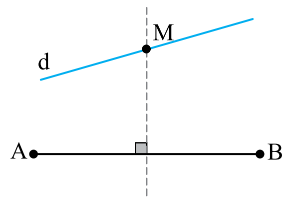
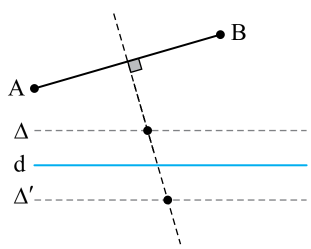
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینه‌ی ۲ نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف AB قرار دارند.
بنابراین نقطه‌های مورد نظر محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط d هستند.
چون خط d بر AB عمود نیست، پس عمودمنصف را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.

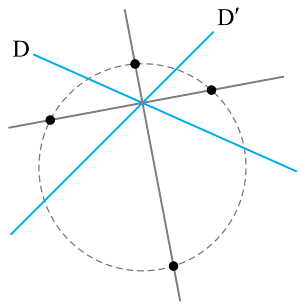


۲- گزینه‌ی ۳ نقطه‌هایی که از A به فاصله‌ی معلوم k هستند، دایره‌ی به مرکز A و شعاع k هستند. از طرف دیگر، نقطه‌هایی که از خط d به فاصله‌ی k' هستند، دو خط موازی با d هستند. نقطه‌های برخورد این دو خط موازی با دایره‌ی به مرکز A، نقطه‌های مورد نظر هستند. تعداد این نقطه‌ها حداکثر ۴ تا است.

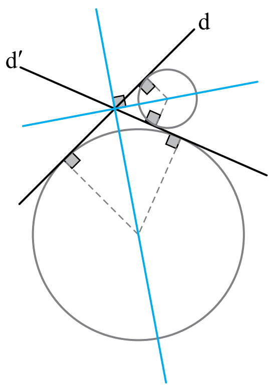
۳- گزینه‌ی ۱ نقطه‌هایی که از خط d به فاصله‌ی L هستند، دو خط موازی d هستند. از طرف دیگر نقطه‌هایی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف AB قرار دارند. پس نقطه‌های مورد نظر، نقطه‌های برخورد عمودمنصف AB با دو خط موازی d هستند (شکل را ببینید).
بنابراین تعداد نقطه‌های مورد نظر یا صفر است (زمانی که عمودمنصف با Δ و Δ' موازی باشد) یا نامتناهی است (زمانی که عمودمنصف AB بر Δ یا Δ' منطبق شود) یا ۲ است (زمانی که عمودمنصف با Δ و Δ' موازی نباشد).



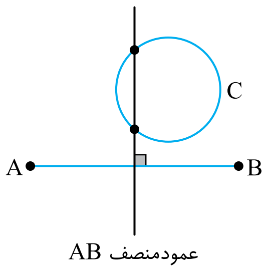
۴- گزینه‌ی ۴ نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع D و D' به یک فاصله هستند، روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط قرار دارند.
هر یک از این نیمسازها دایره را حداکثر در دو نقطه می‌تواند قطع کند، پس حداکثر ۴ نقطه با خاصیت مورد نظر پیدا می‌شود.



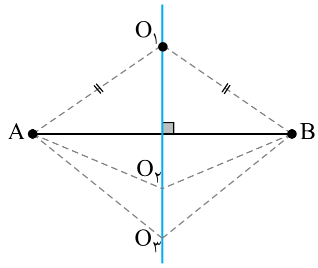
۵- گزینه‌ی ۲ مرکز دایره‌های مورد نظر، از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند. پس مرکز این دایره‌ها، روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط قرار دارند. این نیمسازها، دو خط عمود بر هم هستند.



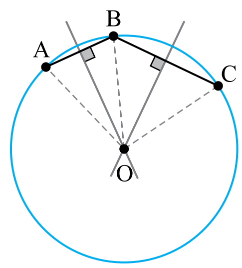
۶- گزینه‌ی ۴ نقطه‌هایی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB را تشکیل می‌دهند. پس جواب مسئله محل برخورد این عمودمنصف با دایره‌ی C است. خط و دایره حداکثر در دو نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.



۷- گزینه‌ی ۲ مرکز دایره‌ای که از A و B می‌گذرد، از این دو نقطه به یک فاصله است. پس مرکزهای این دایره‌ها روی عمود منصف AB قرار دارند.



۸- گزینه‌ی ۱ اگر نقطه‌های A ، B و C روی دایره‌ی به مرکز O قرار داشته باشند، چون OB با OA برابر است، پس O روی عمودمنصف AB است و چون OC با OB برابر است، پس مرکز O روی عمودمنصف BC است. بنابراین مرکز دایره، نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های AB و BC است.



