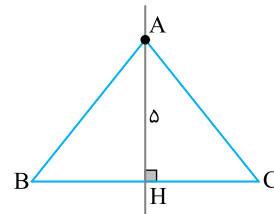


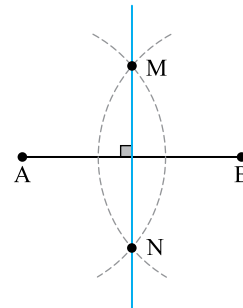
## فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

### راه حل تمرین‌ها

**۱** ضلع BC را به طول ۸ واحد ترسیم می‌کنیم. سپس عمود منصف BC را رسم می‌کنیم. به مرکز H، وسط BC و شعاع ۵ کمانی رسم می‌کنیم. محل برخورد این کمان با عمود منصف BC را A می‌نامیم. مثلث ABC مورد نظر است.



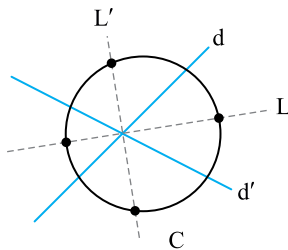
**۲ الف** پاره خط AB به طول ۸ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف AB باز می‌کنیم و به مرکز A و B کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های M و N قطع کنند. خط MN جواب است.



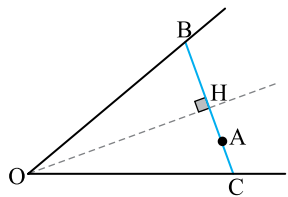
ب) توجه کنید که اگر دهانه‌ی پرگار کم‌تر از  $\frac{AB}{2}$  باز شود، دو کمانی که در بند الف گفتیم، یکدیگر را قطع نمی‌کنند. پس دو نقطه به فاصله‌ی ۸ سانتی‌متر از A و B داریم و هیچ نقطه‌ای به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از A و B نداریم. اما اگر شعاع کمان‌ها ۴ باشد، دو کمان بر هم مماس می‌شوند و در وسط پاره خط AB به هم می‌رسند. یعنی فقط یک نقطه داریم که از A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر است.

**۳** می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. اگر L و L' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع d و d' باشند، هر نقطه روی این نیمسازها از دو خط d و d' به یک فاصله است. معلوم است که نقطه‌های برخورد دو خط L و L' با دایره‌ی C، ویژگی مورد نظر را دارند.

چون هر خط دایره را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند، پس این مسأله حداکثر چهار جواب ممکن است داشته باشد.



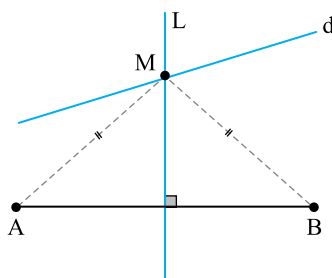
**۴** نیمساز زاویه‌ی O را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی A خطی عمود بر این نیمساز رسم می‌کنیم تا ضلع‌های زاویه‌ی O را در B و C قطع کند (شکل را ببینید). این خط جواب است.



دلیل: در مثلث OBC، OH هم نیمساز و هم ارتفاع است. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و در نتیجه  $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$

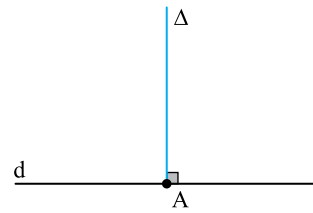
**۵** می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است. اگر L عمود منصف پاره خط AB باشد، نقطه‌ی برخورد خط d با این عمود منصف ویژگی مورد نظر را دارد.

در صورتی که خط d با L موازی باشد، مسأله جواب ندارد. اگر خط d بر L منطبق باشد، مسأله نامتناهی جواب دارد. اگر d و L متقاطع باشند (مانند شکل)، مسأله یک جواب دارد.



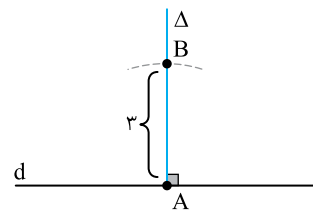
۶

از نقطه‌ی دلخواه  $A$  روی خط  $d$  خط  $\Delta$  را عمود بر  $d$  رسم می‌کنیم (شکل (۱) را ببینید).



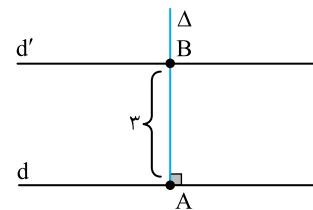
شکل (۱)

به مرکز  $A$  و شعاع ۳ کمانی می‌زنیم و محل برخورد آن را با  $\Delta$ ،  $B$  می‌نامیم (شکل (۲) را ببینید).



