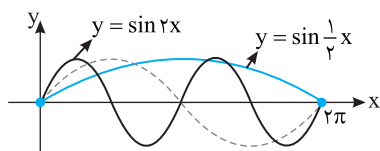
اگر  $k$  عددی مثبت باشد، نمودار تابع  $y = f(kx)$  را می‌توان از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  با انبساط یا انقباض در امتداد محور  $x$  رسم کرد. اگر  $0 < k < 1$ ، نمودار تابع  $y = f(x)$  باید با ضریب  $\frac{1}{k}$  در امتداد محور  $x$  منبسط شود و اگر  $k > 1$ ، نمودار تابع  $y = f(x)$  باید با ضریب  $\frac{1}{k}$  در امتداد محور  $x$  منقبض شود.

اگر  $k$  عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$  کافی است نمودار تابع  $y = f(|k|x)$  را رسم کنیم، سپس قرینه‌ی این نمودار را نسبت به محور  $y$  رسم کنیم.

برد تابع  $y=f(kx)$  همان برد تابع  $f$  است ولی هر عضو دامنه تابع  $y=f(kx)$  برابر عضو نظیرش در دامنه تابع  $f$  است. نقطه  $(\frac{x_0}{k}, y_0)$  از نمودار تابع  $y=f(kx)$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $y=f(x)$  است.

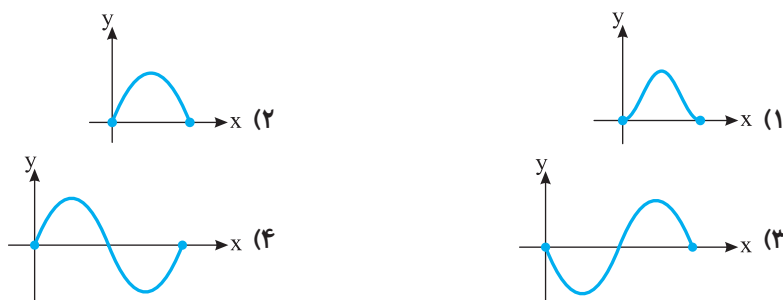


**مثال:** در شکل زیر نمودار تابع‌های  $y=\sin 2x$  و  $y=\sin \frac{1}{2}x$  را روی بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کرده‌ایم.

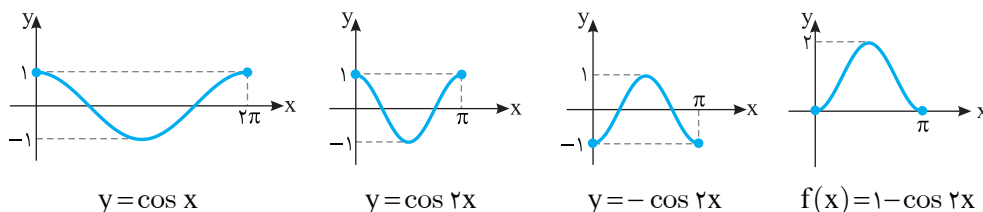


**نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x)=1-\cos 2x$  و دامنه  $[0, \pi]$  کدام است؟**

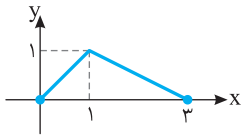
**تست ۱۱**



ابتدا نمودار تابع  $y=\cos 2x$  را روی بازه  $[0, \pi]$  رسم می‌کنیم. برای این کار باید طول هر نقطه روی نمودار تابع  $y=\cos x$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنیم. توجه کنید که باید  $0 \leq x \leq \pi$ ، یعنی  $0 \leq \frac{1}{2}x \leq \pi$ ، در نتیجه باید نمودار تابع  $y=\cos x$  را روی بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کنیم، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنیم تا نمودار تابع  $y=\cos 2x$  به دست بیاید. توجه کنید که با این کار نمودار تابع  $y=\cos x$  در امتداد محور طول‌ها منقبض می‌شود. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور  $x$  قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=-\cos 2x$  به دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $f$  به دست بیاید.





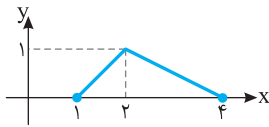


اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $g(x) = f(2x-1)$  را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

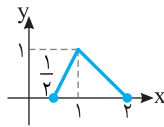
## مسئله ۱۳

ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(x-1)$  به دست آید، سپس طول هر نقطه روی نمودار به دست آمده را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع  $g$  به دست آید.

## راه حل



$$y = f(x-1)$$



$$g(x) = f(2x-1)$$

با توجه به نمودار تابع  $g$  می‌توان نوشت  $D_g = [\frac{1}{2}, 2]$  و  $R_g = [0, 1]$ .

## مسئله ۱۴

توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع  $y = f(x)$  می‌توان نمودار تابع  $y = f(-2x+3)$  را رسم نمود.

## راه حل

ابتدا نمودار تابع  $y = f(x)$  را سه واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(x+3)$  به دست آید، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(2x+3)$  به دست آید. در نهایت قرینه این نمودار را نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(-2x+3)$  به دست آید.

## تست ۱۲

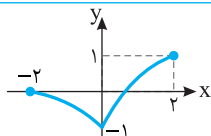
طول نقاط روی نمودار تابع  $f$  را نصف می‌کنیم و عرض آنها را دو برابر می‌کنیم. سپس نمودار را یک واحد به چپ می‌بریم و در آخر نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

$$y = \frac{1}{2}f(1-2x) \quad (۴) \quad y = \frac{1}{2}f(2x+2) \quad (۳) \quad y = 2f(1-\frac{x}{2}) \quad (۲) \quad y = 2f(2-2x) \quad (۱)$$

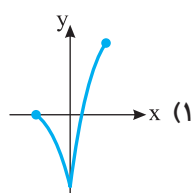
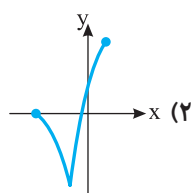
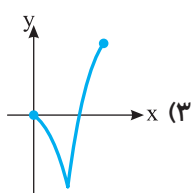
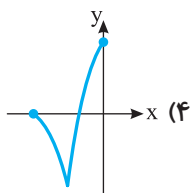
## راه حل

اگر طول نقاط روی نمودار تابع  $f$  را نصف کنیم، نمودار تابع  $y = f(2x)$  رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع  $y = 2f(2x)$  رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = 2f(2(x+1))$  رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع  $y = 2f(2x+2)$  به دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = 2f(-2x+2)$  به دست می‌آید.

## تست ۱۳

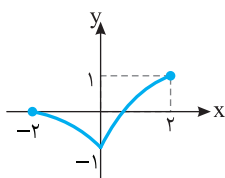


نمودار تابع  $y = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$  به شکل مقابل است. نمودار تابع  $y = f(x-1)$  کدام است؟

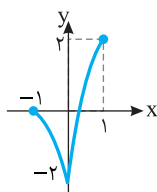


راه حل

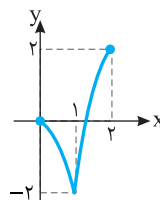
اگر طول نقاط نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$  را نصف و عرض آنها را دو برابر کنیم، نمودار تابع  $y = 2\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = f(x)$  به دست می آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(x-1)$  به دست می آید.



$$y = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$$

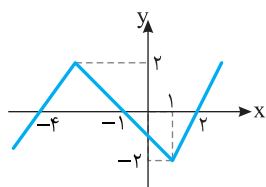


$$y = f(x)$$

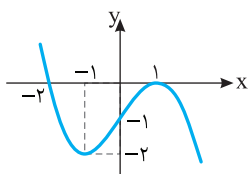


$$y = f(x-1)$$

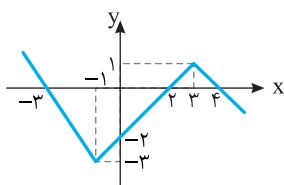
### تمرین



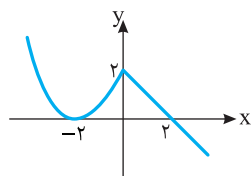
۱- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = -f(x)$  را رسم کنید.



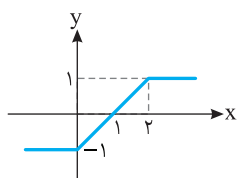
۲- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = -f(x) + |f(x)|$  را رسم کنید.



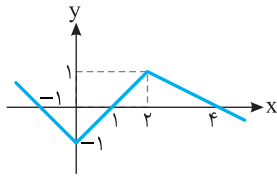
۳- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = -f(-x)$  را رسم کنید.



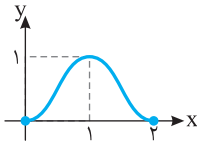
۴- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = f(-x-1)$  را رسم کنید.



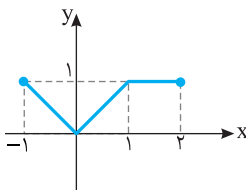
۵- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \begin{cases} -f(x) & x < 1 \\ f(-x) & x \geq 1 \end{cases}$  را رسم کنید.



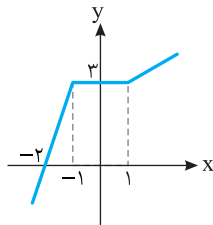
۶- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = f(2x)$  را رسم کنید.



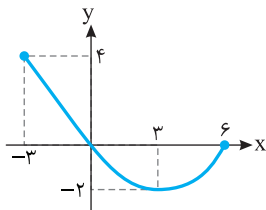
۷- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g(x) = f(-2x)$  را رسم کنید.



۸- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(-2x - 1)$  را رسم کنید.



۹- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(|x|)$  را رسم کنید.



۱۰- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g(x) = |f(|x| - 1)|$  با ضابطه  $g(x) = |f(|x| - 1)|$  را رسم کنید.

۱۱- اگر تغییرات زیر را روی نمودار تابع  $f$  اعمال کنیم، ضابطه تابعی که نمودار آن به دست می آید چگونه خواهد بود؟

الف) نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور عرض ها قرینه می کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف می کنیم.

ب) نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم، سپس طول و عرض نقاط آن را نصف می کنیم.

پ) نمودار تابع  $f$  را یک واحد به بالا منتقل می کنیم، سپس طول و عرض نقاط آن را دو برابر می کنیم.

۱۲- نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم، سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور عرض ها قرینه

می کنیم و بعد آن را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل می کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را دو برابر

می کنیم. ضابطه تابعی را که نمودار آن رسم شده است به دست آورید.

