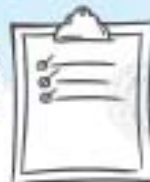


# فهرست



- فصل اول: مجموعه‌ها ..... ۷
- فصل دوم: عددهای حقیقی ..... ۴۶
- فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه ..... ۷۳
- فصل چهارم: توان و ریشه ..... ۱۲۱
- فصل پنجم: عبارات‌های جبری ..... ۱۴۹
- فصل ششم: خط و معادله‌های خطی ..... ۱۹۴
- فصل هفتم: عبارات‌های گویا ..... ۲۳۶
- فصل هشتم: حجم و مساحت ..... ۲۵۱
- آزمون‌ها ..... ۲۸۱



# مجموعه‌ها

## فصل ۱



### ● آشنایی با مجموعه

تا حالا فکر کردید که گروه یعنی چی؟ مثلاً گروه دوستان شما یا مجموعه (گروه) دانش‌آموزان کلاس شما. هر چه قدر فکر کنید تعریفی پیدا نمی‌کنید؛ چون مفهوم ساده‌تر از مجموعه (یا همان گروه یا دسته یا ...) در ریاضیات وجود ندارد که بخواهیم با آن مجموعه را تعریف کنیم. اما دو ویژگی مهم هست که هر مجموعه‌ای در ریاضیات آن‌ها را دارد و در واقع ما با این دو ویژگی تشخیص می‌دهیم که با یک مجموعه روبرو هستیم یا نه:

۵

- ۱- مشخص بودن عضویت اشیاء. اعضای مجموعه کاملاً دقیق و بدون ابهام، مشخص است؛ اگر چه ما همه اعضایش را نشناسیم. مثلاً سه عدد اول، مشخص‌کننده یک مجموعه نیست؛ چون این سه عدد می‌توانند ۲، ۳ و ۵ یا ۳، ۴ و ۵ یا ۷ یا هر ستهایی دیگری باشند. ولی تمام اعداد اول یک رقمی، مشخص‌کننده یک مجموعه است؛ زیرا حتماً ۲، ۳، ۵ و ۷ (و نه چیز دیگری) را مشخص می‌کند.
- ۲- متمایز (غیرتکراری) بودن عضویت اشیاء. هر شیء، یا عضو مجموعه هست یا نیست. خیلی بی‌معنی است که بگوییم یک شیء، دو بار عضو مجموعه است. مثل این که بگوییم شما دو بار عضو خانواده و بچه پدرتان هستید!

حالا برای این که ببینید خوب ماجرا را فهمیدید یا نه، تست زیر را حل کنید:

**تست:** چه تعداد از عبارات زیر، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

(الف) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲	(ب) تمام اعداد بزرگ
(پ) چهار عدد طبیعی شمارنده ۳۵	(ت) انسان‌هایی که در سال ۱۳۹۵ هجری شمسی به دنیا آمده‌اند.
۱ (۱)	۳ (۳)
۲ (۲)	۴ (۴)

**پاسخ:** گزینه ۲ تمام جملات را بررسی می‌کنیم:

**الف)** این عبارت اعضای مشخص ندارد. مثلاً می‌تواند ۷ و ۵ یا ۳ و ۵ باشد پس مجموعه نیست.

**ب)** در این عبارت هم ابهام وجود دارد؛ چون اعداد بزرگ از نظر افراد مختلف فرق دارد. مثلاً من فکر می‌کنم  $10^7$  عدد بزرگی است ولی برادر من نه!

**پ)** چون در کل ۴ عدد شمارنده ۳۵ می‌باشند (۱، ۵، ۷، ۳۵)، پس اعضای که این عبارت تعیین می‌کند کاملاً مشخص‌اند و هیچ ابهامی در آن وجود ندارد.

**ت)** درست است که ما نمی‌دانیم انسان‌هایی که در سال ۱۳۹۵ به دنیا آمده‌اند، چه کسانی هستند، ولی مشخص‌اند؛ یعنی هیچ کسی وجود ندارد که به نظر بعضی‌ها در سال ۱۳۹۵ به دنیا آمده باشد و به نظر بعضی‌ها نه. پس این جمله مشخص‌کننده مجموعه‌ای از افراد است.

**تذکر:** همان‌طور که در بررسی عبارت (ت) دیدید، مهم این است که در توصیف یک مجموعه خاص، ابهام و توضیح سلیقه‌ای وجود نداشته و همه چیز

دقیق معرفی شده باشد. حالا این که علم ما کم است و نمی‌توانیم اعضا را مشخص کنیم، به مجموعه ربطی ندارد و مشکل ماست.

**نکته واجب:** چندتا موضوع زیر، درباره مجموعه‌ها قرارداد شده است و همه باید آن‌ها را رعایت کنیم:

① برای نمایش اعضای مجموعه از علامت  $\{ \}$  (آکولاد) استفاده می‌کنیم. مثلاً مجموعه اعداد اول یک‌رقمی را این‌طوری نشان می‌دهیم:  $A = \{2, 3, 5, 7\}$ . در ضمن، اگر بخواهیم بگوییم که ۲ عضو مجموعه  $A$  است، می‌نویسیم:  $2 \in A$  ولی چون ۱۰ عضو  $A$  نیست، باید این‌جوری بنویسیم:  $10 \notin A$ .

② ترتیب نوشتن اعضا در مجموعه اهمیت ندارد. مثلاً  $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ . منتها بعضی وقت‌ها که می‌خواهیم از «سه نقطه» (...) استفاده کنیم، ترتیب اعضا برای حدس‌زدن اعضای بعدی مهم می‌شود. مثلاً برای نشان دادن مجموعه اعداد طبیعی، می‌نویسیم:  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ . حالا اگر بیاییم و این مدلی:  $\{3, 5, 1, 2, 4, \dots\}$  بنویسیم، احتمالاً مخاطب گیج می‌شود و منظور ما را نمی‌فهمد!

③ عضو مجموعه می‌تواند هر چیزی باشد؛ از اعداد بگیرد تا گلو و گوسفند! حتی عضو مجموعه می‌تواند مجموعه هم باشد. مثلاً:

$$A = \{2, 5, \{6, 7\}, 7\}$$

مجموعه  $A$ ، ۴ عضو دارد که آن‌ها را با رنگ مشخص کردیم. همان‌طور که می‌بینید ۳ تای آن‌ها عدد هستند:  $5 \in A, 4 \in A$  و ۷ یکی از آن‌ها مجموعه است:  $\{6, 7\} \in A$ ؛ خیلی دقت کنید که  $6 \in A$  (۶ عضو مجموعه‌ای است که آن مجموعه عضو  $A$  است)، در واقع چیزهایی عضو  $A$  هستند که بدون آکولاد در مجموعه  $A$  دیده شوند.

④ مجموعه می‌تواند بدون عضو باشد. مثل «مجموعه اعدادی که از خودشان بزرگ‌ترند». چون هیچ عددی از خودش بزرگ‌تر نیست، نمایش این مجموعه به صورت  $\{ \}$  می‌شود. به مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد می‌گوییم «تهی» و آن را با حرف یونانی  $\emptyset$  نشان می‌دهیم.



$$A = \{2, 3, B, 7\}, B = \{3, 9, 4\}$$

تست: با توجه به مجموعه‌های زیر کدام گزینه درست است؟

$$9 \in A \text{ (۴)}$$

$$4 \in A \text{ (۳)}$$

$$3 \in A \text{ (۲)}$$

$$B \in A \text{ (۱)}$$

$$A = \{2, 3, \underbrace{\{3, 9, 4\}}_B, 7\}$$

پاسخ: گزینه ۳. مجموعه  $A$  را این‌طوری می‌نویسیم:

حالا معلوم شد که  $A$ ، ۴ عضو دارد، ۲، ۳،  $B$ ، و ۷. پس ۹ و ۴ فقط عضوهای  $B$  اند و عضو  $A$  نیستند.

### مجموعه‌های پرکاربرد

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \text{ - مجموعه اعداد طبیعی}$$

مجموعه‌های زیر در ریاضیات خیلی پرکاربردند. اسم و نماد آن‌ها را حفظ کنید:

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \text{ - مجموعه اعداد حسابی}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ - مجموعه اعداد صحیح}$$

$$\mathbb{B} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \text{ - مجموعه اعداد صحیح زوج}$$

$$\mathbb{Q} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\} \text{ - مجموعه اعداد صحیح فرد}$$

در مورد مجموعه اعداد گویا ( $\mathbb{Q}$ )، مجموعه اعداد گنگ ( $\mathbb{Q}$ ) و مجموعه اعداد حقیقی ( $\mathbb{R}$ ) در فصل دوم صحبت می‌کنیم.

### مجموعه‌های برابر

اگر همه عضوهای مجموعه  $A$  عضو  $B$  نیز بوده و همه عضوهای مجموعه  $B$  عضو  $A$  نیز باشند، می‌گویند  $A$  و  $B$  برابرند و می‌نویسند  $A = B$ .

(تیزهوشان)

تست: به ازای چند مقدار از  $x$  دو مجموعه  $A = \{1, x, x^2\}$  و  $B = \{y, y^2\}$  می‌توانند برابر شوند؟

$$3 \text{ (۴)}$$

$$2 \text{ (۳)}$$

$$\text{صفر (۲)}$$

$$1 \text{ (۱)}$$

۱- عامل این تناقض همان «سه نقطه» است که مفهوس مبهم است. اگر بخواهید دقیق باشید باید از نمایش مجموعه‌ها به زبان ریاضی استفاده کنید که کمی جلوتر یاد می‌گیرید.

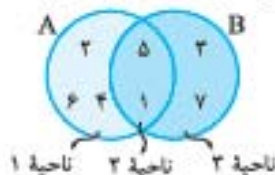
**پاسخ:** گزینه ۳ چون  $1 \in A$  پس باید ۱ عضو  $B$  هم باشد. در این صورت دو حالت ممکن است:

$$\begin{cases} y=1 \Rightarrow B = \{1, 1^2\} = \{1\} \Rightarrow A=B = \{1, x, x^2\} \Rightarrow x=1 \\ y=-1 \Rightarrow B = \{-1, (-1)^2\} = \{-1, 1\} \Rightarrow A=B = \{1, x, x^2\} \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

### ● نمایش مجموعه‌ها

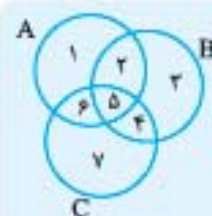
غیر از روش نوشتن اعضا در علامت  $\{$  و نوشتن توضیح فارسی، دو روش دیگر برای نشان دادن مجموعه‌ها یاد می‌گیریم:

① **نمودار ون:** در این روش هر مجموعه را با یک شکل بسته نشان می‌دهیم و اعضای آن را در داخل آن شکل می‌نویسیم. مثلاً در شکل زیر، ناحیه (۱) شامل اعضای از  $A$  است که عضو  $B$  نیستند. ناحیه (۲) شامل اعضای است که هم عضو  $A$  هستند و هم عضو  $B$  و ناحیه (۳) شامل اعضای است که فقط عضو  $B$  هستند.



$$\Rightarrow \begin{cases} A = \{2, 4, 6, 1, 5\} \\ B = \{3, 7, 1, 5\} \end{cases}$$

حالا که مفهوم نمودار ون را یاد گرفتید، تست مفهومی زیر را حل کنید:



**تست:** اگر  $A$  نشان دهنده اعداد طبیعی زوج،  $B$  نشان دهنده مضرب طبیعی ۳ و  $C$  نشان دهنده مضرب طبیعی ۷ باشد، اعداد ۲۷ و ۱۴ در کدام ناحیه‌های نمودار زیر قرار می‌گیرند؟

- |         |         |
|---------|---------|
| ۱) ۵، ۲ | ۲) ۶، ۲ |
| ۳) ۵، ۳ | ۴) ۶، ۳ |

**پاسخ:** گزینه ۴ عدد ۲۷ بر ۳ بخش پذیر است؛ ولی نه زوج است و نه مضرب ۷. پس فقط باید عضو  $B$  باشد و عضو  $A$  و  $C$  نباشد. این جور عضوها در ناحیه ۳ قرار می‌گیرند. اما عدد ۱۴ هم زوج است و هم مضرب ۷ ولی مضرب ۳ نیست؛ پس  $14 \in A$  و  $14 \in C$  ولی  $14 \notin B$ . الان معلوم شد که ۱۴ را باید در ناحیه ۶ بنویسیم. **نمایش ریاضی:** برای استفاده از این روش، باید ویژگی مشترک اعضای مجموعه را با نماد ریاضی بنویسیم. به طور مثال برای نوشتن نمایش ریاضی مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۱۰، می‌گوییم اعداد زوج را به شکل  $2x$  نشان می‌دهیم. این شکل را نوشته و بعد از آن علامت  $\{$  را می‌آوریم و آن را به طوری که می‌خوانیم، بعد از این علامت، توضیحات بیشتری را که لازم است، می‌نویسیم. دقت کنید که توضیحات نباید اضافی باشد:  $\{2x \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$

**مثال:** نمایش ریاضی و اعضای چند مجموعه را نوشته‌ایم:

۱)  $A = \{2x + 3 \mid x = 2, 4, 7\} = \{2 \times 2 + 3, 2 \times 4 + 3, 2 \times 7 + 3\} = \{7, 11, 17\}$

۲)  $B = \left\{ \frac{(-1)^{x+1}}{x+1} \mid x \in \mathbb{W}, x^2 < 5 \right\}$

تنها اعداد حسابی که در  $x^2 < 5$  صدق می‌کنند، می‌شوند ۰، ۱، ۲. حالا با قرار دادن این مقادیر اعضا را مشخص می‌کنیم:

$$\left\{ \frac{(-1)^1}{1}, \frac{(-1)^2}{2}, \frac{(-1)^3}{3} \right\} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\}$$

۳)  $C = \left\{ \frac{5}{9}(10^n - 1) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$$= \left\{ \frac{5}{9}(10^0 - 1), \frac{5}{9}(10^1 - 1), \frac{5}{9}(10^2 - 1), \dots \right\} = \left\{ \frac{5}{9} \times 9, \frac{5}{9} \times 99, \frac{5}{9} \times 999, \dots \right\} = \{5, 55, 555, \dots\}$$

۴)  $D = \left\{ \frac{2x-y}{2y+1} \mid x, y \in \mathbb{N}, xy = 4 \right\}$

اول مقادیر قابل قبول برای  $x$  و  $y$  را به دست می‌آوریم:  $xy = 4 \Rightarrow (x=1, y=4)$  یا  $(x=2, y=2)$  یا  $(x=4, y=1)$

$$D = \left\{ \frac{2 \times 1 - 4}{2 \times 4 + 1}, \frac{2 \times 2 - 2}{2 \times 2 + 1}, \frac{2 \times 4 - 1}{2 \times 1 + 1} \right\} = \left\{ -\frac{2}{9}, \frac{2}{5}, \frac{7}{3} \right\}$$

حالا با جای گذاری این ۳ مقدار، اعضای  $D$  را حساب می‌کنیم:

(الترزی امتحانی)

تست: اگر  $A = \{-1, -\frac{2}{5}, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$  و  $B = \{x \mid x \in A, \frac{x^2}{2} \in \mathbb{N}\}$  باشند، آن گاه مجموعه  $B$  چند عضو دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳.  $x$ هایی عضو  $B$  هستند که عضو  $A$  باشند و نصف مربعشان (یعنی  $\frac{x^2}{2}$ ) عدد طبیعی باشد. اعضای  $A$  را آزمایش می‌کنیم:

$$x = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}, \quad x = -\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{2}{25} \notin \mathbb{N}, \quad x = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 0 \notin \mathbb{N}$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}, \quad x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 1 \in \mathbb{N}, \quad x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}, \quad x = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \in \mathbb{N}$$

$$B = \{\sqrt{2}, 2\}$$

در نهایت:

زیرمجموعه

اگر تمام عضوهای مجموعه  $A$  عضو مجموعه  $B$  باشند، آن گاه می‌گوییم  $A$  زیرمجموعه  $B$  است و می‌نویسیم  $A \subset B$ . مثال:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \subset B$$

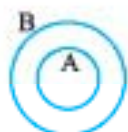
در واقع برای این که نشان دهیم  $A$  زیرمجموعه  $B$  نیست، باید عضوی در  $A$  پیدا کنیم که عضو  $B$  نباشد.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5\}$$

این یکی مثال را ببینید:

چون  $1 \in A$  ولی  $1 \notin B$  پس  $A \not\subset B$ .

اگر  $A \subset B$ ، نمودار ون این طوری رسم می‌شود ( $A \neq B$ ):



مثال: تمام زیرمجموعه‌های  $\{1, 2, 3, 4\}$  را می‌نویسیم:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

۴ زیرمجموعه یک عضوی

۶ زیرمجموعه دو عضوی

۴ زیرمجموعه سه عضوی

این مثال را زدیم تا نکته زیر را بهتر بفهمید:

نکته واجب:

$$\emptyset \subset A, A \subset A$$

۱) برای هر مجموعه دلخواه به نام  $A$  همواره داریم:

۲) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی برابر  $2^n$  است.

۳) در یک مجموعه  $n$  عضوی تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی و  $(n-k)$  عضوی برابر است.

از مفهوم زیرمجموعه‌بودن و نکته‌ای که گفتیم، تست‌های خیلی خیلی زیاد و متنوعی طرح می‌شود که ما چندتا از رایج‌ترین‌ها را برایتان می‌آوریم تا حال

کنید! ☺

تست: چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟

(ب) اگر  $A \not\subset B$  و  $B \not\subset C$  آن گاه  $A \not\subset C$ .

(الف) اگر  $A \subset B$  و  $B \subset C$  آن گاه  $A \subset C$ .

(ت) اگر  $x \in A$  و  $A \in B$  آن گاه  $x \in B$ .

(پ) اگر  $A \subset B$  و  $B \subset A$  آن گاه  $A = B$ .

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

**پاسخ:** گزینه ۲ همه گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

**الف)** از تعریف  $A \subset B$  و  $B \subset C$  نتیجه می‌گیریم که هر عضو  $A$  در  $B$  است و هر عضو  $B$  در  $C$  نیز هست. پس تمام اعضای  $A$  عضو  $C$  نیز هستند؛ خلاصه این‌که  $A \subset C$ . پس این گزاره حتماً درست است.

$$A = \{2\}, B = \{2\}, C = \{2, 4\}$$

**ب)** مثال می‌آوریم که  $A \not\subset B$  و  $B \subset C$  برقرار باشد ولی  $A \not\subset C$  رد شود.

در واقع با این مثال نشان دادیم که نتیجه‌گیری این گزاره می‌تواند غلط باشد و همیشگی نیست.

**پ)** خیلی ساده از  $A \subset B$  و  $B \subset A$  می‌فهمیم که اعضای  $A$  و  $B$  دقیقاً یکی‌اند. پس  $A = B$ .

$$A = \{1\}, B = \{2, \underbrace{\{1\}}_A\}$$

**ت)** مثال می‌آوریم تا این نتیجه‌گیری را رد کنیم.  $x = 1$  را در نظر بگیرید

الآن  $x = 1$  عضو  $A$  است و  $A \in B$  ولی  $1 \notin B$ .

