راه‌حل تمرین‌ها

دایره

۱ چون MNEO مستطیل است و در مستطیل قطرها با هم برابرند، پس $ON=ME=۶$. ON همان شعاع دایره است.

۲ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن O را به N وصل کرده‌ایم. فرض می‌کنیم $N\hat{A}B=x$. چون مثلث OAN متساوی‌الساقین است، پس $\hat{N}=\hat{A}=x$. از طرف دیگر، بنابر فرض مسئله، چون $OM=MN$، پس $M\hat{O}N=\hat{N}=x$. اکنون در مثلث AON می‌توان نوشت

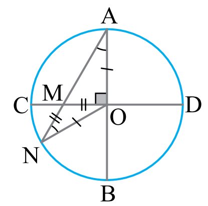
$$\hat{A}+\hat{N}+A\hat{O}N=۱۸۰^\circ$$

یعنی

$$x+x+۹۰^\circ+x=۱۸۰^\circ$$

پس $x=۳۰^\circ$، یعنی $\hat{A}=۳۰^\circ$. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است، پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOM،

$$OM=\frac{۱}{۲}AM \quad \text{یا} \quad AM=۲OM=۲MN$$



۳ چون $OB=OD$، پس

$$\hat{D}=D\hat{B}O$$

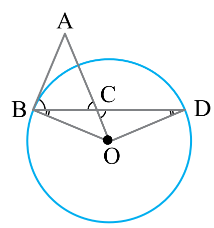
از طرف دیگر، $O\hat{C}D=A\hat{C}B=A\hat{B}C$. بنابر فرض مسئله،

$$A\hat{B}C+D\hat{B}O=۹۰^\circ$$

پس

$$O\hat{C}D+\hat{D}=۹۰^\circ$$

بنابراین چون در مثلث OCD مجموع دو زاویه برابر ۹۰° است، پس زاویه‌ی سوم، یعنی AOD، هم برابر ۹۰° است.



۴ **الف)** $OA=OB=R$، پس مثلث OAB متساوی‌الساقین است و $\hat{A}=\hat{B}=۸۰^\circ$. در نتیجه

$$x=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=۱۸۰^\circ-(۸۰^\circ+۸۰^\circ)=۲۰^\circ$$

ب) توجه کنید که $\overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ-۲۷۰^\circ=۹۰^\circ$. زاویه‌ی AOB مرکزی است، پس $A\hat{O}B=\overset{\frown}{AB}=۹۰^\circ$.

پ) توجه کنید که $۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ$، پس $x=۴۰^\circ$. زاویه‌ی AOB مرکزی است، پس $y=۲x=۸۰^\circ$. مثلث OAB متساوی‌الساقین است $(OA=OB=R)$، پس،

$$z=\frac{۱۸۰^\circ-y}{۲}=۵۰^\circ$$

۵ از O به C وصل می‌کنیم. زاویه‌های AOB و BOC مرکزی هستند، پس

$$A\hat{O}B=\overset{\frown}{AB}\,,\; B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}$$

بنابر فرض مسئله، $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$، پس

$$A\hat{O}B=B\hat{O}C$$

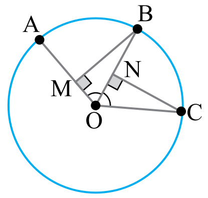
یعنی

$$M\hat{O}B=N\hat{O}C$$

همچنین $OB=OC=R$. بنابراین دو مثلث ONC و OMB به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده همنهشت هستند. در نتیجه

$$OM=ON$$

یعنی مثلث OMN متساوی‌الساقین است.



۶ طول کمان در دایره از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\text{اندازه کمان}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان}}{۲\pi R}\Rightarrow \text{طول کمان}=\frac{\text{اندازه کمان}}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$$

بنابراین

$$\text{طول کمان CD}=\frac{۴۵^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi\times۵)=\frac{۱}{۸}(۱۰\pi)=\frac{۵\pi}{۴}$$

$$\text{طول کمان AB}=\frac{۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi\times۵)=\frac{۱}{۱۲}(۱۰\pi)=\frac{۵\pi}{۶}$$

پس نسبت خواسته شده برابر است با

$$\frac{\text{طول کمان } CD}{\text{طول کمان } AB}=\frac{\frac{۵\pi}{۴}}{\frac{۵\pi}{۶}}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

نتیجه: توجه کنید نسبت طول کمان‌های یک دایره مساوی نسبت اندازه‌های آن‌ها است.

