فهرست

فصل ۱

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱- گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) سؤال سخت یک مفهوم غیردقیق و سلیقه‌ای است، پس معلوم نیست چه سؤالاتی سخت‌اند تا کسانی که آن‌ها را حل کرده‌اند پیدا کنیم.

۲) واحد، یک مقدار قراردادی و دلخواه است. در این گزینه هیچ واحد خاصی مشخص نشده است. cm یا m یا km یا ...

۳) ۱۰ حالت مختلف داریم، مثل $\{۱,۳,۵\}$ و $\{۱,۳,۷\}$ و ...

۴) نمی‌دانیم چه xهایی در این معادله صدق می‌کنند، ولی معلوم است که هر کس بلد باشد این سؤال را حل کند، مطمئناً به جوابی یکسان با افراد دیگر خواهد رسید. یعنی به‌هیچ‌وجه xای پیدا نمی‌شود که هم در این معادله صدق کند هم صدق نکند، یعنی سلیقه‌ای باشد.

۲- گزینه ۳ مجموعه‌های تک عضوی $\{\{\ \}\}$ و $\{\varnothing\}$ با هم مساوی‌اند و تنها عضوشان مجموعهٔ تهی $\varnothing = \{\ \}$ است. $x=۱$ در معادلهٔ مجموعهٔ گزینهٔ (۴) صدق می‌کنند، پس $۱^۲ + ۱ = ۲$ عضو این مجموعه است. اما در گزینهٔ سوم تنها $x=\frac{۵}{۳}$ در معادلهٔ $۳x+۲=۷$ صدق می‌کنند که با $x \in \mathbb{N}$ تناقض دارد، پس قبول نیست. یعنی این مجموعه عضوی ندارد و تهی است.

۳- گزینه ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\{۳,۶,۹,۱۲,\ldots\}$ و $\{۲,۵,۸,۱۱,\ldots\}$ و $\{۱,۴,۷,۱۰,\ldots\}$

۲) $\{-۱۱,۰,۱\}$

۳) یک تقسیم بر صفر یک عدد گویا نیست. یعنی اصلاً عدد نیست که بخواهد گویا باشد یا نباشد.

۴) قبلی معلوم است که اگر $A \subset B \subset C$ آن‌وقت $A \subset C$.

۴- گزینه ۴ جمع و تفریق و ضرب هر دو عدد صحیح حتماً یک عدد گویا است ولی تقسیم دو عدد صحیح می‌تواند گویا نباشد. تنها حالتش هم این است که مخرج صفر باشد؛ مثل $\frac{۵}{۰}$.

۵- گزینه ۴ قرینهٔ اعداد طبیعی عضو $\mathbb{N}$ نیستند که خواستهٔ سؤال درست دربیاید. مثلاً اگر $a=۱$، آن‌وقت $-a=-۱ \notin \mathbb{N}$.

۶- گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱) بین هر دو عدد، بی‌نهایت عدد گویا و بی‌نهایت عدد گنگ (غیرگویا) وجود دارد.

۲،۳) مجموعهٔ اعداد اول و مرکب نامتناهی‌اند ولی همه طبیعی‌اند. به عبارت بهتر: «دسته‌بندی اعداد اول و مرکب فقط برای اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک است و اعداد دیگر، نه اول‌اند و نه مرکب.»

مثل این‌که بگوییم این کتاب دختر است یا پسر!

۴) هر عدد که تجزیه‌اش سه‌تا عامل ۲ داشته باشد، عضو این مجموعه است. عبارت جبری این اعداد به صورت $۲^۳ \times (۲x-۱)\ ;\ x \in \mathbb{N}$ است.

۷- گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱) تعداد اعضای مجموعهٔ A = (آخری ـ اولی) + ۱ = $(۷۷-۷)+۱=۷۱$

۲) ضرب دوم تا بیستم عدد ۴ در این مجموعه عضواند: $B=\{۲\times۴,۳\times۴,۴\times۴,\ldots,۲۴\times۴\} \Rightarrow n(B)=(۲۴-۲)+۱=۲۳$

۳) $C=\{۴^۲,۵^۲,۶^۲,\ldots,۱۷^۲\} \Rightarrow n(C)=(۱۷-۴)+۱=۱۴$

۴) اعداد فرد را می‌توان از رابطهٔ $۲n+۱$ به دست آورد. فقط باید محدودهٔ n را بفهمیم:

بیشترین مقدار: $۲n+۱=۵۱ \Rightarrow n=۲۵$

کم‌ترین مقدار: $۲n+۱=-۱۱ \Rightarrow n=-۶$

$\Rightarrow n(D)=(۲۵-(-۶))+۱=۳۲$

۸- گزینه ۳ با توجه به تساوی $۲^{۱۲}=۲\times۲^{۱۱}=۲^{۱۱}+۲^{۱۱}$ اعضای مجموعه را این طوری می‌بینیم:

$$۲^{۱۱}+\underbrace{۲}_{۱\times۲}\ ,\ ۲^{۱۱}+\underbrace{۴}_{۲\times۲}\ ,\ ۲^{۱۱}+\underbrace{۶}_{۳\times۲}\ ,\ \ldots\ ,\ ۲^{۱۱}+\underbrace{۲^{۱۱}}_{۲^{۱۰}\times۲}$$

اعداد متوالی رنگی شمارهٔ هر عدد را نشان می‌دهد. پس این مجموعه $۲^{۱۰}$ عضو دارد.

۹- گزینه ۳ اعداد با شماره‌های زوج منفی‌اند و اعداد با شماره‌های فرد مثبت. الان اگر علامت‌ها را بگذاریم کنار، هر عضو ۴تا بیشتر از عضو قبلی است. پس برای این‌که به عضو بیستم برسیم، باید به عضو اول $۱۹\times۴=۷۶$ واحد اضافه کنیم. یعنی عضو بیستم برابر $-(۳+۷۶)=-۷۹$ است.

۱۰- گزینه ۱ معلوم است که باید داشته باشیم $\{x-1\}=\{5\}$ یعنی $x=6$. از طرف دیگر باید داشته باشیم $\{x-y\}=\{3\}$، پس:

$$x-y=3 \xrightarrow{x=6} 6-y=3 \Rightarrow y=3$$

۱۱- گزینه ۲ چون سمت چپ تک‌عضوی است، پس اعضای سمت راست هم باید با هم برابر باشند.

$$2x-5=25-3x \Rightarrow 5x=30 \Rightarrow x=6 \Rightarrow 2x-5=7=a$$

۱۲- گزینه ۲ هر دو مجموعه، دو عضو دارند که یکی عدد است و یکی مجموعه. قُپ، معلوم است که عدد با عدد می‌تواند برابر شود و مجموعه با مجموعه: *(به قولی: کبوتر با کبوتر، باز با باز)*

$$5=a-2 \Rightarrow a=7 \text{ و } \{a,2\}=\{a-5,b-6,2a-b+1\}$$

اگر $a=7$ را در تساوی سمت راست بالا جای‌گذاری کنیم، می‌شود:

$$\{7,2\}=\{2,b-6,15-b\}$$

از دو مقدار $b-6$ و $15-b$ حداقل یکی باید برابر ۷ باشد.

$$b-6=7 \Rightarrow b=13$$

در این صورت $15-b=2$ و ماجرا به خیر می‌گذرد. حالا اگر $15-b=7$، آن وقت:

$$15-b=7 \Rightarrow b=8 \Rightarrow b-6=2$$

باز هم تساوی برقرار خواهد شد. پس دو جواب برای b داریم:

$$a+b=7+13=20 \text{ یا } a+b=7+8=15$$

۱۳- گزینه ۱ $0<C<1$، پس هر چقدر توان C را بیشتر کنیم، جواب کوچک‌تر می‌شود. حالا چون $a,b>0$، داریم: $a+b<a$ و $a+b<\frac{a+b}{2}$. پس بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ اول C^{a+b} است ولی کوچک‌ترین عضو بستگی دارد به این‌که a بزرگ‌تر باشد یا $\frac{a+b}{2}$ و آن هم بستگی دارد به این‌که a بزرگ‌تر باشد یا b. چون $d>1$، معلوم است که $d^2<d^3<d^6$. بزرگ‌ترین عضوها را برابر می‌گذاریم:

$$d^6=C^{a+b} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به‌توان } \frac{1}{6}} (d^6)^{\frac{1}{6}}=(C^{a+b})^{\frac{1}{6}} \Rightarrow d=C^{\frac{a+b}{6}}$$

۱۴- گزینه ۳ معلوم است که مجموعهٔ A_k، kتا عضو دارد. پس مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_{19}$ به ترتیب ۱، ۲، ...، ۱۹تا عضو دارند که روی هم برابر $1+2+3+\cdots+19=\frac{19\times 20}{2}=190$ می‌شود. پس اولین عضو A_{20} برابر ۱۹۱ است. حالا چون A_{20}، ۲۰تا عضو دارد، آخرین عضو آن می‌شود ۲۱۰.