**تست:** تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $m$  عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $m-k$  عضوی است؟ **(تیزهوشان)**

$$2^k \quad (4)$$

$$2^{m+k} \quad (3)$$

$$k^m \quad (2)$$

$$m^k \quad (1)$$

**پاسخ:** گزینه ۴ طبق مورد ۲ در نکته‌ای که گفتیم، می‌رویم جلو:

$$\frac{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه } m \text{ عضوی}}{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه } m-k \text{ عضوی}} = \frac{2^m}{2^{m-k}} = 2^{m-(m-k)} = 2^{m-m+k} = 2^k$$

حالا یک تست دیگر از همین سبک ولی کمی سخت‌تر، می‌آوریم:

**تست:** اختلاف تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k+3$  عضوی با ۱۰ برابر زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k$  عضوی ۶۴ است. این مجموعه **(مدارس همتک)**

$k$  عضوی چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟

$$70 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

**پاسخ:** گزینه ۲ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k+3$  عضوی می‌شود  $2^{k+3} = 2^k \times 2^3 = 8 \times 2^k$  همین‌طور می‌فهمیم که ۱۰ برابر تعداد

زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k$  عضوی می‌شود  $10 \times 2^k$ . حالا می‌رویم سراغ حل معادله:

$$\frac{10 \times 2^k - 8 \times 2^k}{2 \times 2^k} = 64 \Rightarrow 2^{k+1} = 64 = 2^6 \Rightarrow k+1 = 6 \Rightarrow k = 5$$

حالا طبق مورد ۳ در نکته، می‌گوییم در یک مجموعه ۵ عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی و  $5-4=1$  عضو برابر است. الان خودتان بگویید

که مثلاً  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند زیرمجموعه یک عضوی دارد؟

گاهی وقت‌ها هم می‌شود که در تست‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های خاصی را می‌خواهد که باید کمی ابتکار داشته باشیم. تست‌های زیر را ببینید:

**تست:** مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$  چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که جمع عضوهای آن برابر ۱۵ باشد و عدد ۴ عضو آن باشد؟ **(تیزهوشان)**

(۴) چنین مجموعه‌ای وجود ندارد.

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

**پاسخ:** گزینه ۲ دنبال تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی این شکلی  $\{4, a, b\}$  می‌گردیم. با این شرط که  $4 + a + b = 15$ . پس:

$$a + b = 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 8 \\ b = 3 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}$$

خودتان می‌توانید بگویید که چرا جواب  $\begin{cases} a = 7 \\ b = 4 \end{cases}$  را قبول نکردیم؟ چون آن وقت زیرمجموعه ۳ عضوی نمی‌شد:

$$a = 7, b = 4 \Rightarrow \{4, a, b\} = \{4, 7, 4\} = \{4, 7\}$$

**تست:** چند مجموعه مانند  $X$  می توان یافت، به طوری که اگر  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  باشند، داشته باشیم  $B \subset X \subset A$ ؟

۸ (۴)                      ۱۶ (۳)                      ۳۲ (۲)                      ۶۴ (۱)

**پاسخ:** گزینه ۱ چون  $B$  زیرمجموعه  $X$  است، پس حتماً ۱، ۲، ۳ و ۴ عضو  $X$  اند. از طرفی  $X$  نمی تواند عضوی خارج از  $A$  داشته باشد؛ پس باید بینیم با اضافه کردن تعدادی از اعضای  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  چند حالت مختلف برای  $X$  می توان ساخت:

$$2^6 = 64 = \text{تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ۶ عضوی}$$

مثلاً:  $X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ،  $X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،  $X_3 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ، ...

نکته تکمیلی زیر خیلی پرکاربرد نیست ولی در تست های خیلی سخت، کار را آسان می کند:

**نکته تکمیلی:** تعداد زیرمجموعه های  $k$  عضوی یک مجموعه  $n$  عضوی برابر  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  است ( $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$ ).

**مثال:** تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی و ۲ عضوی یک مجموعه ۵ عضوی را به دست می آوریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه های دو عضوی} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{(1 \times 2) \times (1 \times 2 \times 3)} = 10$$

طبق مورد ۳ در نکته قبلی، تعداد زیرمجموعه های  $3 = 5 - 2 = 3$  عضوی یک مجموعه ۵ عضوی هم برابر ۱۰ می شود. برای این که ایمان بیاورید، خودتان با این فرمول دست به کار شوید و آن را حساب کنید.

**تست:** مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که هر یک شامل عضو  $a$  باشد؟

۱۵ (۴)                      ۱۲ (۳)                      ۱۰ (۲)                      ۸ (۱)

**پاسخ:** گزینه ۴ در واقع می خواهیم ببینیم که مجموعه  $\{b, c, d, e, f, g\}$  چند زیرمجموعه دو عضوی دارد (چرا؟):

$$\frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{2 \times (2 \times 3 \times 4)} = 15$$

با نکته زیر بار و بندیل این قسمت را می بندیم:

**نکته تکمیلی:** مجموعه تمام زیرمجموعه های  $A$  را  $P(A)$  می نامند و به آن مجموعه توانی  $A$  می گویند. اگر  $n$  عضو داشته

باشد  $P(A)$ ،  $2^n$  عضو و  $2^{(n-1)}$  زیرمجموعه دارد.

## ● اعمال بین مجموعه ها

### الف) اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، یعنی مجموعه ای که شامل تمام عضوهای مشترک  $A$  و  $B$  است. این مجموعه را به صورت  $A \cap B$  نشان می دهند. به طور

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

مثال اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  باشند، آن وقت:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه را به صورت ریاضی این طور نشان می دهند:

## ب) اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام عضوهای  $A$  و  $B$  است. این مجموعه را به صورت  $A \cup B$  نشان می‌دهند:

$$\begin{cases} A = \{1, 2, 3, 4\} \\ B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \end{cases} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

در واقع فقط اعضای که حداقل عضو یکی از مجموعه‌های  $A$  یا  $B$  باشند، باید در مجموعه  $A \cup B$  عضو باشند. نمایش ریاضی آن به شکل زیر است:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

کم‌کم داریم وارد جبر مجموعه‌ها می‌شویم. نکته‌های زیر را خیلی خیلی با دقت بخوانید:

### نکته واجب:

$$A \cap A = A \cup A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

① برای هر مجموعه‌ای به نام  $A$  داریم:

$$(A \cap B) \subset A, \quad (A \cap B) \subset B$$

② اشتراک دو مجموعه حتماً زیرمجموعه آن دو مجموعه است:

$$A \subset (A \cup B), \quad B \subset (A \cup B)$$

③ هر دو مجموعه دلخواه، حتماً زیرمجموعه اجتماعشان هستند:

$$\text{اگر } A \subset B \text{ آن‌گاه } A \cap B = A \text{ و } A \cup B = B.$$

**تست:** کدام یک از تساوی‌های زیر نادرست است؟

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \quad (1) & A \cup (A \cap B) &= A \quad (2) \\ (A \cap B) \cup (B \cup A) &= A \quad (3) & (A \cap B) \cap (A \cup B) &= A \cap B \quad (4) \end{aligned}$$

**پاسخ:** گزینه ④ با استفاده از ③ مورد نکته بالا، تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

① طبق مورد (۲)،  $(A \cap B) \subset A$  و طبق مورد ④، اگر  $C \subset A$  آن‌گاه  $A \cup C = A$  پس:

$$A \cup C = A \cup (A \cap B) = A$$

② شبیه گزینه (۱) عمل می‌کنیم:

$$A \cap (A \cup B) = A \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} A \cap (A \cup B) = A$$

③ از مورد (۲) نتیجه می‌گیریم که برای هر دو مجموعه دلخواه،  $A \cap B$  زیرمجموعه  $A \cup B$  است:

$$(A \cap B) \subset A, \quad B \subset (A \cup B)$$

به عبارت دیگر  $C \subset D$  پس طبق مورد (۴) می‌شود این‌جوری نتیجه گرفت:

$$C \subset D \Rightarrow C \cap D = (A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$$

④ طبق استدلال گزینه (۳) می‌توان گفت:

$$C \cup D = (A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cup B$$

پس تساوی نوشته‌شده در گزینه (۴) قاطع است.

**تذکر:** به تساوی‌های گزینه‌های (۱) و (۲)، قوانین جذب می‌گویند. بهتر است آن‌ها را حفظ باشید.

**نکته تکمیلی:** تساوی‌های زیر همواره برقرار است:

① توزیع‌پذیری اشتراک روی اجتماع:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

② توزیع‌پذیری اجتماع روی اشتراک:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



**مثال:** درستی تساوی ۱ در نکته قبل را برای مجموعه‌های دلخواه زیر بررسی می‌کنیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 8\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}, C = \{1, 4, 6, 7\}$$

$$\text{سمت چپ تساوی: } B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{سمت راست تساوی: } \begin{cases} A \cap B = \{2, 3, 4\} \\ A \cap C = \{1, 4\} \end{cases} \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

### ب) تفاضل دو مجموعه

مجموعه  $A - B$  (A منهای B) شامل همهٔ عضوهای A است که عضو B نباشند. مثلاً اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  باشند آن وقت:

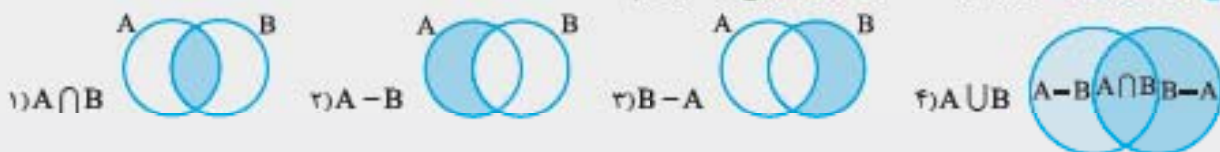
$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = \{1, 2\}$$

$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\} = \{5, 6, 7\}$$

**تذکره:** طبق تعریف، برای هر مجموعهٔ دلخواه A می‌شود نوشت:  $A - \emptyset = A$  و  $\emptyset - A = \emptyset$ .

در مثال زیر، می‌خواهیم اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها را روی نمودار ون نشان دهیم:

**مثال:** در هر مورد رابطهٔ جبری نوشته‌شده را در نمودار ون رنگ زده‌ایم:



**نکته و اجب:** از مثال بالا می‌توان تساوی‌های زیر را نتیجه گرفت:

$$1) A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$2) B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

$$3) A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$4) A \cup B = B \cup (A - B)$$

تست پایین حالت پیشرفته‌تر مثال بالا است:

**تست:** اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{2, 4, 7\}$  و  $C = \{1, 2, 7, 8\}$  باشند، مجموع مقادیر در قسمت‌های رنگ‌شده کدام است؟ (تیزهوشان)



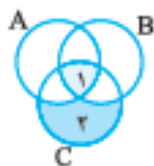
۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۱۲ (۴)

۱۷ (۳)

**پاسخ:** گزینه ۱. دوتا قسمت رنگ‌شده را شماره‌گذاری می‌کنیم. قسمت ۱ یعنی وجه اشتراک هر سه مجموعه، قسمت ۲ می‌شود اعضای که فقط در C هستند:



$$1) \text{ قسمت رنگ‌شده } 1 = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C = \{2\}$$

$$2) \text{ قسمت رنگ‌شده } 2 = \{x \mid x \in C, x \notin A, x \notin B\} = \{8\}$$

جواب این تست می‌شود  $2 + 8 = 10$ . حواستان باشد که قسمت ۲ را می‌شد به صورت  $C - (A \cup B)$  هم نشان داد.

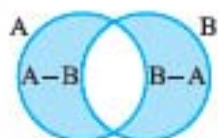
ت) تفاضل متقارن

به اجتماع مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  می‌گویند تفاضل متقارن  $A$  و  $B$

نمایش تفاضل متقارن به صورت  $A \Delta B$  است:

در واقع  $A \Delta B$  شامل تمام اعضای است که فقط عضو  $A$  هستند یا فقط عضو  $B$  (عضو  $A \cap B$  نیستند).

حالا نمودار ون را برای تفاضل متقارن ببینید و تعریف دیگر  $A \Delta B$  را از آن نتیجه بگیرید:



$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \Delta A = \emptyset, A \Delta \emptyset = A$$

**تذکر:** با توجه به تعریف برای هر مجموعه دلخواه به نام  $A$  داریم:

**مثال:** برای  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5\}$ ،  $A \Delta B$  را با استفاده از تعریف و نتیجه به دست آمده، حساب می‌کنیم:

$$\text{تعریف: } \begin{cases} A - B = \{1, 2\} \\ B - A = \{5\} \end{cases} \Rightarrow A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 5\}$$

$$\text{نتیجه: } \begin{cases} A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ A \cap B = \{3, 4\} \end{cases} \Rightarrow A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 5\}$$

**نست:**  $A$  یک مجموعه ۷ عضوی و  $B$  یک مجموعه ۵ عضوی است. کدام نتیجه‌گیری اشتباه است؟

(۱) اگر  $A \cap B = \emptyset$  آن‌گاه  $A \Delta B$ ، ۱۲ عضوی است. (۲)  $B \subset A$  آن‌گاه  $A \Delta B$ ، ۲ عضوی است.

(۳) اگر  $A \cap B$  ۲ عضوی باشد آن‌گاه  $A \Delta B$ ، ۱۰ عضوی است. (۴) اگر  $A \cup B$  ۹ عضوی باشد آن‌گاه  $A \Delta B$ ، ۶ عضوی است.

**پاسخ:** گزینه ۳ مرحله به مرحله تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): اگر  $A \cap B = \emptyset$  آن وقت  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم هستند:



$$A \Delta B = (A \cup B) - \underbrace{(A \cap B)}_{\emptyset} = A \cup B$$

در این صورت  $A \cup B$ ،  $5 + 7 = 12$  عضوی خواهد بود. در نتیجه:

یعنی استدلال این گزینه درست است و تعداد اعضای  $A \Delta B$  می‌شود ۱۲ تا.

گزینه (۲): در این گزینه می‌خواهیم از رابطه  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$  استفاده کنیم: چون  $B \subset A$  پس  $B - A = \emptyset$ .

$$A \Delta B = (A - B) \cup \emptyset = (A - B)$$

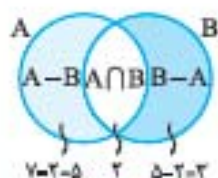
از طرفی چون مجموعه  $A$ ، ۷ عضوی و مجموعه  $B$ ، ۵ عضوی است و  $B \subset A$ ، مجموعه  $A - B$ ، ۲ عضوی خواهد بود.

گزینه (۳): نمودار ون را ببینید. اگر  $A \cap B$ ، ۲ عضوی باشد،  $A - B$ ،  $7 - 2 = 5$  عضوی و  $B - A$ ،  $5 - 2 = 3$  عضوی است.

پس  $A \Delta B$ ،  $5 + 3 = 8$  عضوی می‌شود.

پس در این گزینه، اشتباه نتیجه‌گیری شده است.

گزینه (۴): با توجه به نکته تفاضل دو مجموعه، این طوری می‌نویسیم:



$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

حالا چون  $A \cup B$ ، ۹ عضوی و  $A$ ، ۷ عضوی است نتیجه می‌گیریم  $(B - A)$ ، ۲ عضوی خواهد بود. آن‌ان این طوری می‌نویسیم:

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

و نتیجه می‌گیریم که  $A - B$ ،  $9 - 5 = 4$  عضوی است. خلاصه این که  $A \Delta B$  می‌شود  $4 + 2 = 6$  عضوی.

خسته نباشید! انصافاً تست سختی براتون طرح کرده بودم که از عهدماش برلومدید، دمتون گرم! ☺

حالا دیگر نوبت تعریف «مجموعه مرجع» و «متمم یک مجموعه» است.

### مجموعه مرجع

در هر مسئله، می‌شود مجموعه‌ای را در نظر گرفت که همهٔ مجموعه‌های دیگر، زیرمجموعهٔ آن باشند. به این مجموعه، مجموعهٔ مرجع می‌گویند و آن را  $M$  یا  $U$  نشان می‌دهند. واضح است تمام مجموعه‌ها (مثلاً  $A$ ) زیرمجموعهٔ  $M$  هستند؛ پس:

$$A \cap M = A, \quad A \cup M = M$$

### متمم یک مجموعه

متمم یک مجموعه به نام  $A$  با توجه به مجموعهٔ مرجع این‌طور تعریف می‌شود: «تمام اعضای که در مجموعهٔ مرجع هستند ولی در  $A$  نیستند». این مجموعه را با  $A'$  نشان می‌دهیم و نمودار ون و نمایش ریاضی آن به صورت زیر است:



$$A' = \{x | x \in M, x \notin A\}$$

$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = M, \quad \emptyset' = M, \quad M' = \emptyset, \quad (A')' = A$$

تذکره: از تعریف مجموعهٔ متمم نتیجه می‌شود:

**نکته تکمیلی:** تساوی‌های زیر به ازای تمام مجموعه‌ها برقرار است:

- ①  $A - B = A \cap B'$ : تعریف تفاضل  $A$  و  $B$  با استفاده از  $B'$
- ②  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ : متمم اجتماع دو مجموعه برابر است با اشتراک متمم‌های آن‌ها
- ③  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ : متمم اشتراک دو مجموعه برابر است با اجتماع متمم‌های آن‌ها

**تست:** حاصل  $(B \cup A')' \cup (B' \cup A)'$  در کدام گزینه آمده است؟

(A)  $(A \cup B)'$

(B)  $(A \cap B)'$

(C)  $A \cup B$

(D)  $A \Delta B$

**پاسخ:** گزینه ۱ اول از مورد ۲ و ۳ در نکتهٔ بالا کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} (B \cup A')' = B' \cap (A')' = B' \cap A = A \cap B' \\ (B' \cup A)' = (B')' \cap A' = B \cap A' \end{cases}$$

حالا با استفاده از مورد ۱، اشتراک را به تفاضل تبدیل می‌کنیم:

$$(A \cap B') \cup (B \cap A') = (A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$$

آفیش! تمام تعریف‌های این قسمت تمام شد. حالا برای جمع‌بندی و آشناسدن با تست‌های ترکیبی، چندتا تست دیگر می‌آوریم:

**تست:** حاصل  $(A \cap M')' \cap (\emptyset' \cup A)'$  در کدام گزینه آمده است؟

(A)  $A'$

(B)  $A$

(C)  $\emptyset$

(D)  $M$

**پاسخ:** گزینه ۲ می‌دانیم که  $\emptyset' = M$  و  $M' = \emptyset$ :

$$\underbrace{(A \cap \emptyset)'}_{\emptyset} \cap \underbrace{(M \cup A)'}_M = \emptyset' \cap M' = M \cap \emptyset = \emptyset$$

(تیزهوشان)

**تست:** اگر  $A \subset B$  باشد، در این صورت حاصل  $A \cup (B \cap A')$  برابر است با:

(A)  $M$

(B)  $A'$

(C)  $B$

(D)  $A$

**پاسخ:** گزینه ۲ اول از خاصیت توزیع‌پذیری اجتماع روی اشتراک استفاده می‌کنیم:

$$A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A')}_M = (A \cup B) \cap M = A \cup B$$

حالا می‌گوییم چون  $A \subset B$  پس  $A \cup B = B$ .

