مبلغی که امروز بابت خرید این کتاب می‌پردازید،
در مقابل هزینه‌هایی که در آینده بابت
نخواندن آن پرداخت خواهید کرد،
بسیار ناچیز است ...

مقدمهٔ مدیر تألیف

داستان «سفرهای گالیور[1]» داستان سفر به یک شهر رؤیایی با آدم‌هایی کوچک و خیال‌گونه است؛ روایت زندگی آدم‌هایی پرشور و دوست‌داشتنی در سرزمین جادویی لی‌لی‌پوت!

در داستانِ شهر لی‌لی‌پوت، گالیور- قهرمانِ داستان که بر اثر حادثه‌ای پا بر این سرزمین گذاشته- همراه با آدم کوچولوهای قصه، دست ما را می‌گیرند و با خود به این شهر جادویی می‌برند تا در روایتی مابین واقعیت و رؤیا، از گنجی بزرگ که در این سرزمین کوچک نهان شده، پرده بردارند...

این داستان زیبا و بسیار جذاب، بنیان طرحی شد در ضمیر ما تا این بار نه در عالم خیال بلکه در واقعیت، مردانی بزرگ را در انتشارات کلاغ سپید گرد هم آوریم تا دستان شما را بگیرند و با خود به سرزمین خیال‌انگیز کتاب‌ها ببرند و داستانی جدیدتر و متفاوت از آن چه تاکنون در کلاس‌های مدرسه یاد گرفته‌اید را برای شما روایت کنند؛ داستانی شورانگیز از گنج‌های پنهان‌شده در کتاب‌ها و شگفتی‌های بر زبان نیامده در کلاس‌ها ...

پس همین امروز دستت را به ما بده

و با ما به لی‌لی‌پوت قدم بگذار!

در دست‌های ما نقشهٔ گنجی بزرگ نهان است.

1. Gulliver’s travels

نقشهٔ گنج

مقدمهٔ مؤلفین

A. Monsef Shokri
علی منصف‌شکری

M.R. Hosseinifard
سیدمحمدرضا حسینی‌فرد

سال اول دبستان بود، کلاس بزرگ بود: یک اطاق پنجدری. و روشن بود. آفتاب آمده بود تو. بیرون پاییز بود. دست ما به پاییز نمی‌رسید. شکوه بیرون کلاس بر ما حرام بود. سرهای ما تو کتاب بود. نمی‌شد سر بلند کرد. تماشای آفتاب تخلف بود. دیدن کاج حیاط جریمه داشت: از نمرهٔ گرفته، دو نمره کم می‌شد.

ما دورتا دور اطاق روی نیمکت نشسته بودیم. میان اطاق خالی بود. و چه پهنه‌ای برای چوب و فلک. تختهٔ سیاه بدجایی بود: ضد نور بود. روی چند شیشه را گرفته بود، نصف یک درخت را حرام کرده بود. با تکه‌ای از آسمان. نوشتهٔ روی تختهٔ سیاه خوب دیده نمی‌شد:

برگ، مرگ خوانده می‌شد. همان روز حسن «خوب» را «چوب» خوانده بود و چوب خوبی از دست معلم خورده بود. جای من نزدیک معلم بود. پشت میزش نشسته بود و ذکر می‌کرد. وجودش بطلان ذکر بود. آدمی بی‌رؤیا بود. پیدا بود زنجره را نمی‌فهمد. خطمی را نمی‌شناسد و قصه بلد نیست. در حضور او خیالات من چروک می‌خورد. وقتی وارد کلاس می‌شد، ما از اوج خیال می‌افتادیم. در تن خود حاضر می‌شدیم. پرهایمان ریخته بود. انگار سرنگون بودیم.

ترکهٔ روی میز ادامهٔ اخلاق او بود. بی‌ترکه شمایل او ناتمام می‌نمود و ترکه همیشه بود. حضور ابدی داشت. ترکهٔ تنبیه، ترکهٔ انار بود. در تعلیم و تربیت آن روزگار، درخت انار سهم داشت...