نمودار تابع های زیر را رسم کنید. (۱۹-۱۳)

$$f(x) = |\log(1-x)| \quad -14$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad -13$$

$$f(x) = \sqrt{|2x-1|} \quad -16$$

$$f(x) = \sqrt{x+|x|+1} \quad -15$$

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), \quad D_f = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \quad -18$$

$$f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1, \quad D_f = [-\pi, \pi] \quad -17$$

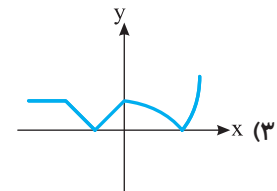
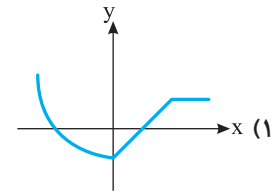
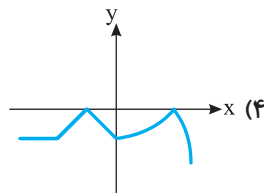
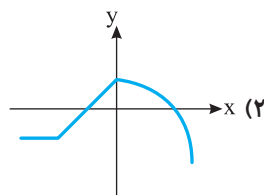
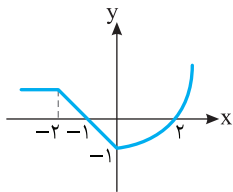
$$f(x) = |x^2 - 2|x|| \quad -19$$

## فصل اول

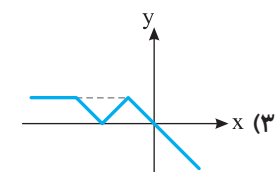
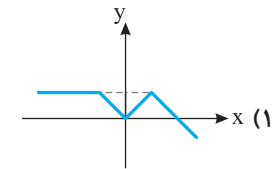
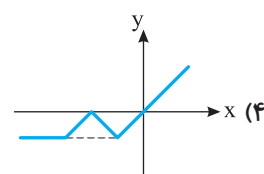
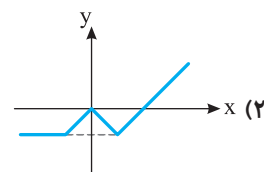
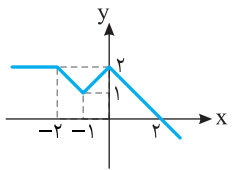
### درس اول: تبدیل نمودار توابع

#### پرسش‌های چهارگزینه‌ای

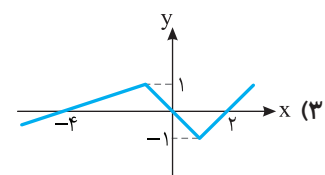
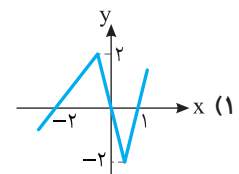
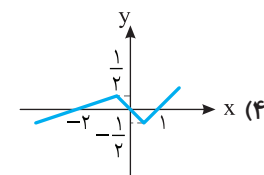
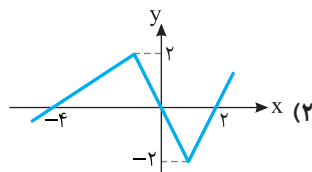
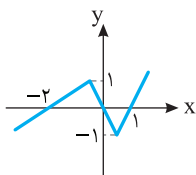
۱- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = -f(x)$  کدام است؟



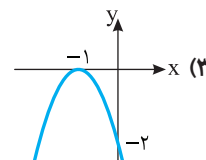
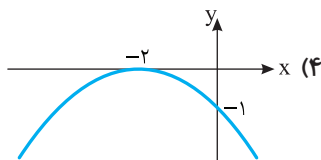
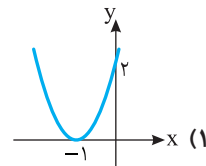
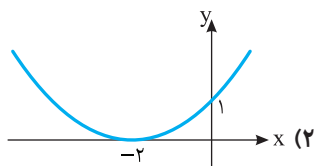
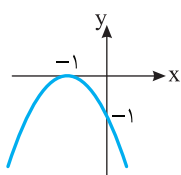
۲- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = 1 - f(x - 1)$  کدام است؟



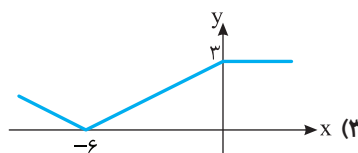
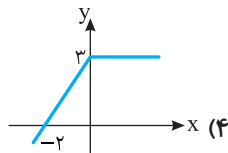
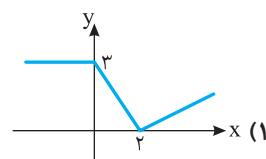
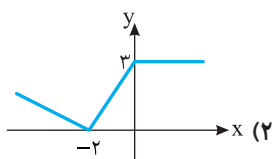
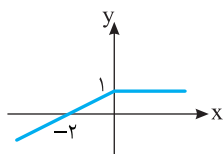
۳- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = 2f(x)$  کدام است؟



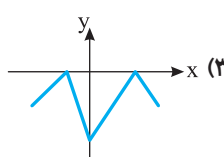
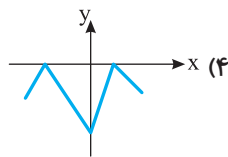
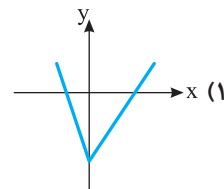
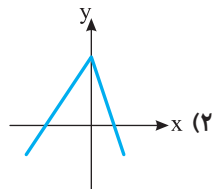
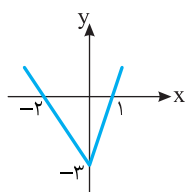
۴- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = |f(x)| - f(x)$  کدام است؟



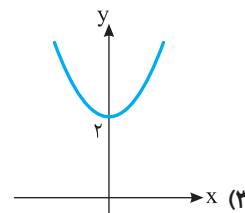
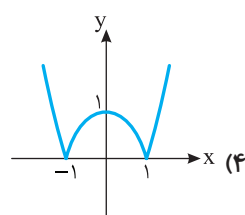
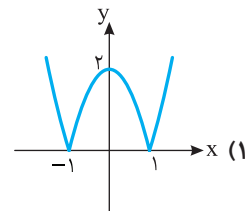
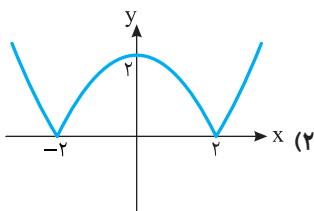
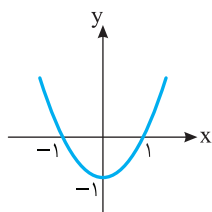
۵- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = 2|f(x)| + f(x)$  کدام است؟



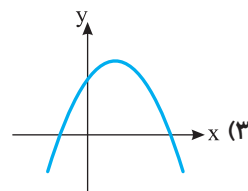
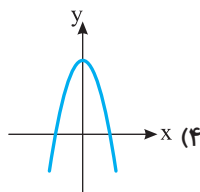
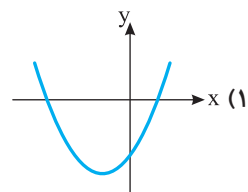
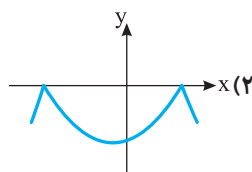
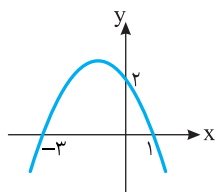
۶- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = -|f(x)|$  کدام است؟



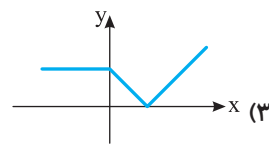
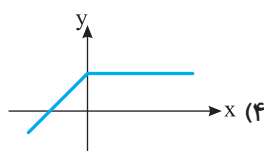
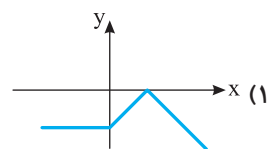
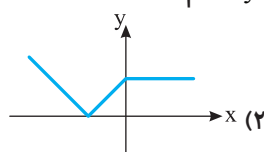
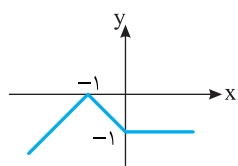
۷- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = 2|f(x)|$  کدام است؟



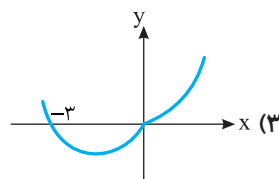
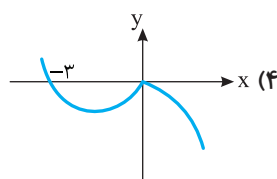
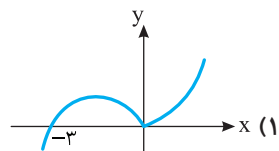
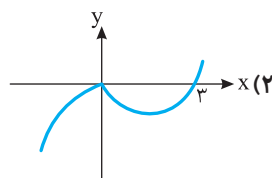
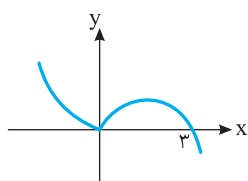
۸- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y=f(-x)$  کدام است؟



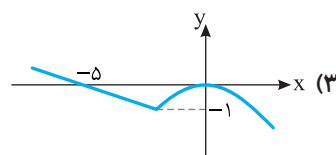
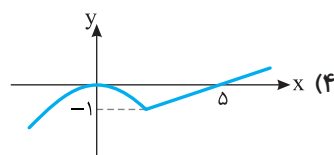
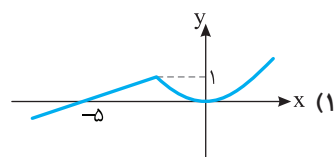
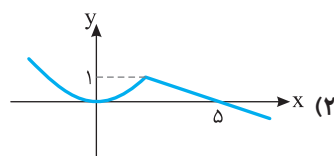
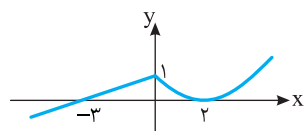
۹- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y=f(-x)$  کدام است؟



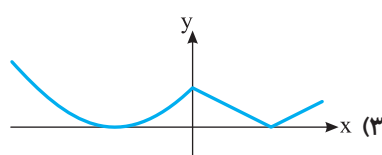
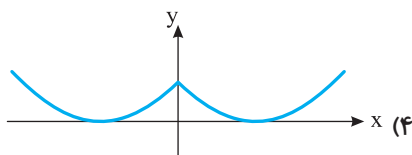
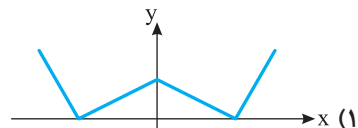
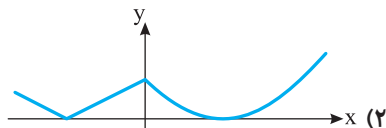
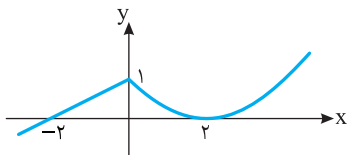
۱۰- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y=-f(-x)$  کدام است؟