تعداد اعضای مجموعه‌ها

طبق تعریف کتاب درسی، تعداد عضوهای مجموعه  $A$  را با نماد  $n(A)$  نشان می‌دهیم. از طرفی معلوم است که اگر  $A$  و  $B$  جدا از هم باشند (یعنی  $A \cap B = \emptyset$ )، تعداد اعضای  $A \cup B$  می‌شود مجموع اعضای  $A$  و  $B$ .  
 $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$   
 حالا اگر  $A \cap B \neq \emptyset$  برای به دست آوردن  $n(A \cup B)$  باید به نکته زیر رجوع کنیم:

**نکته واجب:**

①  $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$       ②  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

**سئ:** چند عدد دو رقمی وجود دارد که حداقل بر یکی از اعداد ۳ یا ۵ بخش پذیرند؟

۴۸ (۱)      ۳۶ (۲)      ۴۰ (۳)      ۴۲ (۵)

**پاسخ:** گزینه ۴. اگر مجموعه  $A$  را بگیریم (فقط) همه اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۳ و مجموعه  $B$  را بگیریم (فقط) همه اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۵، آن وقت  $A \cup B$  می‌شود اعداد دو رقمی که حداقل بر یکی از ۳ یا ۵ بخش پذیرند. برویم سراغ حساب و کتاب:

$n(A) = \frac{99}{3} - \frac{9}{3} = 30$  ،  $n(B) = \frac{95}{5} - 1 = 18$   
 برای محاسبه  $n(A \cup B)$  به مقدار  $n(A \cap B)$  هم نیاز داریم. با توجه به تعریف  $A$  و  $B$ ، مجموعه  $A \cap B$  (فقط) شامل همه اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر  $3 \times 5 = 15$  است. پس:  
 $n(A \cap B) = \frac{90}{15} = 6 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 18 - 6 = 42$

**سئ:** در یک گروه ۱۳ نفری ۷ نفر عینک می‌زنند و ۹ نفر ساعت دارند. ۵ نفر، هم ساعت دارند و هم عینک می‌زنند. چند نفر نه عینک می‌زنند و نه ساعت دارند؟

(۱) حداکثر ۳ نفر      (۲) دقیقاً ۲ نفر      (۳) دقیقاً ۳ نفر      (۴) حداقل ۵ نفر

**پاسخ:** گزینه ۲.  $A$  را می‌گیریم عینکی‌ها و  $B$  را می‌گیریم ساعتی‌ها:  
 $n(A) = 7$  ،  $n(B) = 9$   
 ۵ نفر هم ساعت دارند و هم عینک؛ پس  $n(A \cap B) = 5$ . می‌رویم سراغ  $n(A \cup B)$ :

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 9 - 5 = 11$   
 کسانی که نه عینک می‌زنند و نه ساعت دارند در واقع در خارج از مجموعه  $A \cup B$  و در قسمت رنگ‌شده‌اند، خوب، با توجه به این که  $n(M) = 13$  (کل افراد ۱۳ نفرند) و  $n(A \cup B) = 11$ ، تعداد افراد موردنظر می‌شود  $13 - 11 = 2$ .

**تذکر:** اشتباه گرفتن  $A \cup B$  و  $M$  یا مساوی در نظر گرفتن آن‌ها، از اشتباهات رایج است. خواهشاً دقت کنید!   
 تقریباً فصل تمام شده است. فقط دوتا موضوع کوتاه مانده که باید سری بهشان بزنیم! 

مجموعه‌های نامتناهی و متناهی

به مجموعه‌هایی مثل مجموعه اعداد طبیعی که اعضایشان تمام‌شدنی نیستند، می‌گویند مجموعه‌های نامتناهی. به مجموعه‌هایی مثل  $\{1, 2, 3, \dots, 10^1\}$  که اعضایشان محدود است می‌گویند متناهی. نکته زیر را ببینید:

① اگر  $A \subset B$  و  $A$  نامتناهی باشد،  $B$  حتماً نامتناهی است.      ② اگر  $C \subset D$  و  $D$  متناهی باشد،  $C$  حتماً متناهی است.

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عملگر، مجموعه اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. قطعاً حاصل جمع هر دو عضو آن، عدد طبیعی است. در این صورت می‌گوییم مجموعه اعداد طبیعی نسبت به جمع بسته است. اما این مجموعه نسبت به تفریق بسته نیست. زیرا می‌شود دو عدد طبیعی پیدا کرد که حاصل تفریق آن‌ها عدد طبیعی نباشد مثال:  $1 - 3 = -2 \notin \mathbb{N}$ .

(تیزهوشان)

تست: کدام گزینه نادرست است؟

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a - b) \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a + b) \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳ چون حاصل جمع، تفریق و ضرب هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است. گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست‌اند ولی برای گزینه (۳)، مثال نقض وجود دارد. یعنی با یک مثال می‌شود درستی این نتیجه‌گیری را رد کرد:

$$5, 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

## احتمال

یک سری اتفاقات هست که ما فکر می‌کنیم قابل پیش‌بینی است. مثلاً اگر یک سکه را پرت کنید بالا، معلوم است که می‌آید پایین! ولی آیا می‌توانید از قبل با اطمینان بگویید که کدام سمت آن می‌آید؟ در این بخش می‌خواهیم بیشتر در مورد این‌جور اتفاقات صحبت کنیم. به طور دقیق‌تر می‌خواهیم در مورد احتمال رخ دادن اتفاقات، قبل از وقوع آن‌ها صحبت کنیم!

**فضای نمونه (حالات ممکن):** به مجموعه‌ای که اعضای آن همه حالت‌های ممکن باشد، «فضای نمونه» می‌گویند و آن را با  $S$  نشان می‌دهند. مثلاً در پرتاب یک سکه چون دو حالت ممکن است رخ دهد، این‌طوری می‌نویسیم:

$$S = \{\text{«ر»}, \text{«پ»}\} \xrightarrow{\text{خلاصه‌تر}} \{\text{«ر»}, \text{«پ»}\}$$

در پرتاب یک تاس  $S$  این‌جوری می‌شود:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

**پیشامد تصادفی:** به هر زیرمجموعه  $S$  می‌گویند «پیشامد تصادفی». فرض کنید یک تاس را انداخته‌ایم. می‌خواهیم چندتا از «پیشامدهای تصادفی» آن را بررسی کنیم.

پیشامد این که «عدد اول» بیاید:  $B = \{2, 3, 5\}$

پیشامد این که «زوج» بیاید:  $A = \{2, 4, 6\}$

پیشامد این که مضرب ۵ بیاید:  $D = \{5\}$

پیشامد این که «عدد مرکب» بیاید:  $C = \{4, 6\}$

معلوم است که در این‌جا  $2^6 = 64$  تا «پیشامد تصادفی» می‌توان تعریف کرد که ما چهارتای آن‌ها را نوشتیم. دقت کنید که با توجه به تعریف  $\emptyset$  و  $S$  هم «پیشامد تصادفی» محسوب می‌شوند.

## معادله احتمال (هم‌شانس)

احتمال این که پیشامد  $A$  رخ دهد (یعنی جواب آزمایش که حتماً یکی از اعضای  $S$  هست، عضو  $A$  هم باشد)، برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \xrightarrow{\text{به زبان ریاضی}} \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S} = \text{احتمال رخ دادن پیشامد } A$$

**تذکر:** حواستان جمع باشد که احتمال رخ دادن پیشامد  $\emptyset$  می‌شود  $\frac{0}{n(S)} = 0$  و احتمال رخ دادن پیشامد  $S$  برابر  $\frac{n(S)}{n(S)} = 1$  است. همچنین باقی احتمال‌ها باید عددی بین صفر و یک شوند:  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

۱- صحبت کردن در مورد احتمال، بعد از رخ دادن اتفاق، بی‌معنی است. این موضوع بسیار مهم تقریباً در آموزش و پرورش، فراموش شده است.

اولین تست را از تعریف مقدار احتمال طرح کرده‌ایم:

**تست:** در جعبه‌ای ۱۲ مهره قرمز و تعدادی مهره آبی وجود دارد. اگر احتمال آمدن مهره قرمز  $\frac{2}{3}$  برابر احتمال آمدن مهره آبی باشد، تعداد کل مهره‌ها چقدر است؟

(۱) ۳۰ (۲) ۳۶ (۳) ۲۴ (۴) ۴۲

**پاسخ:** گزینه ۱ با توجه به توضیحات سؤال، معادله زیر را می‌نویسیم:

$$P(\text{قرمز}) = \frac{2}{3} P(\text{آبی}) \Rightarrow \frac{12}{n(S)} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{تعداد آبی‌ها}}{n(S)} \Rightarrow \text{تعداد آبی‌ها} = 12 \times \frac{3}{2} = 18$$

پس تعداد کل مهره‌ها  $12 + 18 = 30$  است.

مثل این‌که تست مربوط به سکه‌ها هم کم‌کم داره آماده می‌شده فقط قبش بگم که اگر مثلاً چهارتا سکه را با هم بیندازیم فرقی با این ندارد که یک سکه را چهار بار بیندازیم:

**تست:** اگر یک سکه را سه بار بیندازیم، چه قدر احتمال دارد که فقط یک بار «رو» بیاید؟

(۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{2}{8}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

**پاسخ:** گزینه ۳ هر کدام از سکه‌ها می‌توانند «رو» یا «پشت» بیایند. پس تعداد کل حالات ممکن  $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$  حالت است.  $S$  را ببینید: (منظورمان از عبارت «پ، ر، ر» این است که در اولین و دومین پرتاب «رو» و در پرتاب سوم «پشت» آمده است.)

$S = \{ \text{پ، پ، پ، پ، ر، پ، ر، پ، ر، پ، ر، ر، پ، ر، ر، ر، پ، ر، ر، ر، ر، پ، ر، ر، ر، ر، ر، ر، ر، ر، ر، ر} \}$

حالت‌هایی که یک بار «رو» و دو بار «پشت» آمده است. حالت‌هایی که دو بار «رو» و یک بار «پشت» آمده است.

با توجه به این‌که تعداد حالت‌های مطلوب می‌شود ۳، جواب تست  $\frac{3}{8}$  است.

**تذکره:** از این تست می‌فهمیم که در پرتاب  $n$  سکه، تعداد حالت‌های کل  $2^n = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n$  است.

در تست زیر، کمی خلاقیت جاشنی کار شده است!

**تست:** در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که حاصل ضرب دو عددی که تاس‌ها نشان می‌دهند عددی فرد باشد، کدام است؟ (تیزهوشان)

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

**پاسخ:** گزینه ۳ تعداد حالت‌های کل در پرتاب دو تاس می‌شود  $6 \times 6 = 36$ ؛ چون هر کدام از تاس‌ها شش حالت دارند. در ضمن، فقط وقتی هر دو

عدد فرد باشند، حاصل ضرب آن‌ها فرد است. پس هر تاس باید ۱، ۳ یا ۵ بیاید. یعنی  $3 \times 3 = 9$  حالت مطلوب داریم. خلاصه این‌که جواب  $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  است.

**تذکره:** تعداد کل حالت‌ها، در پرتاب  $n$  تاس می‌شود  $6^n$ .

**متمم پیشامد:** قبول دارید که احتمال این‌که فردا باران بیارد به اضافه احتمال این‌که فردا باران نیارد، حتماً برابر ۱ است. بالآخره یا باران می‌بارد و یا نمی‌بارد نمی‌شود که نه باران بیارد و نه باران نیارد. همین‌طور نمی‌شود که هم باران بیارد و هم باران نیارد... یکی من رو بگیره لطفاً!!!

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$$

**تکنه:** برای هر پیشامد تصادفی، می‌توان نوشت:

**تست:** ده زوج جوان که هر کدام یک فرزند پسر و یک فرزند دختر دارند، در همایش «خیلی سبزه‌ترین» خانواده سال شرکت کرده‌اند. قرار است از هر خانواده یکی از فرزندان برای جایزه گرفتن انتخاب شود. چهقدر احتمال دارد که حداقل دو تا از جایزه‌ها به پسرها برسد؟

$$\frac{11}{1024} \quad (1) \qquad \frac{17}{1024} \quad (2) \qquad \frac{1007}{1024} \quad (3) \qquad \frac{1013}{1024} \quad (4)$$

**پاسخ:** گزینه ۴. حداقل دوتا جایزه به پسرها برسد، یعنی این که ۲ یا ۳ یا ۴ ... یا ۱۰ تا از جایزه‌ها را پسرها ببرند. حساب کردن و جمع زدن این نده احتمال کمی زمان‌بر است. ما می‌آییم و احتمال رخ دادن متمم این پیشامد تصادفی را حساب می‌کنیم؛ یعنی حساب می‌کنیم که چهقدر احتمال دارد که این پیشامد اتفاق نیفتد. در این صورت یا هیچ پسری نباید جایزه ببرد یا فقط یک پسر باید جایزه ببرد.

برای انتخاب از هر خانواده دو حالت وجود دارد: پس تعداد حالت‌های کل برابر است با:

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{10} = 2^{10}$$

اگر هیچ پسری انتخاب نشود و همه دختر باشند فقط یک حالت وجود دارد. اگر از ده انتخاب فقط یکی پسر باشد، ده حالت مختلف وجود دارد (اولی پسر باشد و بقیه دختر یا دومی پسر باشد و بقیه دختر...؛ پس  $n(A') = 1 + 10 = 11$  در این صورت:

$$P(A') = \frac{11}{2^{10}} = \frac{11}{1024} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{11}{1024} = \frac{1013}{1024}$$

حالا بیایید کمی سؤال را جدی‌تر کنیم! در این همایش ده خانواده چهار نفری حضور دارند؛ بیست خانم و بیست آقا. آیا می‌دانید چند حالت برای انتخاب دو نفر از این چهار نفر وجود دارد؟ آفرین! انگار می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه ۴ عضوی را حساب کنیم:

$$\binom{40}{2} = \frac{40!}{2!(40-2)!} = \frac{40!}{2!38!} = \frac{40 \times 39 \times 38!}{2 \times 38!} = 20 \times 39 = 780$$

به این عدد می‌گوییم «انتخاب دو شی (یا آدم) از چهار شی (یا آدم)» به عبارت خلاصه‌تر: «انتخاب دو از چهار».

**تست:** می‌خواهیم از جمع ۴۰ نفره تست قبلی، سه نفر را انتخاب کنیم. چهقدر احتمال دارد که یکی از این سه نفر خانم (مادر یا دختر) و دوتای دیگر آقا (پدر یا پسر) باشند؟

$$\frac{7}{13} \quad (1) \qquad \frac{5}{13} \quad (2) \qquad \frac{0}{4} \quad (3) \qquad \frac{0}{3} \quad (4)$$

**پاسخ:** گزینه ۲. تعداد حالت‌های کل می‌شود انتخاب ۳ از ۴۰:  $\binom{40}{3} = \frac{40!}{3!(40-3)!} = \frac{40!}{3!37!} = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37!}{3 \times 37!} = 20 \times 13 \times 38$  تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با انتخاب یک نفر خانم (از ۲۰ نفر) و دو نفر آقا (از ۲۰ نفر):

$$\binom{20}{1} = \frac{20!}{1!19!} = \frac{20 \times 19!}{19!} = 20, \quad \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{2 \times 18!} = 190$$

چون به ازای هر کدام از انتخاب‌های خانم‌ها (۲۰ انتخاب)، ۱۹۰ انتخاب برای آقایان وجود دارد. پس تعداد کل انتخاب‌ها این طوری حساب می‌شود:

$$\underbrace{20 + 20 + \dots + 20 + 20}_{19} = 20 \times 19$$

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های کل}} = \frac{20 \times 19}{20 \times 13 \times 38} = \frac{19}{13 \times 38} = \frac{19}{13 \times 2 \times 19} = \frac{1}{26} = \frac{5}{13}$$

خب دیگر، برویم سراغ محاسبه احتمال:

همیشه تشخیص دادن و حساب کردن حالت‌های مطلوب و حالت‌های کل این قدرها آسان نیست.

**نکته:** در جعبه‌ای سه مهره سفید، چهار مهره قرمز و پنج مهره آبی وجود دارد. اگر دو مهره به تصادف برداریم و مطمئن باشیم که هیچ کدام سفید نیست، چه قدر احتمال دارد که هر دو هم‌رنگ باشند؟

$\frac{5}{12}$  (۱)       $\frac{7}{12}$  (۲)       $\frac{5}{9}$  (۳)       $\frac{4}{9}$  (۴)

**پاسخ:** گزینه ۴ اگر مطمئن باشیم که هیچ کدام سفید نیست، مثل این است که در جعبه‌هایمان مهره سفید وجود نداشته باشد. حواستان باشد که

مهره‌های سفید را در حالت‌های کل هم نباید حساب کنیم: تعداد حالت‌های کل  $= \binom{5+4}{2} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$

حالت‌های مطلوب یعنی آن‌هایی که هر دو قرمز یا هر دو آبی باشند. این دو جواب را حساب کرده و با هم جمع می‌زنیم:

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \frac{4!}{2!2!} + \frac{5!}{2!3!} = \frac{4 \times 3}{2} + \frac{5 \times 4}{2} = 6 + 10 = 16$$

$$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

در نهایت مقدار احتمال حساب می‌شود:

**تذکره:** برای محاسبه سریع‌تر می‌توانید روابط زیر را حفظ کنید ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$1) \binom{n}{0} = 1, \quad 2) \binom{n}{1} = n, \quad 3) \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad 4) \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

انتخاب  $k$  از  $n$  و انتخاب  $n-k$  از  $n$  با هم برابری دارند (مثل زیرمجموعه‌ها).

**ترکیب پیشامدها:** اگر  $A$  و  $B$  پیشامدهای تصادفی از فضای نمونه  $S$  باشند، با ترکیب  $A$  و  $B$  پیشامدهای دیگری به وجود می‌آید که خیلی برای طراحان سؤال و تست‌های تیزهوشان جذاب است. ما یکی یکی آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

**الف) پیشامد  $A \cap B$ :** رخ دادن این پیشامد یعنی رخ دادن هم‌زمان  $A$  و  $B$ .

**ب) پیشامد  $A \cup B$ :** اگر حداقل یکی از  $A$  یا  $B$  رخ دهد، می‌گوییم  $A \cup B$  رخ داده است.

**پ) پیشامد  $A - B$ :** این پیشامد وقتی رخ می‌دهد که  $A$  رخ دهد ولی  $B$  رخ ندهد.

**ت) پیشامد  $A \Delta B$ :** این پیشامد یعنی دقیقاً یکی از  $A$  یا  $B$  رخ دهد (هر دو تایشان رخ ندهند).

به عبارت دیگر  $A$  رخ دهد و  $B$  رخ ندهد، یا  $A$  رخ ندهد و  $B$  رخ دهد. این رابطه که یادتان هست؟

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

**مثال:** می‌خواهیم یک عدد از بین اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی از ۱۰ انتخاب کنیم. پیشامد تصادفی  $A$  و  $B$  را به ترتیب «مضرب ۳ انتخاب شود» و «عدد فرد انتخاب شود» تعریف و احتمال پیشامدهای زیر را حساب می‌کنیم.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}, \quad A = \{3, 6, 9\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$1) B' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

این پیشامد یعنی  $B$  رخ ندهد.