شکل (۲)

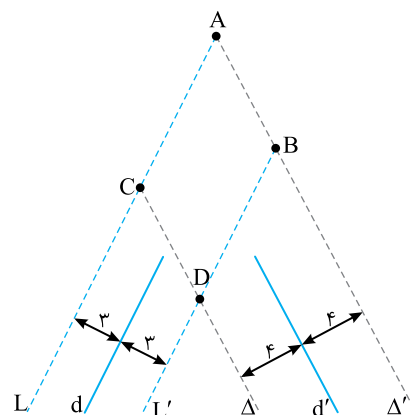
از نقطه‌ی  $B$  خطی موازی  $d$  رسم می‌کنیم (شکل (۳) را ببینید). این خط، خط مورد نظر است.



شکل (۳)

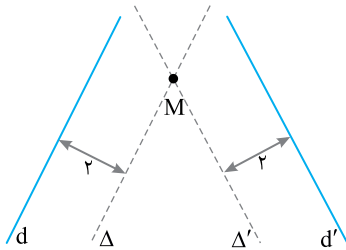
۷

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن  $L$  و  $L'$  دو خط موازی  $d$  و به فاصله‌ی ۳ از آن هستند و همچنین  $\Delta$  و  $\Delta'$  خط‌هایی موازی  $d'$  و به فاصله‌ی ۴ از آن هستند. محل برخورد این خط‌ها، نقطه‌های مطلوب هستند (نقطه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  در شکل).



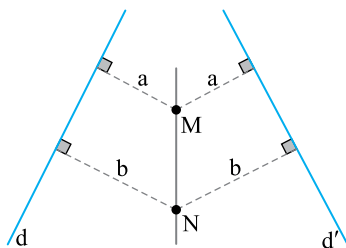
۸

مطابق شکل خط  $\Delta$  را موازی  $d$  و به فاصله‌ی ۲ از آن و همچنین خط  $\Delta'$  را موازی  $d'$  و به فاصله‌ی ۲ از آن در نظر می‌گیریم. محل برخورد این دو خط نقطه‌ی مورد نظر است (نقطه‌ی  $M$  در شکل).



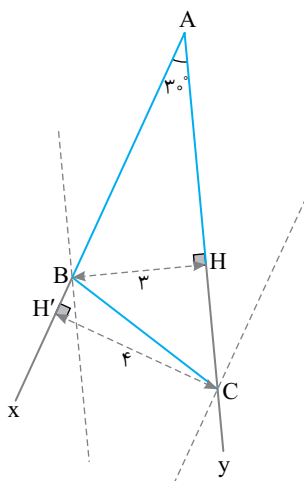
۹

مانند مسأله‌ی قبل نقطه‌های  $M$  و  $N$  را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که  $M$  به فاصله‌ی  $a$  از  $d$  و  $d'$  و  $N$  به فاصله‌ی  $b$  از  $d$  و  $d'$  قرار دارند. خطی که از  $M$  و  $N$  می‌گذرد، جواب مسأله است.

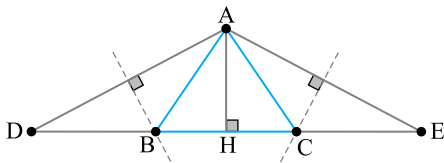


۱۰

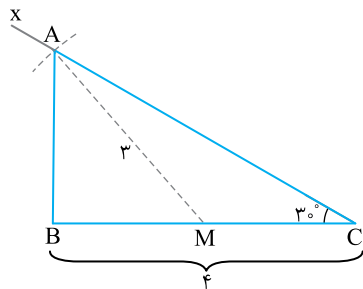
ابتدا زاویه‌ی  $A$  را مساوی  $30^\circ$  رسم می‌کنیم. سپس خطی موازی با یک ضلع این زاویه مثلاً  $Ay$  و به فاصله‌ی ۳ از آن رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در  $B$  قطع کند. همچنین خطی موازی ضلع  $Ax$  و به فاصله‌ی ۴ از آن رسم می‌کنیم تا ضلع  $Ay$  را در  $C$  قطع کند. مثلث  $ABC$ ، مثلث مورد نظر است.



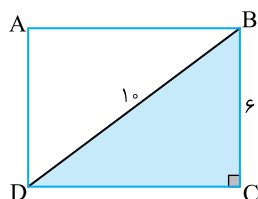
**۱۴** فرض کنید مثلث رسم شده است.  $BC$  را از طرف  $B$  به اندازه‌ی ساق  $AB$  امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی  $D$  برسیم و همین کار را از طرف  $C$  انجام می‌دهیم تا  $E$  به دست آید. در این صورت  $DE$  برابر محیط مثلث است. مثلث  $ABC$  به سادگی قابل رسم است (مسأله‌ی قبل را ببینید). عمودمنصف‌های  $AD$  و  $AE$  ضلع  $DE$  را در  $B$  و  $C$  قطع می‌کنند. مثلث  $ABC$  مثلث مطلوب است.



