

دوره دوم متوسطه  
پایه یازدهم

۲

هندسه

حسین انصاری ●

## مقدمه

خداوند منان را سپاسگزاریم که توفیق نگارش این کتاب را عطا فرمود تا بدین وسیله سهمی کوچک در پرورش استعدادهای درخشان جوانان این مرز و بوم داشته باشیم.

آموزش علوم پایه یک نیاز اساسی در زیرساختهای توسعه صنعتی و علوم کاربردی محسوب می‌شود. حقیر حدود سی سال است که با تألیف کتاب‌های پر بار و غنی، در این زمینه گام‌هایی مؤثر برداشته‌ام و با تحریک حس کنجکاوی جوانان لذت اندیشه‌ورزی و نوآوری را در آنها تقویت نموده‌ام. امیدوارم کتاب هندسه ۲ که با همین اهداف آموزشی تدوین گردیده است نیاز علمی این عزیزان را برطرف، و موجب ارتقاء دانش ریاضی آنها گردد.

در پایان از کارکنان انتشارات پرافتخار مبتکران که کار آماده‌سازی کتاب را بر عهده داشته‌اند به ویژه از آقایان خدایار مبین و محسن انصاری و خانم‌ها کبری مرادی مقدم، سیما صمدی، نرگس سربندی و مینا هرمزی صمیمانه تشکر می‌کنم.

حسین انصاری

تابستان ۹۶

## فهرست مطالب

| صفحه | عنوان                               |
|------|-------------------------------------|
| ۷    | فصل اول دایره                       |
| ۳۳   | تمرین‌های فصل اول                   |
| ۴۹   | فصل دوم تبدیل‌های هندسی             |
| ۷۰   | تمرین‌های فصل دوم                   |
| ۷۹   | فصل سوم روابط طولی در شکل‌های هندسی |
| ۹۵   | تمرین‌های فصل سوم                   |
| ۱۰۱  | پرسش‌های چهارگزینه‌ای               |
| ۱۳۶  | پاسخنامه کلیدی                      |

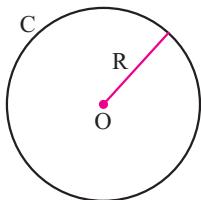


دایره

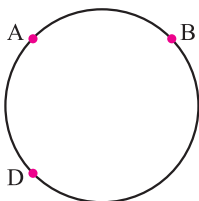
فصل  
۱



# دایره



دایره مجموعه نقاطی از یک صفحه است که فاصله آنها از نقطه‌ای معین به نام مرکز مقدار ثابتی باشد که آن مقدار ثابت را شعاع دایره نامیده و با  $R$  نشان می‌دهیم. دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  را به صورت  $C(O, R)$  نشان می‌دهیم.



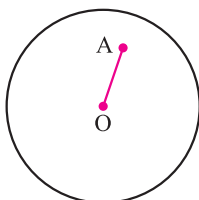
اگر دو نقطه  $A$  و  $B$  را روی دایره اختیار کنیم، منحنی که بین  $A$  و  $B$  قرار می‌گیرد، کمان  $AB$  نامیده می‌شود که آن را به صورت  $\widehat{AB}$  نشان می‌دهیم، کمان بزرگ  $AB$  را با سه حرف می‌خوانیم  $\widehat{ADB}$ .

**وتر:** پاره‌خطی که دو سر یک کمان را به هم وصل می‌کند وتر نامیده می‌شود. وترهایی که از مرکز دایره بگذرند قطر نامیده می‌شوند.

## وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم

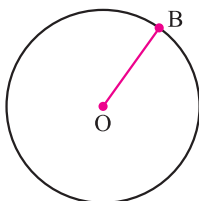
نقطه و دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

(۱) نقطه داخل دایره است که در این صورت فاصله نقطه تا مرکز از شعاع کوچکتر است.



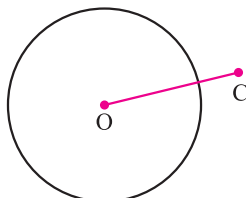
$$OA < R$$

(۲) نقطه روی دایره است که در این حالت فاصله نقطه تا مرکز با شعاع دایره مساوی است.



$$OB = R$$

(۳) نقطه خارج دایره است که در این حالت فاصله نقطه تا مرکز از شعاع بزرگتر است.

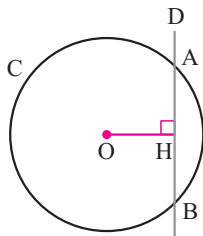


$$OC > R$$

## وضعیت خط و دایره نسبت به هم

خط و دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

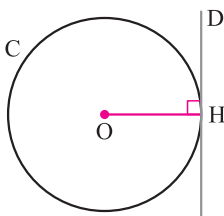
۱) خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند (متقاطع) که در این حالت فاصله خط تا مرکز از شعاع کوچکتر است.



$$OH < R$$

$$C \cap D = \{A, B\}$$

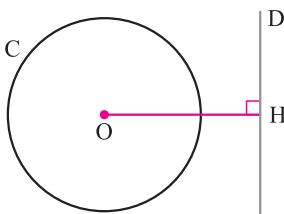
۲) خط و دایره یک نقطه مشترک دارند (مماس) که در این حالت فاصله خط تا مرکز دایره با شعاع مساوی است.



$$OH = R$$

$$C \cap D = \{H\}$$

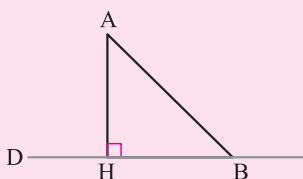
۳) خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند که در این حالت فاصله خط تا مرکز از شعاع بزرگتر است.



$$OH > R$$

$$C \cap D = \emptyset$$

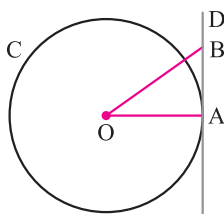
اگر از نقطه A واقع در خارج خط D بر خط D عمود کنیم طول عمود از بقیه پاره‌فصل‌هایی که به نقاط دیگر خط D وصل می‌شوند، کوچکتر است.



$$AH < AB$$

نکته

مثال ۱ ثابت کنید خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.