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{10} = 0.5$$

$$2) A \cap B = \{3, 9\}$$

این پیشامد یعنی عدد انتخاب‌شده هم فرد و هم مضرب ۳ باشد ( $A$  و  $B$  هم‌زمان رخ دهد).

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = 0.2$$

$$3) A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

این پیشامد یعنی عدد انتخاب‌شده مضرب ۳ یا عدد فرد باشد (حداقل یکی از  $A$  یا  $B$  رخ دهد).

$$P(A \cup B) = 0.6$$

$$4) B - A = \{1, 5, 7\}$$

این پیشامد یعنی عدد انتخاب‌شده فرد باشد ولی مضرب ۳ نباشد.

$$P(B - A) = 0.3$$



**نکته:** از روابطی که در قسمت مجموعه‌ها یاد گرفتیم، تساوی‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$① P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$② P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



اگر  $A$  و  $B$  ناسازگار باشند، یعنی هیچ‌گاه هم‌زمان رخ ندهند و  $A \cap B = \emptyset$ ، روابط بالا این‌طوری می‌شود:

$$\begin{cases} P(A - B) = P(A) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

**اصل ضرب:** برای حل تست‌های سخت آزمون‌های ورودی باید کمی اصل ضرب بدانید. این اصل می‌گوید که اگر دو تا کار را بخواهیم هم‌زمان انجام دهیم که یکی از آن‌ها  $m$  حالت و دیگری  $n$  حالت داشته باشد، برای انجام هم‌زمان آن‌ها  $m \times n$  حالت مختلف داریم. مثلاً فرض کنید که امید، پنج پیراهن و دو شلوار دارد و می‌خواهد بیرون مدرسه، به چند حالت مختلف می‌تواند لباس بپوشد؟ معلوم است:  $2 \times 5 = 10$ .

**مثال:** همه عددهای سه‌رقمی را که با ارقام  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  ساخته می‌شود، در نظر بگیرید. اگر به تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد که:

① ارقام آن متمایز باشند. تعداد کل اعداد سه‌رقمی که با اعضای  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  می‌شود ساخت برابر  $5 \times 5 \times 5 = 125$  است (۵ انتخاب برای رقم یکان، ۵ انتخاب برای رقم دهگان و ۵ انتخاب برای رقم صدگان). حالا اگر بخواهیم تعداد اعداد سه‌رقمی با ارقام متمایز را حساب کنیم، می‌گوییم درست است که برای انتخاب رقم صدگان ۵ حالت وجود دارد، ولی برای انتخاب رقم دهگان  $5 - 1 = 4$  انتخاب داریم (عددی را که در صدگان انتخاب کردیم، دیگر نمی‌توانیم استفاده کنیم). به همین ترتیب برای یکان  $5 - 2 = 3$  انتخاب باقی می‌ماند:

$$60 = 5 \times 4 \times 3 = \text{تعداد اعداد ۳ رقمی با ارقام متمایز}$$

$$\frac{60}{125} = \frac{12}{25}$$

حالا می‌ماند که احتمال را حساب کنیم:

②  $B$ : مضرب ۵ باشد. یکان این عدد ۱ حالت دارد و فقط می‌تواند ۵ باشد. برای هر کدام از دهگان و صدگان هم ۵ حالت مختلف داریم. در واقع برای دهگان و صدگان هیچ محدودیتی وجود ندارد. در نتیجه احتمال موردنظر برابر  $\frac{5 \times 5 \times 1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5}$  است.

③ حداقل ۲ رقم آن یکسان باشند. این پیشامد، متمم پیشامد  $A$  است:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

④ ارقام آن متمایز باشد ولی مضرب ۵ نباشد.

در واقع باید  $P(A - B)$  را حساب کنیم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{12}{25} - P(A \cap B)$$

برای رسیدن به جواب به  $P(A \cap B)$  نیاز داریم؛ یعنی باید ببینیم که چند عدد ۳ رقمی با ارقام  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  داریم که «ارقامش متمایز باشد و مضرب ۵ هم باشد». برای یکان ۱ حالت داریم (فقط ۵ می‌تواند باشد). برای دهگان ۴ حالت داریم؛ زیرا یک عدد را در یکان قرار دادیم و برای صدگان

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3 \times 4 \times 1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{12}{125}$$

۳ حالت پس:

$$P(A - B) = \frac{12}{25} - \frac{12}{125} = \frac{48}{125}$$

و در نهایت:

**نکته تکمیلی:** اگر برای دو پیشامد  $A$  و  $B$  داشته باشیم  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ، آن‌گاه به پیشامدهای  $A$  و  $B$

مستقل از هم گفته می‌شود. در واقع اگر رخ دادن  $A$  و  $B$  تأثیری روی هم نداشته باشد، برای محاسبه  $P(A \cap B)$  می‌توان

$P(A) \cdot P(B)$  را حساب کرد.

**تست:** یک تاس را ۵ بار می‌اندازیم. چه قدر احتمال دارد که دفعه اول ۶ و دفعه سوم عدد فرد بیاید؟

$$\frac{1}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{24} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{6} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{12} \text{ (۱)}$$



**پاسخ: گزینه ۱** چون نتیجه پرتاب‌های مختلف روی هم تأثیر ندارد، این پرتاب‌ها مستقل‌اند. احتمال این که پرتاب اول ۶ بیاید برابر  $\frac{1}{6}$  و احتمال این که پرتاب سوم عدد فرد بیاید برابر  $\frac{1}{2}$  است. باقی پرتاب‌ها هم محدودیتی ندارند؛ یعنی هر چه بیاید مطلوب است. پس احتمال کل ما  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$  است.

**تست:** در ظرفی ۴ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره یکسان است؟

$$\frac{19}{40} \text{ (۱)} \quad \frac{21}{40} \text{ (۲)} \quad \frac{13}{40} \text{ (۳)} \quad \frac{27}{40} \text{ (۴)}$$

**پاسخ: گزینه ۳** چون برداشت از ظرف‌های مختلف روی هم تأثیری ندارد، پیشامدها مستقل‌اند.

$P(\text{هر دو سبز باشند}) + P(\text{هر دو سفید باشند}) = P(\text{هر دو هم‌رنگ باشند})$

$P = P(\text{برداشت ۲ سبز باشد}) \times P(\text{برداشت ۱ سبز باشد}) + P(\text{برداشت ۲ سفید باشد}) \times P(\text{برداشت ۱ سفید باشد})$

$$= \frac{6}{8} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{24 + 2}{80} = \frac{13}{40}$$

حالا می‌خواهیم یک تست خوب حل کنیم تا ببینید چه‌طور می‌شود ۲ پیشامد مستقل نباشند و در این وضعیت چه‌کار باید کرد:

**تست:** در جعبه‌ای ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. می‌خواهیم به نوبت ۲ مهره را بدون جای‌گذاری از جعبه خارج کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که اولی قرمز و دومی آبی بیاید؟

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \text{ (۲)} \\ \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{9} \times \frac{1}{4} \text{ (۴)}$$

**پاسخ: گزینه ۴** تعریف‌های زیر را ببینید:

پیشامد این که اولی قرمز بیاید را  $A$  و پیشامد این که دومی قرمز بیاید را  $B$  در نظر می‌گیریم.

در این سؤال ما باید  $P(A \cap B)$  را حساب کنیم. می‌دانیم که  $P(A) = \frac{5}{9}$  است.

ولی مقدار  $P(B)$  بستگی به این دارد که  $P(A)$  رخ بدهد یا ندهد. یعنی اگر برداشت اول قرمز باشد، احتمال این که دومی آبی باشد می‌شود  $\frac{4}{9-1} = \frac{4}{8}$ .

این یعنی وابستگی و عدم استقلال. در اینجا باید این‌طور عمل کنیم:

$$P(A \cap B) = (\text{احتمال رخ دادن پیشامد } B \text{ با این فرض که } A \text{ رخ داده است}) \times (\text{احتمال رخ دادن پیشامد } A) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2}$$

### فضای نمونه پیوسته

**الف) یک‌بعدی.** فرض کنید می‌خواهیم یک عدد حقیقی دلخواه از مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$  انتخاب کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که این عدد بزرگ‌تر از ۸ باشد؟



معلوم است که هم فضای نمونه و هم حالت‌های مطلوب نامتناهی‌اند؛ پس رابطه  $\frac{n(A)}{n(S)}$  بی‌معنی است.

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(S)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

در این‌طور مسائل یک بُعدی، باید برویم سراغ طول مجموعه‌ها:

**تست:** اگر نقطه‌ای به تصادف روی مستطیل  $2 \times 4$  انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد که فاصله این نقطه از تمام رأس‌ها بیشتر از ۱ باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{3}$



**پاسخ:** گزینه ۴ این نقطه فقط می‌تواند روی پاره‌خط AB یا CD باشد.

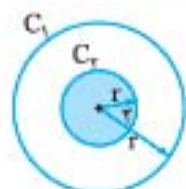
$$\frac{AB + CD}{\text{محیط مستطیل}} = \frac{2 + 2}{2 \times (2 + 2)} = \frac{1}{2}$$

**ب) دوبعدی:** گاهی فضای نمونه و حالت‌های مطلوب ما، ناحیه‌ای از صفحاتند. در این حالت باید نسبت مساحت مطلوب به مساحت کل را حساب کنیم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت مطلوب}}{\text{مساحت کل}}$$

**تست:** اگر نقطه‌ای از درون یک دایره انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد که فاصله این نقطه از مرکز دایره کم‌تر از نصف شعاع باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$       (۲)  $\frac{1}{4}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{1}{8}$



**پاسخ:** گزینه ۲ در این سؤال باید نسبت مساحت دایره‌های  $C_1$  و  $C_2$  را حساب کنیم.

$$\frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2}{4 \pi r^2} = \frac{1}{4}$$

درس تمام شد ولی اگر حوصله‌اش را دارید و می‌خواهید کمی به فکر فرو بروید و دلتان برای فکرکردن لک زده است (!!!) متن زیر را بخوانید: مسعود بسیار خوش‌شانس است. در ۲۰ دست اخیری که با برادرش متج بازی کرده است، به طور میانگین هر ۴ دفعه یک بار ۶ آورده است. او در این دست در شرایط حساسی قرار گرفته است. اگر مسعود ۶ بیاورد بازی را می‌برد. به نظر شما بی که از خوش‌شانسی و آمار قبلی او خبر دارید، چه قدر احتمال دارد که در این پرتاب حساس او ۶ بیاورد و بازی را ببرد؟  $\frac{1}{4}$  یا  $\frac{1}{6}$ ؟

اگر مادر مسعود همین الان به آن‌ها ببینند و از آمار قبلی او خبر نداشته باشد، به این سؤال ما چه‌طور جواب می‌دهد؟ شاید بگوید: «احتمال ۶ آمدن بنا به رابطه کتاب درسی می‌شود  $\frac{1}{6}$ » و شاید بنا به علاقه شخصی‌اش و اعتماد به او (یا هر چیز دیگری) بگوید: «پسر من بسیار خوش‌شانس است. او قطعاً ۶ می‌آورد. من مطمئن‌ام.»

جواب اصلی چیست؟ آیا جواب اصلی وجود دارد؟ آیا اطلاع‌داشتن یا نداشتن از گذشته مسعود، احتمال ۶ آمدن را تغییر می‌دهد؟ به نظر من، حقیقت این است که احتمال ققط و ققط یک احساس یا میل برای حدس‌زدن است که ما به صورت کمی بیان می‌کنیم. احتمالی که ما در وجود خود احساس می‌کنیم، خیلی ربطی به احتمال ریاضی که نحوه به دست آوردن آن را آموختیم، ندارد. مدل‌های زیر را ببینید:

**الف)** اگر از قاعده کتاب درسی استفاده کنیم، احتمال ۶ آوردن مسعود می‌شود  $\frac{1}{6}$ .

**ب)** اگر گذشته مسعود را در نظر بگیریم، احتمال تجربی ۶ آوردن مسعود می‌شود  $\frac{1}{4}$ .

**پ)** مادر مسعود می‌گوید احتمال ۶ آوردن پسرش ۱ است و او قطعاً ۶ می‌آورد.

**ت)** هر مدلی که تو دوست داری!

راستی مسعود تاس را انداخت و ۶ آورد. کدام درست بود؟ آیا پس از اعلام نتیجه می‌شود در مورد احتمال صحبت کرد؟

سخن آخر این‌که به نظر من، هیچ چیز اتفاقی نیست و ما برای ساده‌کردن کارهایمان در اتفاقاتی که علم پیش‌بینی نداریم، از واژه شانس یا احتمال استفاده می‌کنیم. «لا مؤثر فی الوجود ألا...»

# سوالات چهارگزینه‌ای

## ● مفاهیم ابتدایی مجموعه‌ها

در این بخش تست‌هایی از مجموعه، مفهوم عضو بودن، زیرمجموعه، مجموعه‌های برابر، تعداد اعضا و بسته بودن یک مجموعه و ... می‌بینید. تست‌ها بسیار ساده‌اند و نقش دست‌گرمی دارند. دست و دمتون گرم (۱۰)

۱- کدام گزینه مشخص‌کننده یک مجموعه است؟

(۱) تمام کسانی که در این صفحه به سوالات سخت جواب درست می‌دهند.

(۲) مجموعه پاره‌خط‌هایی که طولشان کمتر از یک واحد است.

(۳) سه عدد فرد یک‌رقمی

(۴) تمام  $x$ هایی که در معادله  $\sum_{i=1}^{2x} x^i = 0$  صدق می‌کنند  $(x \in \mathbb{R})$

۲- کدام یک از گزینه‌های زیر نشان‌دهنده مجموعه تهی است؟

(۱)  $\{\{\}\}$

(۲)  $\{\emptyset\}$

(۳)  $\{x \mid 2x + 2 = 7, x \in \mathbb{N}\}$

(۴)  $\{x^2 + 1 \mid x^5 - x^2 + x^2 - 1 = 0\}$

۳- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) مجموعه اعداد طبیعی را به سه زیرمجموعه نامتناهی بدون عضو مشترک می‌توان تقسیم کرد.

(۲) زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح وجود دارد که اگر هر دو عضو آن را در هم ضرب کنیم، جواب باز هم عضو آن مجموعه باشد.

(۳) هر دو عدد صحیح را بر هم تقسیم کنیم، جواب یک عدد گویا است.

(۴) اگر  $A \subset B$  و  $B \subset C$ ، آن وقت  $A \subset C$ .

۴- کدام گزینه نادرست است؟

(۱)  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \times b) \in \mathbb{Q}$

(۲)  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a - b) \in \mathbb{Q}$

(۳)  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a + b) \in \mathbb{Q}$

(۴)  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

۵- مجموعه  $A$  دارای این ویژگی است که به ازای هر  $a \in A$  داریم  $-a \in A$ . مجموعه  $a$  کدام یک از مجموعه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

(۱)  $\mathbb{Z}$

(۲)  $\mathbb{Q}$

(۳)  $\mathbb{R}$

(۴)  $\mathbb{N}$  (تیزهوشان)

۶- کدام مجموعه زیر، متناهی است؟

(۱) مجموعه اعداد گویای بین  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  و  $\sqrt{3}$

(۲) مجموعه اعداد مرکب منفی

(۳) مجموعه اعداد اول

(۴) مجموعه اعداد طبیعی که بر ۸ بخش پذیرند ولی بر ۱۶ بخش پذیر نیستند.

۷- کدام گزینه درست است؟

(۱)  $A = \{7, 8, 9, \dots, 77\} \Rightarrow n(A) = 70$

(۲)  $B = \{8, 12, 16, \dots, 96\} \Rightarrow n(B) = 24$

(۳)  $C = \{16, 25, 36, \dots, 289\} \Rightarrow n(C) = 13$

(۴)  $D = \{-11, -9, -7, \dots, +51\} \Rightarrow n(D) = 32$

۸- مجموعه  $\{2^{11} + 2, 2^{11} + 4, 2^{11} + 6, \dots, 2^{12}\}$  چند عضو دارد؟

(۱)  $2^{12}$

(۲)  $2^9$

۹- بیستمین عضو از سری اعداد  $3, -7, 11, -15, \dots$  کدام است؟

(۱) ۷۹

(۲) -۸۳

(تیزهوشان)

(تیزهوشان)

۱۰- دو مجموعه  $A = \{\{x-1\}, \{2\}\}$  و  $B = \{\{\delta\}, \{x-y\}\}$  مساوی‌اند. در این صورت  $x$  و  $y$  کدام‌اند؟

- (۱)  $x=6$  و  $y=2$  (۲)  $x=2$  و  $y=6$  (۳)  $x=y=2$  (۴)  $x=y=6$

۱۱- اگر  $\{2x-\delta, 2\delta-3x\} = \{a\}$  باشد،  $a$  چند است؟

- (۱)  $\frac{2\delta}{3}$  (۲)  $7$  (۳)  $\frac{\delta}{3}$  (۴)  $6$

۱۲- از تساوی  $\{\delta, \{a, 2\}\} = \{a-2, \{a-\delta, b-6, 2a-b+1\}\}$  مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱)  $10$  یا  $20$  (۲)  $15$  یا  $20$  (۳)  $15$  یا  $25$  (۴)  $10$  یا  $25$

۱۳- به ازای متغیرهای منفی  $a$  و  $b$  و مثبت  $c$  و  $d$ ، مجموعه‌های  $\{C^a, C^{a+b}, C^{-c}\}$  و  $\{d^T, d^T, d^d\}$  برابر شدند. کدام است؟ ( $1 < d$  و  $0 < C < 1$ )

- (۱)  $\frac{a+b}{C^c}$  (۲)  $\frac{a+b}{C^{-c}}$  (۳)  $\frac{a}{C^c}$  (۴)  $\frac{a}{C^{-c}}$

۱۴- اگر  $A_1 = \{1\}$  و  $A_2 = \{2, 3\}$  و  $A_3 = \{4, 5, 6\}$  و  $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$  و ... بزرگ‌ترین عضو مجموعه  $A_n$  کدام است؟

- (۱)  $220$  (۲)  $211$  (۳)  $210$  (۴)  $191$

۱۵- برای اعداد طبیعی  $n$  تعریف می‌کنیم  $A_{n+1} = \{(-n)^{-2n}, (n-1)^{-2n+2}, (n-2)^{-2n+4}\}$ . چندتا از  $A_1, A_2, A_3, \dots$  شامل عضو منفی هستند؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $4$  (۴) بی‌شمار

۱۶- مجموعه  $\{\delta, \{\delta\}, \{\delta, \delta\}, \{\delta, \delta, \delta\}\}$  چند عضو و چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱)  $16, 4$  (۲)  $8, 3$  (۳)  $4, 3$  (۴)  $4, 2$

۱۷- چندتا از رابطه‌های روبه‌رو، لزوماً درست است؟  $\emptyset \in \emptyset, A \in A, \emptyset \subset \emptyset, A \subset A, \emptyset \subset A, \emptyset \in A, \emptyset \in \{\emptyset\}$

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۱۸- چندتا از گزاره‌های روبه‌رو، در مورد  $A = \{2, 3, \{\delta, 3\}, \{2\}\}$  درست است؟  $2 \in A, \{2, 3\} \in A, \{2, 3\} \subset A, \{2\} \subset A, \{\{\delta, 3\}, \{2\}\} \subset A$

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

(المپیاد ریاضی)

۱۹- کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $x \in \{\{x, y\}, \{x, \{x\}\}\}$  (۲)  $x \in \{\{x\}\}$  (۳)  $\{x\} \subset \{x, \{x\}\}$  (۴)  $\{x\} \subset \{\{x\}, \{a, x\}\}$

۲۰- اگر در مورد مجموعه توانی  $B$  بدانیم  $P(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, B, \{b\}\}$ ،  $B$  کدام است؟

- (۱)  $\{\emptyset, \{b\}\}$  (۲)  $\{b, \{\emptyset\}\}$  (۳)  $\{\emptyset, b\}$  (۴)  $\{\emptyset, b, \{b\}\}$

۲۱- در کدام یک از مجموعه‌های زیر، هر عضو زیرمجموعه آن مجموعه هم هست؟

- (۱)  $A = \{\emptyset, A, \{\emptyset, A\}\}$  (۲)  $B = \{\emptyset, \{B\}, \{\emptyset\}\}$  (۳)  $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, C\}\}$  (۴)  $D = \{D, \{D\}, \{\emptyset\}\}$

۲۲- چند مجموعه سه عضوی داریم که خودشان عضو خودشان نباشند و تهی عضو آن‌ها باشد؛ در ضمن تمام عضوهایشان، زیرمجموعه‌هایشان نیز باشد؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۲۳- چندتا از نتیجه‌گیری‌های زیر درست‌اند؟

(الف) اگر  $A \subset B$  و  $B \subset C$ ، آن وقت  $A \subset C$ .