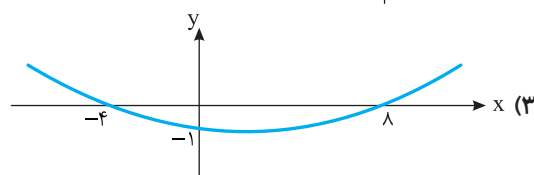
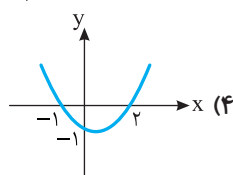
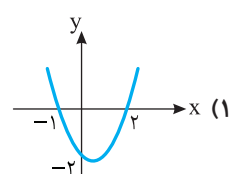
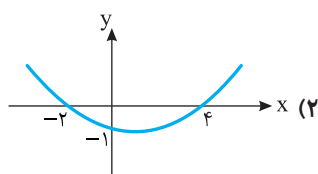
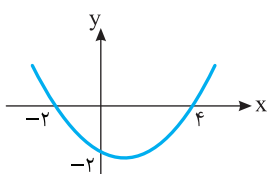
۱۱- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x)=f(2-x)$  کدام است؟



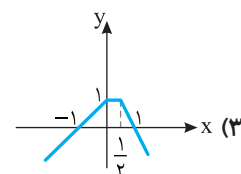
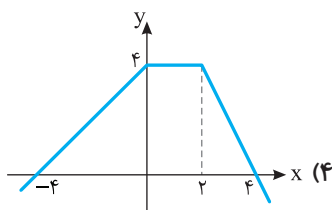
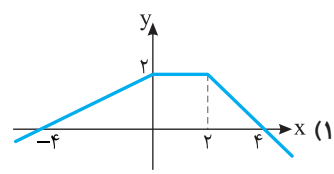
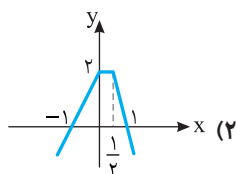
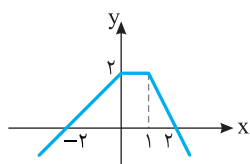
۱۲- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = |f(-x)|$  کدام است؟



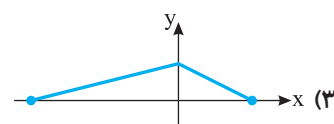
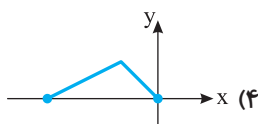
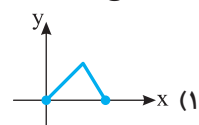
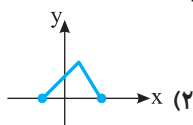
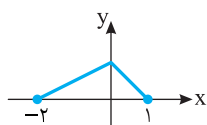
۱۳- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(2x)$  کدام گزینه است؟



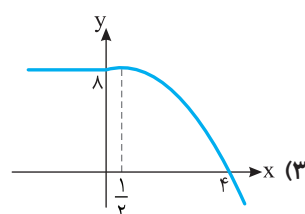
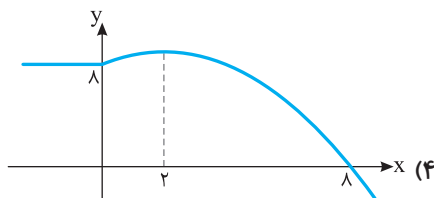
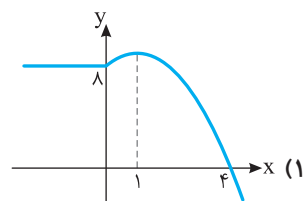
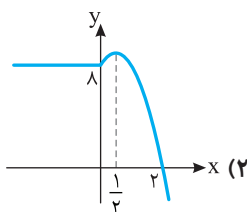
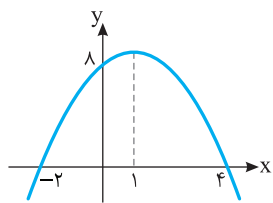
۱۴- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(\frac{1}{2}x)$  کدام است؟



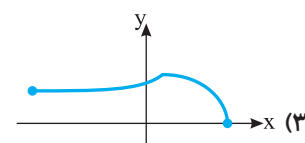
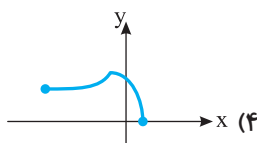
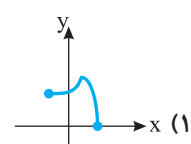
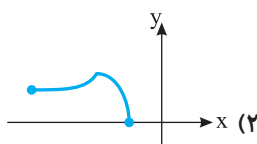
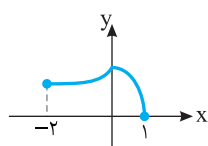
۱۵- نمودار تابع  $f$  به شکل مقابل است. نمودار تابع  $y = f(2x-1)$  کدام است؟



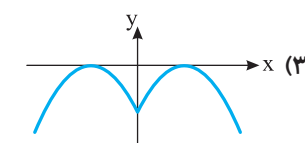
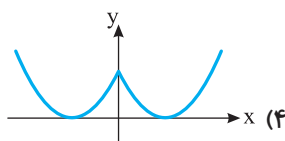
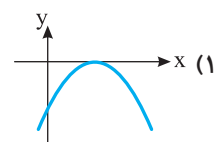
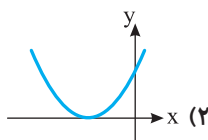
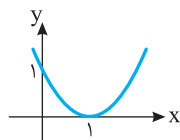
۱۶- شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است. نمودار تابع  $y = f(x + |x|)$  کدام است؟



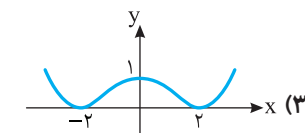
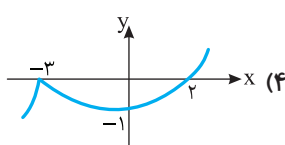
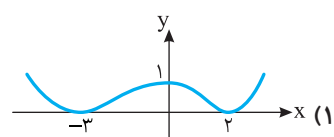
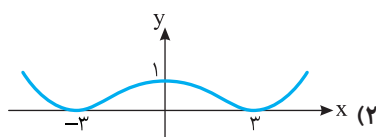
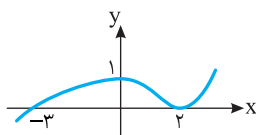
۱۷- نمودار تابع  $y = f(\frac{x}{2})$  به شکل مقابل است. نمودار تابع  $y = f(x - \frac{1}{2})$  کدام است؟



۱۸- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(|x|)$  کدام است؟

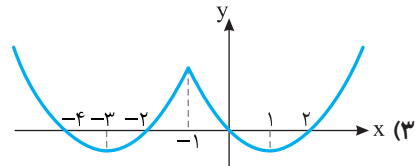
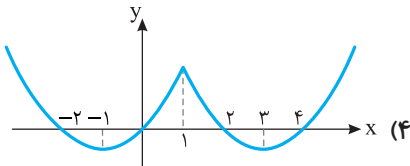
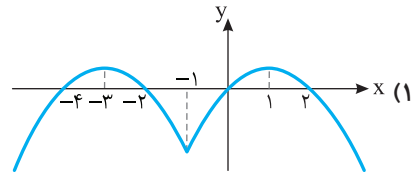
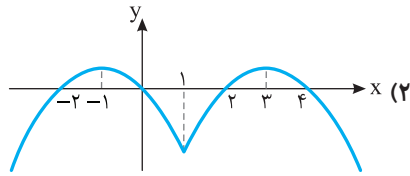
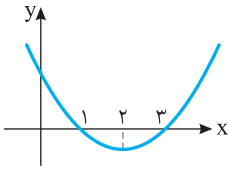


۱۹- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(|x|)$  کدام است؟

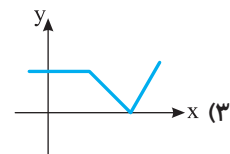
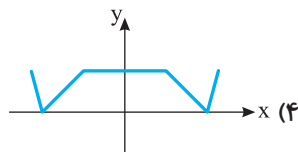
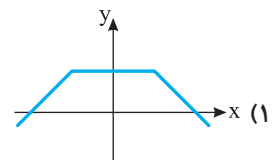
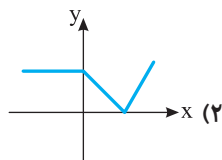
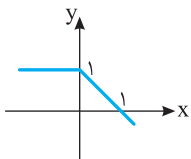




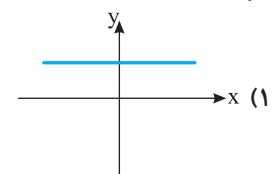
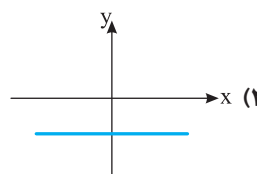
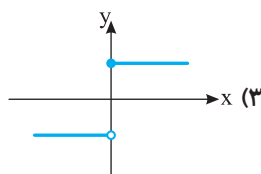
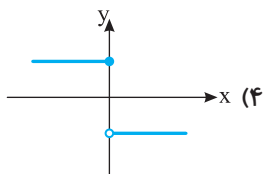
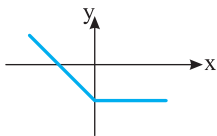
۲۰- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(|x-1|)$  کدام است؟



۲۱- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(|x|-1)$  کدام است؟



۲۲- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. اگر  $g(x) = \begin{cases} |f(x)| & x \geq 0 \\ f(|x|) & x < 0 \end{cases}$  نمودار تابع  $g$  کدام گزینه است؟



۲۳- نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

$$y = -f(1-x) + 1 \quad (4)$$

$$y = f(1-x) + 1 \quad (3)$$

$$y = f(1-x) - 1 \quad (2)$$

$$y = -f(x-1) - 1 \quad (1)$$

۲۴- اگر نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، سپس عرض نقاط این نمودار را دو برابر و طول نقاط آن را نصف کنیم، نمودار تابع با کدام ضابطه به‌دست می‌آید؟

$$y = 2f(2x-1) \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}f(2x-1) \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}-1\right) \quad (2)$$

$$y = 2f\left(\frac{x}{2}-1\right) \quad (1)$$

۲۵- نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. سپس در نمودار به‌دست آمده طول و عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطه‌ی تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

$$y = 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) - 2 \quad (4)$$

$$y = 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \quad (3)$$

$$y = 2f\left(\frac{x}{2}+1\right) - 2 \quad (2)$$

$$y = 2f\left(\frac{x}{2}+1\right) - 1 \quad (1)$$

۲۶- نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = f(2x) - 1$  را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. ضابطه‌ی تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

$$y = 2f(4x-1) - 2 \quad (4)$$

$$y = 2f(4x-1) - 1 \quad (3)$$

$$y = 2f(4x-2) - 2 \quad (2)$$

$$y = 2f(4x-2) - 1 \quad (1)$$

۲۷- نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و مجدداً نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱)  $y = \sqrt{x+1}$  (۲)  $y = \sqrt{x-1}$  (۳)  $y = \sqrt{-x-1}$  (۴)  $y = \sqrt{-x+1}$