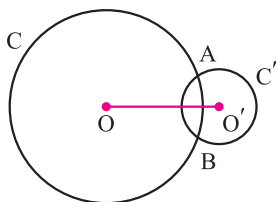
**حل** فرض می‌کنیم خط D در نقطه A بر دایره C مماس باشد. اگر OA بر D عمود نباشد، از نقطه O پاره خط OB را بر D عمود می‌کنیم که در این صورت باید  $OB < OA$ . در صورتی که چنین نیست زیرا نقطه B خارج دایره قرار می‌گیرد و فاصله آن تا مرکز باید از شعاع یعنی OA بزرگتر باشد، بنابراین فرض اینکه OA بر D عمود نیست، نادرست است. پس  $OA \perp D$ .

## وضعیت دو دایره نسبت به هم

دو دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

(۱) دو دایره دو نقطهٔ مشترک دارند (متقاطع)

$$C \cap C' = \{A, B\}$$



اگر طول خط‌المركزين يعنى  $OO'$  برابر  $d$  و شعاع دایره  $C$  برابر  $R$  و شعاع دایره  $C'$  برابر  $R'$  باشد آنگاه:

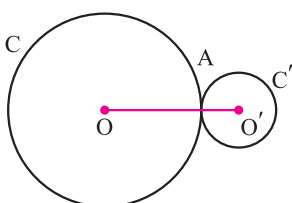
$$R - R' < d < R + R'$$

(۲) دو دایره یک نقطهٔ مشترک دارند (مماس)

$$C \cap C' = \{A\}$$

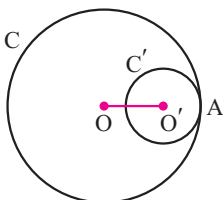
الف) مماس خارجی

$$d = R + R'$$



ب) مماس داخلی

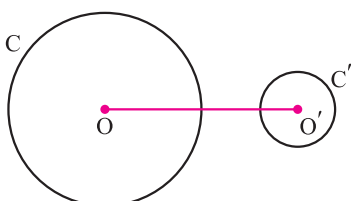
$$d = R - R'$$



(۳) دو دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.  $C \cap C' = \emptyset$

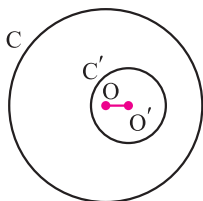
الف) متخارج

$$d > R + R'$$



ب) متداخل

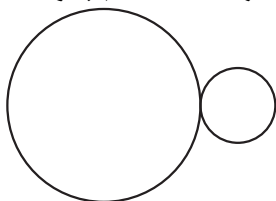
$$d < R - R'$$



**مثال ۲** اگر شعاع‌های دو دایره ۵ و ۷ سانتی‌متر و طول خط‌المركزين ۱۲ سانتی‌متر باشد، دو دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟

**حل** طول خط‌المركزين با مجموع دو شعاع مساوی است.  $(۱۲ = ۵ + ۷)$

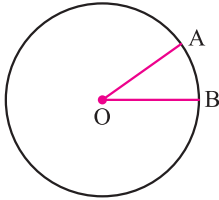
بنابراین دو دایره مماس خارجی می‌باشند.



**مثال ۳** اگر شعاع‌های دو دایره ۴ و ۷ سانتی‌متر و طول خط‌المركزین برابر ۱۳ سانتی‌متر باشد، دو دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟

چگونه‌اند؟

**حل** طول خط‌المركزین از مجموع دو شعاع بزرگتر است ( $13 > 4 + 7$ ). بنابراین دو دایره متخارج‌اند.

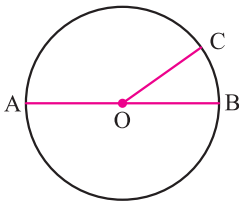


**زاویه مرکزی:** زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شعاع‌هایی از دایره باشند، زاویه

مرکزی نامیده می‌شود. بر اساس قرار داد زاویه مرکزی با کمان مقابلش بر حسب درجه

مساوی است.

**مثال ۴** در شکل زیر AB قطر دایره و  $\widehat{AC} = 4\widehat{BC}$ ، اندازه  $\widehat{AOC}$  را حساب کنید.



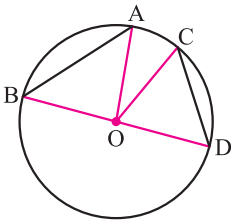
$$\widehat{AC} + \widehat{CB} = 180^\circ$$

$$4\widehat{BC} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow 5\widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 36$$

$$\widehat{AC} = 4 \times 36 = 144 \Rightarrow \widehat{AOC} = 144$$

**نکته** اگر دو زاویه مرکزی برابر باشند کمان‌های نظیرشان نیز مساویند و بالعکس.

**قضیه** ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره مساوی باشند کمان‌های نظیرشان نیز مساویند.



$AB = CD$  فرض

$\widehat{AB} = \widehat{CD}$  حکم

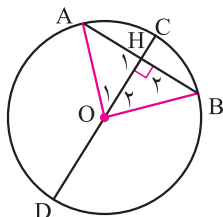
برهان  از مرکز دایره به نقاط A، B، C و D وصل می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \\ AB = CD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ض ض ض} \\ \text{ض ض ض} \end{array} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

**قضیه** ثابت کنید اگر دو کمان از یک دایره مساوی باشند وترهای نظیرشان نیز مساویند. (اثبات به عهده دانش‌آموز)



**قضیه** ثابت کنید اگر قطری از یک دایره بر وتری از آن عمود شود آن وتر و کمان‌های نظیرش را نصف می‌کند.

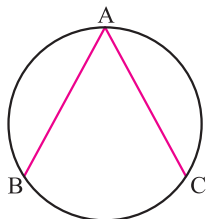


**برهان** از مرکز دایره به نقاط A و B وصل می‌کنیم:

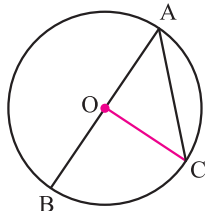
$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OH = OH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \triangle OHA \cong \triangle OHB \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{CB} \end{cases}$$

$$\widehat{AC} = \widehat{CB} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{AC} = 180^\circ - \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$$

**قضیه** ثابت کنید اگر از مرکز دایره خطی به وسط وتری از یک دایره وصل کنیم، خط بر آن وتر عمود می‌شود. (اثبات به عهده دانش‌آمون)



**زاویه محاطی:** زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاع آن وترهایی از دایره باشند زاویه محاطی نامیده می‌شود.