(ب) اگر  $A \subset B$  و  $x \in A$ ، آن وقت  $x \in B$ .

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۲۴- کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۱) اگر  $x \notin A$  و  $A \subset B$ ، آن وقت  $x \notin B$ .

(۲) اگر  $x \in A$  و  $A \subset B$ ، آن وقت  $x \in B$ .

(۲) اگر  $x \in A$  و  $A \subset B$ ، آن وقت  $x \notin B$ .

(۴) اگر  $x \in B$  و  $A \subset B$ ، آن وقت  $x \in A$ .

۲۵- مجموعه تمام اعداد پنج رقمی که با ارقام ۱، ۲، ... و ۶ می‌شود ساخت را  $A$  می‌نامیم. مجموع اعضای  $A$  بر کدام عدد بخش پذیر نیست؟

- ۸ (۱)      ۴۹ (۲)      ۸۱ (۳)      ۱۱۱۱۱ (۴)

نمایش مجموعه‌ها

نمایش ریاضی، نمودار ون، نوشتن اعضا و توضیح فارسی، روش‌هایی بود که برای نمایش مجموعه‌ها یاد گرفتیم. سعی کردیم تست‌ها را خیلی مرتب و با نظم آموزشی تألیف کنیم و کنار هم بیاوریم.

۲۶- مجموعه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq 3x < 6\}$  چند عضو دارد؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۱ (۴)

۲۷- مجموع حاصل ضرب‌های دوتایی اعضای  $A$  چند است؟

- ۱۵ (۱)      ۷۱ (۲)      ۹۳ (۳)      ۱۰۵ (۴)

$A = \{m+1 \mid \frac{m}{5} \in \mathbb{N}, m \leq 6\}$

۲۸- در کدام گزینه، اعضا درست مشخص شده‌اند؟

(۱)  $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 7, 11, \dots\}$

(۲) مجموعه تمام اعداد طبیعی که در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده ۴ دارند  $\{5n+4 \mid n \in \mathbb{N}\}$

(۳) مجموعه تمام اعداد طبیعی که در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده ۱ دارند  $\{5n-4 \mid n \in \mathbb{N}\}$

(۴)  $\{2n+1 \mid \frac{n}{5} \in \mathbb{N}\} = \{5, 9, 11, 15, \dots\}$

۲۹- کدام مجموعه زیر با عضوهایش هم‌خوانی ندارد؟

(۱)  $\{n^2+1 \mid n \in \mathbb{W}\} = \{1, 2, 5, 10, 17, \dots\}$

(۲)  $\{n(n+2) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2, 8, 18, 32, 50, \dots\}$

(۳)  $\{(-n)^2 \mid n \in \mathbb{N}, 9 < n < 15\} = \{-196, -169, -144, -121, -100\}$

(۴)  $\{\frac{n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{Z}, -4 < n < 4\} = \{-\frac{2}{15}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{15}\}$

(تیزهوشان)

۳۰- نمایش ریاضی مجموعه  $A = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$  در کدام گزینه به درستی نوشته شده است؟

(۱)  $A = \{(-1)^n \times n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(۲)  $A = \{(-1)^n \times n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۳۱- نمایش ریاضی مجموعه  $\{-1, -4, +9, +16, 25, -36, \dots\}$  برابر است با:

(۱)  $\{(-1)^x \times x \mid x \in \mathbb{N}\}$

(۲)  $\{(-1)^{\frac{x(x+1)}{2}} \times x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

۳۲- کدام یک از گزینه‌های زیر، عضو  $\{\frac{2k}{k+3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  نیست؟

- ۱/۴ (۴)      ۱/۸ (۳)      ۵/۳ (۲)      ۶/۵ (۱)

۳۳- مجموعه همه اعداد طبیعی دورقمی که بتوان آن‌ها را به صورت  $5k+3; k \in \mathbb{Z}$  نوشت، چند عضو دارد؟

- ۱۷ (۱)      ۱۸ (۲)      ۱۹ (۳)      ۲۰ (۴)

۳۴- مجموعه همه اعداد صحیحی که باقی‌مانده‌شان در تقسیم بر ۳، ۴ و ۵ برابر ۲ است، چند عضو مثبت کم‌تر از ۱۰۰ دارد؟

- ۱ (۱) صفر (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

۲۵- کدام گزینه برای نشان دادن مجموعه همه اعداد طبیعی که یکی بیشتر از ۲ برابر آن‌ها، از ۱۰ بزرگ‌تر است، درست است؟

$A = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x > 10\}$  (۱)

$C = \{2(x + 1) \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 5\}$  (۳)

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 > 10\}$  (۲)

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2(x + 1) \geq 5\}$  (۴)

۲۶- کدام مجموعه تعداد کم‌تری عضو دارد؟

(۱)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -x > x\}$  (۲)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2^x - 2^x = 0\}$  (۳)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{-x} \in \mathbb{N}\}$  (۴)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x(x^2 + 1)} = 0\}$

۲۷- کدام مجموعه تعداد عضوهای کم‌تری دارد؟

(۱)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}, -x \leq 0\}$  (۲)  $\{2k - 1 \mid k^2 = 16, k \in \mathbb{Z}\}$

(۳)  $\{\frac{2p}{p-1} \mid p^2 - p = 0\}$  (۴)  $\{\frac{t-1}{6} \mid 2^{t-5} < \frac{1}{5}, t \in \mathbb{N}\}$

۲۸- بزرگ‌ترین عضو مجموعه  $\{a + b \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 \leq 16\}$  چند است؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۲۹- مجموعه  $\{(a + 1)^{b-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}, ab = 8\}$  چند عضو صحیح دارد؟

(۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۹

۳۰- تمام اعضای مجموعه  $S = \{\frac{\Delta^a - 2^a}{2^b \Delta^{b-2}} \mid a - 2b = 2\}$  در کدام محدوده‌اند؟

(۱) بین ۲۰۰ تا ۵۰۰ (۲) بین ۵۰۰ تا ۷۰۰ (۳) بین ۷۰۰ تا ۱۰۰۰ (۴) بین ۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰

۳۱- مجموعه  $\{\frac{12x^2}{x(x-1)} \mid x \in \mathbb{W}, -5 \leq \sqrt{x} \leq 9\}$  چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۲- مجموعه‌های  $U = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 < 8\}$  و  $V = \{4x + 1 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$  چند زیرمجموعه مشترک دارند؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۳۳- مجموعه  $S = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x(x-1)(x-2) = 0\}$  چند زیرمجموعه از  $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2(x^2-1)(x^2-9)}{x(x-1)(x-2)} = 0\}$  بیشتر دارد؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۷

۳۴- مجموعه  $\{x = 2^m \times 5^n \mid m, n \in \mathbb{W}, m + n = 4\}$  چند عضو بخش‌پذیر بر ۱۵ دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۵- میانگین عضوهای  $\{x \mid a \in \mathbb{Z}, x = 2a, 670 < x < 1396\}$  چند است؟

(۱)  $1032 / 5$  (۲) ۱۰۳۲ (۳)  $1032 / 5$  (۴) ۱۰۳۲

۳۶- میانگین اعضای  $\{x = 2n - 1 \mid \frac{\Delta^n}{n+4} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$  چند است؟

(۱) ۳۰ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴) ۳۶

۳۷- اگر  $M$  شامل ۱۲ عدد طبیعی باشد که حاصل ضربشان کم‌ترین اختلاف را از  $6 \times 10^5$  داشته باشد، مجموعه  $N = \{2x - 1 \mid \frac{x}{2} \in M\}$  چند عضو دارد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۶ (۴) ۹

۳۸- با توجه به مجموعه  $A$ ، مجموعه  $B$  کدام است؟  $A = \{-10, -9, -8, \dots, 9, 10\}$  و  $B = \{x \mid x \in A, \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}, \sqrt{x^2 + (x+2)^2} \in \mathbb{N}\}$

(۱)  $\{-6, -2, 0, 2, 6\}$  (۲)  $\{0, 6\}$

(۳)  $\{-9, -6, -2, 0, 2, 6, 9\}$  (۴)  $\{-2, 6\}$

۴۹- اگر  $L = \{-2, -1, 1, 2\}$  و  $A = \{x | x = \frac{k}{2}, x \in Z, k \in L\}$ ، آن گاه  $n(A)$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۵۰- اگر  $P$  مجموعه اعداد اول و  $A = \{x | x \in P, x < \sqrt{2000}\}$  و  $B = \{x | x \in N, -2 < x^2 - 1 < 15\}$  باشد، آن گاه  $A$  و  $B$  دارای چند عضو

مشترک هستند؟ (تیزهوشان)

- ۱۵ (۱)      ۱۶ (۲)      ۳ (۳)      ۲ (۴)

۵۱- اگر  $A$  مجموعه مضرب‌های صحیح عدد ۳ بین ۱۰ و ۱۹ باشد، مجموعه  $B = \{x | -2x \in A\}$  باشد، مجموعه  $B$  کدام است؟ (تیزهوشان)

- ۱ (۱)  $\{4, 5, 6\}$       ۲ (۲)  $\{-12, -15, -18\}$       ۳ (۳)  $\{-4, -5, -6\}$       ۴ (۴)  $\{2, 15, 18\}$

۵۲- اگر  $A = \{-x^2 + 1 | x \in Z, -2 \leq x < 3\}$  و  $B = \{-x^2 | x \in A\}$  باشد، کدام یک از گزینه‌های مجموعه  $B$  را نشان می‌دهد؟

(تیزهوشان) ۱ (۱)  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$       ۲ (۲)  $\{-2, 1, 0\}$       ۳ (۳)  $\{-1, 0, 2, 3\}$       ۴ (۴)  $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$

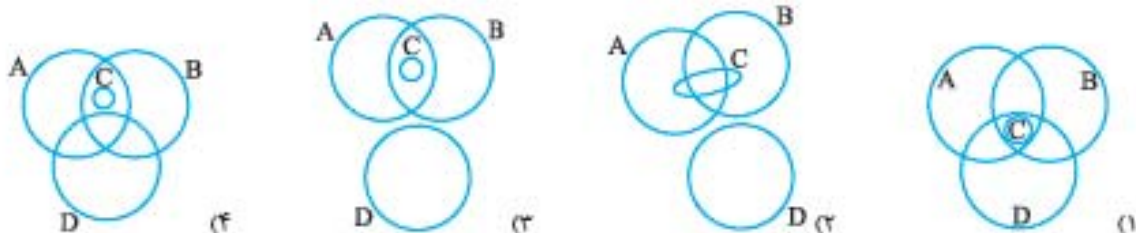
۵۳- اعضای  $A$  فقط مربع یا مکعب کامل‌های طبیعی کوچک‌تر از ۲۰۱۶ هستند و  $B = \{x | \frac{x}{4} \in N, x < 2016\}$ . در این صورت  $n(A \cap B)$  چند است؟

- ۱۶ (۱)      ۱۷ (۲)      ۱۸ (۳)      ۱۹ (۴)

۵۴- حاصل ضرب عضوهای غیرصفر مجموعه  $\{ \frac{\sqrt{16-a^2}}{\sqrt{a-1}} | a \in Z \}$  چند است؟

- ۱ (۱)  $\sqrt{42}$       ۲ (۲)  $\sqrt{\frac{7}{2}}$       ۳ (۳)  $\sqrt{12}$       ۴ (۴)  $\sqrt{\frac{21}{2}}$

۵۵- اگر  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ،  $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ،  $C = \{8\}$  و  $D = \{10, 11\}$ ، آن وقت کدام نمودار ون برای این مجموعه مناسب است؟



۵۶- در شکل مقابل، مجموع عضوهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  برابرند. اگر  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  عضو  $\{1, 2, 4\}$  باشند،  $a$  کدام است؟

- ۱ یا ۴ (۱)      ۲ یا ۱ (۲)      ۲ یا ۴ (۳)      ۴ (۴)

۵۷- در شکل زیر، مجموعه‌های  $M_p$ ،  $M_q$  و  $M_r$  به ترتیب مضرب‌های ۷ و مضرب‌های ۹ و مضرب‌های ۱۲ را مشخص می‌کنند. نقطه‌ای که در

شکل نشان داده شده است، نمایانگر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

- ۶۳ (۱)      ۱۹ (۲)      ۲۵۲ (۳)      ۱۶۸ (۴)

۵۸- با توجه به جملات «بعضی از اعضای  $A$ ، عضو  $B$  هستند» و «هیچ کدام از اعضای  $C$ ، عضو  $B$  نیستند» و «تمام اعضای  $C$  یا عضو  $B$  اند یا  $A$ ،

کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

- ۱) تمام اعضای  $B$  عضو  $A$  هستند.      ۲) بعضی از اعضای  $B$ ، عضو  $C$  هستند.  
۳) بعضی از اعضای  $A$ ، عضو  $C$  نیستند.      ۴) هیچ کدام از اعضای  $C$ ، عضو  $A$  نیستند.



## تعداد زیرمجموعه‌ها

در این قسمت تست‌های تخصصی تعداد زیرمجموعه‌ها را آوردیم. گاهی تعداد کل زیرمجموعه‌ها سؤال شده‌اند. گاهی تعداد برخی زیرمجموعه‌های خاص یا شرایط عجیب و فریب!! قسمت با فایده! فوش می‌کنه.

(تیزهوشان)

۵۹- مجموعه تمام زیرمجموعه‌های  $M = \{\{\}, \{\emptyset\}\}$  کدام است؟

- (۱)  $\{\{\}, \{\emptyset\}, M\}$   
 (۲)  $\{\{\{\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\}\}, M\}$   
 (۳)  $\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\emptyset\}\}, M\}$   
 (۴)  $\emptyset$

۶۰- مجموعه  $A = \{-1, -2, -3, 2x, y+1, z\}$  دارای ۸ زیرمجموعه است. آن‌گاه حداقل مقدار  $x+y+z$  کدام است؟

- (۱) ۱۰  
 (۲) -۲۱  
 (۳) -۱۰  
 (۴) -۱۱

۶۱- مجموعه  $\{\{1, a\}, \{b, 2, c\}, \{2, c\}\}$  دو زیرمجموعه دارد. حاصل  $a+b+2c$  چند است؟

- (۱) ۵ یا ۶  
 (۲) ۵ یا ۵-  
 (۳) ۵ یا ۶-  
 (۴) ۶ یا ۵

(تیزهوشان)

۶۲- اگر  $A = \{a, \{1, 2a+b\}\}$  زیرمجموعه  $B = \{2, 2a+1, \{-a, 0\}\}$  باشد.  $b$  کدام است؟

- (۱) -۶  
 (۲) ۲  
 (۳) ۱  
 (۴) -۹

۶۳- اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه مربع (مجذور) تعداد اعضای آن باشد. تعداد اعضای آن مجموعه چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

۶۴- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$  چند زیرمجموعه دو عضوی به شکل  $\{x, x+2\}$  دارد؟ (یعنی مجموعه‌های دو عضوی‌ای که در هر کدام، اختلاف دو عضو برابر ۲ باشد.)

(تیزهوشان)

- (۱) ۹۹  
 (۲) ۹۷  
 (۳) ۹۸  
 (۴) ۹۶

۶۵- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که جمع عضوهای آن برابر با ۱۵ باشد و عدد ۴ عضو آن باشد؟

(تیزهوشان)

- (۱) ۴  
 (۲) ۳  
 (۳) ۲  
 (۴) وجود ندارد.