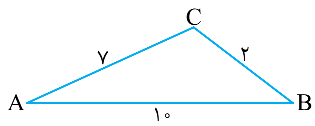
۹- گزینه‌ی ۴ در واقع باید مثلثی با طول ضلع‌های ۱۰، ۷ و ۲ وجود داشته باشد (شکل را ببینید).

بنابراین باید نابرابری

$$AB < AC + BC$$

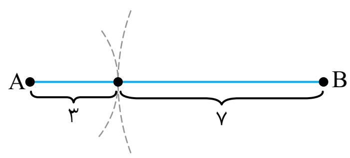
درست باشد، اما $۱۰ > ۷ + ۲$.

بنابراین هیچ نقطه‌ای با این ویژگی نداریم.

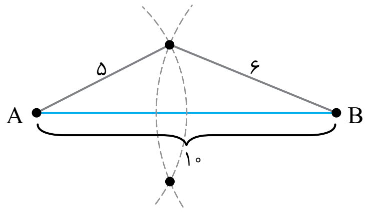


۱۰- گزینه‌ی ۱ نقطه‌هایی که از A به فاصله‌ی ۳ باشند، روی دایره‌ی به مرکز A و شعاع ۳ هستند. نقطه‌هایی که از B به فاصله‌ی ۷ هستند، روی دایره‌ی به مرکز B و شعاع ۷ قرار دارند.

بنابراین نقطه‌ی مورد نظر، محل برخورد این دو دایره است. مطابق شکل چون $AB = ۱۰$، پس این دو دایره مماس بر هم هستند و مسئله یک جواب دارد.

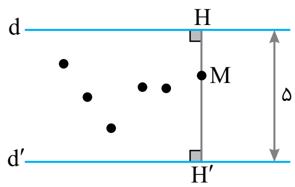


۱۱- گزینه‌ی ۲ نقطه‌هایی که از A به فاصله‌ی ۵ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ قرار دارند. همچنین نقطه‌هایی که از B به فاصله‌ی ۶ هستند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۶ قرار دارند. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، چون $AB = ۱۰$، پس این دو دایره در دو نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.



۱۲- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل، هر نقطه‌ای که بین این دو خط است، مجموع فاصله‌هایش از این دو خط برابر ۵ است.

$$MH + MH' = ۵$$

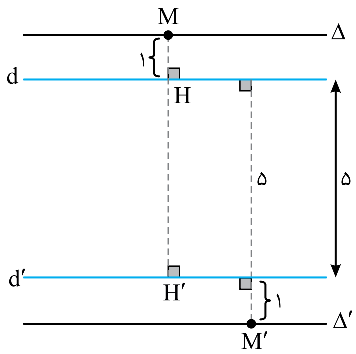


۱۳- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی M را به فاصله‌ی ۱ از d بیرون ناحیه‌ی بین d و d′ در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید):

$$MH + MH' = ۱ + ۶ = ۷$$

به همین ترتیب، نقطه‌ی M′ را به فاصله‌ی ۱ از d′ و بیرون ناحیه‌ی بین d و d′ در نظر بگیرید (مجدداً شکل را ببینید). این نقطه نیز ویژگی مورد نظر را دارد.

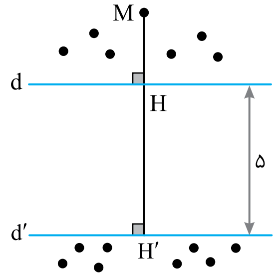
پس مجموعه‌ی نقطه‌هایی که این ویژگی را دارند دو خط موازی d و d′ و گذرنده از M و M′ هستند (خط‌های Δ و Δ′ را در شکل ببینید).



۱۴- گزینه‌ی ۱ چون مجموع فاصله‌های هر نقطه بین دو خط موازی، از آن دو خط، برابر فاصله‌ی آن دو خط (۵) است و نقطه‌های خارج ناحیه‌ی بین دو خط قطعاً مجموعی بزرگ‌تر از ۵ دارند، پس مجموعه‌ی مورد نظر تهی است.

۱۵- گزینه‌ی ۴ نقطه‌ی دلخواه M خارج ناحیه‌ی بین دو خط d و d' را در نظر بگیرید:

$$MH'-MH=(MH+HH')-MH=HH'=۵$$



بنابراین مجموعه‌ی نقطه‌هایی که این ویژگی را دارند، ناحیه‌ی خارج دو خط موازی d و d' است.