**قضیه** ثابت کنید زاویه محاطی با نصف کمان مقابلش مساوی است.

قضیه را در سه حالت اثبات می‌کنیم:

(الف) مرکز دایره روی یکی از اضلاع زاویه باشد:

**برهان** از O به C وصل می‌کنیم:

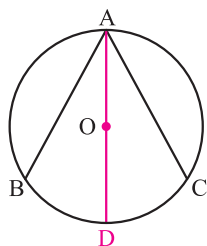
$$OA = OC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \quad \widehat{BOC} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{BOC} = \hat{A} + \hat{C}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \\ \widehat{BC} = \hat{A} + \hat{A} \Rightarrow \widehat{BC} = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

(ب) مرکز دایره داخل زاویه است

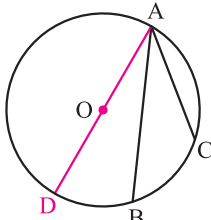
**برهان** از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند.



$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

(ج) مرکز دایره خارج زاویه است

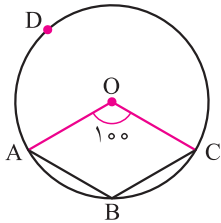
برهان از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند.



$$\hat{BAC} = \hat{DAC} - \hat{DAB} = \frac{\widehat{DC}}{2} - \frac{\widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

مثال ۵ در شکل زیر اندازه  $\hat{B}$  را حساب کنید.

حل

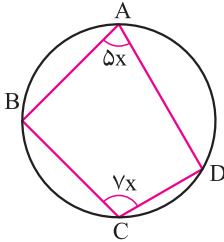


$$\hat{O} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 360 - 100 = 260$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2} = \frac{260}{2} = 130^\circ$$

مثال ۶ در شکل زیر اندازه  $\hat{C}$  را حساب کنید.

حل



$$\hat{A} = 5x \Rightarrow \widehat{BCD} = 10x$$

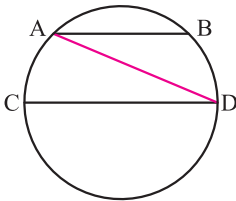
$$\hat{C} = 7x \Rightarrow \widehat{BAD} = 14x$$

$$\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 360 \Rightarrow 10x + 14x = 360 \Rightarrow 24x = 360 \Rightarrow x = 15$$

$$\hat{C} = 7x = 7 \times 15 = 105$$

مثال ۷ ثابت کنید در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

حل



فرض  $AB \parallel CD$

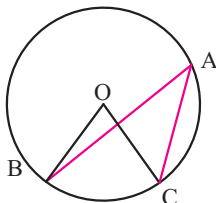
حکم  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

برهان از A به D وصل می‌کنیم:

$$(AB \parallel CD \text{ و } AD \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$

مثال ۸ در شکل زیر  $\hat{O} + \hat{A} = 120^\circ$  اندازه  $\hat{O}$  چقدر است؟

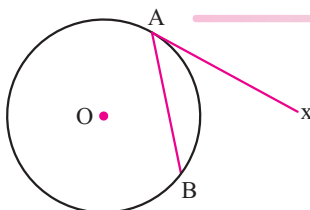
حل



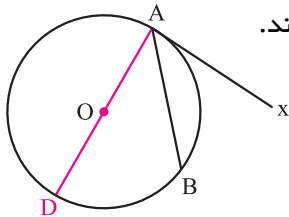
$$\left. \begin{array}{l} \hat{O} = \widehat{BC} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O} = 2\hat{A}$$

$$\hat{O} + \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow 2\hat{A} + \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow 3\hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \hat{A} = 40^\circ \Rightarrow \hat{O} = 2 \times 40 = 80$$

زاویه ظلّی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن وتر و دیگری بر دایره مماس باشد، زاویه ظلّی نامیده می‌شود.



**قضیه** ثابت کنید زاویه ظنی با نصف کمان مقابلش مساوی است.

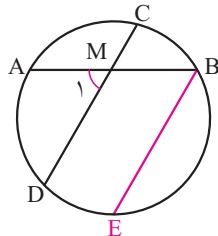


**برهان** از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند.

$$Ax \perp DA \Rightarrow D\hat{A}x = 90^\circ$$

$$B\hat{A}x = D\hat{A}x - D\hat{A}B = 90^\circ - \frac{\widehat{DB}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

**قضیه** ثابت کنید زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره پدید می‌آید برابر با نصف مجموع دو کمانی از دایره که به دو ضلع



زاویه و امتداد اضلاع آن محدودند می‌باشد.

$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \quad \text{حکم}$$

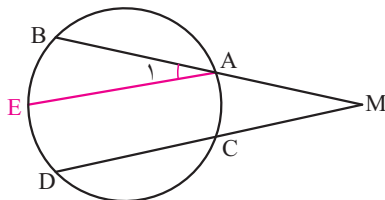
**برهان** پاره خط BE را موازی CD رسم می‌کنیم.

$$\widehat{BE} \parallel \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{DE}$$

$$\left. \begin{array}{l} (CD \parallel BE, AB \text{ — ورب}) \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B} \\ \hat{B} = \frac{\widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DE}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

**قضیه** ثابت کنید زاویه‌ای که از برخورد امتدادهای دو وتر در بیرون دایره پدید می‌آید با نصف تفاضل کمان‌هایی از دایره که به

اضلاع زاویه محدودند مساوی است.

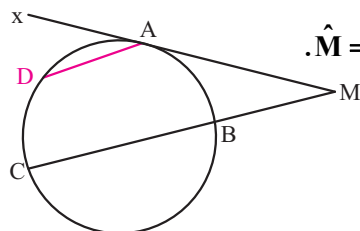


$$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \quad \text{حکم}$$

**برهان** پاره خط AE را موازی MD رسم می‌کنیم.

$$AE \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{ED}$$

$$\left. \begin{array}{l} (AE \parallel MD, MB \text{ — ورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M} \\ \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{ED}}{2} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$$



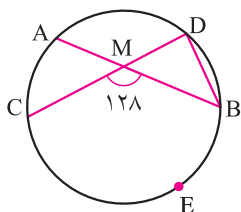
**مثال ۹** در شکل زیر  $Mx$  در نقطه A بر دایره مماس است، ثابت کنید  $\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$ .