۶۶- اشتراک هر دو زیرمجموعه ۴ عضوی دلخواه از  $\{x, y, x, x, 8\}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

۶۷- در مجموعه  $\{a, b, c, d, e, f\}$  تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی را با  $n_k$  نشان می‌دهیم. حاصل  $n_2 + n_3 + n_4 + n_5$  چند است؟

- (۱) ۵۷  
 (۲) ۵۴  
 (۳) ۵۲  
 (۴) ۵۰

۶۸- حداکثر تعداد اعضای یک زیرمجموعه از  $\{2, 3, 4, \dots, 50\}$  که حاصل ضرب هیچ دو عضو تائیری از آن در آن نباشد. چندتا است؟

- (۱) ۴۴  
 (۲) ۴۲  
 (۳) ۴۰  
 (۴) ۳۸

۶۹- زیرمجموعه  $A \cup B$  چندتا بیشتر از زیرمجموعه‌های  $A$  است؟

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \text{ و } B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$$

- (۱) ۱۶  
 (۲) ۸  
 (۳) ۴۸  
 (۴) ۳۲

۷۰- مجموعه‌های  $A$  و  $B$  چند زیرمجموعه مشترک دارند؟

$$A = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\} \text{ و } B = \{1, 2, 4, 8, 9, 10\}$$

- (۱) ۱۵  
 (۲) ۱۲  
 (۳) ۸  
 (۴) ۱۶

۷۱- چند زیرمجموعه از مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۲۱، دارای تعداد زوج عضو هستند؟

- (۱)  $2^9$   
 (۲)  $2^{10}$   
 (۳)  $2^{19}$   
 (۴)  $2^{20}$

۷۲- چند مجموعه به نام  $X$  در رابطه  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$  صدق می‌کند؟

- (۱) ۴  
 (۲) ۸  
 (۳) ۱۶  
 (۴) ۶

۷۳- چند مجموعه ۶ عضوی به نام  $X$  در رابطه  $\{1, 2, \dots, 10\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$  صدق می‌کند؟

- (۱) ۱۲  
 (۲) ۱۶  
 (۳) ۱۵  
 (۴) ۱۸

۷۴- تعداد زیرمجموعه‌هایی از  $\{-1, 0, 1, 2, \dots, 12\}$  که کوچک‌ترین عضو آن ۸ باشد برابر کدام گزینه است؟

- ۸ (۱)      ۱۶ (۲)      ۲۰ (۳)      ۱۲ (۴)

۷۵- چند زیرمجموعه از  $B$  وجود دارد که زیرمجموعه  $A$  نباشد؟

$A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$        $B = \{2, 4, 6, 8, \dots, 128\}$

- $2^{22} + 2^9$  (۱)       $2^{22} - 2^9$  (۲)       $2^{22} + 2^4$  (۳)       $2^{22} - 2^4$  (۴)

۷۶- مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی چند زیرمجموعه دارد که تنها یک عدد اول داشته باشد و آن نیز ۵ باشد؟

- ۳۲ (۱)      ۱۶ (۲)      ۲۴ (۳)      ۳۶ (۴)

۷۷- در سؤال قبل، چندتا از زیرمجموعه‌ها ۴ عضوی‌اند؟

- ۱۲ (۱)      ۱۰ (۲)      ۸ (۳)      ۱۶ (۴)

۷۸- چند زیرمجموعه ۳ عضوی از  $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$  وجود دارد که عدد ۱۰ عضو آن بوده و ۲ و ۳ عضو آن نباشند؟

(تیزهوشان)

- ۷۸ (۱)      ۶۶ (۲)      ۱۵۶ (۳)      ۱۲۲ (۴)

۷۹- چند زیرمجموعه ۶ عضوی از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  وجود دارد که دارای ۴ عدد زوج و ۲ عدد فرد است؟

(ریزکب)

- ۱۵ (۱)      ۳۰ (۲)      ۱۲۰ (۳)      ۲۲۵ (۴)

۸۰- در چند زیرمجموعه از  $\{6, 7, 8, \dots, 16\}$  حداکثر ۵ عدد زوج وجود دارد؟

- $2^{10} - 2^5$  (۱)       $2^{11} - 2^5$  (۲)       $2^{10} - 2^6$  (۳)       $2^{11} - 2^6$  (۴)

۸۱- در چند زیرمجموعه ۵ عضوی از  $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  مجموع هیچ دو عضوی ۱۱ نمی‌شود؟

- ۸ (۱)      ۱۶ (۲)      ۳۲ (۳)      ۶۴ (۴)

۸۲- مجموعه  $\{1, 2, \dots, 8\}$  چند زیرمجموعه دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۲ است؟

- ۱۲ (۱)      ۱۶ (۲)      ۱۸ (۳)      ۲۴ (۴)

۸۳- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  چند زیرمجموعه دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۵ است؟

(تیزهوشان)

- ۸۰ (۱)      ۶۴ (۲)      ۳۲ (۳)      ۸ (۴)

۸۴- در چند زیرمجموعه غیرتهی از  $T = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$  مجموع اعضا زوج است؟

- $2^{16} - 1$  (۱)       $2^{17} - 1$  (۲)       $2^{16} + 1$  (۳)       $2^{17} + 1$  (۴)

۸۵- در چند زیرمجموعه از  $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$  مجموع اعضا زوج است؟

(المپیاد ریاضی)

- $2^{19}$  (۱)       $2^{19} - 1$  (۲)       $2^{19} - 2^{18}$  (۳)       $2^{19} + 2^{18}$  (۴)

۸۶- چند مجموعه داریم که اعضایشان اعداد طبیعی متوالی یا مجموع ۱۳۹۶ باشد؟ (مجموعه باید حداقل ۴ عضو داشته باشد).

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۸۷- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $\Pi + 3$  عضوی، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $\Pi - 1$  عضوی است؟

(تیزهوشان)

- ۸ (۱)      ۳۲ (۲)       $\Pi + 2$  (۳)      ۱۶ (۴)

۸۸- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $\Pi + 3$  عضوی از ۱۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $\Pi$  عضوی، ۱۲۸ تا کم‌تر است.  $\Pi$  چند است؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

۸۹- اگر به اعضای مجموعه  $A$ ، ۲ عضو اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌هایش ۱۹۲ واحد اضافه می‌شود. مجموعه  $A$  چند عضو دارد؟

(تیزهوشان)

- ۴ (۱)      ۶ (۲)      ۸ (۳)      ۱۰ (۴)

۹۰- مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه مجموعه  $\Pi - 1$ ،  $\Pi + 1$  و  $\Pi + 2$  عضوی برابر ۱۰۴ است. تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی مجموعه  $\Pi + 2$  عضو کدام است؟

- ۴ (۱)      ۶ (۲)      ۸ (۳)      ۱۶ (۴)

۹۱- اگر اختلاف ۳ برابر حاصل ضرب تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n+1$  عضو در تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n+5$  عضو با ۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n-1$  عضو به اندازه ۲۴ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n-3$  عضو باشد،  $n$  چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷

۹۲- اگر تعداد زیرمجموعه‌های  $(n-2)$  عضو یک مجموعه  $n$  عضو برابر ۱۰ باشد، آن مجموعه چند زیرمجموعه ۳ عضو دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۶

۹۳- تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی یک مجموعه  $n$  عضوی، ۵ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی آن مجموعه است. تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه چند است؟

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۱۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۱۴

### ● اعمال جبری مجموعه‌ها

اشتراک، اجتماع، تفاضل و قاعده‌های بین آن‌ها را یادتان هست؟ در این قسمت، از سوالات مفهومی شروع کرده‌ایم تا سوالاتی که باید از روابط جبری استفاده کنید. چندتا سوال آخرمان خیلی مفهومی شده‌اند، حواستان باشد.

۹۴- اگر  $A \subset A \cap B$ ، آن وقت .....

- (۱)  $A$  حتماً  $\emptyset$  است. (۲)  $A$  حتماً برابر  $B$  است.  
 (۳)  $B$  نمی‌تواند تهی باشد. (۴)  $A$  حتماً زیرمجموعه  $B$  است.

۹۵- اگر  $A \cup B \subset A \cap B$  باشد، کدام گزینه حتماً درست است؟

- (۱)  $A = B = \emptyset$  (۲)  $A \subset B$  (۳)  $A \cup B = A \cap B$  (۴)  $A = \emptyset$

۹۶- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱)  $A \subset \emptyset \Rightarrow A \cup \emptyset = \emptyset$  (۲)  $A \cup B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$   
 (۳)  $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$  (۴)  $A \subset A \cup B \Rightarrow A \cap B = B$

۹۷- کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$  (۲)  $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$   
 (۳)  $(A \cup B) \subset C \Rightarrow (A \cup B) \cup C = C$  (۴)  $(A \cap B) \subset C \Rightarrow (A \cap B) \cup C = A \cap B$

۹۸- از  $A \cap B = B$  و  $B \cap C = C$  کدام گزینه را می‌توان نتیجه گرفت؟

- (۱)  $A \subset B \subset C$  (۲)  $C \subset B \subset A$  (۳)  $A \subset C \subset B$  (۴)  $A = B = C$

۹۹- اگر  $A, B \neq \emptyset$ ، حاصل  $A \cup (B \cap A)$  کدام است؟

- (۱)  $B$  (۲)  $A$  (۳)  $A \cap B$  (۴)  $A \cup B$

۱۰۰- حاصل  $(A - B) \cap B$  کدام است؟

- (۱)  $A \cap B$  (۲)  $A$  (۳)  $A - B$  (۴)  $\emptyset$

(تیزهوشان)

۱۰۱- کدام تساوی زیر نادرست است؟ ( $A \neq \emptyset, A \subset M$ )

- (۱)  $A - \emptyset = A$  (۲)  $A - A = \emptyset$  (۳)  $M - A = A$  (۴)  $\emptyset - A = \emptyset$

۱۰۲- به ازای چند مجموعه دوعضوی  $A$  و  $B$ ، حاصل  $(A - B) \cap (B - A)$  تک‌عضوی است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۳- اگر  $A$  مجموعه اعدادی باشد که معکوسشان با خودشان برابر است و  $B$  مجموعه اعدادی باشد که معکوسشان با ربعشان برابر است، در این صورت مجموعه  $(A \cup B) - (A \cap B)$  چند زیرمجموعه دارد؟

(المپیاد ریاضی)

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۸ (۴) ۴

۱۰۴- با توجه به تعریف‌های زیر، چندتا از تساوی‌های نوشته‌شده درست است؟

- ۱ (۱) مجموعه اعداد صحیحی که در تقسیم بر ۴، باقی‌مانده ۱ دارند:  $A$   
 ۲ (۲) مجموعه اعداد صحیحی که در تقسیم بر ۴، باقی‌مانده ۳ دارند:  $B$   
 ۳ (۳) مجموعه اعداد صحیح فرد:  $C$   
 ۴ (۴)  $A - B = A, C - B = A, A \cap C' = B, A \cup B = C$

۱۰۵- با توجه به تعریف‌های مقابل، حاصل  $m - n - q$  کدام است؟

- ۱ (۳)  $S = \{۲, ۴, ۶, p, m\}$   
 ۲ (۱)  $T = \{۶, ۷, ۸, p, n, ۱۱, ۱۲\}$   
 ۳ (۴)  $S - T = \{q, ۵\}$

۱۰۶- اگر  $S \cap \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰\} = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$  و  $S \cap \{۲۰, ۳۰\} = TU$ ، کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ (۳)  $n(S) \geq ۶$   
 ۲ (۲)  $n(T) \geq ۳$   
 ۳ (۳)  $n(S \cap T) \geq ۱$   
 ۴ (۴)  $n(S \cup T) \geq ۷$

۱۰۷- معادله  $X - \{۱, ۲, ۳, ۴\} = \emptyset$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۴)  $A$   
 ۲ (۲)  $\wedge$   
 ۳ (۳)  $\vee$   
 ۴ (۴)  $\forall$

۱۰۸- از  $A - B = A \cup B$  می‌توان نتیجه گرفت.....

- ۱ (۱)  $A = \emptyset$   
 ۲ (۲)  $B = \emptyset$   
 ۳ (۳)  $A \cup B = \emptyset$   
 ۴ (۴)  $A - B = \emptyset$

۱۰۹- از  $A \cup (B - A) = B$  می‌توان نتیجه گرفت.....

- ۱ (۱)  $A \subset B$   
 ۲ (۲)  $B \subset A$   
 ۳ (۳)  $A = \emptyset$   
 ۴ (۴)  $B = \emptyset$

۱۱۰- اگر  $A \subseteq B$ ، آن‌گاه  $A \cup (B - A)$  برابر با کدام گزینه است؟

- ۱ (۱)  $A$   
 ۲ (۲)  $B$   
 ۳ (۳)  $A'$   
 ۴ (۴)  $B'$

۱۱۱- در چه صورتی تساوی  $(A - B) - (B - A) = A$  برقرار می‌شود؟

- ۱ (۱)  $A \cap B = \emptyset$   
 ۲ (۲)  $A \subset B$   
 ۳ (۳)  $A \cup B = A$   
 ۴ (۴)  $A = B$

۱۱۲- اگر  $A \subset B$  و  $A \subset C$ ، آن‌گاه  $A \cap (B - C)$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $A$   
 ۲ (۲)  $B - C$   
 ۳ (۳)  $\emptyset$   
 ۴ (۴)  $A - (B - C)$

۱۱۳- اگر بدانیم  $A - B = A$ ، آن‌گاه  $(B - A) \cup (A \cap B)$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $B$   
 ۲ (۲)  $A \cup B$   
 ۳ (۳)  $\emptyset$   
 ۴ (۴)  $A$

۱۱۴- اگر  $A \subset B$  باشد، کدام گزینه حتماً درست است؟

- ۱ (۱)  $B' \subset A$   
 ۲ (۲)  $A' \subset B$   
 ۳ (۳)  $B' \subset A'$   
 ۴ (۴)  $A' \subset B'$

۱۱۵- کدام گزینه غلط است؟

- ۱ (۱)  $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - A$   
 ۲ (۲)  $A - (A - B) = A \cap B$   
 ۳ (۳)  $A - B = A \cap B'$   
 ۴ (۴)  $A - B = A - (A \cap B)$

۱۱۶- اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد صحیح باشد و  $A' = \{۱, ۲, ۳\}$  و  $B' = \{۲, ۳, ۴, ۵\}$  باشد، آن‌گاه  $(A \cup B)'$  کدام مجموعه است؟

- ۱ (۱)  $\{۲, ۳\}$   
 ۲ (۲)  $\{۲, ۴, ۵\}$   
 ۳ (۳)  $\{۳, ۴, ۵\}$   
 ۴ (۴)  $\{۴, ۵\}$

۱۱۷- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم باشند، حاصل  $A \cap B'$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $M$   
 ۲ (۲)  $\emptyset$   
 ۳ (۳)  $B'$   
 ۴ (۴)  $A$

۱۱۸- اگر  $A \subset B$ ، در این صورت  $A \cup (B \cap A')$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $A$   
 ۲ (۲)  $B$   
 ۳ (۳)  $A'$   
 ۴ (۴)  $M$

(تیزهوشان)

(تیزهوشان)

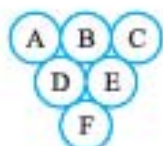
۱۱۹- متمم مجموعه  $(B-A)' - A$  نسبت به مجموعه جهانی کدام است؟

$B$  (۴)       $A$  (۳)       $A \cap B$  (۲)       $A \cup B$  (۱)

۱۲۰- اگر داشته باشیم  $A \cup C = B \cup C$ ، کدام گزینه قطعاً درست است؟

$A = B$  (۴)       $B = C$  (۳)       $A - C = B - C$  (۲)       $A \cap C = B \cap C$  (۱)

۱۲۱-  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه مجموعه دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالاسر خودش است



(سمت چپ منهای سمت راست)، مثلاً  $D = A - B$ . کدام گزینه حتماً درست است؟ (المیاد ریاضی)

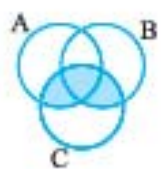
$B \subset F$  (۲)       $f \subset C$  (۱)  
 $(D \cap C) \subset f$  (۴)       $f \subset (A \cap C)$  (۳)

۱۲۲- اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی و همچنین  $A$  متناهی و  $B$  نامتناهی باشد، کدام مجموعه الزاماً نامتناهی است؟

(مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه مرجع است.)

$A' \cap B$  (۴)       $A \cup B'$  (۳)       $A' \cap B'$  (۲)       $A' \cup B'$  (۱)

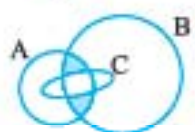
۱۲۳- در شکل مقابل، قسمت رنگی یا کدام مجموعه زیر برابر است؟



$(A \cap B) \cup C$  (۲)       $A \cap (B \cup C)$  (۱)  
 $(A \cup B) \cap C$  (۴)       $A \cup (B \cap C)$  (۳)

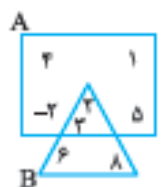
(تیزهوشان)

۱۲۴- در شکل رویه‌رو، ناحیه رنگی کدام است؟



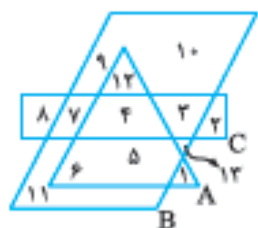
$(A \cup B) - C$  (۲)       $(A - C) \cup (B - C)$  (۱)  
 $C - (A \cap B)$  (۴)       $(A \cap B) - C$  (۳)

۱۲۵-  $A - (A - B)$  چندتا عضو بیشتر از  $[(A \cup B) - (A - B)] - (B - A)$  دارد؟



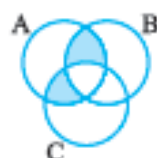
(۱) برابرند.      ۱ (۲)  
 ۲ (۳)      ۴ (۴)

۱۲۶- با توجه به شکل مقابل، چند عدد (از ۱ تا ۱۳) در هیچ کدام از مجموعه‌های  $(A \cup C) - B$  و  $(B - A) \cup C$  عضو نیستند؟



۴ (۱)      ۳ (۲)  
 ۶ (۳)      ۵ (۴)

۱۲۷- کدام غلط است؟



$(A - (B \cap C)) \cap (B \cup C)$  (۲)



$(A - (B \cup C)) \cup ((B \cap C) - A)$  (۱)

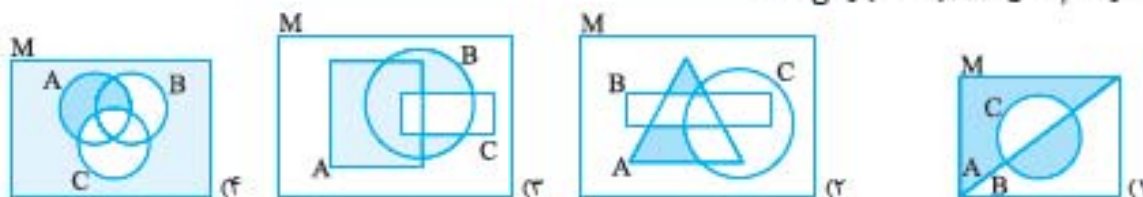


$[(A \cup B \cup C) - (A \cup C)] \cup B$  (۴)



$(A - (B \cup C)) \cup (C - (A \cup B))$  (۳)

۱۲۸- در کدام شکل  $(A-B) \cap C'$  رنگی است؟



۱۲۹- سه مجموعه  $A$ ,  $B$  و  $C$  را در نظر بگیرید. کدامیک از گزینه‌ها، برابر مجموعه اعضایی است که دست کم عضو دوتا از این سه مجموعه است؟

(یعنی کدامیک از گزینه‌ها، همه اعضاهای حداقل دوتا از مجموعه‌های  $A$  یا  $B$  یا  $C$  را شامل می‌شوند.)

- (الف)  $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$  (ب)  $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$   
 (ج)  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$  (د)  $(A \cap B) \cup ((A \cup B) - C)$

۱۳۰- اگر  $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{W}, n < 7\}$  و  $B = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، آن وقت  $A \cap B$  چند عضو دارد؟

- (۱) بی‌شمار (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۳۱- برای  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  و  $S$  و  $T$  را به ترتیب اشتراک و اجتماع تمام زیرمجموعه‌های ۶ عضوی  $A$  تعریف می‌کنیم. در این صورت  $T-S$

کدام است؟

- (۱)  $A$  (۲)  $\{5, 6\}$  (۳)  $\emptyset$  (۴)  $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$

۱۳۲- اگر  $A_1 = \{1, 2, \dots, 10\}$  و  $A_2 = \{2, 3, \dots, 11\}$  و  $A_3 = \{3, 4, \dots, 12\}$  و ... آن‌گاه مجموعه  $A = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$  چند

عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۳۳- اگر  $A_i = \{x \mid -i < x < i, x \in \mathbb{N}\}$  باشد،  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$  کدام است؟

- (۱)  $A_1$  (۲)  $A_n$  (۳)  $A_n - A_1$  (۴)  $A_1 - A_n$

۱۳۴- اگر  $A_n = \{x \mid \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ ، مجموعه  $S = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots)$  کدام است؟

- (۱)  $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$  (۲)  $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$  (۳)  $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$  (۴)  $\{x \mid 0 < x \leq 2\}$

۱۳۵- اگر  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$  مجموعه‌های دلخواه باشند و مجموعه‌های  $B_n$  را به صورت  $B_n = \begin{cases} A_1; n=1 \\ A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i; n \geq 2 \end{cases}$  تعریف کنیم، در

این صورت کدام عبارت زیر درست است؟  $(\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$

- (۱) اگر  $m \neq n$  باشد،  $B_m \cap B_n = \emptyset$  است. (۲)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  است.