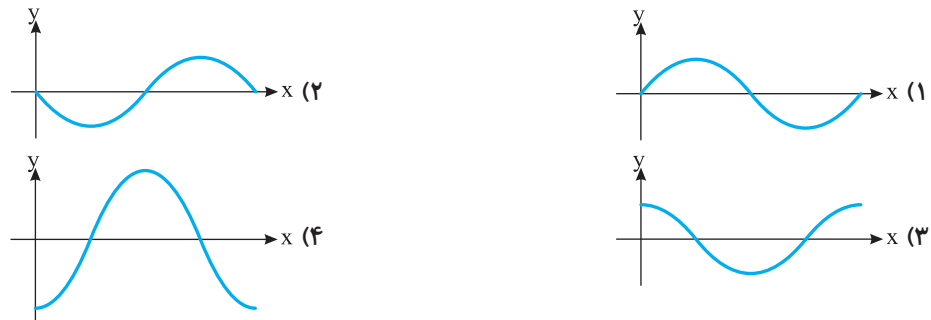
۲۸- طول نقاط نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x-1}$  را سه برابر می‌کنیم و عرض نقاط را نصف می‌کنیم. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱)  $y = 2\sqrt{-3x-2}$  (۲)  $y = 2\sqrt{-3x+2}$  (۳)  $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-\frac{4}{3}}$  (۴)  $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}$

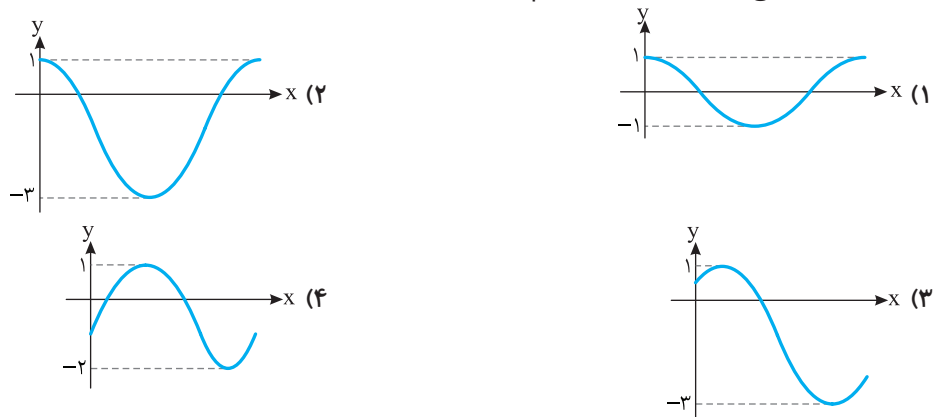
۲۹- نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$  را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط آن را نصف کرده و مجدداً آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و در آخر نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱)  $y = -\sin(x + \frac{3}{2})$  (۲)  $y = -\sin(x - \frac{1}{2})$  (۳)  $y = -\sin(\frac{x}{2} - \frac{3}{8})$  (۴)  $y = -\sin(\frac{x}{2} + \frac{5}{8})$

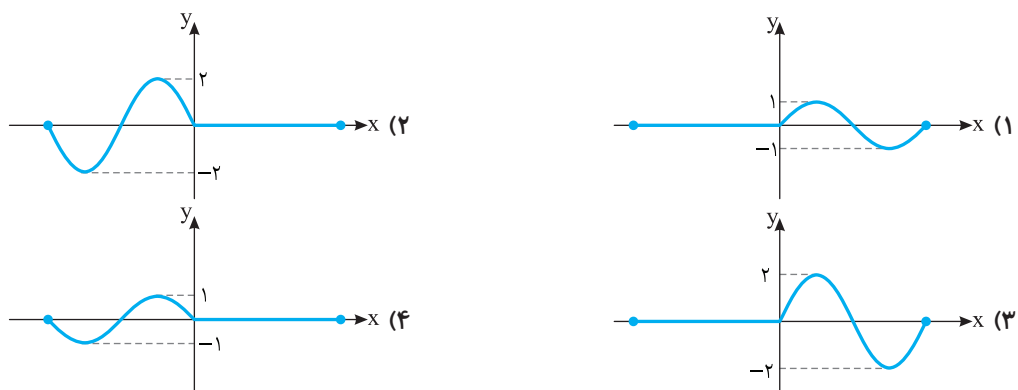
۳۰- بخشی از نمودار تابع  $y = -2 \cos x$  کدام است؟



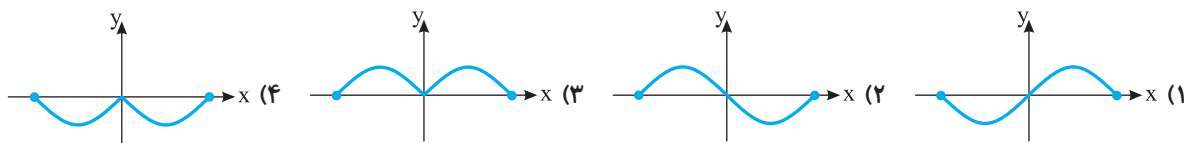
۳۱- بخشی از نمودار تابع  $y = 2 \cos x - 1$  کدام است؟



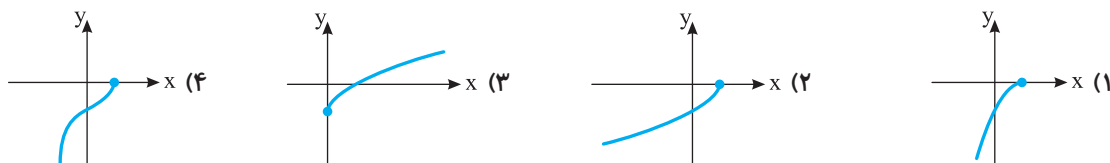
۳۲- نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sin|x| + \sin x$  و دامنه  $[-2\pi, 2\pi]$  کدام است؟



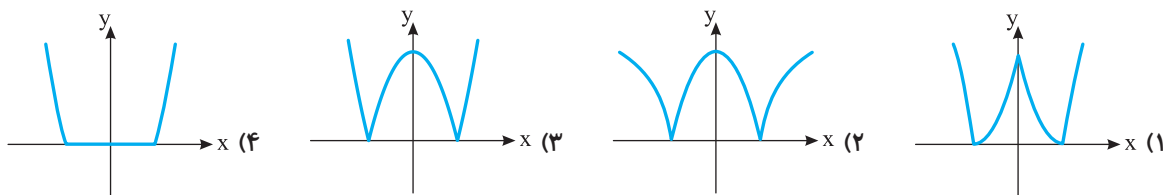
۳۳- نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sin|x|$  و دامنه  $[-\pi, \pi]$  کدام است؟



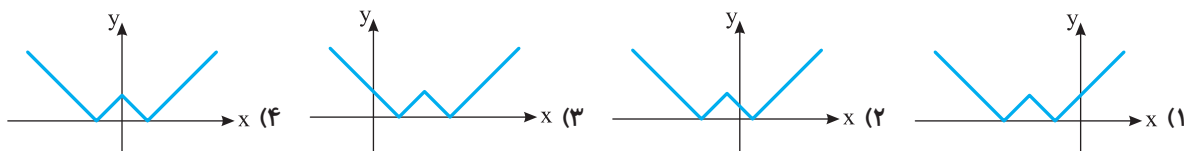
۳۴- نمودار تابع  $f(x) = -\sqrt{1-x}$  کدام است؟



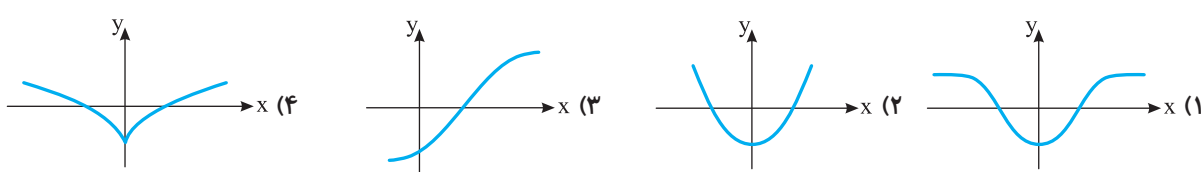
۳۵- نمودار تابع  $y = |x-2||x+2|$  کدام گزینه است؟



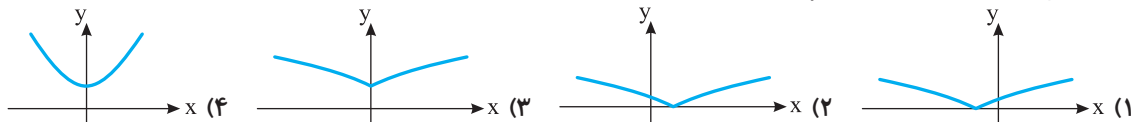
۳۶- نمودار تابع  $f(x) = ||x+2|-1|$  کدام است؟



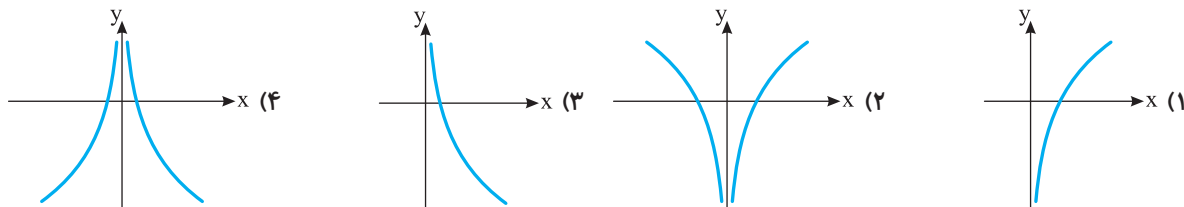
۳۷- نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{|x|}-1$  کدام است؟



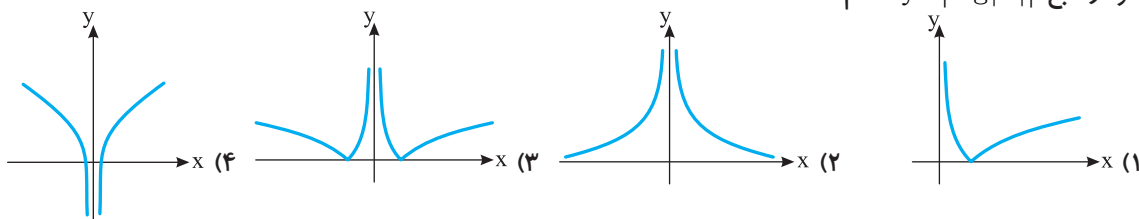
۳۸- نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{|x|}+1$  کدام است؟