**حل** از نقطه A پاره خط AD را موازی MC رسم می‌کنیم.

$$AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{DC} = \widehat{AB}$$

$$\left. \begin{array}{l} (AD \parallel MC, Mx \text{ — ورب}) \Rightarrow D\hat{A}x = \hat{M} \\ D\hat{A}x = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$$

مثال ۱۰ در شکل زیر  $\widehat{BEC} = 3\widehat{AD}$  ، اندازه  $\hat{D}$  چقدر است؟



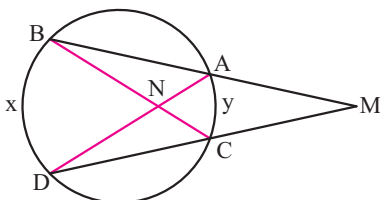
**حل**

$$\frac{\widehat{AD} + \widehat{BEC}}{2} = \widehat{CMB} \Rightarrow \frac{\widehat{AD} + 3\widehat{AD}}{2} = 128 \Rightarrow \frac{4\widehat{AD}}{2} = 128$$

$$2\widehat{AD} = 128 \Rightarrow \widehat{AD} = 64 \quad \widehat{BEC} = 3 \times 64 = 192$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{BEC}}{2} = \frac{192}{2} = 96$$

مثال ۱۱ در شکل زیر  $\hat{M} = 35^\circ$  و  $\widehat{BND} = 85^\circ$  ، مقادیر  $x$  و  $y$  را حساب کنید.



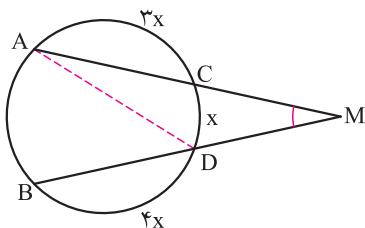
**حل**

$$\begin{cases} \frac{\widehat{BD} + \widehat{AC}}{2} = \hat{M} \\ \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} = \widehat{BND} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 85 \\ \frac{x-y}{2} = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 170 \\ x-y = 70 \end{cases}$$

$$2x = 240 \Rightarrow x = 120$$

$$120 + y = 170 \Rightarrow y = 50$$

مثال ۱۲ در شکل زیر  $\hat{M} = 36^\circ$  ، اندازه  $\hat{D}$  را حساب کنید.



**حل**

$$\widehat{AB} = 360 - (3x + x + 4x) = 360 - 8x$$

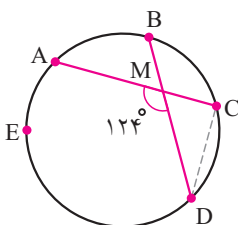
$$\frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = \hat{M} \Rightarrow \frac{360 - 8x - x}{2} = 36 \Rightarrow 360 - 9x = 72$$

$$360 - 72 = 9x \Rightarrow 288 = 9x \Rightarrow x = 32$$

$$\widehat{AB} = 360 - 8 \times 32 = 104$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{104}{2} = 52^\circ$$

مثال ۱۳ در شکل زیر  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$  اندازه  $\hat{C}$  را حساب کنید.



**حل**

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = x \Rightarrow \widehat{AED} = 360 - 3x$$

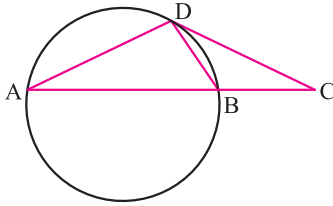
$$\frac{\widehat{AED} + \widehat{BC}}{2} = \widehat{AMD} \Rightarrow \frac{360 - 3x + x}{2} = 124 \Rightarrow \frac{360 - 2x}{2} = 124$$

$$180 - x = 124 \Rightarrow x = 56$$

$$\widehat{AED} = 360 - 3 \times 56 = 192$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AED}}{2} = \frac{192}{2} = 96^\circ$$

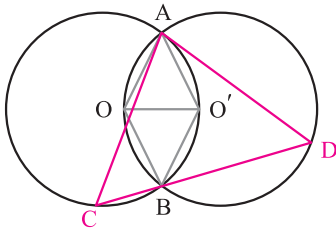
مثال ۱۴ در شکل زیر  $CD$  بر دایره مماس است و  $DA = DC$ ، ثابت کنید  $BD = BC$ .



$$\left. \begin{aligned} \widehat{BDC} &= \frac{\widehat{DB}}{2} \\ \widehat{A} &= \frac{\widehat{DB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{A} \left. \begin{aligned} & \\ DA = DC &\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{C} \Rightarrow BD = BC$$

حل

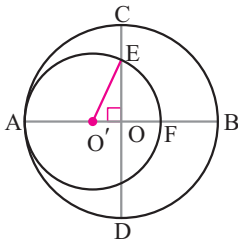
مثال ۱۵ دو دایره به مراکز  $O$  و  $O'$  طوری رسم شده‌اند که مرکز هر کدام روی محیط دیگری قرار دارد و نقاط تقاطع دو دایره  $A$  و  $B$  می‌باشند. خط دلخواهی از  $B$  رسم می‌کنیم تا دایره‌ها را در  $C$  و  $D$  قطع کنند. ثابت کنید مثلث  $ADC$  متساوی‌الاضلاع است.



$$\begin{aligned} OA = O'A = OO' &\Rightarrow \widehat{AOO'} = 60^\circ = \widehat{AO'O} \\ OB = O'B = OO' &\Rightarrow \widehat{BOO'} = 60^\circ = \widehat{BO'O} \\ \widehat{AOB} = 60^\circ + 60^\circ &= 120^\circ \Rightarrow \widehat{AO'B} = 120^\circ \\ \widehat{C} = \frac{\widehat{AO'B}}{2} &= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \\ \widehat{AO'B} = 60^\circ + 60^\circ &= 120^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \\ \widehat{D} = \frac{\widehat{AOB}}{2} &= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \end{aligned}$$

دو زاویه مثلث  $ADC$  برابر  $60^\circ$  شد، بنابراین زاویه سوم مثلث نیز  $60^\circ$  می‌شود و مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مثال ۱۶ در شکل زیر دو دایره مماس داخلی‌اند، اگر  $CE = 6$  و  $BF = 10$  باشد، شعاع دو دایره را حساب کنید.