۱۵- گزینه ۱ اعضای $A_{n+1}=\{(-n)^{-m},(n-1)^{-n+2},(n-2)^{n+2}\}$ را ببینید $(n\in\mathbb{N})$. عضو $(-n)^{-2m}$ هیچ‌وقت منفی نمی‌شود، چون توانش زوج است. کم‌ترین مقدار پایهٔ عضو $(n-1)^{-n+2}$ هم صفر است. پس هیچ‌وقت منفی نمی‌شود. فقط عضو $(n-2)^{n+2}$ به ازای $n=1$ می‌تواند منفی باشد. ببینید:

$$n=1 \Rightarrow A_2=\{(-1)^{-2},0^3,(-1)^3\}=\{1,0,-1\}$$

۱۶- گزینه ۴ تساوی مقابل را ببینید:

$$\{5,\{5\},\underbrace{\{5,\cancel{\varnothing}\},\{5,\cancel{\varnothing},\cancel{\varnothing}\}}_{\text{یکی‌اند.}}\}=\{5,\{5\}\}$$

پس این مجموعه ۲ عضو و $2^2=4$ زیرمجموعه دارد.

۱۷- گزینه ۴ $\varnothing$ زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است. پس رابطه‌های $\varnothing\subset\varnothing$ و $\varnothing\subset A$ درست‌اند. هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است $(A\subset A)$. در انتها رابطهٔ $\varnothing\in\{\varnothing\}$ هم درست است. پس ۴تا از رابطه‌های داده‌شده درست‌اند.

۱۸- گزینه ۴ تمامی موارد درست‌اند. به‌جز $\{2,3\}\in A$.

$$A=\{2,3,\{5,3\},\{2\}\}$$

زیرا A، ۴ عضو دارد که هیچ‌کدام از آن‌ها برابر $\{2,3\}$ نیست.

۱۹- گزینه ۳ رابطهٔ مقابل گزینهٔ (۳) درست است، زیرا تنها عضو $\{x\}$ در مجموعهٔ $\{x,\{x\}\}$ هم عضویت دارد.

$$\{x\}\subset\{x,\{x\}\}$$

۲۰- گزینه ۳ با توجه به $B=\{\varnothing,b\}$، زیرمجموعه‌های B این‌ها می‌شوند:

$$\varnothing,\{\varnothing\},\{b\},\underbrace{\{\varnothing,b\}}_{B}$$

مجموعهٔ توانی B، یعنی مجموعه‌ای که اعضای آن، زیرمجموعه‌های B است.

۲۱- گزینه ۱ مجموعهٔ A سه عضو دارد: $\varnothing$، A و $\{\varnothing,A\}$. معلوم است که $\varnothing$ و A زیرمجموعهٔ A هستند. عضو $\{\varnothing,A\}$ هم زیرمجموعهٔ A است، زیرا اعضای آن در A هم هستند.

برای رد گزینه‌های دیگر این‌طور مثال می‌زنیم:

$$\{B\}\in B \Rightarrow \{B\}\not\subset B, \{\varnothing,C\}\in C \Rightarrow \{\varnothing,C\}\not\subset C$$

$$\{\varnothing\}\in D \Rightarrow \{\varnothing\}\not\subset D$$

۲۲- گزینه ۲ فقط دوتا مجموعه با این ویژگی‌ها داریم: $A_1=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ و $A_2=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

۲۳- گزینه ۱

الف) غلط است. مثال: $A=\{2\},B=\{4\},C=\{2,5\}$

ب) غلط است. مثال: $A=\{2\},B=\{4\},C=\{2,4\}$

ج) غلط است. مثال: $x=1,A=\{1\},B=\{2,\{1\}\}$

معلوم است که ۱ عضو B نیست.

د) غلط است. مثال: $A=\{2\},B=\{2,\{3\}\},C=\{\{2,\{3\}\},5\}$

C دو عضو دارد: ۵ و $B=\{2,\{3\}\}$، پس $A=\{2\}$ عضو آن نیست.

۲۴- گزینه ۴ برای رد نتیجه‌گیری گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) کافی است $A=\{2\}$ و $B=\{2,4\}$ را در نظر بگیرید. اگر $x=4$، آن‌وقت گزینهٔ (۱) رد می‌شود.

