



اثر تبدیل

TEST 052

- اگر چندضلعی A با تبدیل T به چندضلعی B تصویر شود، آنگاه...
- ۱) A و B قابل انطباق هستند. ...
- ۲) A و B هم‌مساحت هستند. ...
- ۳) A و B هم‌نهشت‌اند. ...
- ۴) A و B زوایای برابر دارند. ...

LILIPOOTBOX

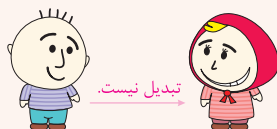
تبدیل‌هایی که قرار است بررسی کنیم، می‌توانند سه اثر مهم روی شکل داشته باشند:

شکل را جابه‌جا کند	شکل را بچرخاند	ابعاد شکل را تغییر دهند

تبدیل‌های مورد بررسی در کتاب درسی ممکن است یک، دو یا هر سه اثر فوق را روی شکل داشته باشند ولی تغییر دیگری روی شکل ایجاد نمی‌کنند.

تبدیل‌های مطرح شده در کتاب درسی ماهیت شکل را تغییر نمی‌دهند. به همین دلیل، در این کتاب نیز فقط همین نوع از تبدیل‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در تبدیل‌های مورد بررسی ما، یک دایره به بیضی یا یک مربع به لوزی یا مستطیل و ... تبدیل نمی‌شود و دایره، دایره می‌ماند.



ANALYSE

طبق آنچه گفتیم، تبدیل‌های مورد بررسی ما، امکان بزرگ و کوچک شدن یک شکل را نیز فراهم می‌کنند؛ بنابراین امکان دارد شکلی غیرهمنهشت [در نتیجه غیر هم‌مساحت] و غیر قابل انطباق بر شکل اولیه ایجاد کنند اما شکل ایجاد شده، همواره متشابه با شکل اولیه خواهد بود و زوایای برابری با آن دارد؛ در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

تبدیل ایزومتری

TEST 053

مربع ABCD با مساحت ۱۲ را به کمک یک تبدیل ایزومتری تصویر کرده‌ایم. محیط شکل حاصل چقدر است؟

- (۱) $۱۲\sqrt{۲}$ (۲) $۸\sqrt{۳}$ (۳) $۲\sqrt{۳}$ (۴) ۹

LILIPOOTBOX

تبدیلی که طول تمام پاره‌های صفحه را حفظ می‌کند (تغییر نمی‌دهد) **ایزومتری** یا **طولپا** نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر یک تبدیل ایزومتری روی پاره خط AB اثر کند، طول پاره خط قبل از تبدیل، با طول این پاره خط پس از تبدیل برابر است.



تبدیل ایزومتری اندازه و ابعاد شکل را تغییر نمی‌دهد، به عبارت دیگر در تبدیل ایزومتری شکل و تصویرش **همنهشت** هستند.

ANALYSE

تصویر مربع به مساحت ۱۲، مربعی به مساحت ۱۲ خواهد بود، بنابراین اگر ضلع مربع تصویر را a فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{محیط مربع} = 4a = 4(2\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$$

پاسخ گزینه ۲

NOTE



شیب و جهت

TEST 054

سه نقطه A ، B و C در اثر تبدیل T به ترتیب روی نقاط A' ، B' و C' تصویر شده‌اند. اگر $A'B' \parallel AB$ باشد، کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

(۱) $AC \parallel A'C'$ جهت مثلث ABC تحت تبدیل T حفظ می‌شود.

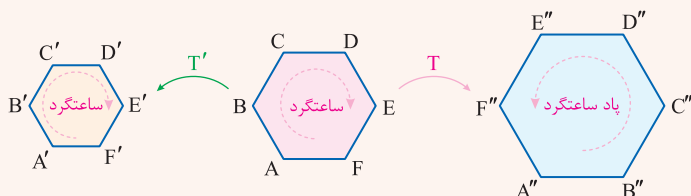
(۲) $AB = A'B'$ هیچ کدام

LILIPOOTBOX

🍏 اگر در تبدیل T شیب همه خط‌ها در اثر تبدیل ثابت بماند، تبدیل T را **شیب‌پا** می‌نامیم، بنابراین در تبدیل شیب‌پا، هر پاره خط باید با تصویرش موازی است.