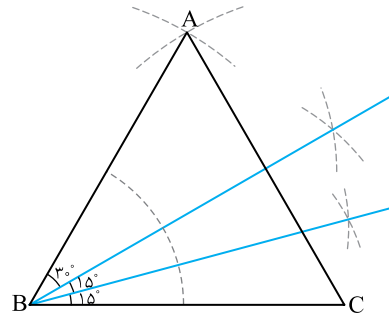
**۱۵** ابتدا پاره‌خط  $BC$  را به اندازه‌ی ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس از رأس  $C$  نیم‌خط  $Cx$  را رسم می‌کنیم به طوری که با  $BC$  زاویه‌ی  $30^\circ$  بسازد (شکل را ببینید). سپس به مرکز  $M$  (وسط  $BC$ ) و شعاع ۳ کمانی می‌زنیم تا نیم‌خط  $Cx$  را در  $A$  قطع کند. مثلث  $ABC$  مثلث مطلوب است.



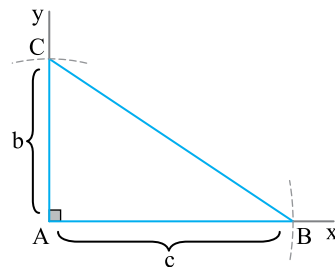
**۱۶** مسأله را حل شده فرض می‌کنیم (از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم). فرض کنید ضلع  $BC$  و قطر  $DB$  معلوم باشند. مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $DBC$  را با معلومات وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه می‌توان رسم کرد (مسأله‌ی قبل را ببینید). پس از رسم این مثلث، از  $B$  خطی موازی  $DC$  و از  $D$  خطی موازی  $BC$  رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط، نقطه‌ی  $A$ ، رأس چهارم مستطیل است.



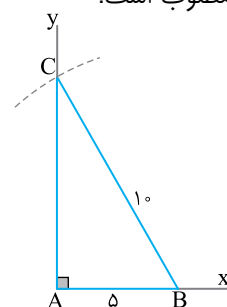
**۱۱** پاره‌خط دلخواه  $BC$  را رسم کنید. به مرکز  $B$  و  $C$  و شعاع  $BC$  دو کمان بزنید تا یک‌دیگر را در نقطه‌ی  $A$  قطع کنند. در این صورت مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است و  $\hat{B} = 60^\circ$ . با رسم نیمساز زاویه‌ی  $B$ ، دو زاویه‌ی  $30^\circ$  و با رسم نیمساز یکی از این زاویه‌های  $30^\circ$  درجه، دو زاویه‌ی  $15^\circ$  درجه ایجاد می‌شود.



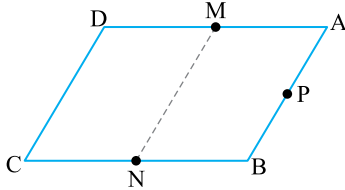
**۱۲** فرض می‌کنیم  $AB=c$ ،  $AC=b$  و  $\hat{A} = 90^\circ$ . زاویه‌ی قائمه‌ی  $xAy$  را رسم می‌کنیم (روش رسم دو خط عمود بر هم را در متن درس دیده‌ایم). به مرکز  $A$  و شعاع  $C$  کمانی می‌زنیم تا  $Ax$  را در  $B$  قطع کند. سپس به مرکز  $A$  کمانی به شعاع  $b$  می‌زنیم تا  $Ay$  را در  $C$  قطع کند. مثلث  $ABC$ ، مثلث مطلوب است.



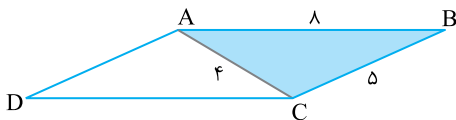
**۱۳** زاویه‌ی قائمه‌ی  $xAy$  را مطابق شکل رسم می‌کنیم. نقطه‌ی  $B$  را روی  $Ax$  طوری انتخاب می‌کنیم که  $AB=5$ . اکنون به مرکز  $B$  و شعاع ۱۰ کمانی می‌زنیم تا  $Ay$  را در  $C$  قطع کند. مثلث  $ABC$  مثلث مطلوب است.