اگر $x=5$، گزینهٔ (۲) رد می‌شود. برای رد گزینهٔ (۳)، x را برابر ۲ در نظر می‌گیریم.

۲۵- گزینه ۲ با ارقام ۱،۲،...،۶ می‌شود $6^5=\underline{6}\,\underline{6}\,\underline{6}\,\underline{6}\,\underline{6}$ تا عدد ۵ رقمی ساخت.

به جمع‌های جلو خوب دقت کنید:

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 1\ 5\ 6 \\ +\ 5\ 3\ 6\ 2\ 1 \\ \hline 7\ 7\ 7\ 7\ 7 \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r} 6\ 6\ 2\ 1\ 4 \\ 1\ 1\ 5\ 6\ 3 \\ \hline 7\ 7\ 7\ 7\ 7 \end{array}$$

به ازای هر عدد، یک عدد دیگر وجود دارد که جمعشان با هم می‌شود ۷۷۷۷۷. یعنی اگر همه را با هم جمع بزنیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{6^5}{2}\times 77777=2^4\times 3^5\times 7\times 11111$$

حالا چون ۱۱۱۱۱ بر ۷ بخش‌پذیر نیست، پس جواب بر ۴۹ بخش‌پذیر نمی‌شود.

۲۶- گزینه ۱ با توجه به نمایش ریاضی $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z},-6\le 3x<6\}$ دنبال xها می‌رویم:

$$-6\le 3x<6 \xrightarrow{\div 3} -2\le x<2 \Rightarrow A=\{-2,-1,0,1\}$$

۲۷- گزینه ۲ $\frac{m}{2}\in\mathbb{N},m\le 6$، پس می‌تواند ۲ یا ۴ یا ۶ باشد. آن‌وقت اعضای A که برابر $m+1$ است می‌شود ۳ و ۵ و ۷. حالا می‌رویم سراغ مجموع حاصل‌ضرب‌های دوتایی:

$$3\times 5+3\times 7+5\times 7=15+21+35=71$$

۲۸- گزینه ۳ می‌رویم سراغ بررسی گزینه‌ها:

۱) $3n+1$ به ازای هیچ عدد طبیعی برابر ۱ نمی‌شود.

۲) این مجموعه عدد ۴ را تولید نمی‌کند، پس تمام اعداد طبیعی که در تقسیم بر ۵ باقی‌ماندهٔ ۴ دارند را نمی‌سازد. *(غیر از ۴ همشون رو می‌سازه.)*

۳) اعداد به صورت $5n$ یعنی مضارب ۵، اعداد به صورت $5n-4$ یعنی ۴تا کم‌تر از مضارب ۵. این اعداد حتماً در تقسیم بر ۵، یکی باقی‌مانده می‌آورند.

۴) n باید زوج باشد تا بگوییم $\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$. در این صورت ۱۱ و ۱۵ تولید نمی‌شوند. مثلاً: $2n+1=15 \Rightarrow n=7$ زوج نیست N

۲۹- گزینه ۳ تمام عضوهای گزینهٔ (۳) باید مثبت باشند، زیرا $(-n)^2=(-n)\times(-n)=n^2$.

۳۰- گزینه ۴ $(-1)^n$ به ازای nهای فرد می‌شود ۱- و به ازای nهای زوج می‌شود ۱+. پس $(-1)^n\times n$ به ازای اعداد فرد، قرینهٔ آن‌ها و به ازای اعداد زوج، خود آن‌ها را تولید می‌کند.

۳۱- گزینه ۴ اگر در گزینه‌ها $x=3$ را قرار دهید، فقط در گزینهٔ (۴)، ۹+ تولید می‌شود.

۳۲- گزینه ۱ اگر $\frac{6}{5}$ بخواهد عضو این مجموعه باشد، باید به ازای یک مقدار صحیح k داشته باشیم $\frac{6}{5}=\frac{2k}{k+3}$. آن‌وقت:

$$2k\times 5=6\times(k+3) \Rightarrow 10k=6k+18 \Rightarrow k=4/5$$

نشدا یعنی نتیجهٔ به دست آمده با فرضمان جور نیست.

اگر k را به ترتیب ۱۵، ۲۷ و ۷ بگذارید، گزینه‌های بعدی جور می‌شوند.