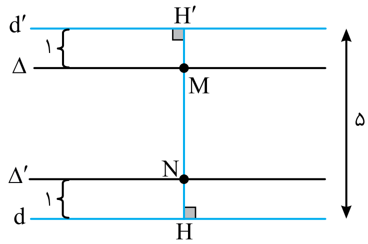
۱۶- گزینه‌ی ۲ در تست قبل دیدیم که تفاضل فاصله‌های هر نقطه خارج دو خط برابر ۵ است. پس اگر نقطه‌ای با شرایط مسئله وجود داشته باشد، باید بین این دو خط باشد. فرض کنید M یکی از نقطه‌های مورد نظر باشد به‌طوری‌که

$$MH-MH'=۳$$

از طرف دیگر،

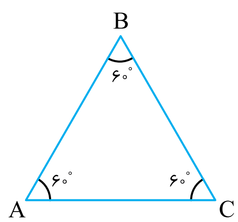
$$MH+MH'=۵$$

بنابراین $MH=۴$ و $MH'=۱$. در نتیجه نقطه‌های روی خط گذرنده از M و موازی d و d' ویژگی مورد نظر را دارند. به همین صورت اگر نقطه‌ای مانند N به فاصله‌ی ۱ از d باشد، ویژگی مورد نظر را دارد. بنابراین خط گذرنده از N و موازی d و d' جواب است. بنابراین جواب، دو خط Δ و Δ' موازی d و d' است.

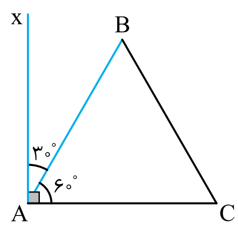


۱۷- گزینه‌ی ۴

۱) زاویه‌ی ۶۰°: کافی است مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنیم. در این حالت $B\hat{A}C$ برابر ۶۰° است.

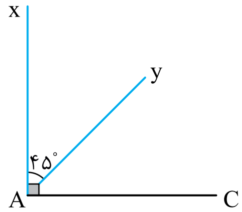


۲) زاویه‌ی ۳۰°: از نقطه‌ی A، عمود Ax را بر AC رسم می‌کنیم (شکل را ببینید). در این صورت $x\hat{A}B=۳۰^\circ$



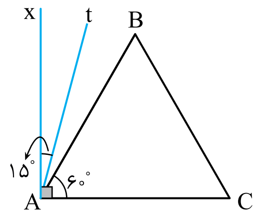
۳) زاویه‌ی ۴۵°: اگر نیمساز زاویه‌ی xAC را رسم کنیم (Ay در شکل)،

$$x\hat{A}y=۴۵^\circ$$



۴) زاویه‌ی ۱۵°: نیمساز زاویه‌ی xAB را رسم می‌کنیم (At در شکل). در این صورت

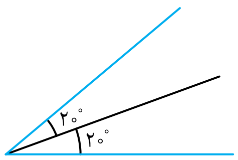
$$x\hat{A}t=۱۵^\circ$$

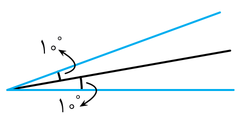


۵) زاویه‌ی ۷۵°: به شکل قسمت (۴) نگاه کنید:

$$t\hat{A}C=t\hat{A}B+B\hat{A}C$$
$$=۱۵^\circ+۶۰^\circ=۷۵^\circ$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ اگر نیمساز زاویه‌ی ۴۰° را رسم کنیم، زاویه‌ی ۲۰° به‌دست می‌آید. اکنون اگر نیمساز زاویه‌ی ۲۰° را رسم کنیم، زاویه‌ی ۱۰° به‌دست می‌آید.





با رسم نیمساز زاویه‌ی ۱۰°، زاویه‌ی ۵° و به همین صورت زاویه‌ی $۲/۵^\circ$ به‌دست می‌آید.

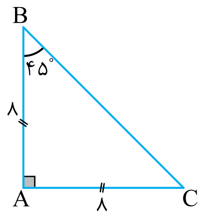
پس تا این‌جا زاویه‌های $۲/۵^\circ$، ۵°، ۱۰° و ۲۰° را می‌توان رسم کرد.

روش ترسیم: زاویه‌ی ۶۰° را در متن درس یاد گرفتیم، پس زاویه‌ی $۶۰^\circ+۵^\circ=۶۵^\circ$ را می‌توان رسم کرد. زاویه‌ی ۲۰° و $۲/۵^\circ$ را می‌توان رسم کرد، پس زاویه‌ی $۲۰^\circ+۲/۵^\circ=۲۲/۵^\circ$ را می‌توان رسم کرد.

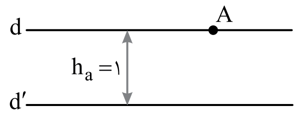
زاویه‌ی ۳۰° را با رسم نیمساز زاویه‌ی ۶۰° می‌توان رسم کرد پس می‌توان زاویه‌ی ۱۵° را نیز رسم کرد، در نتیجه زاویه‌ی $۱۵^\circ+۲/۵^\circ=۱۷/۵^\circ$ را نیز می‌توان رسم کرد.