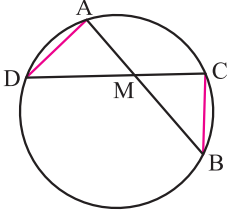
حل شعاع دایره بزرگ را با  $R$  و شعاع دایره کوچک را با  $R'$  نشان می‌دهیم. از  $O'$  به  $E$  وصل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} AB = AF + FB &\Rightarrow 2R = 2R' + 10 \Rightarrow R = R' + 5 \\ OO' = OA - O'A &= R - R' = 5 & OE = OC - CE = R - 6 \\ O'E^2 = OE^2 + O'O^2 &\Rightarrow R'^2 = (R - 6)^2 + 5^2 \Rightarrow (R - 5)^2 = (R - 6)^2 + 25 \\ R^2 - 10R + 25 = R^2 - 12R + 36 + 25 &\Rightarrow -10R + 12R = 36 \Rightarrow 2R = 36 \Rightarrow R = 18 \\ R' = R - 5 = 18 - 5 = 13 \end{aligned}$$

## رابطه‌های طولی در دایره

**قضیه** دو وتر AB و CD همدیگر را در نقطه M واقع در داخل دایره قطع می‌کنند. ثابت کنید  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

**برهان** از A به D و از B به C وصل می‌کنیم:

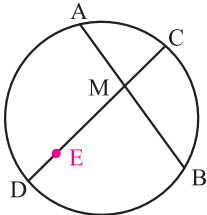


$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MBC \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

**عکس قضیه** اگر دو پاره‌خط AB و CD در نقطه M یکدیگر را طوری قطع کرده باشند که  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$  ثابت کنید چهار نقطه A، B، C، D روی یک دایره قرار می‌گیرند.

**برهان** می‌دانیم از سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست فقط یک دایره می‌گذرد، دایره‌ای رسم می‌کنیم که از A و B و C بگذرد، اگر این دایره از D بگذرد حکم ثابت است و اگر از D نگذرد، فرض می‌کنیم دایره CD یا امتداد آن را در

E قطع کند که در این صورت:

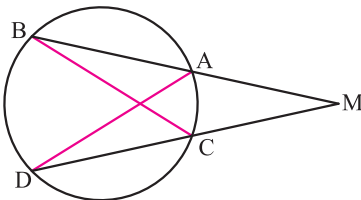


$$\left. \begin{array}{l} MA \cdot MB = MC \cdot ME \\ MA \cdot MB = MC \cdot MD \text{ (فرض)} \end{array} \right\} \Rightarrow MC \cdot ME = MC \cdot MD \Rightarrow ME = MD$$

بنابراین E بر D منطبق است و چهار نقطه A، B، C، D بر یک دایره قرار می‌گیرند.

**قضیه** در یک دایره امتدادهای دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M واقع در خارج دایره قطع کرده‌اند، ثابت کنید  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

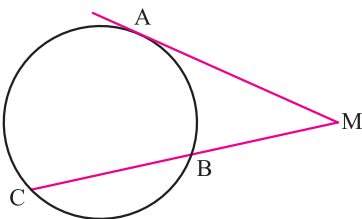
**برهان** از A به D و از B به C وصل می‌کنیم:



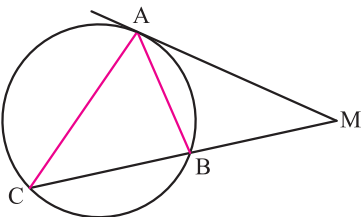
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

**قضیه** در شکل زیر MA مماس بر دایره است، ثابت کنید  $MA^2 = MB \cdot MC$ .

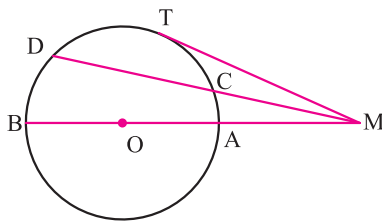
**برهان** از A به نقاط B و C وصل می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{MAB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{MAB} = \hat{C}$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{MAB} = \hat{C} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MAC \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB \cdot MC$$

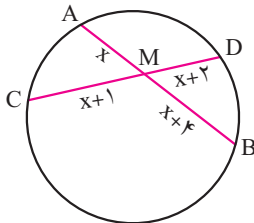


**نتیجه:** اگر از نقطه M واقع در خارج دایره C(O, R) هر مماس یا قاطعی رسم کنیم حاصلضرب اندازه قطعه‌ها برابر و مساوی مجذور اندازه مماس است و مقداری است ثابت. اگر  $OM = d$  باشد، خواهیم داشت:

$$MT^2 = MC \cdot MD = MA \cdot MB = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2$$

**مثال ۱۷** در شکل زیر مقدار x را حساب کنید.

**حل**

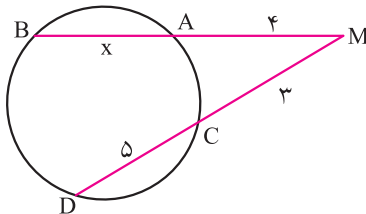


$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow x(x + 4) = (x + 1)(x + 2)$$

$$x^2 + 4x = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow 4x - 3x = 2 \Rightarrow x = 2$$

**مثال ۱۸** در شکل زیر مقدار x را حساب کنید.

**حل**

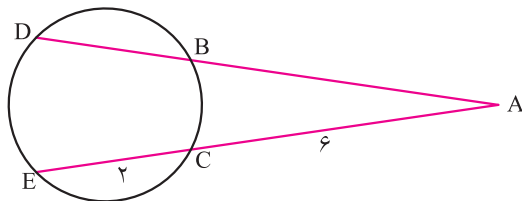


$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow 4(4 + x) = 3 \times 8 \Rightarrow 16 + 4x = 24$$

$$4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

**مثال ۱۹** در شکل زیر  $AB = 2BD$ ، اندازه MD چقدر است؟

**حل**



$$BD = x \Rightarrow AB = 2x$$

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE$$

$$2x \times 3x = 6 \times 8 \Rightarrow 6x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

### طریقه‌ی رسم مماس بر دایره

الف) از نقطه A واقع بر روی دایره:

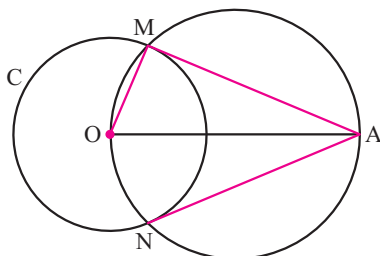
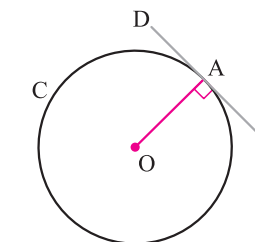
برای رسم مماس بر دایره در نقطه A از مرکز دایره به A وصل کرده، سپس در نقطه A عمودی بر OA رسم می‌کنیم، این عمود بر دایره مماس می‌شود.