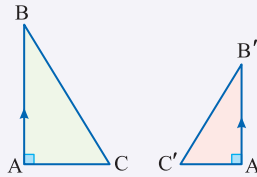
<p>در تبدیل T_3 شیب تمام خط‌ها ثابت مانده، پس T_3 شیب‌پا است.</p>	<p>در تبدیل T_2 شیب بعضی از خط‌ها ثابت مانده و شیب بعضی از خط‌ها مانند BC عوض شده، پس T_2 شیب‌پا نیست.</p>	<p>در تبدیل T_1 هیچ کدام از پاره خط‌ها با تصویرشان موازی نیستند، پس T_1 شیب‌پا نیست.</p>

🍏 اگر تبدیل T جهت اشکال هندسی را ثابت نگه دارد، تبدیل T را یک تبدیل **جهت‌پا** می‌نامند. منظور از جهت یک شکل [چندضلعی] ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن پیمایش رأس‌های متوالی آن است. 🍌 در شکل‌های زیر تبدیل T جهت شکل را عوض کرده است اما تبدیل T' جهت شکل را عوض نکرده است.



ANALYSE

از موازی بودن یک ضلع مثلث ABC با تصویرش نمی‌توان موازی بودن سایر اضلاع را نتیجه گرفت. از طرفی موازی بودن ضلع مثلث و تصویرش ارتباطی با مساوی بودن آن‌ها نیز ندارد. حتی مطابق شکل زیر جهت شکل نیز ارتباطی به اضلاع موازی یا غیرموازی ندارد. پس گزینه (۴) درست است.



پاسخ گزینه ۴

E
T
O
N



درس چهارم قضیه هرون (محاسبه مساحت مثلث و اندازه ارتفاع‌ها)

رابطه هرون

TEST 110

مساحت مثلثی با اضلاع ۱۱، ۲۵ و ۳۰ چقدر است؟

۱) ۱۱۰

۲) ۱۴۴

۳) ۱۲۰

۴) ۱۳۲

LILIPOOTBOX

🍏 اگر a ، b و c طول اضلاع مثلث و $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث باشد، مساحت مثلث از رابطه زیر که **رابطه هرون** نامیده می‌شود، به دست می‌آید:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

📌 توجه داشته باشید که در بیشتر مواقع و در مثلث‌هایی که اندازه اضلاع مثلث اعداد رادیکالی نباشد، از رابطه هرون برای محاسبه مساحت مثلث استفاده می‌کنیم.

ANALYSE

📌 ابتدا نصف محیط مثلث را محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطه هرون، مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$p = \frac{11+25+30}{2} = 33 \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S = \sqrt{33(22)(8)(3)} \\ = \sqrt{3 \times 11 \times 2 \times 11 \times 2^3 \times 3} = \sqrt{3^2 \times 11^2 \times 2^4} = 3 \times 11 \times 2^2 = 132$$

پاسخ گزینه ۴

محاسبه مساحت بدون هرون (I)

TEST 111

مساحت مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و $\sqrt{21}$ چقدر است؟
 (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $5/25$ (۳) $4\sqrt{7}$ (۴) $4/75$

LILIPOOTBOX

🍏 اگر اندازه حداقل یکی از اضلاع مثلث، عددی رادیکالی (عددی گنگ) باشد، ابتدا قائم الزاویه بودن مثلث را با توجه به رابطه فیثاغورس بررسی می‌کنیم:

📌 اگر مثلث **قائم الزاویه باشد**، آن‌گاه مساحت این مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه اضلاع زاویه قائمه.

📌 اگر مثلث **قائم الزاویه نباشد**، ابتدا به کمک قضیه کسینوس‌ها، مقدار کسینوس زاویه روبه‌رو به ضلعی را که اندازه‌اش عددی رادیکالی است، حساب می‌کنیم. سپس اگر به عنوان مثال، این زاویه، زاویه A باشد، با استفاده از رابطه $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ مقدار $\sin A$ را می‌یابیم و در انتها مساحت مثلث را با استفاده از رابطه مقابل به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

🍀 مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۹ و $4\sqrt{2}$ را بیابید.

این مثلث قائم الزاویه است، زیرا $9^2 + 7^2 = 81 + 49 = 130 \neq (4\sqrt{2})^2 = 32$. بنابراین مساحت

مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 4\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

ANALYSE

📌 ابتدا بررسی می‌کنیم که مثلث قائم الزاویه است یا نه:

$$4^2 + (\sqrt{21})^2 = 16 + 21 = 37 \quad 5^2 = 25$$

$37 \neq 25$ پس این مثلث قائم الزاویه نیست.