سهراب سپهری، اتاق آبی

تیم تألیف و ویراستاری
کتاب‌های ریاضی لی‌لی‌پوت

M. Sehatkar
محمد صحت‌کار

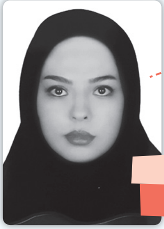
دانش‌آموختهٔ
مهندسی مخابرات

Z. Sh. Moghaddam
زهره شعرباف مقدم

دانش‌آموختهٔ
ریاضیات کاربردی

M. Sattari
مهدی ستاری

دانش‌آموختهٔ
ریاضیات کاربردی



Z. Ramshini
زهره رامشینی

دانش‌آموختهٔ
مهندسی مکانیک

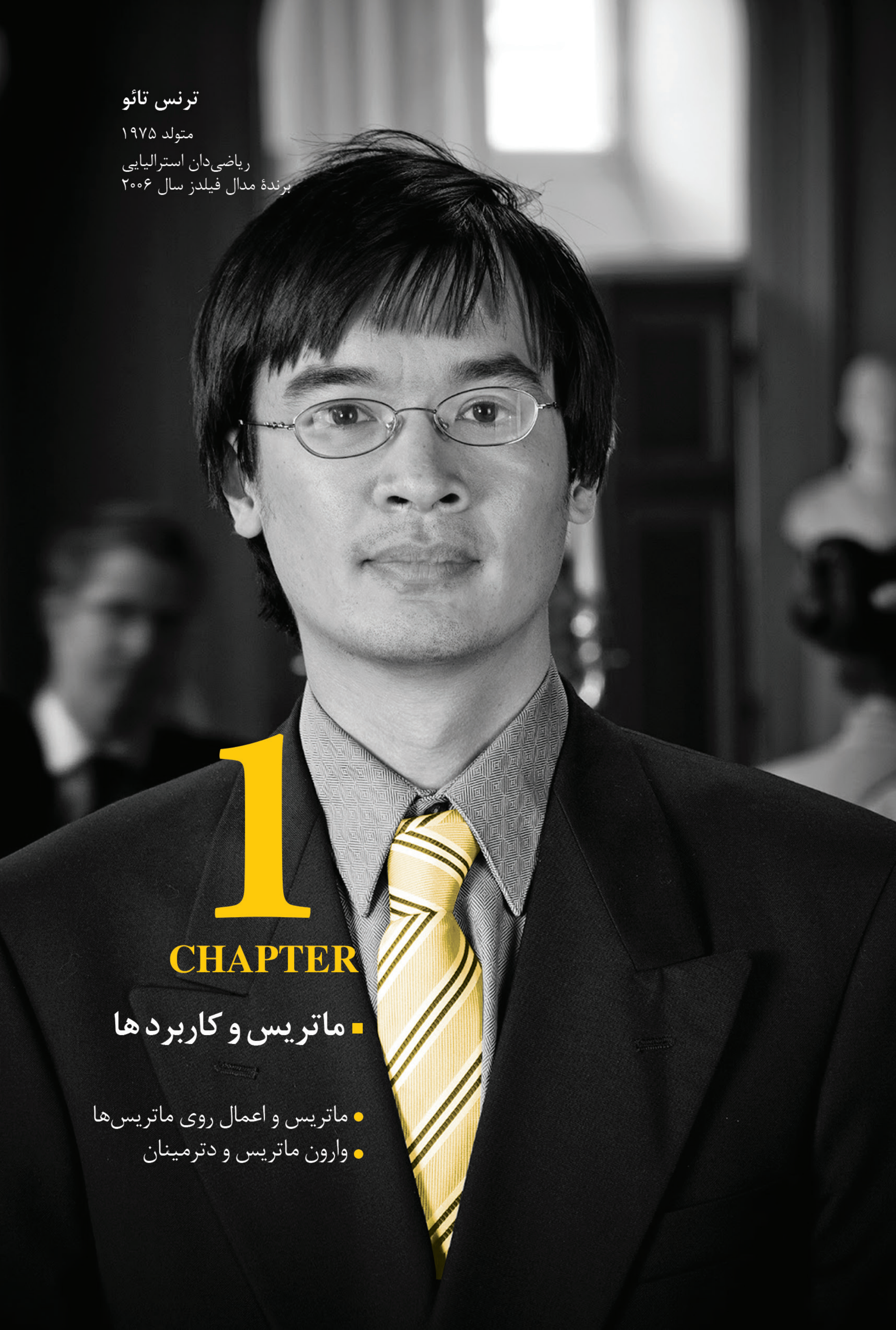
M. Zamani
مهسا زمانی

دانش‌آموختهٔ
مهندسی مکانیک

M. Ghanifard
معصومه غنی‌فرد

دانش‌آموختهٔ
ریاضی گرایش آنالیز

فهرست



ترنس تائو

متولد ۱۹۷۵

ریاضی‌دان استرالیایی

برندهٔ مدال فیلدز سال ۲۰۰۶

1 CHAPTER

▪ ماتریس و کاربردها

- ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
- وارون ماتریس و دترمینان