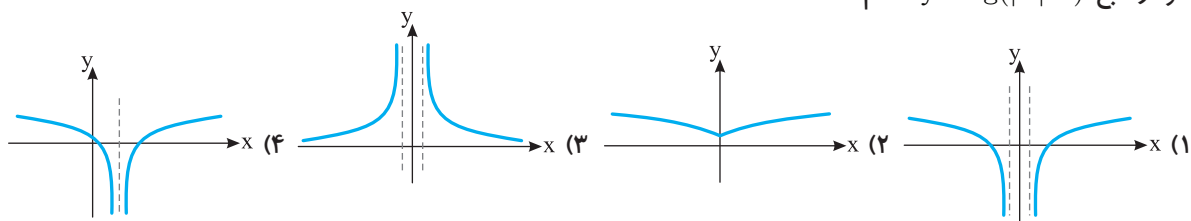
۳۹- نمودار تابع  $f(x) = \log x^2$  کدام است؟



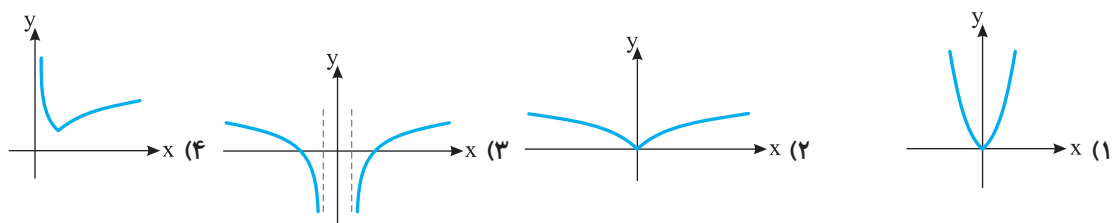
۴۰- نمودار تابع  $y = |\log|x||$  کدام است؟



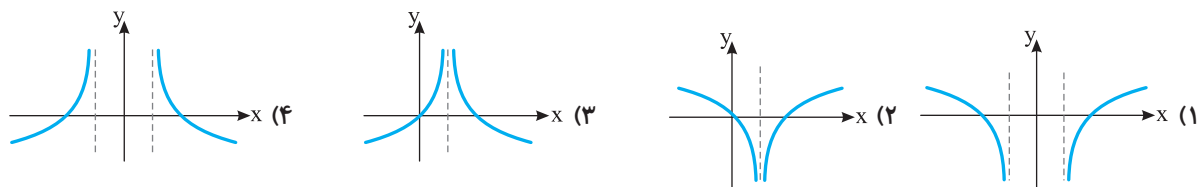
۴۱- نمودار تابع  $y = \log(|x|-1)$  کدام است؟



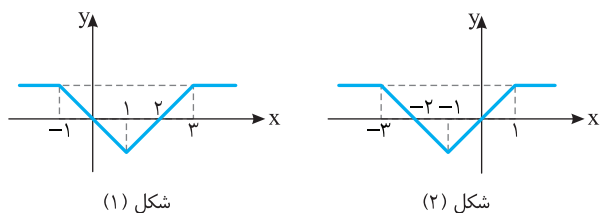
۴۲- نمودار تابع  $y = \log(|x|+1)$  کدام است؟



۴۳- نمودار تابع  $y = -\log|x-1|$  کدام است؟



۴۴- شکل (۱) نمودار تابع  $f$  است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



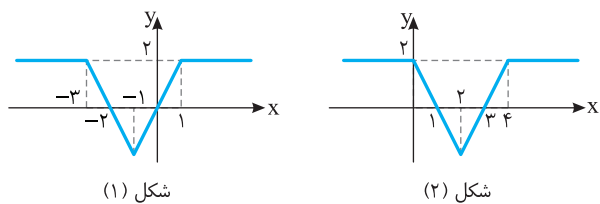
(۱)  $y = -f(x)$

(۲)  $y = f(-x)$

(۳)  $y = -f(-x)$

(۴)  $y = f(1-x)$

۴۵- شکل (۱) نمودار تابع  $f$  است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



(۱)  $y = f(-x)$

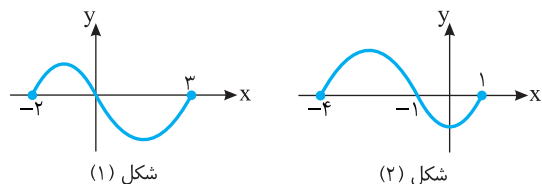
(۲)  $y = -f(-x)$

(۳)  $y = f(-x-1)$

(۴)  $y = f(-x+1)$

۴۶- نمودار تابع  $f$  در شکل (۱) رسم شده است. شکل (۲) نمودار

کدام تابع است؟



(۲)  $y = -f(-x)$

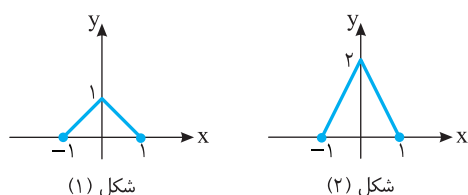
(۱)  $y = -f(x-1)$

(۴)  $y = f(x-1)$

(۳)  $y = -f(-x-1)$

۴۷- نمودار تابع  $f$  به صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع

به صورت شکل (۲) است؟

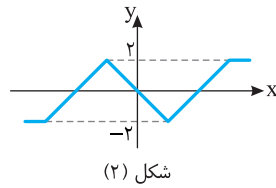
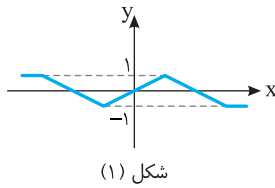


(۲)  $y = f(2x)$

(۱)  $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$

(۴)  $y = \frac{1}{2}f(x)$

(۳)  $y = 2f(x)$



۴۸- شکل (۱) نمودار تابع  $f$  است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟

(۱)  $y = 2f(x)$  (۲)  $y = -2f(x)$

(۳)  $y = -\frac{1}{2}f(-x)$  (۴)  $y = -\frac{1}{2}f(x)$

ریاضی - ۹۱

۴۹- با کدام ضابطه  $f(x)$ ، همواره تساوی  $f(x) = |f(x)|$  برقرار است؟

(۱)  $\sin \pi x$  (۲)  $\cos \pi x$  (۳)  $\sin 2\pi x$  (۴)  $\cos 2\pi x$

۵۰- نمودار تابع  $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$  را، ۴ واحد به طرف  $x$  های منفی و یک واحد به طرف  $y$  های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه،

تجربی - ۹۳

با کدام طول متقاطع‌اند؟

(۱)  $-3/5$  (۲)  $-3$  (۳)  $-2/5$  (۴)  $-2$

۵۱- نمودار تابع با ضابطه  $y = x^2 - 3x - 10$  را حداقل چند واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور  $x$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

غیرمنفی باشد؟

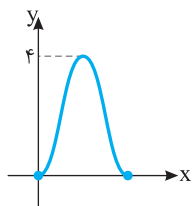
(۱) ۱ (۲)  $1/5$  (۳) ۲ (۴) ۳

۵۲- قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل،

خارج از کشور تجربی - ۹۷

نیمساز ناحیه‌های اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱)  $-2$  (۲)  $0/5$  (۳) ۱ (۴)  $1/5$



ریاضی - ۹۷

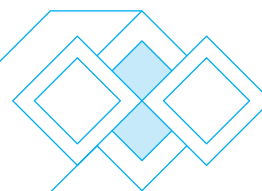
۵۳- شکل مقابل نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  در بازه  $[0, 4]$  است. مقدار  $b$  کدام است؟

(۱)  $-2$

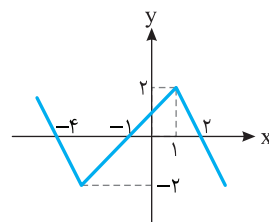
(۲)  $-1$

(۳) ۱

(۴) ۲



۱ کافی است نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.



۲ ابتدا توجه کنید که اگر  $f(x) \geq 0$ ، آن گاه

$$|f(x)| = f(x)$$

و در نتیجه

$$g(x) = -f(x) + f(x) = 0$$

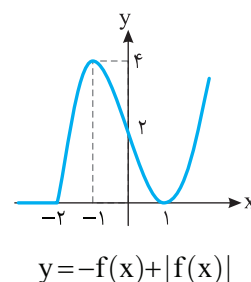
و اگر  $f(x) \leq 0$ ، آن گاه

$$|f(x)| = -f(x)$$

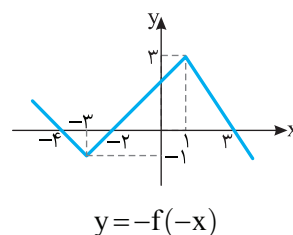
و در نتیجه

$$g(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

بنابراین در بازه  $[-2, +\infty)$  باید نمودار تابع  $y = -2f(x)$  را رسم کنیم و برای  $x \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$  باید نمودار تابع  $y = 0$  را رسم کنیم.

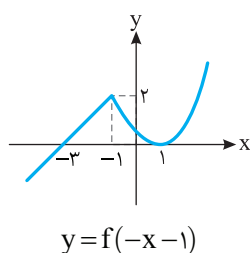
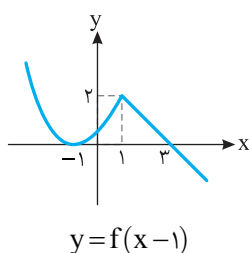


۳ کافی است نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور عرض ها قرینه کنیم، سپس این نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

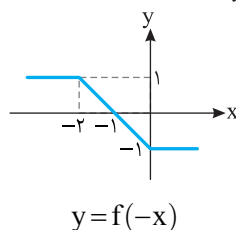
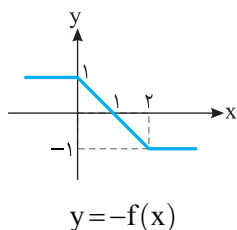


۴ ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم تا نمودار تابع  $y = f(x-1)$  به دست آید. سپس این نمودار را نسبت به محور عرض ها قرینه می کنیم تا نمودار تابع زیر به دست آید:

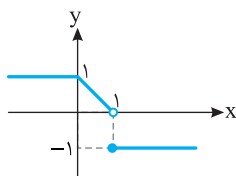
$$y = f(-x-1)$$



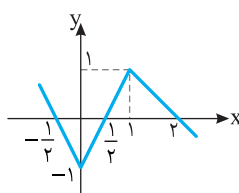
۵ ابتدا به نمودار توابع  $y = f(-x)$  و  $y = -f(x)$  توجه کنید.



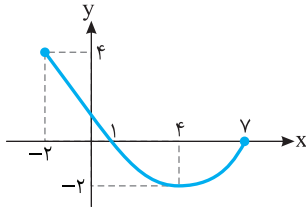
اکنون در بازه  $[1, +\infty)$  نمودار تابع  $y = f(-x)$  و در بازه  $(-\infty, 1)$  نمودار تابع  $y = -f(x)$  را رسم می کنیم تا نمودار تابع  $g$  به دست آید.



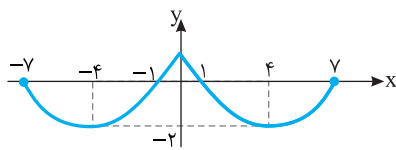
۶ کافی است طول نقاط نمودار تابع  $f$  را نصف کنیم تا نمودار تابع  $y = f(2x)$  به دست آید.