در این وضعیت، ابتدا کسینوس زاویه روبه‌رو به ضلع رادیکالی را به دست می‌آوریم تا بتوانیم سینوس آن را حساب کنیم:

$$\cos A = \frac{5^2 + 4^2 - (\sqrt{21})^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{25 + 16 - 21}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال می‌توانیم مساحت مثلث را حساب کنیم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

پاسخ گزینه ۱



محاسبه مساحت بدون هرون (II)

TEST 112

مساحت مثلثی با اضلاع ۶، $\sqrt{10}$ و $\sqrt{10}$ چقدر است؟

(۱) ۶

(۲) $3\sqrt{3}$

(۳) ۳

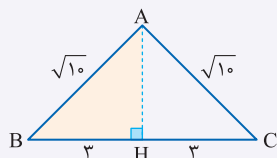
(۴) $2\sqrt{10}$

LILIPOOTBOX

🍏 اگر طول دو ضلع از مثلثی برابر باشد (مثلث متساوی الساقین باشد) ارتفاع وارد بر قاعده، ضلع مقابل را نصف می‌کند. بنابراین با فیثاغورس می‌توان اندازه ارتفاع را محاسبه و سپس مساحت را حساب کرد. در چنین شرایطی استفاده از رابطه هرون برای محاسبه مساحت مثلث ضرورتی ندارد.

ANALYSE

□ مثلث داده شده دو ضلع برابر دارد، پس متساوی الساقین است و بهتر است ارتفاع آن را رسم کنیم:



$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10 - 9} = 1 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{6 \times 1}{2} = 3$$

پاسخ گزینه ۳

NOTE

هرون در قائم الزاویه

TEST 113

طول وتر یک مثلث قائم الزاویه برابر ۹ و محیط آن برابر ۲۰ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

(۱) $3\sqrt{10}$

(۲) ۱۰

(۳) $6\sqrt{5}$

(۴) ۱۸

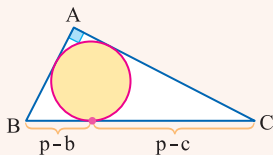
LILIPOOTBOX

🍏 در مثلث قائم الزاویه رابطه هرون به شکل های ساده تری نوشته می شود.

🍏 اگر محیط یک مثلث قائم الزاویه و اندازه وترش معلوم باشد، مساحت این مثلث از رابطه زیر به دست می آید که در آن p نصف محیط و a اندازه وتر است.

$$S = p(p - a)$$

🍏 اگر در مثلث قائم الزاویه ای، مطابق شکل زیر طول پاره خط هایی که دایره محاطی داخلی روی وتر مثلث به وجود می آورد معلوم باشد، مساحت این مثلث از رابطه زیر به دست می آید:



$$S = (p - b)(p - c)$$

ANALYSE

🍏 در این مثلث قائم الزاویه، محیط برابر ۲۰ و اندازه وتر برابر ۹ است. بنابراین:

$$2p = 20 \Rightarrow p = 10$$

$$\Rightarrow S = p(p - a) = 10 \times (10 - 9) = 10 \times 1 = 10$$

پاسخ گزینه ۲

NOTE



محاسبه اندازه ارتفاع

TEST 114

در مثلی با اضلاع ۱۱، ۱۳ و ۲۰ طول بلندترین ارتفاع مثلث چقدر است؟

- (۱) $۱۱\sqrt{۶}$ (۲) ۱۵ (۳) $۱۰\sqrt{۳}$ (۴) ۱۲

LILIPOOTBOX

اگر طول سه ضلع مثلث معلوم باشد و اندازه یکی از ارتفاع‌ها خواسته شده باشد، ابتدا مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون یا روش‌های دیگر حساب می‌کنیم و سپس اندازه هر ارتفاع را از رابطه‌های زیر به دست می‌آوریم:

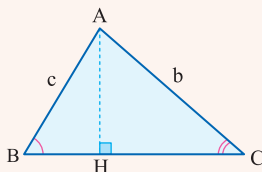
$$h_a = \frac{2S}{a}$$

$$h_b = \frac{2S}{b}$$

$$h_c = \frac{2S}{c}$$

در حالتی که اندازه حداقل یک ضلع مثلث عددی رادیکالی بوده و هدف (به عنوان مثال) یافتن اندازه ارتفاع نظیر ضلع BC باشد، ابتدا با استفاده از قضیه کسینوس‌ها، کسینوس زاویه B یا C را حساب می‌کنیم. سپس سینوس این زاویه را به دست می‌آوریم و در انتها با توجه به شکل، از یکی از دستورهای زیر برای محاسبه اندازه ارتفاع استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin B = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \sin B \\ \sin C = \frac{AH}{b} \Rightarrow AH = b \sin C \end{cases}$$



$$AH = c \times \sin B = b \times \sin C$$

ANALYSE

برای محاسبه اندازه ارتفاع، ابتدا مساحت مثلث را به کمک رابطه هرون به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} p &= \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲} = ۲۲ \Rightarrow S = \sqrt{p(p-۱۱)(p-۱۳)(p-۲۰)} = \sqrt{۲۲ \times ۱۱ \times ۹ \times ۲} \\ &= \sqrt{۲ \times ۱۱ \times ۱۱ \times ۳^۲ \times ۲} = \sqrt{۲^۲ \times ۳^۲ \times ۱۱^۲} = ۶۶ \end{aligned}$$