درس اول
ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

TEST 001 — **ماتریس**

در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x & ۵ \\ ۳ & -۱ & ۴ & y \\ ۷ & ۸ & ۹ & x-۲ \end{bmatrix}$ اگر درایهٔ سطر اول و ستون سوم از درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگ‌تر باشد، مقدار x کدام است؟

۱) -۱ .... ۲) ۱

۳) ۳ .... ۴) ۱۳

LILIPOOTBOX

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و تعدادی ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در این ماتریس، یک درایه نامیده می‌شود. ماتریس‌ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند A ، B ، C و ... نشان می‌دهند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ ۷ & \sqrt{۲} & -۲ \end{bmatrix}$$

ستون سوم A

درایه

ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

سطر دوم B

ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون

$$C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

سطر اول C

ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون

اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یا $A_{m\times n}$ نوشته می‌شود و A را ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (یا به‌طور خلاصه m در n) می‌گویند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$

دو سطر

ماتریس ۲در۳

سه ستون

هر درایهٔ ماتریس را با دو اندیس نشان می‌دهیم. اندیس اول شمارهٔ سطر و اندیس دوم شمارهٔ ستون را نشان می‌دهد، یعنی a_{ij} درایهٔ سطر i اُم و ستون j اُم است.

درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

درایهٔ سطر دوم و ستون دوم

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

درایهٔ سطر اول و ستون سوم

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

ANALYSE

درایهٔ سطر اول و ستون سوم همان x و درایهٔ سطر سوم و ستون دوم عدد ۸ است، بنابراین:

$x=8+5=13$

پاسخ گزینهٔ ۴

N O T E

TEST 002 درایه‌ها بر حسب تابعی از سطر و ستون

اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ مفروض باشد، به‌طوری که برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$، برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2+j$، در این صورت ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

LILIPOOT BOX

در بعضی از ماتریس‌ها، درایه‌ها را به‌طور مستقیم معرفی نمی‌کنند و آن‌ها را برحسب تابعی از اندیس‌های سمت چپ و سمت راست درایه بیان می‌کنند. در این موارد ممکن است تابع چندضابطه‌ای نیز باشد که برای پیدا کردن درایه‌ها باید به شرط‌های گفته شده دقت کنید.

- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ اگر به‌ازای هر $1\leq i\leq 2$ و هر $1\leq j\leq 2$ داشته باشیم $a_{ij}=5$، آن‌گاه ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

- در ماتریس $B=[b_{ij}]_{2\times 3}$ اگر به‌ازای هر $1\leq i\leq 2$ و هر $1\leq j\leq 3$ داشته باشیم: $b_{ij}=i+j$، آن‌گاه ماتریس B به‌صورت زیر است:

$$B=\begin{bmatrix} \underset{a_{11}}{1+1} & \underset{a_{12}}{1+2} & \underset{a_{13}}{1+3} \\ \underset{a_{21}}{2+1} & \underset{a_{22}}{2+2} & \underset{a_{23}}{2+3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- در ماتریس $C=[c_{ij}]_{2\times 2}$ اگر به‌ازای $i\geq j$ داشته باشیم $c_{ij}=i\times j$ و به‌ازای $i<j$ داشته باشیم $c_{ij}=7$، آن‌گاه ماتریس C به‌صورت زیر است:

$i\geq j$ $i<j$

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times 1 & 7 \\ 2\times 1 & 2\times 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ANALYSE

با توجه به داده‌های مسئله، ماتریس A به‌صورت زیر خواهد بود:

$$A=\begin{bmatrix} 1^2+1 & 5 \\ 7 & 2^2+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

پاسخ گزینهٔ ۲

TEST 003 انواع ماتریس

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-۲ & a-۱ \\ b-۲ & b+۳ \end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

LILIPOOTBOX

اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n (یا $n\times n$) می‌نامیم.

$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$ قطر اصلی $C=[۵]_{۱\times ۱}=۵$

در ماتریس‌های مربعی بالا، درایه‌های قرمز رنگ را درایه‌های قطر اصلی می‌نامند.

در ماتریس‌های مربعی قطر دیگر ماتریس، قطر فرعی نام دارد.

$A=\begin{bmatrix} ۹ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ & ۴ \\ ۷ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ قطر فرعی

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه بر اساس رابطهٔ بین i و j می‌توان موقعیت درایه را نسبت به قطر اصلی تشخیص داد:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

[بالای قطر اصلی] $i<j$

[روی قطر اصلی] $i=j$

[پایین قطر اصلی] $i>j$

اگر ماتریسی فقط دارای یک سطر باشد، آن را ماتریس سطری می‌نامند.