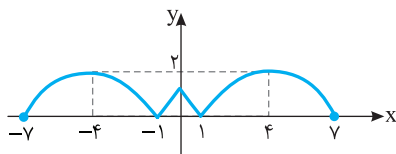
ترتیب نمودار تابع  $y=f(|x|-1)$  به دست می‌آید. در نهایت قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=|f(|x|-1)|$  به دست آید.



$$y=f(x-1)$$



$$y=f(|x|-1)$$



$$y=|f(|x|-1)|$$

۱۱ در هر مورد ضابطه تابع مورد نظر را می‌نویسیم:

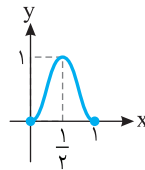
الف)  $y=f(-2x)$

ب)  $y=\frac{1}{2}f(2x-1)$

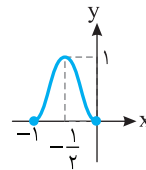
پ)  $y=2f(\frac{x}{2})+2$

۱۲ اگر نمودار تابع  $y=\sqrt{x}$  را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=\sqrt{x-1}$  به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y=\sqrt{-x-1}$  به دست می‌آید. اگر نمودار این تابع را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=\sqrt{-(x+1)-1}+1$  به دست می‌آید. بنابراین تا اینجا نمودار تابع  $y=\sqrt{-x-2}+1$  رسم شده است. اگر در نمودار این تابع طول و عرض نقاط را دو برابر کنیم، نمودار تابع  $y=2(\sqrt{\frac{x}{2}}-2+1)$  به دست می‌آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده است به صورت  $y=2\sqrt{-\frac{x}{2}}-2+2$  است.

۷ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع  $f$  را نصف می‌کنیم تا نمودار  $y=f(2x)$  به دست آید، سپس این نمودار را نسبت به محور  $y$  قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f(-2x)$  به دست آید.

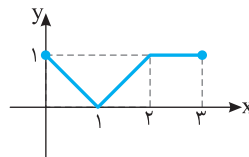


$$y=f(2x)$$

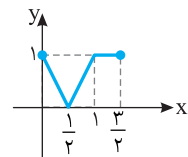


$$y=f(-2x)$$

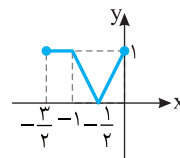
۸ ابتدا نمودار  $y=f(x)$  را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار  $y=f(x-1)$  به دست آید، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار  $y=f(2x-1)$  به دست آید، در نهایت قرینه این نمودار را نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم تا نمودار  $y=f(-2x-1)$  به دست آید.



$$y=f(x-1)$$

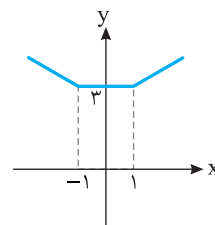


$$y=f(2x-1)$$



$$y=f(-2x-1)$$

۹ برای رسم نمودار تابع  $y=f(|x|)$ ، قسمتی از نمودار  $f$  را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می‌کنیم و به جای آن قرینه قسمتی را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم.



۱۰ ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y=f(x-1)$  به دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینه قسمتی که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم. بدین

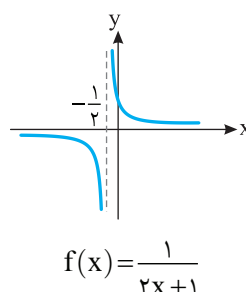
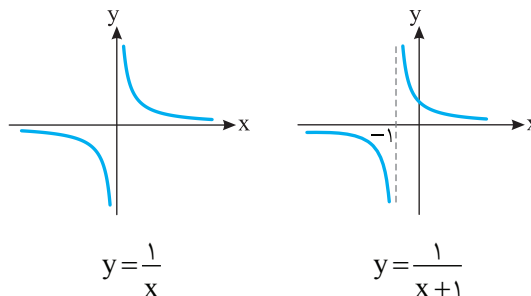
۱۳

ابتدا نمودار تابع  $y = \frac{1}{x}$  را رسم می‌کنیم و آن را یک

واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \frac{1}{x+1}$  به دست

آید. اکنون طول نقاط نمودار به دست آمده را نصف می‌کنیم تا

نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  به دست آید.



۱۴

ابتدا نمودار تابع  $y = \log x$  را رسم می‌کنیم و آن را

یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع

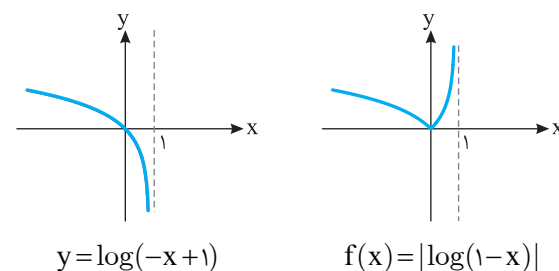
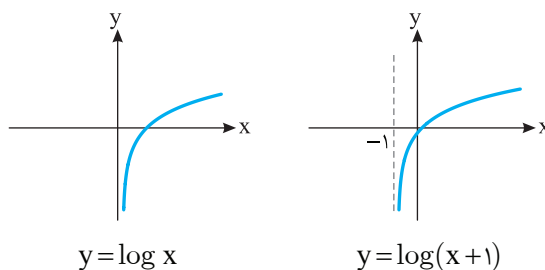
$y = \log(x+1)$  به دست آید. اکنون این نمودار را نسبت به

محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \log(-x+1)$

به دست آید. در نمودار به دست آمده، قسمتی را که زیر محور

طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار

تابع  $f(x) = |\log(1-x)|$  به دست آید.



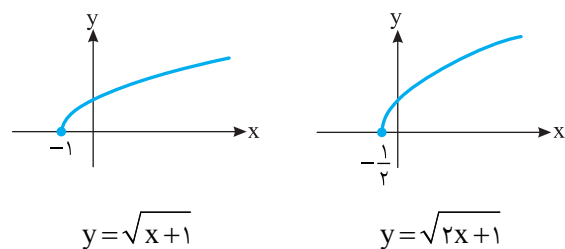
۱۵

ابتدا توجه کنید که

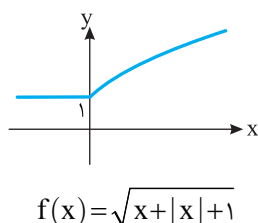
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+x+1} & x \geq 0 \\ \sqrt{x-x+1} & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & x \geq 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع  $y = \sqrt{2x+1}$  را به این ترتیب رسم می‌کنیم:

نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف می‌کنیم.



اکنون نمودار تابع  $f$  را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



۱۶

ابتدا نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را رسم می‌کنیم. سپس

قرینه این نمودار نسبت به محور عرض‌ها را نیز به آن اضافه

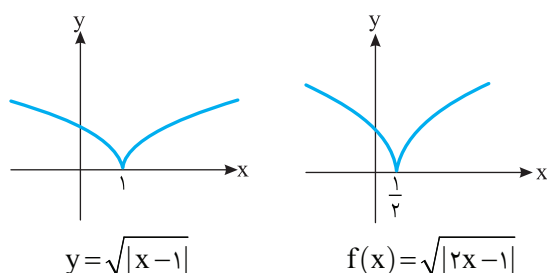
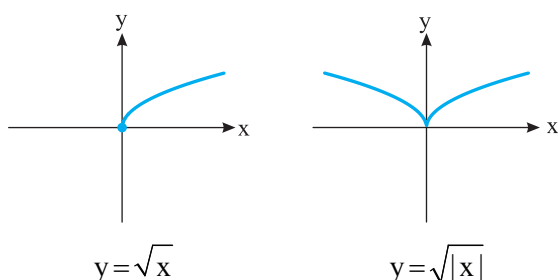
می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \sqrt{|x|}$  به دست آید. اکنون نمودار

به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا

نمودار تابع  $y = \sqrt{|x-1|}$  به دست آید. در آخر طول نقاط

روی نمودار به دست آمده را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع

$f(x) = \sqrt{|2x-1|}$  به دست آید.





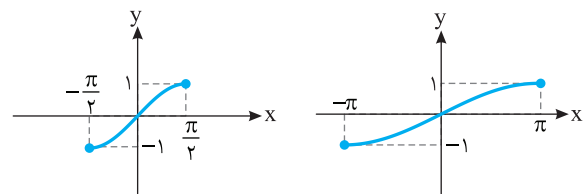
ابتدا توجه کنید که

$$-\pi \leq x \leq \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

پس نمودار تابع  $y = \sin x$  را در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  رسم می‌کنیم.سپس طول نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \sin(\frac{x}{2})$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  به دست آید. اگر عرض نقاطاین نمودار را دو برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = -2 \sin(\frac{x}{2})$  به دست می‌آید.

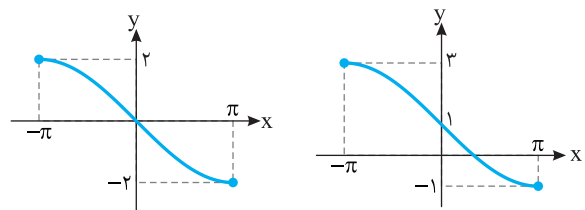
اکنون این نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع زیر به دست آید:

$$f(x) = -2 \sin(\frac{x}{2}) + 1$$



$$y = \sin x$$

$$y = \sin(\frac{x}{2})$$



$$y = -2 \sin(\frac{x}{2})$$

$$f(x) = -2 \sin(\frac{x}{2}) + 1$$

ابتدا توجه کنید که

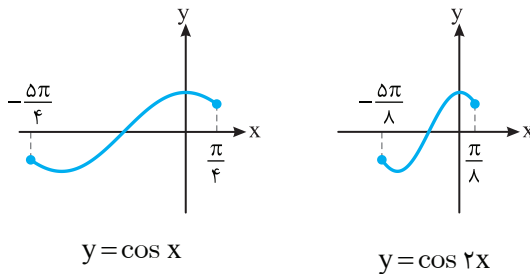
$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi \leq 2x \leq \pi \Rightarrow -\frac{\Delta\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$$

**راه حل اول** ابتدا نمودار تابع  $y = \cos x$  را در بازه  $[-\frac{\Delta\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 

رسم می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم تا

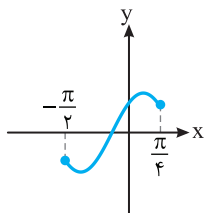
نمودار تابع  $y = \cos 2x$  در بازه  $[-\frac{\Delta\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$  به دست آید.اکنون این نمودار را  $\frac{\pi}{8}$  واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تانمودار تابع زیر در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$  به دست آید:

$$f(x) = \cos(2(x - \frac{\pi}{8}))$$



$$y = \cos x$$

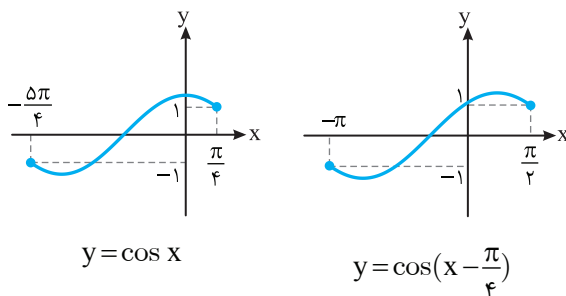
$$y = \cos 2x$$



$$f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$$

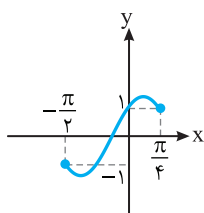
**راه حل دوم** ابتدا نمودار تابع  $y = \cos x$  را در بازه  $[-\frac{\Delta\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ رسم می‌کنیم. سپس نمودار را  $\frac{\pi}{4}$  واحد به سمت راست منتقلمی‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$  در بازه  $[-\pi, \frac{\pi}{4}]$  به دست

آید. اکنون طول نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع

 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$  در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$  به دست آید.