۷ طول کمان‌های AB و A′B′ را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\text{طول کمان}=\frac{\text{اندازه کمان}}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$$

بنابراین

$$\text{طول کمان } AB=\frac{۴۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi\times ۶)=\frac{۱}{۹}(۱۲\pi)=\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\text{طول کمان } A'B'=\frac{۴۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi\times ۴)=\frac{۱}{۹}(۸\pi)=\frac{۸\pi}{۹}$$

از تفاضل اندازه‌های به‌دست آمده به جواب مسئله می‌رسیم.

$$\text{طول کمان } AB-\text{طول کمان } A'B'=\frac{۴\pi}{۳}-\frac{۸\pi}{۹}=\frac{۴\pi}{۹}$$

۸ زاویه‌های مثلث ABC هر کدام ۶۰° هستند. چون این زاویه‌ها در دایره‌ی محاطی هستند، پس کمان‌های AB، BC و AC در دایره هر کدام ۱۲۰° هستند. از مرکز دایره یعنی نقطه‌ی O به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم در این صورت $OA=OB=OC=R$، پس نقطه‌ی O محل تلاقی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است. چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس O محل تلاقی نیمسازهای زاویه‌های مثلث ABC است، پس $\hat{A}_۱=۳۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH می‌نویسیم

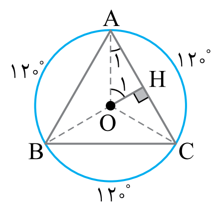
$$\hat{A}_۱=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA$$

$$\xrightarrow{AH=۲} OA=\frac{۴}{\sqrt{۳}}\Rightarrow R=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین

$$\text{طول کمان } BC=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } BC}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$$

$$=\frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\left(۲\pi\times\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۸\pi\sqrt{۳}}{۳}\right)=\frac{۸\pi\sqrt{۳}}{۹}$$

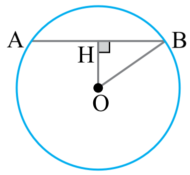


۹ مانند شکل از O عمود OH را بر وتر AB رسم می‌کنیم. این عمود وتر AB را نصف می‌کند، پس

$$BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۴۸}{۲}=۲۴$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$OH=\sqrt{OB^۲-BH^۲}=\sqrt{۲۶^۲-۲۴^۲}=۱۰$$



۱۰ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن O مرکز دو دایره است. از O خطی عمود بر Δ رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم H پای عمود باشد.

در دایره‌ی بزرگ‌تر چون OH بر وتر AD عمود است، پس از وسط آن می‌گذرد، یعنی

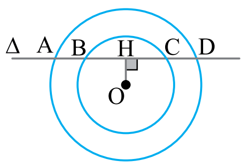
$$AH=DH \qquad (۱)$$

به همین ترتیب در دایره‌ی کوچک‌تر معلوم می‌شود

$$BH=CH \qquad (۲)$$

اکنون اگر برابری (۲) را از برابری (۱) کم کنیم نتیجه می‌شود

$$AB=CD$$



۱۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن از O عمود OH را بر وتر AB رسم کرده‌ایم. می‌خواهیم اندازه‌ی OH را به‌دست آوریم. چون مثلث OAB متساوی‌الساقین است $(OA=OB=R)$، پس ارتفاع OH نیمساز و میانه هم است، یعنی

$$B\hat{O}H=\frac{A\hat{O}B}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ,\qquad BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

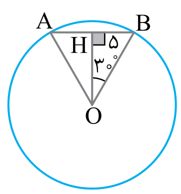
در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH، با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی،

$$\tan B\hat{O}H=\frac{BH}{OH}$$

یعنی

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{۵}{OH}$$

پس $\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۵}{OH}$، بنابراین $OH=۵\sqrt{۳}$.



۱۲ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن از O عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم کرده‌ایم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OAH و ODH' بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$AH=\sqrt{OA^{۲}-OH^{۲}}=\sqrt{۱۳^{۲}-۵^{۲}}=۱۲$$

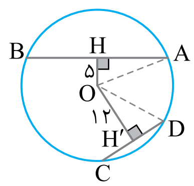
و

$$DH'=\sqrt{OD^{۲}-OH'^{۲}}=\sqrt{۱۳^{۲}-۱۲^{۲}}=۵$$

عمودهای OH و OH' به ترتیب از وسط وترهای AB و CD می‌گذرند، پس

$$AB=۲AH=۲۴\,,\quad CD=۲DH'=۱۰$$

در نتیجه $\frac{AB}{CD}=\frac{۲۴}{۱۰}=۲/۴$.