$A=\begin{bmatrix} ۲ & \frac{۱}{۲} & ۷ \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$ $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}_{۱\times ۲}$ $C=[۵]_{۱\times ۱}=۵$

اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد، آن را ماتریس ستونی می‌نامند.

$A=\begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{۲} \\ ۵ \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$ $B=\begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۱}$ $C=[۹]_{۱\times ۱}$

اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند، این ماتریس را ماتریس قطری می‌نامند.

$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ $\quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

اگر تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر فرعی صفر شود، ماتریس را شبه‌قطری می‌نامند.

درایه‌های واقع بر قطر اصلی در ماتریس‌های قطری می‌تواند صفر هم باشد.

اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابر باشند، آن ماتریس را یک ماتریس اسکالر می‌نامند.

$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ $\quad B=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$ $\quad C=\begin{bmatrix} ۴ \end{bmatrix}_{۱\times ۱}$

اگر در یک ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های قطر اصلی برابر «۱» باشند، آن را ماتریس واحد (ماتریس همانی) می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

$I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$ $\quad I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ $\quad I=\begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix}_{۱\times ۱}$

ماتریسی که همهٔ درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامند و با $\bar{O}$ نشان می‌دهند.

$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ $\quad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ $\quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$

ANALYSE

برای این‌که A یک ماتریس قطری باشد، باید تمام درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} a-۲=۰ \Rightarrow a=۲ \\ b+۳=۰ \Rightarrow b=-۳ \end{cases} \Rightarrow a+b=-۱$$

پاسخ گزینهٔ ۱

TEST 004 — تساوی دو ماتریس

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۵ \\ ۲ & z-۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & x+y \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

LILIPOOT BOX

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را **مساوی** می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\boxed{\forall i,j \quad ، \quad a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]}$$

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ برابر باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۲ \\ z=۴ \\ t=۵ \end{cases}$$

ANALYSE

باید درایه‌های دو ماتریس نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} \begin{cases} x-y=۱ \\ x+y=۵ \end{cases} \Rightarrow x=۳, y=۲ \\ z-۲=۳ \Rightarrow z=۵ \end{cases}$$

بنابراین مجموع x و y و z برابر ۱۰ خواهد شد.

پاسخ گزینهٔ ۳

NOTE

TEST 005 اعمال روی ماتریس

اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ ، $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ و $b_{ij}=i^۲+j^۲$ ، حاصل $۲A-B+I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۶ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۶ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$

LILIPOOTBOX

برای محاسبهٔ جمع یا تفریق دو ماتریس، کافی است درایه‌های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع یا تفریق کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۷ & ۶ \end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} ۱+۲ & ۲+۴ \\ ۵+۷ & ۳+۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۱۲ & ۹ \end{bmatrix}$$

فقط دو ماتریس هم‌مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد:

$$\boxed{A=[a_{ij}]_{m\times n},B=[b_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}}$$

برای ضرب یک عدد در یک ماتریس، کافی است آن عدد را در تمام درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم:

$$\boxed{A=[a_{ij}]_{m\times n},r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

در حالت خاصی که عدد -۱ را در ماتریس A ضرب کنیم، ماتریس $-A$ به‌دست می‌آید که آن را قرینهٔ ماتریس A می‌نامند و همواره داریم:

$$\boxed{A+(-A)=\bar{o}}$$

اگر A ، B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه خواص زیر همواره برقرار است:

ماتریس صفر عضو بی‌اثر جمع در ماتریس‌ها است. $\boxed{A+\bar{o}=\bar{o}+A=A}$

جمع ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است. $\boxed{A+(B+C)=(A+B)+C}$

جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد. $\boxed{A+B=B+A}$

توزیع‌پذیری ماتریس روی جمع اعداد	$(r\pm s)A=rA\pm sA$
توزیع‌پذیری عدد روی جمع ماتریس‌ها	$r(A\pm B)=rA\pm rB$
وجود عضو قرینه	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{o}$
قابلیت ضرب عدد در طرفین تساوی ماتریسی	$A=B\Rightarrow rA=rB$
قابلیت حذف عدد غیر صفر از طرفین تساوی ماتریسی	$rA=rB\xrightarrow{r\neq 0}A=B$
جابه‌جایی عدد و ماتریس	$(r)(A)=(A)(r)$

ANALYSE

ابتدا ماتریس B را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم:

$$B=\begin{bmatrix}1^2+1^2 & 1^2+2^2\\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow 2A-B+I=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 8 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-2+1 & 6-5+0\\ 8-5+0 & 2-8+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

پاسخ گزینهٔ ۱

NOTE