۳۳- گزینه ۲ باید ببینیم به ازای کدام kهای صحیح، $5k+3$ دورقمی می‌شود:

$$10 \le 5x+3 \le 99 \xrightarrow{-3} 7 \le 5k \le 96 \xrightarrow{\div 5} 1/4 \le k \le 19/2$$

حداقل مقدار k می‌شود ۲ و حداکثر آن ۱۹. پس $(19-2)+1=18$ مقدار برای k و ۱۸ مقدار برای $5k+3$ وجود دارد.

۳۴- گزینه ۳ اسم این اعداد را می‌گذاریم x. در این صورت $x-2$ هم بر ۳ بخش‌پذیر است هم بر ۴ و هم بر ۵. پس $x-2$ حتماً بر $3\times4\times5=60$ بخش‌پذیر است، یعنی x بر ۶۰ باقی‌ماندهٔ ۲ می‌آورد و به صورت $x=60t+2$ نوشته می‌شود. الان حواستان را خوب جمع کنید.

$t<0 \Rightarrow x=60t+2<0$ ✗ $\qquad t=0 \Rightarrow x=60\times0+2=2$ ✓

$t=1 \Rightarrow x=60\times1+2=62$ ✓ $\qquad t\ge2 \Rightarrow x=60t+2>100$ ✗

۳۵- گزینه ۲ گزینهٔ (۲) دقیقاً همان چیزی است که در صورت سؤال خواسته شده است. با این حال اعضای تمام گزینه‌ها را به دست می‌آوریم تا خیالتان راحت شود:

$$1)\ x>10 \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} A=\{\underbrace{2\times11+1}_{23},\underbrace{2\times12+1}_{25},\underbrace{2\times13+1}_{27},\dots\}$$

$$2)\ 2x+1>10 \Rightarrow x>4/5 \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} B=\{5,6,7,8,\dots\}$$

$$3)\ x\ge5 \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} C=\{\underbrace{2(5+1)}_{12},\underbrace{2(6+1)}_{14},\underbrace{2(7+1)}_{16},\dots\}$$

$$4)\ 2(x+1)\ge5 \Rightarrow x\ge1/5 \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} D=\{2,3,4,5,6,7,\dots\}$$

۳۶- گزینه ۳ گزینهٔ (۱) به ازای xهای منفی برقرار است. $x=0$ تنها عضو گزینه‌های (۲) و (۴) است. گزینهٔ (۳) هیچ عضوی ندارد، زیرا اگر xهای مناسب (منفی یا صفر) در عبارت $-\sqrt{-x}$ قرار دهیم تا تعریف شود، به خاطر علامت منفی پشت رادیکال، جواب نهایی یا منفی خواهد بود یا صفر و هیچ‌گاه عضو $\mathbb{N}$ نخواهد شد.

۳۷- گزینه ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) برای این‌که $\sqrt{-x}\in\mathbb{Z}$، x فقط می‌تواند قرینهٔ اعداد مربع کامل صحیح باشد، یعنی ... یا ۱۶- یا ۹- یا ۴- یا ۱- یا $x=0$. از طرفی $-x\le0$، پس فقط $x=0$ در این نامساوی هم صدق می‌کند و این مجموعه تک‌عضوی است.

۲) $k^2=16 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=-2$ یا $2 \Rightarrow \{3x-1 \mid x^2-16, k\in\mathbb{Z}\}=\{-7,5\}$

۳) $P^3-P=0 \Rightarrow P=-1$ یا ۰ یا ۱

به ازای $P=1$، مخرج $\frac{2P}{P-1}$ صفر می‌شود، پس تنها دو عضو برای این مجموعه به دست می‌آید.

۴) $2^{t-5}<\frac{1}{5} \xrightarrow{t\in\mathbb{N}} t=1$ یا ۲

زیرا اگر $t=3$، آن‌وقت $2^{t-5}=\frac{1}{4}$ که از $\frac{1}{5}$ بزرگ‌تر خواهد بود، پس این مجموعه هم ۲ عضوی است.

۳۸- گزینه ۲ معلوم است که برای به دست آوردن بیشترین مقدار $a+b$ باید سراغ a و b مثبت برویم:

$$\begin{cases} a=1 \Rightarrow b=1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \\ a=2 \Rightarrow b=1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \\ a=3 \Rightarrow b=1 \text{ یا } 2 \\ a=4 \Rightarrow b=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Max}\{a+b\}=2+3=5$$

۳۹- گزینه ۳ برای این‌که $(a+1)^{b-1}$ یک عدد صحیح باشد، توان نباید منفی باشد، یعنی $b-1\ge0$، پس $b\ge1$.