- (۳)  $A_n \cap (A_n \cup B_n) = A_n$  (۴) همه گزینه‌ها

### تعداد اعضای مجموعه‌ها

در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها و تعداد اعضای ترکیب‌های آن‌ها، تست‌های بسیار متنوعی می‌شود طرح کرد. ما سعی کردیم بهترین‌های آن‌ها را انتخاب و طرح کنیم تا به قول خودمان دهانشو بپریم.

۱۳۶- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند به طوری که  $A \cap B = \emptyset$  و  $A \cup B = \{-15, -10, -5, \dots, 15\}$  و مجموعه  $A$ ، ۱۰ عضو داشته باشد، تعداد

عضوهای مجموعه  $B$  چندتا است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴) ۱۸

۱۳۷- اگر  $n(A) + n(B) = 2n(A \cap B)$ ، آن وقت حاصل  $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$  چند است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۸- اگر  $n(A) = 7$ ،  $n(A') = 5$  و  $n(A \cap B) = 9 - n(B')$ ، مقدار  $n(B - A)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۹- اگر  $n(A - B) = 4$ ،  $n(A) + n(B') = 5$  و  $n(B) + n(A') = 11$ ، آن گاه  $n(B \cup A')$  کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۴۰- دانش‌آموزان سال چهارم یک دبیرستان ۲۵۰ نفرند. هر کدام یک گروه ورزش را انتخاب کرده‌اند. ۴۰٪ آن فوتبال و نصف بقیه، والیبال بازی می‌کنند. چند دانش‌آموز، فوتبال یا والیبال بازی نمی‌کنند؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۸۰ (۳) ۸۵ (۴) ۹۰

۱۴۱- در کلاس درس هوشنگ، ۲۰ دانش‌آموز وجود دارد که ۱۲ نفر کتاب تست تیزهوشان خیلی سبز و ۱۰ نفر کتاب کار خیلی سبز را دارند. چند نفر هر دو کتاب را دارند؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۴۲- در یک کلاس، ۱۷ نفر عضو تیم «ریاتیک» و ۱۳ نفر عضو تیم «ریوکاپ» هستند. اگر ۸ نفر عضو هر دو تیم باشند و ۳ نفر عضو هیچ تیمی نباشند، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟ (هر دانش‌آموز حداقل یکی از کتاب‌ها را دارد.)

(ریوکاپ)

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۷ (۳) ۲۵ (۴) قابل محاسبه نیست.

۱۴۳- در بین اعداد طبیعی دورقمی طبیعی، چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۶۰ (۳) ۴۵ (۴) ۳۶

۱۴۴- تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ که نه بر ۳ بخش پذیرند و نه بر ۵، چندتا است؟

- (۱) ۴۶ (۲) ۴۷ (۳) ۵۳ (۴) ۶۲

۱۴۵- سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  به ترتیب ۲، ۳ و ۴ عضو هستند و هر دو تایشان حداقل یک عضو مشترک دارند.  $A \cup B \cup C$  حداقل و حداکثر چند عضو دارد؟

(تیزهوشان)

- (۱) ۴ و ۷ (۲) ۲ و ۴ (۳) ۲ و ۹ (۴) ۳ و ۹

۱۴۶- اگر  $n(A \cup B \cup C) = 18$  و  $n(A - (B \cup C)) = 4$  و  $n(B \cap C) = 2$  باشد، مقدار  $n((C - B) \cup (B - C))$  کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۱۶

۱۴۷- در یک باشگاه ورزشی ۵۹ نفر عضو هستند. ۲۹ نفر در فوتبال، ۳۲ نفر در بسکتبال و ۲۰ نفر در والیبال؛ از طرفی ۷ نفر در بسکتبال و فوتبال، ۸ نفر در فوتبال و والیبال و ۱۰ نفر در بسکتبال و والیبال عضو هستند. چند نفر فقط در یک رشته ورزشی عضو هستند؟ (در این باشگاه رشته ورزشی دیگری وجود ندارد.)

(ریوکاپ)

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۰ (۳) ۳۹ (۴) ۳۸

۱۴۸- در بین ۹۵ دانش‌آموز پایه نهم دبیرستان «نوک تیزان»، ۸۰ نفر به رشته ریاضی، ۵۰ نفر رشته تجربی و ۴۰ نفر به رشته انسانی علاقه دارند. ۳۰ نفر به ریاضی و انسانی، ۴۰ نفر به تجربی و ریاضی و ۱۵ نفر به تجربی و انسانی علاقه دارند. هم‌چنین می‌دانیم که ۱۰ نفر به هر سه رشته علاقه دارند. چند نفر به تجربی یا انسانی علاقه دارند ولی به ریاضی علاقه ندارند؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۵ (۴) ۲۰

## ● احتمال (مفهوم احتمال - فضای نمونه - پیشامد مطلوب و...)

سوالات این قسمت با مفهوم احتمال شروع می‌شود. در تست‌های اول خیلی نیازی به حساب و کتاب نیست ولی خیلی مفهومی‌اند. بعد می‌رویم سراغ شناخت فضای نمونه و حالت‌های مطلوب که خیلی باید حواستان را جمع کنید.

۱۴۹- در کیسه‌ای  $\frac{1}{6}$  کارت‌ها سبز،  $\frac{1}{12}$  زرد،  $\frac{1}{4}$  سفید و  $\frac{1}{4}$  آبی هستند. شانس بیرون آمدن کارت آبی در یک برداشت چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{12}$       (۳)  $\frac{1}{8}$       (۴)  $\frac{1}{6}$

۱۵۰- تیراندازی از ۷ شلیک، ۳ تا را به هدف زده است. چه قدر احتمال دارد که تیر اول به هدف نخورده باشد؟

(۱)  $\frac{3}{7}$       (۲)  $\frac{4}{7}$       (۳)  $\frac{1}{2} \left( \frac{6}{3} \right) \left( \frac{3}{7} \right)$       (۴)  $\left( \frac{6}{2} \right) \left( \frac{3}{7} \right)$

۱۵۱- اتاقی داریم که کف آن از کاشی‌های مربع‌شکل پوشیده شده است. طول اتاق شامل ۸ و عرض شامل ۵ کاشی است. اگر یکی از کاشی‌ها را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آن که این کاشی، کاشی گنج یا کناره‌های اتاق باشد، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{19}{40}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{21}{40}$       (۴)  $\frac{11}{20}$

۱۵۲- اگر شخصی از شهر A به شهر D برود، چه قدر احتمال دارد که در مسیرش به رستوران نیز برود؟



(۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{5}$

(۳)  $\frac{1}{6}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۵۳- ۶ نفر به نام‌های A, B, C, D, E, F را می‌خواهیم به ۳ تیم دونفره تقسیم کنیم. چه قدر احتمال دارد که A و B هم تیم باشند؟

(۱)  $\frac{1}{12}$       (۲)  $\frac{1}{6}$       (۳)  $\frac{1}{5}$       (۴)  $\frac{5}{18}$

۱۵۴- از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  یک زیرمجموعه ۹۹ عضوی انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که ۱۹ انتخاب نشده باشد؟

(۱)  $\frac{1}{10}$       (۲)  $\frac{1}{100}$       (۳)  $\frac{99}{100}$       (۴)  $\frac{50}{100}$

۱۵۵- خانواده‌ای دارای فرزندان ۳ قلو است. فضای نمونه آن (از نظر دختر یا پسر بودن) چند عضو هم‌شانس دارد؟

(۱) ۴      (۲) ۸      (۳) ۶      (۴) ۱۰

۱۵۶- یک سکه را ۳ بار می‌اندازیم. چه قدر احتمال دارد که ۲ دفعه رو بیاید؟

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{8}$       (۳)  $\frac{3}{16}$       (۴)  $\frac{3}{8}$

۱۵۷- در پرتاب دو تاس سالم، احتمال این که مجموع اعداد از ۹ بزرگ‌تر باشد، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{6}$       (۳)  $\frac{1}{9}$       (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۵۸- اگر دو تاس را با هم پرتاب کنیم، چه قدر احتمال دارد که مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۸ باشد؟

(۱)  $\frac{11}{36}$       (۲)  $\frac{1}{6}$       (۳)  $\frac{17}{36}$       (۴)  $\frac{1}{12}$

۱۵۹- دو تاس داریم که روی وجه‌های تاس اول، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۴، ۶، ۸ و تاس دوم ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۴ است. اگر این ۲ تاس را با هم پرتاب کنیم، چه قدر احتمال دارد که مجموع دو عدد ۹ باشد؟

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{6}$       (۳)  $\frac{1}{9}$       (۴)  $\frac{1}{12}$



۱۶۰- کدام گزینه درست است؟

(تیزهوشان)

(۱) احتمال این که تاس مضرب ۲ نیاید، کم تر از این است که تاس مضرب ۳ بیاید.

(۲) احتمال این که سکه رو بیاید، بیشتر از این است که تاس عدد فرد بیاید.

(۳) احتمال این که یک سکه رو بیاید کم تر از این است که دو سکه همزمان رو بیاید.

(۴) احتمال این که مجموع دو تاس هفت شود، بیشتر از این است که مجموع دو تاس ۵ شود.

۱۶۱- ۵ کارت داریم که روی آن‌ها اعداد ۵، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۲ نوشته شده است. دو کارت به تصادف برمی داریم. چه قدر احتمال دارد که اختلاف این دو عدد زوج باشد؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۶۲- یک تاس را ۳ بار پرتاب می کنیم. چه قدر احتمال دارد که حاصل ضرب هر سه عدد، یک عدد اول باشد؟

(۱)  $\frac{1}{48}$  (۲)  $\frac{1}{72}$  (۳)  $\frac{1}{36}$  (۴)  $\frac{1}{24}$

۱۶۳- در پرتاب دو تاس، احتمال هر دو زوج آمدن را  $P(A)$  و احتمال یکی زوج و یکی فرد آمدن را  $P(B)$  می نامیم. کدام گزینه درست است؟

(۱)  $P^r(A) + P^r(B) = \frac{5}{16}$  (۲)  $P^r(A) + P^r(B) = \frac{1}{4}$  (۳)  $P^r(A) + P^r(B) = \frac{5}{8}$  (۴)  $P^r(A) + P^r(B) = \frac{1}{2}$

۱۶۴- می دانیم از ۳ فرزند یک خانواده، یکی دختر و دو تا پسر است (اطلاعات دیگری نداریم). چه قدر احتمال دارد که بزرگترین فرزند پسر باشد؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{8}$  (۴)  $\frac{1}{8}$

۱۶۵- کارمند آمار با توجه به اطلاعاتی که دارد می داند، در خانه پلاک ۹ یک خانواده با ۲ فرزند زندگی می کنند ولی متأسفانه هیچ اطلاعات دیگری ندارد. او زنگ خانه را می زند و پسر جوانی که خود را فرزند خانواده معرفی می کند، درب را باز می کند. در این لحظه چه قدر احتمال دارد که این خانواده دارای ۲ پسر باشد؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۶۶- در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، عدد تاس قرمز، بزرگ تر از آبی ظاهر شده است. در این صورت احتمال آن که مجموع اعداد رو شده ۷ باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{36}$  (۲)  $\frac{2}{15}$  (۳)  $\frac{2}{15}$  (۴)  $\frac{5}{30}$

۱۶۷- هر یک از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ... ۹ روی ۱۰ کارت یکسان نوشته شده است. یک کارت به تصادف از بین آن‌ها برداشته و رقم آن را یادداشت می کنیم و دوباره داخل کارت‌ها قرار می دهیم. سپس کارت دیگری بیرون می کشیم و رقم آن را در سمت راست رقم قبلی می نویسیم. با کدام احتمال عدد دورقمی، حاصل ضرب ۵ می شود؟

(۱)  $\frac{1}{16}$  (۲)  $\frac{1}{18}$  (۳)  $\frac{1}{19}$  (۴)  $\frac{1}{20}$

۱۶۸- چه قدر احتمال دارد که یک عدد دورقمی انتخاب شده فرد باشد و رقم‌های تکراری نداشته باشد؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{4}{9}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

۱۶۹- از بین اعداد ۱ تا ۹۹ یک عدد تصادفی انتخاب می کنیم. احتمال این که این عدد دقیقاً یک رقم ۳ داشته باشد چه قدر است؟

(المیاد ریاضی)

(۱)  $\frac{2}{11}$  (۲)  $\frac{2}{11}$  (۳)  $\frac{1}{11}$  (۴)  $\frac{2}{9}$

۱۷۰- چه قدر احتمال دارد که یک عدد کوچک تر از ۱۰۰، مضرب ۲ و ۳ باشد ولی مضرب ۵ نباشد؟

(۱)  $\frac{13}{99}$  (۲)  $\frac{16}{99}$  (۳)  $\frac{5}{33}$  (۴)  $\frac{4}{33}$

۱۷۱- ارقام صفحات کتابی ۳۲۰ صفحه‌ای را به صورت تکریمی روی کارت‌هایی نوشته و در کیسه‌ای ریخته‌ایم. یک رقم بیرون می‌آوریم. احتمال آن که رقم ۱۰ بیرون بیاید، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{10}$  (۲)  $\frac{11}{100}$  (۳)  $\frac{43}{213}$  (۴)  $\frac{43}{240}$

۱۷۲- به کیسه‌ای که ۷ مهره قرمز، ۵ مهره زرد و ۴ مهره سبز در آن قرار داشت، تعداد ۴ مهره قرمز، ۳ مهره زرد و ۱ مهره سبز افزودیم. در این صورت احتمال بیرون آمدن ..... است.

- (۱) همه مهره‌ها را افزایش دادیم.  
 (۲) زرد را افزایش و قرمز را کاهش دادیم.  
 (۳) سبز را کاهش و زرد و قرمز را افزایش دادیم.  
 (۴) سبز و زرد را کاهش و قرمز را افزایش دادیم.

۱۷۳- در یک کیسه ۱۴ مهره قرمز و تعدادی مهره زرد وجود دارد. احتمال بیرون آمدن مهره زرد در یک بار بیرون آوردن مهره‌ها  $\frac{1}{44}$  می‌باشد. تعداد مهره‌های زرد چه قدر است؟

(۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

۱۷۴- در یک جعبه ۲۰ توپ قرمز، ۳۰ توپ سفید و چند توپ آبی وجود دارد. اگر شما یک توپ به دلخواه از جعبه بردارید، احتمال آبی بودنش  $\frac{9}{11}$  است. چند توپ آبی در جعبه است؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۵ (۴) ۲۲۵

۱۷۵- تاسی را پرتاب می‌کنیم و عدد به دست آمده را به جای  $A$  در معادله  $2x + A = 4x - 2$  قرار می‌دهیم. چه قدر احتمال دارد جواب این معادله کم‌تر از ۳ باشد؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۷۶- تاسی را دو بار می‌اندازیم و اعداد به دست آمده را به ترتیب به جای  $A$  و  $B$  در معادله  $x^2 - 2x + 2B - 2 = 0$  قرار می‌دهیم. چه قدر احتمال دارد که اعداد قرار گرفته شده باعث شوند تا  $x = 1$  جواب معادله باشد؟

(۱)  $\frac{1}{36}$  (۲)  $\frac{1}{12}$  (۳)  $\frac{1}{9}$  (۴)  $\frac{1}{18}$

اصل ضرب و انتخاب

سوالاتی که در این‌جا گرد هم آمده‌اند را می‌توانیم با اصل ضرب و رابطه انتخاب  $\binom{n}{r}$  حل کرد. اگر احساس نیاز می‌کنید، بروید و قسمت‌های مربوط به این موضوع را در درس‌نامه خوب بخوانید و گرنه شاید کمی گیج بزنید...

۱۷۷- سه تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم که هر سه تاس عدد مرکب آمده‌اند، چه قدر احتمال دارد که هر سه ۶ آمده باشند؟

(۱)  $\frac{1}{36}$  (۲)  $\frac{1}{216}$  (۳)  $\frac{1}{8}$  (۴)  $\frac{1}{72}$

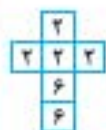
۱۷۸- ده نفر در یک صف ایستاده‌اند. چه قدر احتمال دارد که آقای  $A$  سمت چپ آقای  $B$  و آقای  $B$  سمت چپ آقای  $C$  باشد؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{12}$

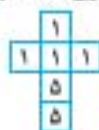
۱۷۹- پنج تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که حاصل ضرب اعداد روشده، مضرب ۵ باشد؟

(۱)  $\frac{6^5 - 5^5}{5^5}$  (۲)  $\frac{5^6 - 5^5}{5^5}$  (۳)  $\frac{6^6 - 6^5}{5^5}$  (۴)  $\frac{6^5 - 5^5}{6^5}$

۱۸۰- شکل‌های زیر، گسترده دو تاس هستند. در پرتاب این دو تاس، چه قدر احتمال دارد که تاس اول عدد بزرگ‌تری داشته باشد؟



تاس اول



تاس دوم

(۱)  $\frac{7}{9}$  (۲)  $\frac{5}{9}$

(۳)  $\frac{5}{7}$  (۴)  $\frac{4}{7}$

۱۸۱- سه تاس را با هم می‌اندازیم. چه قدر احتمال دارد که دو تا از آن‌ها یکسان و یکی از آن‌ها متفاوت باشد؟

(۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{7}{12}$  (۴)  $\frac{5}{12}$

۱۸۲- با ارقام ۱ تا ۷ تمام عددهای سه رقمی بدون ارقام تکراری را می‌نویسیم و یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد

که عدد انتخاب شده فرد و صدگانش ۴ نباشد؟

(۱)  $\frac{11}{21}$  (۲)  $\frac{10}{21}$  (۳)  $\frac{1}{7}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۸۳- در سؤال قبل، چه قدر احتمال دارد که عدد انتخابی بر ۹ بخش پذیر باشد؟

(۱)  $\frac{4}{25}$  (۲)  $\frac{1}{7}$  (۳)  $\frac{6}{25}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

۱۸۴- احتمال این که از بین ۴ نفر غریبه، حداقل ۲ نفر در یک ماه از سال به دنیا آمده باشند، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{55}{96}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{41}{96}$

۱۸۵- ۲ زوج کنار هم در یک صف ایستاده‌اند. چه قدر احتمال دارد که هر خانم کنار همسرش باشد و کنار مرد دیگری نباشد؟

(۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{16}$

۱۸۶- در سؤال قبل، اگر ۳ زوج داشته باشیم، احتمال موردنظر چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{48}$  (۲)  $\frac{1}{60}$  (۳)  $\frac{1}{120}$  (۴)  $\frac{1}{24}$

۱۸۷- دو خانواده اصفهانی و تبریزی را در نظر بگیرید که هر دوی آن‌ها ۵ نفری‌اند. چه قدر احتمال دارد که تعداد پسران خانواده تبریزی بیشتر از