می‌دانیم که بلندترین ارتفاع مثلث متناظر است با کوچک‌ترین ضلع. بنابراین:

$$h_a = \frac{2S}{a} \Rightarrow h_a = \frac{۲ \times ۶۶}{۱۱} = ۱۲$$

پاسخ گزینه ۴

محاسبه مساحت با معلوم بودن اندازه یک میانه

TEST 115

در مثلث ABC اگر $c = 7$ ، $b = 15$ و $m_a = 10$ (میانه نظیر BC) باشد، مساحت چقدر است؟

(۱) ۲۸

(۲) ۳۵

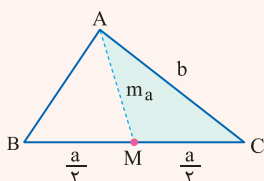
(۳) ۴۲

(۴) ۵۰

LILIPOOTBOX

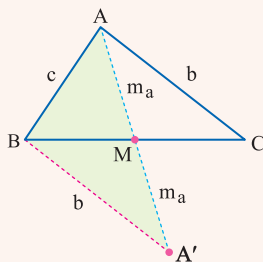
🍏 اگر اندازه دو ضلع و یک میانه از مثلث معلوم باشد، در محاسبه مساحت مثلث با یکی از دو حالت زیر مواجه می‌شویم:

📏 طول دو ضلع و اندازه میانه وارد بر یکی از آن‌ها معلوم است. به عنوان مثال اگر طول اضلاع a و b و اندازه میانه m_a داده شده باشد، مطابق شکل طول هر سه ضلع مثلث AMC معلوم و مساحتش قابل محاسبه است. مساحت مثلث AMC نصف مساحت مثلث ABC است. بنابراین:



$$S_{ABC} = 2S_{AMC}$$

📏 طول دو ضلع و اندازه میانه وارد بر ضلع سوم معلوم است. به عنوان مثال اگر طول اضلاع b و c و اندازه میانه m_a داده شده باشد، مطابق شکل میانه را به اندازه خودش امتداد داده و به یکی از رأس‌ها وصل می‌کنیم. طول هر سه ضلع مثلث ABA' معلوم و مساحتش قابل محاسبه است. مساحت مثلث ABA' با مساحت مثلث ABC برابر است. بنابراین:

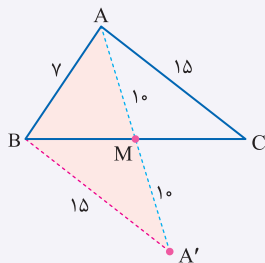


$$S_{ABC} = S_{ABA'}$$



ANALYSE

□ ابتدا میانه را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به A' برسیم، سپس A' را به B وصل می کنیم. مساحت مثلث ABA' با مساحت مثلث ABC برابر است و می توانیم مساحت آن را به کمک رابطه هرون به دست آوریم:



$$p = \frac{7+15+10}{2} = 16$$

$$S_{ABA'} = \sqrt{p(p-7)(p-15)(p-10)} = \sqrt{16 \times 9 \times 1 \times 6} = 12$$

$$= \sqrt{3 \times 7 \times 2 \times 7 \times 2 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7^2} = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 42$$

پاسخ گزینه ۳

NOTE

محاسبه مساحت با معلوم بودن اندازه‌های دو میانه

TEST 116

مساحت مثلث ABC با معلومات $a = 14$ ، $m_a = 9$ و $m_b = 12$ چقدر است؟

(۱) $36\sqrt{3}$

(۲) $12\sqrt{10}$

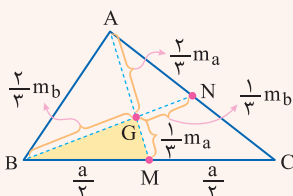
(۳) $18\sqrt{5}$

(۴) $6\sqrt{14}$

LILIPOOTBOX

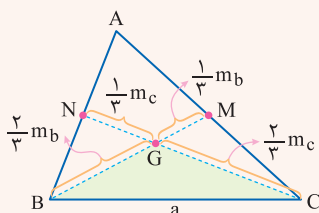
🍏 اگر اندازه‌های دو میانه و یک ضلع از مثلثی معلوم باشد، در محاسبه مساحت مثلث، به یکی از دو حالت زیر برمی‌خوریم:

📌 طول دو میانه و اندازه ضلع نظیر یکی از میانه‌ها معلوم است. به عنوان مثال طول ضلع BC یعنی a و طول دو میانه m_a و m_b معلوم است. مطابق شکل نقطه G (محل هم‌رسمی میانه‌ها) هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. پس طول هر سه ضلع مثلث BGM معلوم و مساحتش قابل محاسبه است. مساحت مثلث BGM، $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است. بنابراین:



$S_{ABC} = 6S_{BGM}$

📌 طول میانه‌های نظیر دو ضلع و اندازه ضلع سوم معلوم است. به عنوان مثال طول ضلع BC یعنی a و طول دو میانه m_b و m_c معلوم است. مطابق شکل نقطه G (محل هم‌رسمی میانه‌ها) هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. یعنی طول هر سه ضلع مثلث BGC معلوم و مساحتش قابل محاسبه است. مساحت مثلث BGC، $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث ABC است. بنابراین:



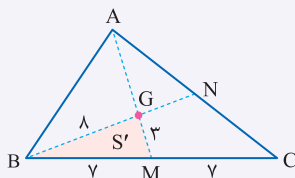
$S_{ABC} = 3S_{BGC}$



ANALYSE

در این مسئله طول دو میانه و طول ضلع نظیر یکی از آن‌ها معلوم است. در شکل زیر نقطه G محل

همرسی میانه‌ها است و داریم:



$$AM = 9 \Rightarrow \begin{cases} AG = 6 \\ GM = 3 \end{cases}$$

$$BN = 12 \Rightarrow \begin{cases} BG = 8 \\ GN = 4 \end{cases}$$

پس طول هر سه ضلع مثلث BGM معلوم است و می‌توانیم با رابطه هرون مساحت آن را به دست آوریم:

$$p = \frac{3 + 4 + 8}{2} = 7.5 \Rightarrow S' = \sqrt{7.5(7.5-3)(7.5-4)(7.5-8)} = 6\sqrt{3}$$

می‌دانیم که مساحت مثلث ABC شش برابر مساحت مثلث BGM است، بنابراین:

$$S_{ABC} = 6S' = 6 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

پاسخ گزینه ۱

محاسبه مساحت با معلوم بودن اندازه‌های سه میانه

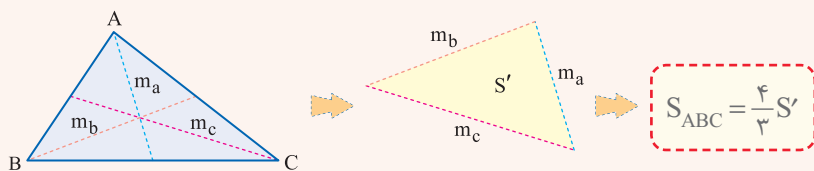
TEST 117

طول میانه‌های مثلثی برابر ۴، ۱۳ و ۱۵ است. مساحت این مثلث چقدر است؟
 (۱) ۳۶ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴) ۳۲

LILIPOOTBOX

🍏 اگر اندازه‌های اضلاع مثلثی با اندازه‌های میانه‌های مثلث ABC برابر باشد، مساحت این مثلث برابر با $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث ABC است.

📏 اگر اندازه سه میانه یک مثلث داده شده باشد، برای محاسبه مساحت مثلث، میانه‌ها را همانند سه ضلع یک مثلث دیگر در نظر می‌گیریم، سپس به کمک رابطه هرون یا روش‌های دیگر، مساحت این مثلث فرضی را به دست می‌آوریم و در انتها عدد حاصل را در $\frac{4}{3}$ ضرب می‌کنیم تا مساحت مثلث اصلی به دست آید.



📏 طول سه میانه یک مثلث باید در نامساوی مثلثی صدق کند.

♣️ اگر m_a ، ۲ و ۳ میانه‌های یک مثلث باشند، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$3 - 2 < m_a < 3 + 2 \Rightarrow 1 < m_a < 5$$

ANALYSE

🟩 ابتدا به کمک طول سه میانه، مساحت S' را پیدا می‌کنیم:

$$p = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16 \Rightarrow S' = \sqrt{16(1)(3)(12)} = \sqrt{16 \times 36} = 4 \times 6 = 24$$

مساحت مثلث ABC برابر با $\frac{4}{3} S'$ است:

$$S_{ABC} = \frac{4}{3} S' = \frac{4}{3} \times 24 = 32$$

پاسخ گزینه ۴