می‌رویم سراغ جواب‌های $ab=8$:

$b=1, a=8 \Rightarrow (a+1)^{b-1}=9^0=1, b=2, a=4 \Rightarrow (a+1)^{b-1}=5^1=5$

$b=4, a=2 \Rightarrow (a+1)^{b-1}=3^3=27, b=8, a=1 \Rightarrow (a+1)^{b-1}=2^7=128$

۴۰- گزینه ۲

$$\frac{5^{a-3}}{25^{b-2}}=\frac{5^{a-3}}{(5^2)^{b-2}}=\frac{5^{a-3}}{5^{2b-4}}=5^{(a-3)-(2b-4)}=5^{a-2b+1}$$

با توجه به نمایش ریاضی مجموعه داریم $a-2b=3$، پس:

$$5^{a-2b+1}=5^{3+1}=625$$

یعنی مجموعهٔ S تک‌عضوی است و در محدودهٔ ۵۰۰ تا ۷۰۰ قرار دارد.

۴۱- گزینه ۱

$$-5\le\sqrt{x}\le 9 \Rightarrow x\in\{0,1,2,3\}$$

$$x=3 \Rightarrow \frac{12x^2}{x(x-1)}=\frac{12\times 9}{3\times 2}=18 \text{ و } x=2 \Rightarrow \frac{12x^2}{x(x-1)}=\frac{12\times 4}{2\times 1}=24$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{12x^2}{x(x-1)}=\frac{12\times 0}{0\times -1}=\frac{0}{0}$$ تعریف‌نشده و بی‌معنی

$$x=1 \Rightarrow \frac{12x^2}{x(x-1)}=\frac{12\times 1}{1\times 0}$$ تعریف‌نشده و بی‌معنی

تذکر: $\frac{12x^2}{x(x-1)}$ به ازای $x=0$ برابر $\frac{12x}{x-1}$ نیست، چون اولی بی‌معنی و دومی برابر صفر خواهد بود. البته معلوم است که غیر از $x=0$، این دو کسر همیشه برابرند.

۴۲- گزینه ۲

$$V=\{4\times 0+1,4\times 1+1,\dots,4\times 5+1\}=\{1,5,9,13,17,21\}$$

$$U: x^2-1<81 \Rightarrow x^2<82 \xrightarrow{x\in N} x\in\{1,2,3,4\} \Rightarrow V=\{3,5,7,9\}$$

پس $V\cap U=\{5,9\}$ زیرمجموعه‌های مشترک U و V حتماً زیرمجموعهٔ $U\cap V$ هستند (و برعکس) و این مجموعه $2^2=4$ زیرمجموعه دارد.

۴۳- گزینه ۳ معادلهٔ $x(x-1)(x-3)=0$ فقط به ازای $\{0,1,3\}$ و معادلهٔ $\frac{x^2(x^2-1)(x^2-9)}{x(x-1)(x-3)}=0$ فقط به ازای $\{-1,-3\}$ جور می‌شود. (*مواستون باشه که $x=0,1,3$ باعث می‌شن مخرج هم صفر بشه، پس جواب معادله نمی‌تونن باشن.*) پس S، $2^3=8$ زیرمجموعه و P، $2^2=4$ زیرمجموعه دارد.

۴۴- گزینه ۲ m و n اعداد حسابی‌اند که $m+n=4$ جواب‌های این معادله عبارت‌اند از:

این عدد بر ۱۵ بخش‌پذیر نیست.

$$m=0,n=4 \Rightarrow X=3^0\times 5^4=5^4 \times$$
$$m=1,n=3 \Rightarrow X=3\times 5^3 \checkmark$$
$$m=2,n=2 \Rightarrow X=3^2\times 5^2 \checkmark$$
$$m=3,n=1 \Rightarrow X=3^3\times 5 \checkmark$$
$$m=4,n=0 \Rightarrow X=3^4\times 5^0=3^4 \times$$

به راحتی می‌شد فهمید برای این‌که $3^n\times 5^m$ بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد، m و n باید طبیعی باشند.