۱۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن از O عمود OH را بر PQ رسم کرده‌ایم. H وسط PQ است، پس

$$PH=QH$$

اکنون می‌نویسیم

$$AP=PH+AH$$

و

$$AQ=QH-AH=PH-AH$$

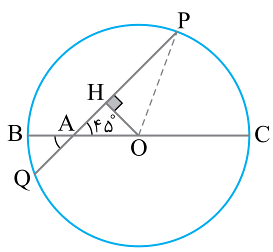
با توجه به این تساوی‌ها، می‌توان نوشت

$$AP^{۲}+AQ^{۲}=(PH+AH)^{۲}+(PH-AH)^{۲}$$

$$=۲(PH^{۲}+AH^{۲})$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH، $H\hat{A}O=۴۵^\circ$، پس این مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، بنابراین $AH=OH$. در نتیجه

$$AP^{۲}+AQ^{۲}=۲(PH^{۲}+OH^{۲})=۲OP^{۲}=۲R^{۲}$$



۱۴ الف) از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم کرده‌ایم.

چون AB و CD برابرند، پس فاصله‌ی مرکز دایره از AB و CD برابر است، یعنی $OH=OH'$ در نتیجه O روی نیمساز زاویه‌ی BMD است.

ب) از طرف دیگر مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OMH و OMH' به حالت وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه همنهشت‌اند، پس

$$MH=MH'$$

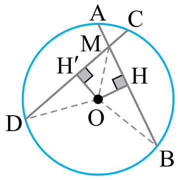
دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHB و $OH'D$ هم به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند، پس $BH=DH'$. در نتیجه

$$MH+BH=MH'+DH'$$

بنابراین $MB=MD$. همچنین

$$AB-MB=CD-MD$$

یعنی $AM=MC$.



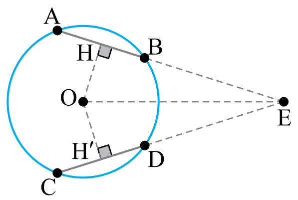
۱۵ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن O مرکز دایره است و OH و OH' به ترتیب بر AB و CD عمود هستند. چون وترهای AB و CD برابرند، پس $OH=OH'$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OHE و $OH'E$ همنهشت‌اند. در نتیجه $HE=H'E$. چون $AB=CD$ و

$$AH=\frac{AB}{۲}\,,\ CH'=\frac{CD}{۲}$$

پس $AH=CH'$. در نتیجه

$$EH+AH=EH'+CH'$$

یعنی $AE=CE$.



۱۶ بلندترین وتر گذرنده از نقطه‌ی M قطر دایره است

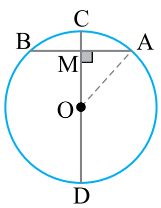
$$۲R=۶$$

پس $R=۳$. کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M وتری است که بر قطر گذرنده از M عمود باشد. در شکل زیر، وتر AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است $(AB=۴)$. M وسط AB است، پس

$$MA=\frac{AB}{۲}=۲$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$OM=\sqrt{OA^{۲}-MA^{۲}}=\sqrt{۳^{۲}-۲^{۲}}=\sqrt{۵}$$

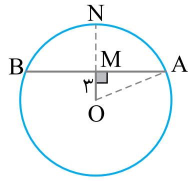


۱۷ کوچک‌ترین وتری که از نقطه‌ی M می‌گذرد، وتری است که بر شعاع گذرنده از M عمود باشد. بنابر شکل AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$MA=\sqrt{OA^۲-OM^۲}=\sqrt{۸^۲-۳^۲}=\sqrt{۵۵}$$

چون OM بر AB عمود است. پس از وسط وتر AB می‌گذرد، در نتیجه

$$AB=۲AM=۲\sqrt{۵۵}$$



۱۸ **الف)** توجه کنید که $x+۱۱۱^\circ+۸۴^\circ=۳۶۰^\circ$، پس $x=۱۶۵^\circ$. زاویه‌ی ACB محاطی است، پس

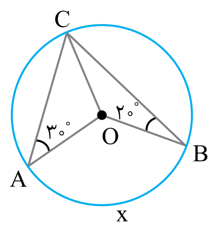
$$A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

یا $y=\frac{x}{۲}=\frac{۱۶۵^\circ}{۲}=۸۲/۵^\circ$.