تعداد پسران خانواده اصفهانی باشد؟

(۱)  $\frac{11}{32}$  (۲)  $\frac{4!}{2!}$  (۳)  $\frac{4!3!}{2!}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۸۸- سه تا از رأس‌های یک ۶ ضلعی منتظم را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که با این سه

رأس بشود یک مثلث قائم‌الزاویه ساخت؟

(۱)  $\frac{4}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

۱۸۹- در سؤال قبل، چه قدر احتمال دارد که با رأس‌های انتخاب شده بشود یک مثلث متساوی‌الساقین ایجاد کرد؟

(۱)  $\frac{1}{10}$  (۲)  $\frac{3}{10}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

۱۹۰- فرض کنید A, B, C, D, E, F, G و H و به همین ترتیب، رأس‌های یک ۸ ضلعی منتظم هستند. به تصادف یکی از رأس‌های

C, D, E, F, G و H را انتخاب کرده و پاره‌خطی از آن به A می‌کشیم. دوباره از همان شش رأس نقطه‌ای انتخاب کرده و این بار آن را به B وصل

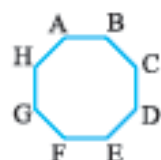
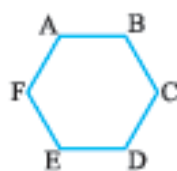
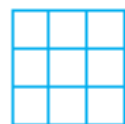
می‌کنیم. احتمال این که A ضلعی با این دو پاره‌خط به سه ناحیه تقسیم شود، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{4}{9}$  (۴)  $\frac{5}{18}$

۱۹۱- تمام جدول‌های ۳×۳ را با حروف a, b و c طوری که در هیچ سطر و ستونی حرف تکراری نباشد می‌نویسیم و یکی را به تصادف انتخاب

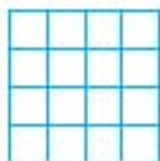
می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که حروف خانه‌های مشخص شده یکی باشد؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{2}{3}$



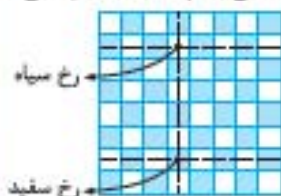
(کنگورو)

۱۹۲- می‌خواهیم خانه‌های یک جدول  $4 \times 4$  را با اعداد صفر و یک پر کنیم. چه قدر احتمال دارد که مجموع اعداد هر سطر و ستون زوج باشد؟



- (۱)  $\frac{1}{64}$   
 (۲)  $\frac{1}{32}$   
 (۳)  $\frac{1}{256}$   
 (۴)  $\frac{1}{128}$

۱۹۳- ۲ مهره زخ را در صفحه شطرنجی قرار می‌دهیم. چه قدر احتمال دارد که این دو مهره یکدیگر را تهدید کنند؟ (رخ تمام خانه‌های هم‌سطح و هم‌ستون خود را تهدید می‌کند.)



- (۱)  $\frac{15}{64}$   
 (۲)  $\frac{5}{21}$   
 (۳)  $\frac{2}{9}$   
 (۴)  $\frac{16}{63}$

۱۹۴- در سؤال قبل، اگر به جای مهره‌های زخ، مهره‌های اسب قرار دهیم، چه قدر احتمال دارد که اسب‌ها همدیگر را تهدید کنند؟

- (۱)  $\frac{1}{24}$   
 (۲)  $\frac{1}{18}$   
 (۳)  $\frac{1}{16}$   
 (۴)  $\frac{1}{12}$

۱۹۵- ۳ گوی سفید و ۵ گوی مشکی داریم. می‌خواهیم آن‌ها را در یک خط کنار هم قرار دهیم. چه قدر احتمال دارد که هیچ کدام از توپ‌های سفید کنار هم نباشند؟

- (۱)  $\frac{9}{14}$   
 (۲)  $\frac{5}{14}$   
 (۳)  $\frac{6}{14}$   
 (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۹۶- ۳ نقطه به تصادف از شکل مقابل انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌ها که بشود با این ۳ نقطه یک مثلث تشکیل داد، چه قدر است؟



- (۱)  $\frac{8}{10}$   
 (۲)  $\frac{9}{10}$   
 (۳)  $\frac{5}{10}$   
 (۴) ۱

۱۹۷- اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بر روی شش مهره یکسان نوشته شده‌اند. اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم، با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ می‌باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{3}$   
 (۳)  $\frac{2}{5}$   
 (۴)  $\frac{2}{5}$

۱۹۸- یکی از زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  را انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که با اعضای آن بشود یک مثلث ساخت؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$   
 (۲)  $\frac{1}{4}$   
 (۳)  $\frac{2}{20}$   
 (۴)  $\frac{1}{10}$

۱۹۹- بر روی ۲۵ کارت یکسان، اعداد ۱ تا ۲۵ نوشته شده است. اگر دو کارت از بین آن‌ها بیرون آوریم، با کدام احتمال این اعداد مضرب ۲ یا مضرب ۳ نیست؟

- (۱)  $0/12$   
 (۲)  $0/14$   
 (۳)  $0/16$   
 (۴)  $0/18$

۲۰۰- یک زیرمجموعه دلخواه از  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  انتخاب می‌کنیم. از بین تمام زیرمجموعه‌های فرد عضوی چه قدر احتمال دارد که این زیرمجموعه ۳ عضوی باشد و عضو اول نداشته باشد؟

- (۱)  $\frac{5}{256}$   
 (۲)  $\frac{7}{64}$   
 (۳)  $\frac{7}{128}$   
 (۴)  $\frac{5}{128}$

۲۰۱- می‌خواهیم یک زیرمجموعه ۵ عضوی از  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که ۷، عضو این زیرمجموعه باشد و از اعداد بزرگ‌تر از ۷ فقط یک عضو در این زیرمجموعه باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{7}$   
 (۲)  $\frac{1}{3}$   
 (۳)  $\frac{5}{21}$   
 (۴)  $\frac{4}{21}$

۲۰۴- در کیسه‌ای ۳ گوی آبی و ۴ گوی قرمز وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره برمی‌داریم. احتمال این که یکی از آن‌ها آبی و دوتای دیگر قرمز باشد، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{22}{35}$  (۲)  $\frac{20}{35}$  (۳)  $\frac{18}{35}$  (۴)  $\frac{16}{35}$

۲۰۵- جعبه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. اگر از این جعبه ۳ مهره برداریم، چه قدر احتمال دارد که حداکثر دو مهره سفید باشد؟

(۱)  $\frac{20}{21}$  (۲)  $\frac{16}{21}$  (۳)  $\frac{6}{7}$  (۴)  $\frac{5}{7}$

۲۰۶- حروف  $a, a, a, a, a, b, c, d, e, f$  را در نظر بگیرید. تمام حالت‌های شتابی این حروف را روی تخته می‌نویسیم و یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که حالت  $aaabc$  انتخاب شود؟ (دقت کنید که در این سؤال  $aaabc$  و  $aabca$  و حالت‌های دیگری که از جایجایی حروف ایجاد می‌شوند، یکی‌اند.)

(۱)  $\frac{1}{32}$  (۲)  $\frac{1}{25}$  (۳)  $\frac{1}{26}$  (۴)  $\frac{1}{20}$

۲۰۷- یک تاس را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که اعداد در هر پرتاب بیشتر شوند؟

(۱)  $\frac{8}{54}$  (۲)  $\frac{7}{54}$  (۳)  $\frac{5}{54}$  (۴)  $\frac{6}{54}$

### ترکیب پیشامدها

در این قسمت احتمال‌هایی را بررسی می‌کنیم که از ترکیب چند آزمایش بد وجود می‌آیند. حالا این پیشامدها می‌توانند مستقل  $(P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B))$  یا ناسازگار  $(P(A \cap B) = 0)$  باشند یا نباشند.

۲۰۸- یک تاس آبی و یک تاس قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که تاس آبی زوج یا تاس قرمز ۶ بیاید؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{7}{12}$  (۴)  $\frac{5}{12}$

۲۰۹-  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل‌اند. اگر بدانیم  $P(A \cup B) = (P(A) + 1)(P(B) + 1) - 2$  حاصل  $P(A \cap B)$  چند است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{2}{3}$

۲۱۰- اگر برای پیشامدهای  $A$  و  $B$  اطلاعات زیر موجود باشد،  $P(A' \cap B')$  کدام است؟

(۱)  $10\%$  (۲)  $15\%$  (۳)  $20\%$  (۴)  $25\%$

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{2}{16}$  (۴)  $\frac{3}{8}$

۲۱۱- در پرتاب سه سکه چه قدر احتمال دارد که هر سه یکسان بیایند؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{2}{16}$  (۴)  $\frac{3}{8}$

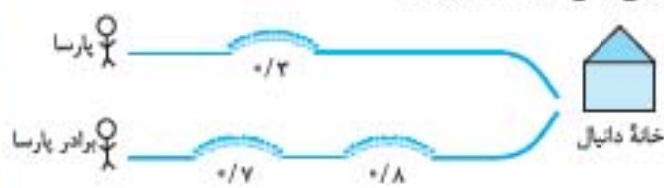
۲۱۲- تعداد ۴ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که حداقل یک سکه دروه ظاهر شود، کدام است؟

(۱)  $\frac{12}{16}$  (۲)  $\frac{13}{16}$  (۳)  $\frac{14}{16}$  (۴)  $\frac{15}{16}$

۲۱۳- احتمال آن که شخصی جواب ۵ سؤال تستی دوگزینه‌ای را به تصادف صحیح بزند، چند برابر احتمال انتخاب تصادفی جواب صحیح ۵ سؤال از تست چهارگزینه‌ای است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۲۱۲- در یک روز آفتابی پارسا و برادرش می‌خواهند از خانه خودشان به خانه دانیال بروند تا نهار بخورند. در مسیر پل‌هایی وجود دارد که احتمال قابل عبور بودن آن‌ها نوشته شده است. چه قدر احتمال دارد که حداقل یکی از آن‌ها به مقصد برسد؟



- (۱)  $0/86$   
 (۲)  $0/56$   
 (۳)  $0/692$   
 (۴)  $0/168$

۲۱۳- در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف ۱ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این مهره‌ها متفاوت است؟

- (۱)  $\frac{19}{40}$  (۲)  $\frac{21}{40}$  (۳)  $\frac{23}{40}$  (۴)  $\frac{27}{40}$

۲۱۴- ظرف A شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ظرف B شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. از هر ظرف مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که از ظرف A سفید و از ظرف B سیاه آمده باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{62}{63}$  (۲)  $\frac{31}{63}$  (۳)  $\frac{25}{63}$  (۴)  $\frac{5}{21}$

۲۱۵- در جعبه A، ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هر یک از این دو جعبه، یک مهره بیرون می‌کشیم. احتمال آن‌که هم‌رنگ باشند، کدام است؟

- (۱)  $\frac{6}{25}$  (۲)  $\frac{12}{25}$  (۳)  $\frac{15}{25}$  (۴)  $\frac{18}{25}$

۲۱۶- کیسه‌ای شامل سه ظرف است. ظرف اول شامل ۳ مهره سیاه است. ظرف دوم شامل ۸ مهره سفید و ظرف سوم شامل ۴ مهره سیاه و ۸ مهره سفید است. در برداشتن یک مهره از کیسه، احتمال برداشتن مهره سفید چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{7}{9}$  (۴)  $\frac{8}{9}$

۲۱۷- رولت روسی یک بازی مرگ‌بار است که در آن هر شرکت‌کننده یک یا چند گلوله داخل هفت‌تیر قرار می‌دهد و پس از چرخاندن تصادفی خشاب، لوله هفت‌تیر را روی شقیقه خود قرار داده، ماشه را می‌کشد. (چه وحشتناک!) خشاب این هفت‌تیر به صورت دایره است که جای ۷ گلوله دارد و پس از کشیدن ماشه به صورت ساعت‌گرد می‌چرخد. در یک بازی، شخصی ۳ گلوله را به صورت تصادفی و با احتمال یکسان در خشاب قرار می‌دهد و پس از چرخاندن خشاب ۲ بار پیاپی شلیک می‌کند. احتمال زنده ماندنش چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{7}$  (۲)  $\frac{12}{49}$  (۳)  $\frac{4}{7}$  (۴)  $\frac{2}{7}$

۲۱۸- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شود. به تصادف و بدون جای‌گذاری سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که اولین موش سفید و سومین موش سیاه باشد؟

- (۱)  $\frac{11}{56}$  (۲)  $\frac{17}{56}$  (۳)  $\frac{13}{56}$  (۴)  $\frac{15}{56}$

۲۱۹- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که مهره‌های فرد اصلاً پشت سر هم بیرون نیایند؟

- (۱)  $0/1$  (۲)  $0/15$  (۳)  $0/2$  (۴)  $0/25$

۲۲۰- ۹ عدد گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۹ در داخل ظرفی قرار دارند. به طور تصادفی دو گوی از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که شماره‌های هر دو گوی عدد زوج باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{2}{8}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

۲۲۱- تقریباً چه قدر احتمال دارد که در یک گروه ۵ نفری، حداقل ۲ نفر از افراد در یک ماه به دنیا آمده باشند؟

- (۱)  $0/8$  (۲)  $0/2$  (۳)  $0/4$  (۴)  $0/6$

۲۲۲- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز موجود در یک کیسه، به تصادف یک کارت بیرون می‌آوریم. بدون این که کارت اول را به کیسه برگردانیم،

کارت دوم را بیرون می‌آوریم. چه قدر احتمال دارد که کارت‌ها هم‌رنگ باشند؟

- (۱)  $\frac{2}{7}$  (۲)  $\frac{5}{14}$  (۳)  $\frac{3}{7}$  (۴)  $\frac{4}{7}$

۲۲۳- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره قرمز و یک مهره آبی وجود دارد. یک بار سه مهره بدون جای گذاری و بار دیگر سه مهره با جای گذاری

برمی‌داریم. اختلاف احتمال این که مهره‌ها به ترتیب سفید، قرمز و آبی بیایند، چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{7}{900}$  (۲)  $\frac{13}{800}$  (۳)  $\frac{11}{900}$  (۴)  $\frac{11}{800}$

۲۲۴- در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه اول ۴ عدد و در جعبه دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ

و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. یا کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

- (۱)  $\frac{175}{105}$  (۲)  $\frac{19}{105}$  (۳)  $\frac{6}{35}$  (۴)  $\frac{8}{35}$

### فضای نمونه پیوسته

ترجیح دادیم که سؤالات را موضوعی بیاوریم. یعنی اول سؤالاتی که فضای نمونه‌شان خطی است و بعد آن‌هایی که فضای نمونه‌شان دوبعدی است.

به همین خاطر بعضی از سؤالات سفت، همان وسط‌سطح (III) هستند.

۲۲۵- صفحه دایره‌ای شکل عقربه‌دار، با ۴ رنگ سفید، آبی، قرمز و سیاه به ترتیب با زاویه‌های  $150^\circ$ ،  $90^\circ$ ،  $70^\circ$  و  $50^\circ$  درست شده است. با چرخش

تصادفی عقربه، چه قدر احتمال دارد که عقربه روی ناحیه سفید قرار نگیرد؟

- (۱)  $\frac{5}{12}$  (۲)  $\frac{4}{9}$  (۳)  $\frac{5}{9}$  (۴)  $\frac{7}{12}$

۲۲۶- طول نوعی خاص از مارها به طور کاملاً هم‌شانشی بین  $0/9$  تا  $1/2$  متر است. اگر یکی از این مارها به طور تصادفی انتخاب شود، چه قدر

احتمال دارد که سه برابر طول آن کوچک‌تر از یکی بیشتر از دو برابر طول آن باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۲۲۷- عدد  $a$  به طور تصادفی از اعداد بین صفر تا ۲ انتخاب می‌شود. چه قدر احتمال دارد که جواب معادله  $2x - a = 0$  کوچک‌تر از  $\frac{1}{4}$  باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{16}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{8}$

۲۲۸- در مثلث  $ABC$ ، زاویه  $A = 45^\circ$  و زاویه  $B$  و  $C$  به تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال این که مثلث  $ABC$  دارای زاویه باز باشد،

چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۲۲۹- می‌خواهیم نقطه‌ای به تصادف از سطح دایره‌ای انتخاب کنیم. احتمال آن که این نقطه به مرکز دایره نزدیک‌تر از هر نقطه محیط دایره باشد،

چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

۲۳۰- نقطه‌ای به تصادف درون دایره شکل زیر انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این نقطه در داخل مربع باشد، چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{2}{\pi}$  (۲)  $\frac{2}{\pi}$  (۳)  $1 - \frac{2}{\pi}$  (۴)  $1 - \frac{2}{\pi}$



۲۳۱- یک نقطه به تصادف درون مربعی به ضلع ۲ واحد انتخاب می‌کنیم.  $A$  پیشامدی است که فاصله این نقطه از تمام رأس‌ها بیشتر از ۱ باشد.  $P(A')$  کدام است؟

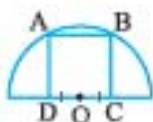
$1 - \frac{\pi}{8}$  (۴)

$1 - \frac{\pi}{4}$  (۳)

$\frac{\pi}{8}$  (۲)

$\frac{\pi}{4}$  (۱)

۲۳۲- نقطه‌ای به تصادف در داخل سطح نیم‌دایره مقابل انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این نقطه داخل مربع  $ABCD$  باشد، چه قدر است؟



$\frac{2}{\sqrt{5}\pi}$  (۲)

$\frac{1}{\pi\sqrt{5}}$  (۱)

$\frac{2}{5\pi}$  (۴)

$\frac{8}{5\pi}$  (۳)

۲۳۳- در پرتاب یک سکه به شعاع ۲ سانتی‌متر بر روی یک مربع به ضلع ۱۰ سانتی‌متر، مطمئن هستیم که مرکز سکه همواره درون مربع قرار می‌گیرد. چه قدر احتمال دارد که هیچ قسمتی از سکه بیرون مربع نماند؟

$0/64$  (۴)

$0/24$  (۳)

$0/36$  (۲)

$0/2$  (۱)

۲۳۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع مقابل، خطوط موازی هر ضلع، دو ضلع دیگر آن را به طول‌های ۲ و ۸ تقسیم می‌کند. اگر نقطه‌ای به تصادف درون مثلث بزرگ‌تر انتخاب شود، چه قدر احتمال دارد که این نقطه در ناحیه رنگ‌شده باشد؟



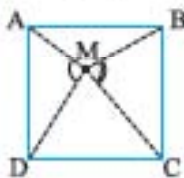
$0/80$  (۲)

$0/72$  (۱)

$0/90$  (۴)

$0/84$  (۳)

۲۳۵- درون مربع مقابل، یک نقطه دلخواه به نام  $M$  به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن به چهار رأس وصل می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که هر دو زاویه  $\widehat{AMD}$  و  $\widehat{BMC}$  حاده باشند؟



$1 - \frac{\pi}{4}$  (۲)

$1 - \frac{\pi}{2}$  (۱)

$\frac{\pi}{4}$  (۴)

$\frac{\pi}{2}$  (۳)