ب) از نقطه A واقع در خارج دایره:

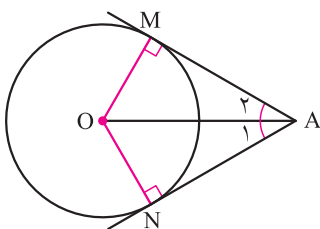
برای رسم مماس بر دایره از نقطه A ابتدا از مرکز دایره به A وصل کرده و به قطر OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایره C را در نقاط M و N قطع کند از A به نقاط M و N وصل می‌کنیم AM و AN بر دایره C مماس می‌شوند، زیرا اگر از O به M وصل کنیم، خواهیم داشت:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ONA}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp OM$$

بنابراین AM در نقطه M بر شعاع دایره عمود شد، پس AM بر دایره مماس است، به همین ترتیب می‌توان گفت AN نیز بر دایره مماس است.



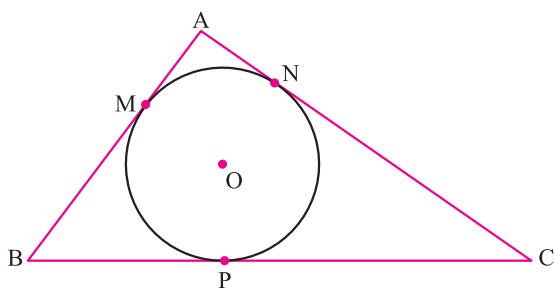
**مثال ۲۰** ثابت کنید اگر از نقطه‌ای واقع در خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس مساوی و  $OA$  نیمساز  $\hat{A}$  است.



**حل** از مرکز دایره به نقاط  $A$  و  $M$  و  $N$  وصل می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA \\ OM = ON \\ \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \triangle OMA \cong \triangle ONA \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AM = AN \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array} \right.$$

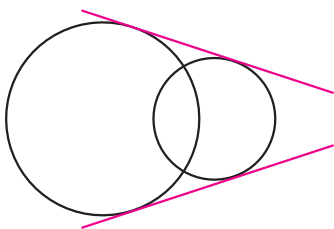
**مثال ۲۱** در شکل زیر دایره بر اضلاع مثلث مماس است، اگر اضلاع  $AB$ ،  $BC$  و  $AC$  به ترتیب  $۶$ ،  $۷$  و  $۸$  سانتی‌متر باشند اندازه  $AM$  چقدر است؟



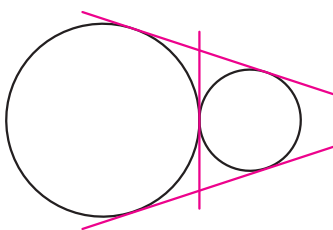
$$\begin{aligned} AM = AN \quad CN = CP \quad BM = BP \\ AM = x \Rightarrow AN = x \\ BM = 6 - x \Rightarrow BP = 6 - x \\ CN = 8 - x \Rightarrow CP = 8 - x \\ BP + PC = BC \Rightarrow (6 - x) + (8 - x) = 7 \\ 14 - 2x = 7 \Rightarrow 7 = 2x \Rightarrow x = 3.5 \end{aligned}$$

**مماس مشترک:** خطی که بر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک نامیده می‌شود.

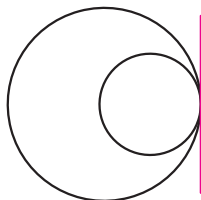
اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند خط، مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند خط، مماس مشترک داخلی نامیده می‌شود.



دو دایره متقاطع دو مماس مشترک دارند.



اگر دو دایره مماس خارجی باشند سه مماس مشترک دارند.



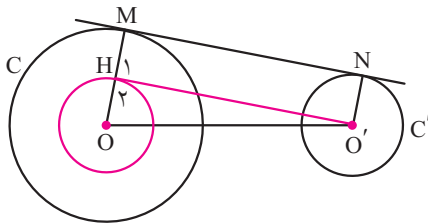
اگر دو دایره مماس داخلی باشند یک مماس مشترک دارند.



دو دایره متخارج چهار مماس مشترک دارند و دو دایره متداخل مماس مشترک ندارند.



**طریقه رسم مماس مشترک خارجی دو دایره متخارج:** دو دایره  $C(O, R)$  و



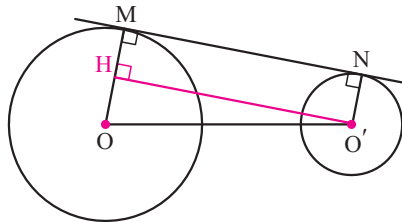
$C'(O', R')$  را در نظر گرفته و مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کنیم، سپس به مرکز  $O$  و به شعاع  $(R - R')$  دایره‌ای رسم کرده و از  $O'$  مماس  $O'H$  را بر آن رسم می‌کنیم. از  $O$  به  $H$  وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره  $C$  را در  $M$  قطع کند، سپس  $O'N$  را موازی  $OM$  می‌کشیم تا دایره  $C'$  را در  $N$  قطع کند خطی که از  $M$  و  $N$  می‌گذرد بر دو دایره مماس است زیرا:

$$OH \perp O'H \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_p = 90^\circ \quad MH = OM - OH = R - (R - R') = R' = O'N$$

دو ضلع مقابل  $MNO'H$  از چهارضلعی متوازی‌الاضلاع و مساویند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است چون یک زاویه قائمه دارد ( $\hat{H}_1 = 90^\circ$ ) پس مستطیل است.

بنابراین  $MN$  بر  $OM$  و  $O'N$  عمود و بر دو دایره  $C$  و  $C'$  مماس می‌باشد. اگر دو دایره مماس خارجی باشند، مماس مشترک خارجی آنها به همین روش رسم می‌شود.

### اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره



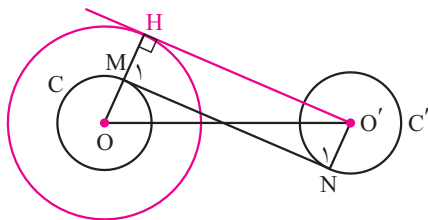
خط‌المرکزین دو دایره را رسم کرده و اندازه آن را  $d$  در نظر می‌گیریم و از  $O$  به  $M$  و از  $O'$  به  $N$  وصل می‌کنیم، همچنین از  $O'$  بر  $OM$  عمود می‌کنیم. زوایای چهارضلعی  $MNO'H$  قائمه‌اند، پس این چهارضلعی مستطیل است و  $MH = O'N = R'$  و  $O'H = MN$

$$OH = OM - MH = R - R'$$

$$O'H^2 + OH^2 = OO'^2 \Rightarrow O'H^2 + (R - R')^2 = d^2 \Rightarrow O'H^2 = d^2 - (R - R')^2$$

$$O'H = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow MN = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