۴۵- گزینه ۱

$$670<x<1396, x=3a \Rightarrow 670<3a<1396 \xrightarrow{\div 3} 223/3<a<465/3$$

a باید از ۲۲۳/۳ بزرگ‌تر باشد، پس حداقل آن ۲۲۴ است و چون باید از ۴۶۵/۳ کوچک‌تر باشد، حداکثر مقدار آن ۴۶۵ است.

$$\text{میانگین مقدارهای a}=\frac{224+225+\dots+465}{\text{تعداد}}=\frac{(465+224)\times\text{تعداد}\times\frac{1}{2}}{\text{تعداد}}=\frac{465+224}{2}=344/5$$

چون $x=3a$، میانگین xها ۳ برابر میانگین aها است (هر x، ۳ برابر یک a است):

$$\text{میانگین اعضا (xها)}=3\times 344/5=1033/5$$

یک سوال مهم: $670<x<1396$، پس $x\in\{671,672,\dots,1395\}$. پس میانگین xها مانند روش محاسبهٔ بالا، برابر $\frac{671+1395}{2}=1033$ می‌شود. این درست است یا نه؟ مسئله این است!؟ (☺)

۴۶- گزینه ۴ اول nهایی را که باعث می‌شود $\frac{50}{n+4}$ عدد طبیعی شود، پیدا می‌کنیم.

$(n+4)$ باید مقسوم‌علیه ۵۰ باشد؛ حالا چون n عدد طبیعی است، $n+4$ نمی‌تواند ۱ و ۲ باشد.

$n+4=5 \Rightarrow n=1 \quad , \quad n+4=25 \Rightarrow n=21$

$n+4=10 \Rightarrow n=6 \quad , \quad n+4=50 \Rightarrow n=46$

حالا اعضای مجموعه را به دست می‌آوریم.

$n=1 \Rightarrow x=2n-1=1 \quad , \quad n=21 \Rightarrow x=2n-1=41$

$n=6 \Rightarrow x=2n-1=11 \quad , \quad n=46 \Rightarrow x=2n-1=91$

میانگین این چهار عدد $\frac{1+11+41+91}{4}=36$ می‌شود.

۴۷- گزینه ۱ برای به دست آوردن اعضای N باید $\frac{x}{2}\in M$، یعنی x باید دو برابر اعضای M باشد. چون اعضای M، ۱۲تا هستند، پس ۱۲ مقدار هم برای x وجود دارد. همین‌طور ۱۲ مقدار برای $3x-1$. خلاصه این‌که $n(N)=n(M)=12$.

۴۸- گزینه ۲ اعضای B، اعضایی از A هستند که بر ۳ بخش‌پذیر باشند و به ازای آن‌ها $\sqrt{x^2+(x+2)^2}$ عدد طبیعی شود.

اعضایی از A که بر ۳ بخش‌پذیرند: $-9,-6,-3,0,3,6,9$

تمام مقدارها را بررسی می‌کنیم:

$x=-9 \Rightarrow \sqrt{x^2+(x+2)^2}=\sqrt{130} \ , \ x=-6 \Rightarrow \sqrt{x^2+(x+2)^2}=\sqrt{52}$

$x=-3 \Rightarrow \sqrt{x^2+(x+2)^2}=\sqrt{10} \ , \ x=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+(x+2)^2}=\sqrt{4}=2 \checkmark$

$x=3 \Rightarrow \sqrt{x^2+(x+2)^2}=\sqrt{34} \ , \ x=6 \Rightarrow \sqrt{x^2+(x+2)^2}=\sqrt{100}=10 \checkmark$

$x=9 \Rightarrow \sqrt{x^2+(x+2)^2}=\sqrt{202}$

پس اعضای B (همان x) می‌شوند ۰ و ۶.

۴۹- گزینه ۲ اعضای x، Aهای صحیح هستند. با این تعریف که $x=\frac{k}{k^2}, k\in L$. تمام حالت‌ها را حساب می‌کنیم:

$k=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{(-2)^2}=-\frac{1}{2}\notin \mathbb{Z}, k=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{(-1)^2}=-1\in \mathbb{Z}$

$k=+1 \Rightarrow x=\frac{+1}{(+1)^2}=+1\in \mathbb{Z}, k=+2 \Rightarrow x=\frac{+2}{(+2)^2}=\frac{1}{2}\notin \mathbb{Z}$

پس $x=+2$ و $x=-1$ به درد می‌خورند و $n(A)=2$.

۵۰- گزینه ۴ اعضای مجموعهٔ A، اعداد اول کم‌تر از $\sqrt{2000}\simeq 44$ است. برای به دست آوردن اعضای B، این طور عمل می‌کنیم:

$-2<x^2-1<15 \xrightarrow{+1} -1<x^2<16$

با توجه به $x\in \mathbb{N}$، x فقط می‌تواند ۱، ۲ و ۳ باشد، پس اعضای مشترک A و B می‌شوند ۲ و ۳.