ب) از O به C وصل می‌کنیم. مثلث‌های OBC و OAC متساوی‌الساقین هستند، پس $O\hat{C}B=O\hat{B}C=۲۰^\circ$ و $O\hat{C}A=O\hat{A}C=۳۰^\circ$، یعنی $A\hat{C}B=۵۰^\circ$. از طرف دیگر زاویه‌ی ACB محاطی است، پس

$$A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

یعنی $\frac{x}{۲}=۵۰^\circ$، پس $x=۱۰۰^\circ$.



۱۹ **الف)** ابتدا توجه کنید

$$۲x+۴x+۳x=۳۶۰^\circ$$

پس $x=۴۰^\circ$. همچنین

$$y=\frac{۴x}{۲}=۲x=۲\times۴۰^\circ=۸۰^\circ$$

ب) توجه کنید که

$$B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}\,,\qquad B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

پس $B\hat{O}C=۲B\hat{A}C$، یعنی

$$۳\alpha+۱۲^\circ=۲(\alpha+۱۶^\circ)$$

در نتیجه $\alpha=۲۰^\circ$.

۲۰ زاویه‌ی ANB، محاطی مقابل به قطر است، پس

$$A\hat{N}B=۹۰^\circ$$

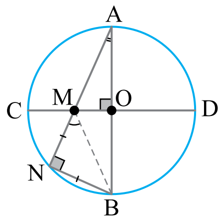
و چون $MN=NB$ پس

$$N\hat{M}B=۴۵^\circ$$

مثلث MAB متساوی‌الساقین است و $N\hat{M}B$ زاویه‌ی خارجی آن است پس،

$$N\hat{M}B=\hat{A}+M\hat{B}A=\hat{A}+\hat{A}=۲\hat{A}$$

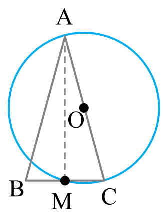
یعنی $۴۵^\circ=۲\hat{A}$ پس $\hat{A}=۲۲/۵^\circ$.



۲۱ مطابق شکل وتر AM را رسم می‌کنیم. توجه کنید که چون AC قطر دایره است، پس

$$A\hat{M}C=۹۰^\circ \quad \text{(زاویه‌ی محاطی)}$$

یعنی AM ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین ABC است. بنابراین AM میانه هم است، یعنی $BM=MC$.



۲۲ چون $\hat{B}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DC}$، پس

$$\overset{\frown}{DC}=۲\hat{B}=۲\times۴۰^\circ=۸۰^\circ$$

D وسط کمان AC است، بنابراین

$$\overset{\frown}{AC}=۲\overset{\frown}{DC}=۲\times۸۰^\circ=۱۶۰^\circ$$

اکنون توجه کنید که چون BC قطر است، پس

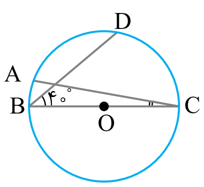
$$\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ$$

و در نتیجه

$$\overset{\frown}{AB}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{AC}=۱۸۰^\circ-۱۶۰^\circ=۲۰^\circ$$

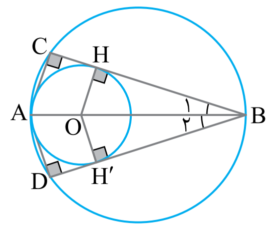
در نهایت

$$\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}=\frac{۱}{۲}\times۲۰^\circ=۱۰^\circ$$

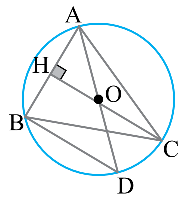


۲۳ از نقطه‌ی A به نقطه‌های C و D وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه‌های C و D محاطی روبرو به قطر هستند، پس قائمه هستند. از طرف دیگر O مرکز دایره‌ی کوچک‌تر از دو وتر BC و BD به یک فاصله است $(OH=OH')$، پس OB نیمساز زاویه‌ی B است، بنابراین

$$\begin{cases}\hat{B}_۱=\hat{B}_۲\\ \hat{C}=\hat{D}=۹۰^\circ\\ AB=AB\end{cases}\xrightarrow[\text{زاویه‌ی حاده}]{\text{وتر و یک}}\Delta ABC\cong\Delta ABD\Rightarrow BC=BD$$



۲۴ زاویه‌ی ABD محاطی روبه‌رو به قطر است پس قائمه است، بنابراین DB بر AB عمود است. از طرف دیگر CH بر AB عمود است، پس CH و DB بر یک خط عمودند، پس موازی‌اند.