**طریقه رسم مماس مشترک داخلی دو دایره متخارج:** دو دایره  $C(O, R)$  و

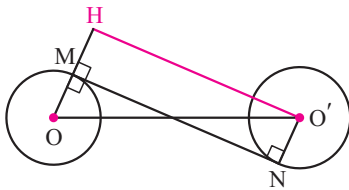


$C'(O', R')$  را در نظر گرفته و مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کنیم، به مرکز  $O$  و شعاع  $(R + R')$  دایره‌ای می‌کشیم و از  $O'$  بر این دایره مماس  $O'H$  را رسم می‌کنیم. از  $O$  به  $H$  وصل کرده و نقطه برخورد  $OH$  با دایره  $C$  را  $M$  می‌نامیم،  $O'N$  را موازی  $OH$  رسم کرده و از  $M$  به  $N$  وصل می‌کنیم، پاره خط  $MN$  مماس مشترک داخلی دو دایره می‌باشد زیرا:

$$OH \perp O'H \Rightarrow \hat{H} = 90^\circ \quad MH = O'N = R'$$

دو ضلع مقابل چهارضلعی  $MHO'N$  موازی و مساویند چون یک زاویه قائمه دارد، پس مستطیل است. بنابراین  $M_1$  و  $N_1$  قائمه و  $MN$  بر دو دایره مماس است.

### اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره



خط‌المركزين دو دایره را رسم کرده و اندازه آن را  $d$  در نظر می‌گیریم و از  $O$  به  $M$  وصل کرده و آن را به اندازه  $R'$  امتداد می‌دهیم، نقطه حاصل یعنی  $H$  را به  $O'$  وصل می‌کنیم، چهارضلعی  $MHO'N$  مستطیل می‌شود و  $MN = O'H$ .

$$O'H^2 + OH^2 = OO'^2 \Rightarrow O'H^2 + (R + R')^2 = d^2 \Rightarrow O'H^2 = d^2 - (R + R')^2$$

$$O'H = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \Rightarrow MN = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

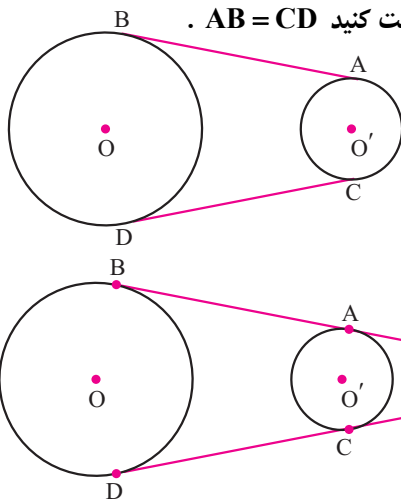
**مثال ۲۲** در دو دایره متخارج طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی به ترتیب ۶ و  $۲\sqrt{۲۱}$  سانتی‌متر و طول خط‌المركزين آنها ۱۰ سانتی‌متر است. اندازه شعاع‌های دو دایره را حساب کنید.

**حل**

$$\begin{cases} \sqrt{10^2 - (R + R')^2} = 6 \\ \sqrt{10^2 - (R - R')^2} = 2\sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 - (R + R')^2 = 36 \\ 100 - (R - R')^2 = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R + R')^2 = 64 \\ (R - R')^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 4 \end{cases} \Rightarrow 2R = 12 \Rightarrow R = 6 \Rightarrow R' = 8 - 6 = 2$$

**مثال ۲۳** در شکل زیر  $AB$  و  $CD$  مماس مشترک‌های خارجی دو دایره می‌باشند، ثابت کنید  $AB = CD$ .



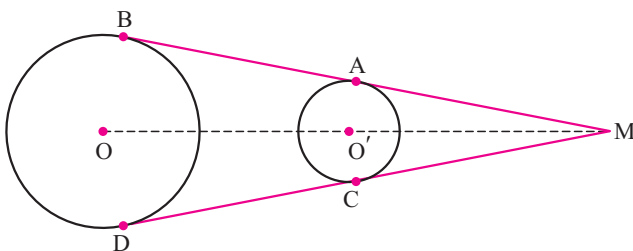
**حل**

مماس‌های  $BA$  و  $DC$  را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در  $M$  قطع کنند. قبلاً ثابت کرده‌ایم که اگر از نقطه‌ای واقع در خارج دو دایره بر دایره رسم کنیم، طول دو مماس مساوی است.

$$\begin{cases} MB = MD \\ MA = MC \end{cases} \Rightarrow MB - MA = MD - MC \Rightarrow AB = CD$$

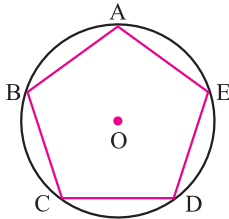
**مثال ۲۴** در شکل زیر  $AB$  و  $CD$  بر دو دایره مماسند، ثابت کنید نقاط  $M$ ،  $O$  و  $O'$  بر یک خط راست قرار می‌گیرند.

**حل**



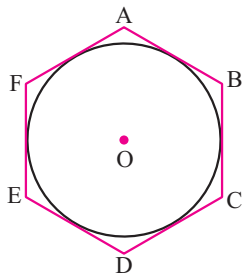
اگر از  $M$  به  $O'$  وصل کنیم می‌توان گفت  $MO'$  نیمساز  $\hat{M}$  است، به همین ترتیب پاره‌خط  $MO$  نیز نیمساز  $\hat{M}$  است، با توجه به اینکه نیمساز یک زاویه منحصر بفرد است، پس  $MO$  و  $MO'$  بر هم منطبقند و نقاط  $M$  و  $O$  و  $O'$  بر یک خط راست قرار دارند.

**دایره محیطی:** دایره‌ای که از تمام رئوس یک چند ضلعی بگذرد دایره محیطی چند ضلعی نامیده می‌شود.



در این صورت چند ضلعی را چند ضلعی محاطی می‌نامند. مرکز دایره محیطی نقطه برخورد عمودمنصف‌های اضلاع چند ضلعی می‌باشد. فقط برای چند ضلعی‌هایی که عمودمنصف‌های اضلاع آنها هم‌مس باشند، می‌توان دایره محیطی رسم کرد. شعاع دایره محیطی را با  $R$  نشان می‌دهیم.