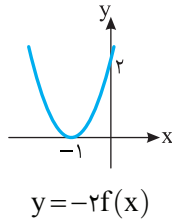
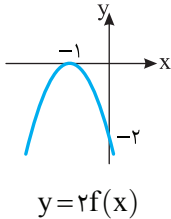
$$y = \cos x$$

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$$



$$f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$$

به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -2f(x)$  به دست بیاید.

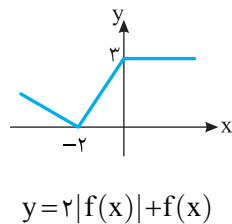


۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$g(x) = \begin{cases} 2f(x) + f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) + f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

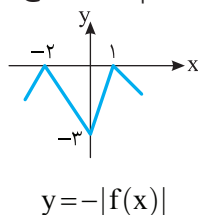
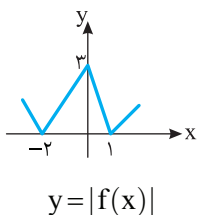
$$= \begin{cases} 3f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

بنابراین، در جاهایی که مقادیر  $f$  نامنفی‌اند باید نمودار تابع  $y = 3f(x)$  را رسم کنیم و در جاهایی که مقادیر  $f$  منفی‌اند باید نمودار تابع  $y = -f(x)$  را رسم کنیم.

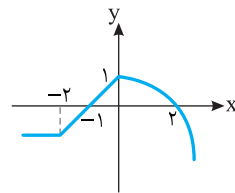


۶- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع  $y = |f(x)|$  را رسم می‌کنیم.

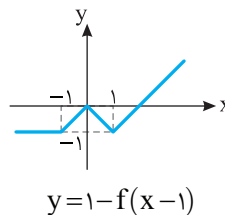
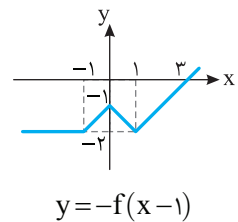
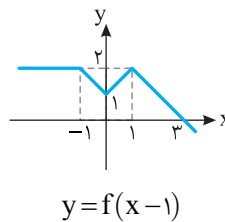
برای این کار، قرینه قسمتی را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم. اکنون، اگر نمودار تابع  $|f|$  را نسبت به محور  $x$  قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = -|f(x)|$  به دست می‌آید.



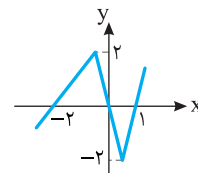
۱- گزینه ۲ برای رسم کردن نمودار تابع  $y = -f(x)$  باید قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $x$  رسم کنیم.



۲- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = f(x-1)$  به دست بیاید. اکنون قرینه این نمودار را نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -f(x-1)$  به دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = 1 - f(x-1)$  به دست بیاید.



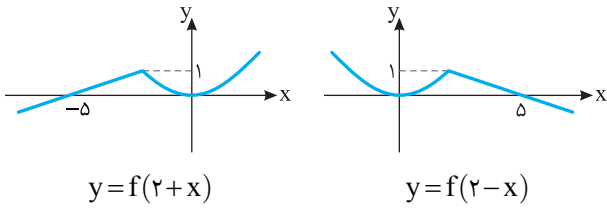
۳- گزینه ۱ باید عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $f$  را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع  $y = 2f(x)$  به دست بیاید.



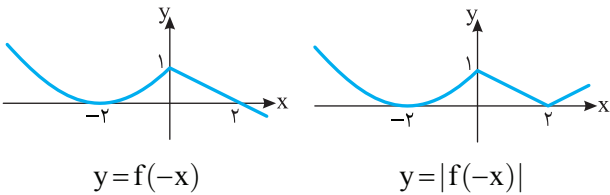
۴- گزینه ۱ توجه کنید که همواره  $f(x) \leq 0$ . بنابراین

$$y = |f(x)| - f(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

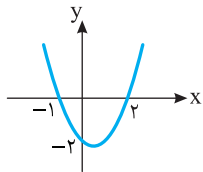
برای رسم کردن نمودار  $y = -2f(x)$ ، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار  $f$  را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2f(x)$



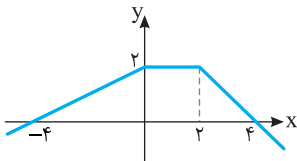
**۱۲- گزینه ۳** ابتدا نمودار تابع  $y = f(-x)$  را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه نمودار  $f$  را نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم نمودار تابع  $y = |f(-x)|$ ، قرینه قسمتی از نمودار تابع  $y = f(-x)$  را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم.



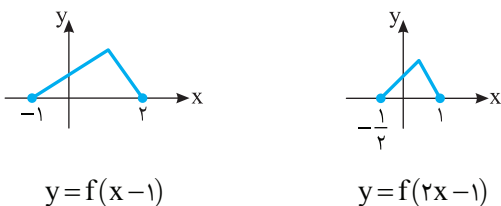
**۱۳- گزینه ۱** باید طول هر نقطه روی نمودار تابع  $f$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنیم تا نمودار تابع  $y = f(2x)$  به دست بیاید. توجه کنید که با این کار نمودار در امتداد محور طول‌ها منقبض می‌شود.



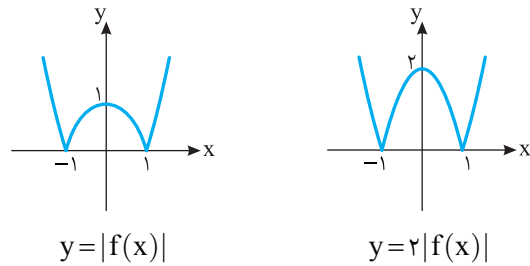
**۱۴- گزینه ۱** باید طول هر نقطه از نمودار تابع  $f$  را در  $\frac{1}{2}$ ، یعنی ۲، ضرب کنیم تا نمودار تابع  $y = f(\frac{1}{2}x)$  به دست بیاید. توجه کنید که با این کار، نمودار در امتداد محور طول‌ها منبسط می‌شود.



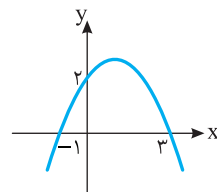
**۱۵- گزینه ۲** برای رسم نمودار تابع  $y = f(2x-1)$  کافی است ابتدا نمودار تابع  $y = f(x)$  را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع  $y = f(x-1)$  رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(2x-1)$  به دست آید. توجه کنید که با این کار نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود.



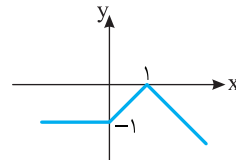
**۷- گزینه ۱** ابتدا نمودار تابع  $y = |f(x)|$  را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه قسمتی را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می‌کنیم. اکنون، نمودار تابع  $|f|$  را در امتداد محور  $y$  با ضریب ۲ به طور عمودی منبسط می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2|f(x)|$  به دست بیاید.



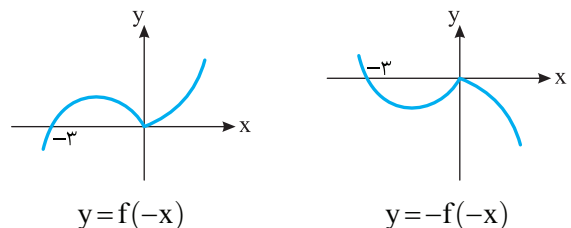
**۸- گزینه ۳** باید قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  رسم کنیم تا نمودار تابع  $y = f(-x)$  به دست بیاید.



**۹- گزینه ۱** باید قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  رسم کنیم تا نمودار تابع  $y = f(-x)$  به دست بیاید.



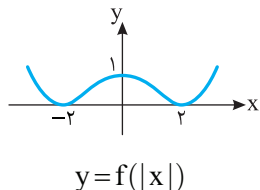
**۱۰- گزینه ۴** ابتدا قرینه نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(-x)$  به دست بیاید. سپس قرینه نمودار این تابع را نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -f(-x)$  به دست بیاید.



**۱۱- گزینه ۲** ابتدا نمودار تابع  $f$  را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = f(2+x)$  به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(2-x)$  به دست بیاید.

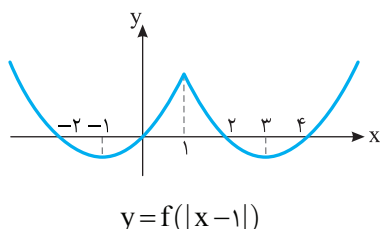
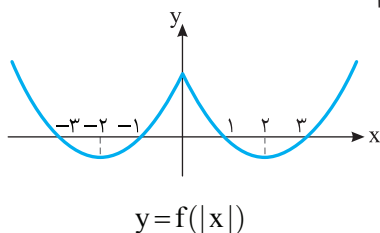
**۱۹- گزینه ۳** برای رسم نمودار تابع  $y=f(|x|)$ ، قسمتی

از نمودار تابع  $f$  را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم.



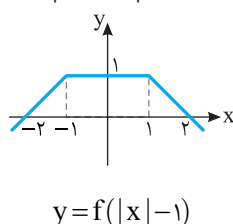
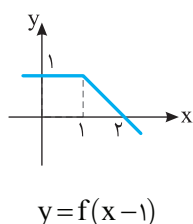
**۲۰- گزینه ۴** توجه کنید که اگر ابتدا نمودار تابع

$y=f(|x|)$  را رسم کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع  $y=f(|x-1|)$  به دست می‌آید. برای رسم نمودار تابع  $y=f(|x|)$  کافی است قسمتی از نمودار تابع  $f$  را که سمت چپ محور  $y$  است حذف کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به محور  $y$  رسم کنیم.