۲۵ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\widehat{BD}=x$. چون کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی هستند، پس

$$\widehat{AC}=\widehat{BD}=x$$

از طرف دیگر، چون $AB\parallel CD$ و AD مورب است، پس

$$D\hat{A}B=A\hat{C}D=\frac{\widehat{AC}}{۲}=\frac{x}{۲}$$

همچنین چون $AB\parallel CD$ و OC مورب است، پس

$$O\hat{C}D=A\hat{O}C=\widehat{AC}=x$$

اکنون در مثلث CMD، زاویه‌ی CMA زاویه‌ی خارجی است، پس

$$۷۵^\circ=x+\frac{x}{۲}$$

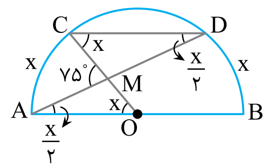
یعنی $x=۵۰^\circ$. در نهایت چون AB قطر است، پس

$$\widehat{AC}+\widehat{CD}+\widehat{DB}=۱۸۰^\circ$$

در نتیجه

$$۵۰^\circ+\widehat{CD}+۵۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

یعنی $\widehat{CD}=۸۰^\circ$.



۲۶ ابتدا توجه کنید که چون AB قطر است، پس

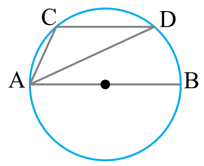
$$\widehat{AB}=۱۸۰^\circ$$

همچنین، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، بنابراین

$$\widehat{BD}=\widehat{AC}$$

به این ترتیب

$$A\hat{C}D-A\hat{D}C=\frac{۱}{۲}(\widehat{AB}+\widehat{BD})-\frac{۱}{۲}\widehat{AC}$$
$$=\frac{۱}{۲}\widehat{AB}+\frac{۱}{۲}\widehat{BD}-\frac{۱}{۲}\widehat{AC}$$
$$=\frac{۱}{۲}\widehat{AB}=\frac{۱}{۲}\times ۱۸۰^\circ=۹۰^\circ$$



۲۷ چون AD نیمساز است، پس $B\hat{A}D=D\hat{A}C$ در نتیجه کمان‌های روبه‌روی این دو زاویه‌ی محاطی یعنی BD و DC مساوی‌اند. از طرف دیگر می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی AB و DE مساوی‌اند. بنابراین دو کمان AE و BD مساوی‌اند. پس با اضافه کردن کمان EC به هر دو آن‌ها می‌نویسیم

$$\widehat{AE}+\widehat{EC}=\widehat{BD}+\widehat{EC}\xrightarrow{\widehat{BD}=\widehat{DC}}$$

$$\widehat{AE}+\widehat{EC}=\widehat{DC}+\widehat{EC}\Rightarrow\widehat{AEC}=\widehat{DCE}$$

چون دو کمان AEC و DCE مساوی‌اند، پس دو وتر نظیر آن‌ها یعنی AC و DE برابرند.

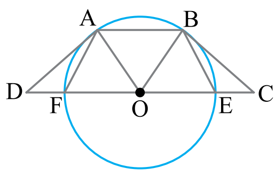
۲۸ دو مثلث OAD و OBC به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند. چون

$$OC=OD\ ,\quad AD=BC\ ,\quad \hat{D}=\hat{C}$$

پس $OA=OB$ بنابراین دایره‌ی به مرکز O و شعاع OA از رأس B می‌گذرد. از طرف دیگر کمان‌های بین دو وتر موازی یک دایره مساوی‌اند. بنابراین

$$AB\parallel DC\Rightarrow\widehat{AF}=\widehat{BE}\Rightarrow AF=BE$$

در ضمن چون $OE=OF$ و $OD=OC$، پس $DF=EC$.