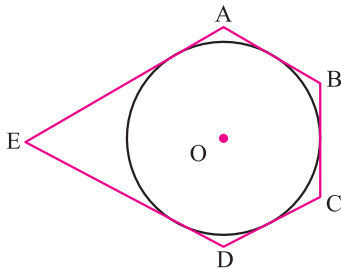
**دایره محاطی:** دایره‌ای که بر تمام اضلاع یک چند ضلعی مماس باشد، دایره محاطی چندضلعی نامیده می‌شود.



در این صورت چند ضلعی را چند ضلعی محیطی می‌نامند. مرکز دایره محاطی نقطه برخورد نیمسازهای زاویه‌های چندضلعی می‌باشد. فقط برای چندضلعی‌هایی که نیمسازهای زاویه‌ای آن هم‌مس باشند می‌توان دایره محاطی رسم کرد. شعاع دایره محاطی را با  $r$  نشان می‌دهیم.

همانطور که اشاره شد برای تمام چندضلعی‌ها نمی‌توان دایره محیطی یا محاطی رسم کرد، اما برای چندضلعی منتظم هم دایره محیطی و هم دایره محاطی می‌توان رسم کرد. در چندضلعی منتظم دایره‌های محیطی و محاطی هم مرکزند. مرکز چندضلعی منتظم همان مرکز دایره محیطی یا محاطی آن می‌باشد.

**مثال ۲۵** در شکل زیر یک پنج ضلعی بر دایره محیطی شده است. اگر  $S$  مساحت چندضلعی و  $P$  نصف محیط آن باشد، ثابت کنید  $r = \frac{S}{P}$ .



**حل**

از مرکز دایره به رئوس چندضلعی و نقاط تماس وصل می‌کنیم:

$$S = S(OAB) + S(OBC) + S(OCD) + S(ODE) + S(OAE)$$

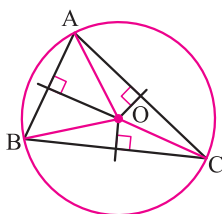
$$S = \frac{r \cdot AB}{2} + \frac{r \cdot BC}{2} + \frac{r \cdot CD}{2} + \frac{r \cdot DE}{2} + \frac{r \cdot AE}{2}$$

$$S = r \left( \frac{AB + BC + CD + DE + AE}{2} \right) \Rightarrow S = r \cdot P \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

به همین ترتیب می‌توان گفت اگر  $S$  و  $P$  به ترتیب مساحت، نصف محیط و

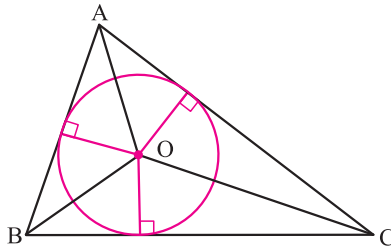
شعاع دایره محاطی یک چندضلعی محیطی باشد آنگاه  $r = \frac{S}{P}$ .

### دایره‌های محیطی و محاطی مثلث



با توجه به اینکه عمودمنصف‌های اضلاع مثلث هم‌مس و نقطه تلاقی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله می‌باشند، اگر به مرکز نقطه برخورد عمودمنصف‌ها و به شعاع فاصله آن نقطه تا رئوس مثلث دایره‌ای رسم کنیم از سه رأس مثلث می‌گذرد، این دایره، دایره محیطی مثلث می‌باشد.

همچنین در سال‌های قبل ثابت کرده‌ایم که نیمسازهای زوایای هر مثلث هم‌رس‌اند و نقطهٔ تلاقی نیمسازها نقطه‌ای است که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، اگر به مرکز نقطه برخورد نیمسازها و به شعاع فاصله آن نقطه تا اضلاع دایره‌ای رسم کنیم، این دایره بر اضلاع مثلث مماس می‌شود و دایره محاطی مثلث می‌باشد.

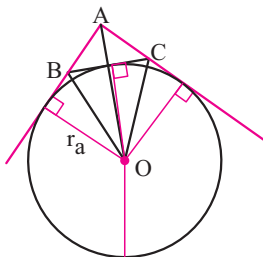


این دایره را دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌نامند.

شعاع این دایرهٔ محاطی برابر  $\frac{S}{P}$  می‌باشد.

$$r = \frac{S}{P}$$

علاوه بر نقطه برخورد نیمسازهای زوایه‌های داخلی مثلث که از سه ضلع مثلث به یک فاصله می‌باشند، سه نقطهٔ دیگر نیز در خارج مثلث قرار دارند که از اضلاع مثلث به یک فاصله می‌باشند، این نقاط در واقع نقاط برخورد نیمساز یک زاویهٔ داخلی و نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی دو رأس دیگر می‌باشند.



در شکل مقابل نقطهٔ O نقطهٔ تلاقی نیمساز  $\hat{A}$  و نیمسازهای زاویه‌های خارجی رؤس B، C می‌باشد که از اضلاع BC و خطوط AC و AB به یک فاصله می‌باشد، به مرکز O و به شعاع فاصله O تا اضلاع مثلث دایره‌ای می‌کشیم که بر سه ضلع مماس می‌شود. این دایره را دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامیم.

شعاع دایره محاطی فوق را با  $r_a$  نشان می‌دهیم.

$$S(ABC) = S(OAB) + S(OAC) - S(OBC)$$

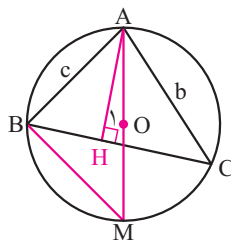
$$S = \frac{r_a \cdot c}{P} + \frac{r_a \cdot b}{P} - \frac{r_a \cdot a}{P} = r_a \left( \frac{c+b-a}{P} \right) = r_a \left( \frac{c+b+a-a}{P} \right)$$

$$S = r_a \left( \frac{c+b+a}{P} - a \right) \Rightarrow S = r_a (P - a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P - a}$$

به همین روش ثابت می‌شود شعاع‌های دایره‌های محیطی خارجی رؤس B و C برابرند با:

$$r_b = \frac{S}{P - b}, \quad r_c = \frac{S}{P - c}$$

**قضیه** ثابت کنید حاصلضرب اندازه‌های دو ضلع از هر مثلث برابر است با حاصلضرب قطر دایرهٔ محیطی آن در ارتفاع نظیر ضلع سوم.



برهان از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در M قطع کند و از B به M وصل می‌کنیم.

$$\hat{ABM} = \frac{\widehat{ACM}}{P} = \frac{180^\circ}{P} = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{ABM} = \hat{H}_1 = 90^\circ \\ \hat{M} = \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h_a} = \frac{2R}{b} \Rightarrow b \cdot c = 2R \cdot h_a$$