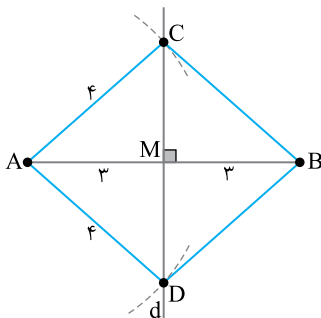
**۲۰** مسئله را حل شده فرض کنید (شکل زیر را ببینید). از نقطه‌ی  $P$  خطی موازی  $MN$  رسم می‌کنیم. روی این خط نقطه‌های  $A$  و  $B$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $P$  وسط  $AB$  باشد و  $AB=MN$ . از  $A$  به  $M$  وصل می‌کنیم و به اندازه‌ی  $MA$  امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی  $D$  به دست آید. به همین ترتیب از  $B$  به  $N$  وصل می‌کنیم و به اندازه‌ی  $BN$  امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی  $C$  به دست آید.  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.



**۲۱** مطابق شکل، مثلث  $ABC$  را با معلوم بودن طول سه ضلع رسم می‌کنیم. از  $A$  خطی موازی  $BC$  و از  $C$  خطی موازی  $AB$  رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در  $D$  قطع کنند.  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.



**۲۲** ابتدا پاره‌خط  $AB$  را به طول ۶ رسم می‌کنیم. عمودمنصف این پاره‌خط را رسم می‌کنیم (خط  $d$  در شکل). اکنون به مرکز  $A$  و شعاع ۴ (طول ضلع) کمانی می‌زنیم تا عمودمنصف  $AB$  را در  $C$  و  $D$  قطع کند. این دو نقطه، رأس‌های دیگر لوزی هستند. پس  $ACBD$  لوزی مورد نظر است.

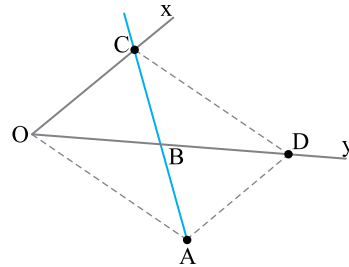


**۲۳** فرض می‌کنیم  $BC=B'C'$ . در این صورت دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس  $\hat{A}=\hat{A}'$  که خلاف فرض است.

**۲۴ الف)** اگر در مستطیل قطرهای برابر باشند، آن‌گاه مربع است.

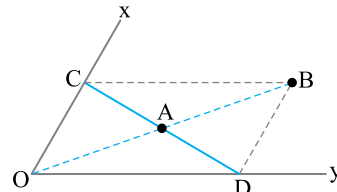
عکس قضیه‌ی «الف»: اگر مستطیلی مربع باشد، آن‌گاه قطرهای آن برابرند. عکس این قضیه درست است، پس قسمت «الف» قضیه‌ای دو شرطی است: «مستطیل، مربع است، اگر و تنها اگر قطرهایش برابر باشند».

**۱۷** مانند شکل از نقطه‌ی  $A$  خطی موازی ضلع  $Ox$  رسم می‌کنیم تا ضلع  $Oy$  را در  $D$  قطع کند. سپس از  $D$  خطی موازی  $OA$  رسم می‌کنیم تا ضلع  $Ox$  را در  $C$  قطع کند. چهار ضلعی  $OCDA$  متوازی‌الاضلاع است پس قطرهای آن یک‌دیگر را نصف می‌کنند، بنابراین  $AC$  که یک قطر این متوازی‌الاضلاع است، توسط قطر دیگر یعنی  $OD$  نصف می‌شود. در نتیجه  $AB=BC$ .



**۱۸** زاویه‌ی  $xOy$  و نقطه‌ی  $A$  درون این زاویه را در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید).  $OA$  را از طرف  $A$  به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی  $B$  به دست آید.

اکنون از  $B$  خط‌هایی موازی  $Ox$  و  $Oy$  رسم می‌کنیم تا این ضلع‌ها را به ترتیب در  $D$  و  $C$  قطع کنند.  $ODBC$  متوازی‌الاضلاع است، پس  $CD$  همان پاره‌خط مورد نظر است.



**۱۹** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم و متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  را می‌نامیم. فرض کنید ارتفاع  $AH$  معلوم باشد. مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $AHC$  با معلومات وتر (طول یک قطر متوازی‌الاضلاع) و یک ضلع زاویه‌ی قائمه (ارتفاع متوازی‌الاضلاع) قابل رسم است. پس از رسم این مثلث، از  $A$  خطی موازی  $HC$  رسم می‌کنیم.

سپس به مرکز  $O$ ، (وسط  $AC$ ) و شعاع نصف قطر دیگر، کمانی می‌زنیم تا این خط را در  $B$  قطع کند (شکل را ببینید). از  $B$  به  $C$  وصل می‌کنیم. از  $A$  خطی موازی  $BC$  رسم می‌کنیم تا  $HC$  یا امتداد آن را در  $D$  قطع کند.  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