۲۹ توجه کنید که چون زاویه‌ی B محاطی است، پس $\widehat{AC}=۲\hat{B}=۱۰۰^\circ$. همچنین

$$\widehat{AB}=۳۶۰^\circ-(\widehat{AC}+\widehat{BC})=۳۶۰^\circ-(۱۰۰^\circ+۱۲۰^\circ)=۱۴۰^\circ$$

به این ترتیب

$$x=\frac{\widehat{AB}}{۲}=\frac{۱۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$$

۳۰ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن CD را رسم می‌کنیم. توجه کنید که

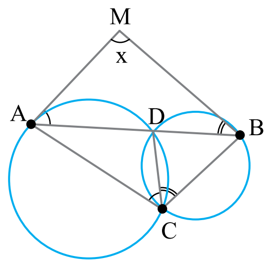
$$A\hat{C}D=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}\,,\quad M\hat{A}D=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}$$

پس $M\hat{A}B=A\hat{C}D$. با استدلال مشابه، $M\hat{B}A=B\hat{C}D$. با جمع کردن این دو تساوی به‌دست می‌آید

$$M\hat{A}B+M\hat{B}A=A\hat{C}B=۱۰۰^\circ$$

اکنون در مثلث MAB نتیجه می‌گیریم

$$x=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$$



۳۱ ابتدا توجه کنید که زاویه‌های C و D محاطی روبه‌رو به یک کمان هستند، پس

$$\hat{C}=\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

یعنی

$$z=۴۸^\circ\,,\quad \overset{\frown}{AB}=۹۶^\circ$$

به همین ترتیب

$$x=y=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CD}$$

همچنین

$$C\hat{E}D=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

یعنی

$$۱۰۰^\circ=\frac{۹۶^\circ+۲x}{۲}$$

پس $x=y=۵۲^\circ$.

۳۲ از نمادگذاری شکل استفاده می‌کنیم. به دو روش می‌توان این مسئله را حل کرد.

روش اول چون $OA=AM=R$، پس

$$A\hat{O}M=A\hat{M}O=\alpha$$

زاویه‌ی AOD مرکزی است. پس $\overset{\frown}{AD}=\alpha$. زاویه‌ی BAO زاویه‌ی خارجی برای مثلث OAM است،

$$B\hat{A}O=A\hat{O}M+A\hat{M}O=\alpha+\alpha=۲\alpha$$

$OA=OB=R$، پس مثلث OAB متساوی‌الساقین است و

$$O\hat{B}A=B\hat{A}O=۲\alpha$$

در نهایت زاویه‌ی BOC زاویه‌ی خارجی برای مثلث OMB است، پس

$$B\hat{O}C=O\hat{B}M+B\hat{M}O \quad \text{یا} \quad \beta=۲\alpha+\alpha=۳\alpha$$

روش دوم قسمت اول این روش تا آنجا که $\overset{\frown}{AD}=\alpha$ مانند روش اول است. اما از آنجا به بعد روش تغییر می‌کند. می‌دانیم

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

یعنی

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{BC}-\alpha}{۲}$$

پس

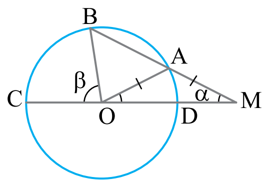
$$\overset{\frown}{BC}=۳\alpha$$

زاویه‌ی BOC مرکزی است، پس

$$B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}$$

یعنی

$$\beta=۳\alpha$$



۳۳ ابتدا توجه کنید که

$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EC}=۶۰^\circ$$

از طرف دیگر،

$$B\hat{A}D=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}=\frac{۱}{۲}\times۶۰^\circ=۳۰^\circ$$

$$E\hat{D}A=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}=\frac{۱}{۲}\times۶۰^\circ=۳۰^\circ$$

پس

$$M\hat{A}D=M\hat{D}A$$

یعنی مثلث MAD متساوی‌الساقین است

$$MD=MA \qquad (۱)$$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود

$$NE=NA \qquad (۲)$$

همچنین، توجه کنید که

$$\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}=\frac{۱}{۲}\times۱۲۰^\circ=۶۰^\circ$$

پس مثلث AMN متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۶۰° است، بنابراین متساوی‌الاضلاع است، بنابراین

$$MN=AM=AN \qquad (۳)$$

اکنون با مقایسه‌ی برابری‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$DM=MN=NE$$