پس فقط گزینه‌ی (۱) را نمی‌توان رسم کرد.

۱۹- گزینه‌ی ۱ چون $AB=AC$ و $\hat{B}=۴۵^\circ$، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{B}=\hat{C}=۴۵^\circ$. بنابراین $\hat{A}=۹۰^\circ$، پس مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است و فقط یک مثلث با این معلومات می‌توان رسم کرد.

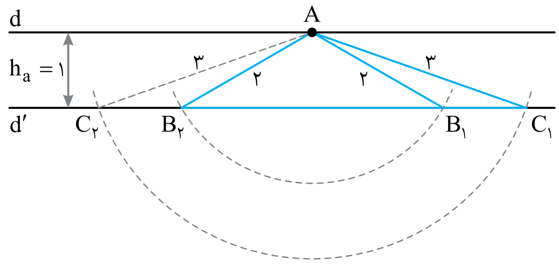


۲۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا دو خط موازی d و d' را به فاصله‌ی ۱ از یک‌دیگر رسم می‌کنیم.
نقطه‌ی A را روی خط d در نظر می‌گیریم (شکل (۱) را ببینید).



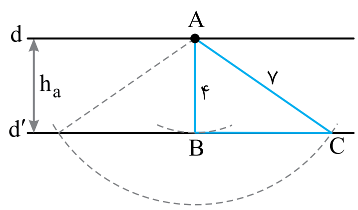
شکل (۱)

سپس به مرکز A و شعاع ۲ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d' را قطع کند. محل برخورد، رأس B است (واضح است که این دایره خط d' را در دو نقطه قطع می‌کند).
به همین ترتیب، به مرکز A و شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با d' را C می‌نامیم (شکل (۲) را ببینید).
در این شکل دو مثلث غیر همنهشت دیده می‌شود: یکی مثلث $AB_۲C_۱$ و دیگری مثلث $AB_۱C_۱$.

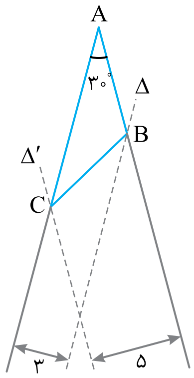


شکل (۲)

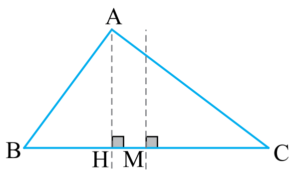
۲۱- گزینه‌ی ۲ دو خط موازی d و d' را به فاصله‌ی h_a در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی A را روی d در نظر می‌گیریم و به شعاع‌های ۴ و ۷ و مرکز A کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد این کمان‌ها با خط d' رأس‌های B و C را مشخص می‌کنند.
اگر بخواهیم مثلث منحصر به فرد داشته باشیم، باید $h_a=c$، یعنی $h_a=۴$.



۲۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا زاویه‌ی A را برابر ۳۰° رسم می‌کنیم.
اکنون خطی موازی یک ضلع زاویه‌ی A و به فاصله‌ی ۳ از آن و سپس خطی دیگر موازی ضلع دیگر زاویه‌ی A و به فاصله‌ی ۵ از آن رسم می‌کنیم (خط‌های Δ و Δ' را در شکل ببینید).
این خط‌ها ضلع‌های زاویه را به ترتیب در B و C قطع می‌کنند.
مثلث ABC مثلث مورد نظر است.
چون تمام مراحل این رسم منحصر به فرد است، پس مثلث ABC نیز منحصر به فرد خواهد شد.



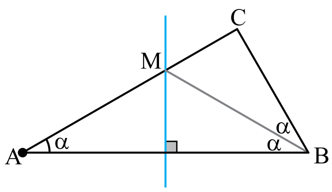
۲۳- گزینه‌ی ۱ مرکز دایره‌ای که از دو نقطه‌ی B و C می‌گذرد روی عمودمنصف ضلع BC است. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست، پس عمودمنصف BC و ارتفاع AH موازی‌اند (شکل را ببینید). بنابراین دایره‌ای با این شرایط وجود ندارد.



۲۴- گزینه‌ی ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم و یکی از حالت‌هایی که شرایط مسئله را دارد در نظر می‌گیریم.
اگر فرض کنیم $B\hat{A}C=\alpha$، آن‌گاه $A\hat{B}C=۲\alpha$. پس در صورتی که نیمساز زاویه‌ی ABC را رسم کنیم و AC را در M قطع کند، حتماً مثلث ABM متساوی‌الساقین است، یعنی

$$MA=MB$$

در نتیجه M روی عمودمنصف AB قرار دارد.



۲۵- گزینه‌ی ۳ چون در مثلث ABC، $AB=۱۰$ و $AC=a$ و $BC=b$، پس باید $|a-b|<۱۰<a+b$.