**۲۱- گزینه ۱** ابتدا نمودار تابع  $g(x)=f(x-1)$  را رسم

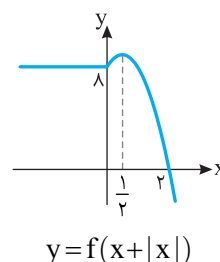
می‌کنیم. برای این کار، نمودار تابع  $y=f(x)$  را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. اکنون نمودار تابع  $y=g(|x|)$  را رسم می‌کنیم. برای این کار، قسمتی را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می‌کنیم و قرینه قسمت سمت راست را نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم.



**۱۶- گزینه ۲** توجه کنید که

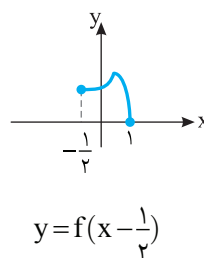
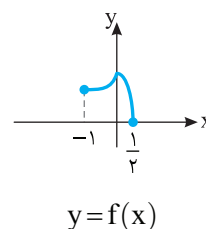
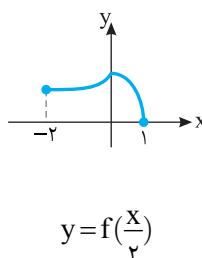
$$y = \begin{cases} f(x+x) & x \geq 0 \\ f(x-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(2x) & x \geq 0 \\ f(0) & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین باید روی بازه  $[0, +\infty)$  نمودار تابع  $y=f(2x)$  را رسم کنیم. یعنی باید روی بازه  $[0, +\infty)$  طول هر نقطه روی نمودار  $f$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنیم. با این کار نمودار  $f$  روی این بازه در امتداد محور طول‌ها منقبض می‌شود. نمودار تابع مورد نظر روی بازه  $(-\infty, 0)$  خط ثابت  $y=f(0)=8$  است.



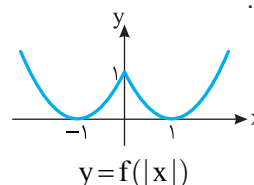
**۱۷- گزینه ۱** اگر طول نقاط نمودار تابع  $y=f(\frac{x}{2})$  را

نصف کنیم، نمودار تابع  $y=f(\frac{2x}{2})=f(x)$  به دست می‌آید و اگر این نمودار را نیم واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y=f(x-\frac{1}{2})$  رسم می‌شود.



**۱۸- گزینه ۴** برای رسم نمودار تابع  $y=f(|x|)$ ، قسمتی

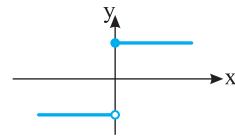
از نمودار تابع  $f$  را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به این محور رسم می‌کنیم.



**۲۲- گزینه ۳** اگر  $x \geq 0$ ، آن گاه  $g(x) = |f(x)|$ ، بنابراین،

باید به ازای  $x \geq 0$  نمودار تابع  $y = |f(x)|$  را رسم کنیم. برای این کار، به ازای  $x \geq 0$ ، قرینه قسمتی از نمودار  $f$  را که زیر محور  $x$  است نسبت به محور  $x$  رسم می کنیم و قسمتی را که زیر محور  $x$  است حذف می کنیم.

اگر  $x < 0$ ، آن گاه  $g(x) = f(|x|)$ ، بنابراین، باید به ازای  $x < 0$  نمودار تابع  $y = f(|x|)$  را رسم کنیم. برای این کار، به ازای  $x < 0$ ، قسمتی از نمودار  $f$  را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می کنیم و قرینه قسمتی از نمودار  $f$  را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به این محور رسم می کنیم.



**۲۳- گزینه ۳** اگر نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ

منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(x+1)$  به دست می آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(x+1)+1$  به دست می آید. اگر نمودار اخیر را نسبت به محور عرض ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = f(-x+1)+1$  به دست می آید.

**۲۴- گزینه ۴** اگر نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(x-1)$  به دست می آید. اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع  $y = 2f(x-1)$  به دست می آید و اگر طول نقاط نمودار اخیر را نصف کنیم، نمودار تابع  $y = 2f(2x-1)$  به دست می آید.

**۲۵- گزینه ۲** اگر نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ

و یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(x+1)-1$  به دست می آید. اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع  $y = f(\frac{x}{2}+1)-1$  به دست می آید و اگر عرض نقاط

نمودار اخیر را دو برابر کنیم، نمودار تابع  $y = 2(f(\frac{x}{2}+1)-1)$  به دست می آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده به صورت  $y = 2f(\frac{x}{2}+1)-2$  است.

**۲۶- گزینه ۲** اگر نمودار تابع  $g(x) = f(2x)-1$  را یک

واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(2(x-1)-1)$  به دست می آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع  $y = f(2(2x-1))-1 = f(4x-2)-1$  به دست می آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع  $y = 2(f(4x-2)-1)$  به دست می آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده به صورت  $y = 2f(4x-2)-2$  است.

**۲۷- گزینه ۱** اگر نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را نسبت به محور

عرض ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = \sqrt{-x}$  به دست می آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = \sqrt{-(x-1)}$  به دست می آید. اگر این نمودار را مجدداً نسبت به محور عرض ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = \sqrt{-(-x-1)}$  به دست می آید. بنابراین نمودار نهایی متعلق به تابع  $y = \sqrt{x+1}$  است.

**۲۸- گزینه ۴** وقتی طول نقاط نمودار تابع  $y = \sqrt{x-1}$  را

سه برابر می کنیم نمودار تابع  $y = \sqrt{\frac{x}{3}-1}$  رسم می شود و وقتی عرض نقاط این نمودار را نصف می کنیم نمودار تابع  $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{3}-1}$  به دست می آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-1}$  به دست می آید و اگر نمودار اخیر را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(x-1)}{3}-1}$  به دست می آید. بنابراین ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده است به صورت  $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}$  است.

**۲۹- گزینه ۱** وقتی نمودار تابع  $y = \sin(\frac{x}{2})$  را یک واحد به

سمت راست منتقل می کنیم نمودار تابع  $y = \sin(\frac{x-1}{2})$  به دست

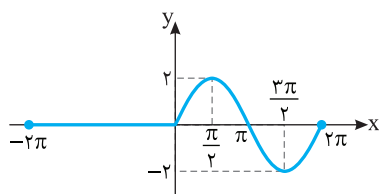
می آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع  $y = \sin(\frac{2x-1}{2})$  به دست می آید. اکنون اگر این نمودار یک

واحد به سمت راست منتقل شود، نمودار تابع  $y = \sin(\frac{2(x-1)-1}{2})$  به دست می آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض ها قرینه

کنیم، نمودار تابع  $y = \sin(\frac{2(-x-1)-1}{2})$  به دست می آید که

پس از ساده کردن به صورت  $y = \sin(-x-\frac{3}{2})$  یا به صورت

$y = -\sin(x+\frac{3}{2})$  در می آید.

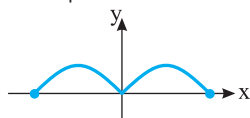


$$y = \sin|x| + \sin x$$

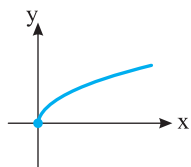
۳۳- گزینه ۳ راهحل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \sin(-x) & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} -\sin x & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

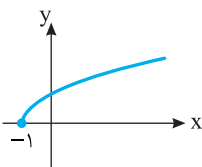
بنابراین، باید روی بازه  $[-\pi, 0]$  قرینه نمودار تابع  $y = \sin x$  را نسبت به محور  $x$  رسم کنیم که نمودار تابع  $y = -\sin x$  روی این بازه می‌شود و روی بازه  $[0, \pi]$  نمودار تابع  $y = \sin x$  را رسم کنیم. **راهحل دوم** ابتدا نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \sin x$  و دامنه  $[-\pi, \pi]$  را رسم می‌کنیم. اکنون توجه کنید که  $f(x) = g(|x|)$ ، در نتیجه، کافی است نمودار تابع  $y = g(|x|)$  را رسم کنیم. برای این کار، قسمتی از نمودار تابع  $g$  را که سمت چپ محور  $y$  است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور  $y$  است نسبت به محور  $y$  رسم می‌کنیم.



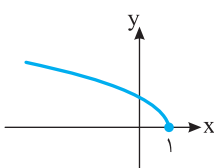
۳۴- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \sqrt{x+1}$  به دست آید. سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \sqrt{-x+1}$  به دست آید و در آخر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = -\sqrt{1-x}$  به دست آید.



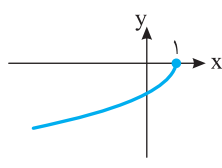
$$y = \sqrt{x}$$



$$y = \sqrt{x+1}$$



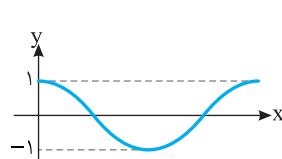
$$y = \sqrt{-x+1}$$



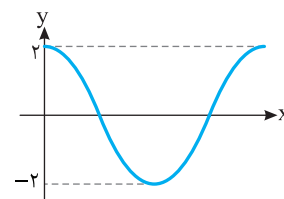
$$y = -\sqrt{1-x}$$

۳۰- گزینه ۴ نمودار تابع  $y = -2 \cos x$  از دو برابر کردن

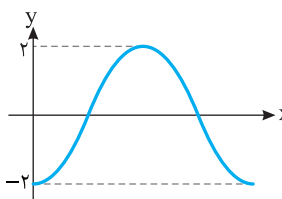
عرض نقاط در نمودار تابع  $y = \cos x$  و سپس قرینه کردن آنها نسبت به محور  $x$  به دست می‌آید.



$$y = \cos x$$



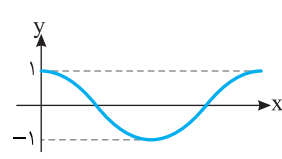
$$y = 2 \cos x$$



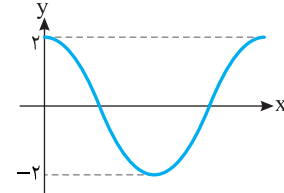
$$y = -2 \cos x$$

۳۱- گزینه ۲ ابتدا عرض نقاط نمودار تابع  $y = \cos x$  را

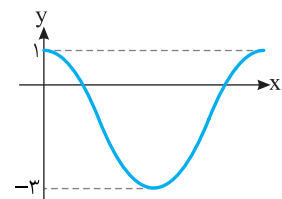
دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2 \cos x$  به دست آید. نمودار به دست آمده را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2 \cos x - 1$  به دست آید.



$$y = \cos x$$



$$y = 2 \cos x$$



$$y = 2 \cos x - 1$$

۳۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \sin(-x) + \sin x & -2\pi \leq x < 0 \\ \sin x + \sin x & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & -2\pi \leq x < 0 \\ 2 \sin x & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع روی بازه  $[-2\pi, 0]$  خط ثابت  $y = 0$  است، و روی بازه  $[0, 2\pi]$  نمودار تابع  $y = 2 \sin x$  است. برای رسم نمودار تابع  $y = 2 \sin x$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  باید عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $y = \sin x$  را در ۲ ضرب کنیم.