۵۱- گزینه ۳ با توجه به اطلاعات صورت سؤال ابتدا اعضای A را می‌نویسیم: $A=\{12,15,18\}$ و $B=\{x \mid -3x\in A\}$

در واقع اعضای B، xهایی هستند که اگر در ۳- ضرب شوند؛ عضو A می‌شوند، پس برای به دست آوردن این xها باید اعضای A را تقسیم بر ۳- کرد:

$B=\{\frac{+12}{-3},\frac{15}{-3},\frac{18}{-3}\}=\{-4,-5,-6\}$

۵۲- گزینه ۳ اول عضوهای A را می‌نویسیم:

$$A=\{-x^2+1 \mid x\in \mathbb{Z}, -2\le x<3\} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ یا } 2 \Rightarrow -x^2+1=-3 \\ x=-1 \text{ یا } 1 \Rightarrow -x^2+1=0 \\ x=0 \Rightarrow -x^2+1=1 \end{cases}$$

حالا با توجه به $B=\{-x^3 \mid x\in A\}$ می‌فهمیم که اگر اعضای A را با x نشان دهیم، اعضای B می‌شوند $-x^3$. آن‌وقت $B=\{-(-3)^3,-(0)^3,-(1)^3\}=\{27,0,-1\}$.

۵۳- گزینه ۲ دقت کنید که مجموعهٔ B مضارب ۳ کوچک‌تر از ۲۰۱۶ را از ما می‌خواهد و مجموعهٔ A، مجموعهٔ مربع یا مکعب کامل‌های کوچک‌تر از ۲۰۱۶ است. پس در $A \cap B$ ما به دنبال مربع یا مکعب کامل‌های طبیعی مضرب ۳ می‌گردیم که کوچک‌تر از ۲۰۱۶ باشند:

مربع کامل‌ها: $(3k)^2 = 9k^2$: $9\times1, 9\times4, 9\times9, 9\times16, \ldots, 9\times196$:۱۴تا

مکعب کامل‌ها: $(3k)^3 = 27k^3$: $27\times1, 27\times8, 27\times27, 27\times64$:۴تا

چون $9\times81 = 27\times27$، پس این دو گروه یک عضو مشترک دارند و در نهایت $n(A\cap B) = 14+4-1 = 17$.

۵۴- گزینه ۱ فقط اعداد نامنفی ریشهٔ دوم مثبت دارند، پس از وجود $\sqrt{16-a^2}$ نتیجه می‌گیریم که $16-a^2 \geq 0$، یعنی ۴± یا ۳± یا ۲± یا ۱± یا $a=0$. حالا معلوم است که فقط اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ در هر دو صدق می‌کنند و مشترک هستند ولی $a=1$ هم به درد نمی‌خورد، زیرا باعث می‌شود مخرج کسر صفر شود.

$$a=2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{16-4}}{\sqrt{2-1}}=\sqrt{12} \quad , \quad a=3 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{16-9}}{\sqrt{3-1}}=\sqrt{\frac{7}{2}} \quad , \quad a=4 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{16-16}}{\sqrt{4-1}}=0$$

حاصل‌ضرب عضوهای غیرصفر برابر $\sqrt{12}\times\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{42}$ می‌شود.

۵۵- گزینه ۳ D از هر سه مجموعهٔ دیگر جدا است و با هیچ‌کدام عضو مشترک ندارد. هم‌چنین چون $C \subset A, B$، پس C باید هم داخل A و هم داخل B رسم شود. تنها گزینهٔ (۳) این ویژگی را دارد.

۵۶- گزینه ۴

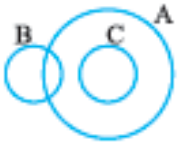
$$\begin{array}{l} \text{مجموع اعضای } A = 14+a+b \\ \text{مجموع اعضای } C = 11+b+c+d \end{array} \Rightarrow 3+a=c+d$$

با توجه به این‌که $a,c,d \in \{1,2,4\}$ هر چه‌قدر بالا پایین کنید، می‌بینید که a فقط می‌تواند ۲ باشد.

۵۷- گزینه ۴ نقطه‌ای که مشخص شده، عضو M_7 و M_{12} است ولی عضو M_9 نیست، یعنی عددی می‌خواهیم که مضرب ۷ و ۱۲ باشد ولی بر ۹ بخش‌پذیر نباشد.

۵۸- گزینه ۳ از جملهٔ «هیچ‌کدام از اعضای C، عضو B نیستند» می‌فهمیم که B و C کاملاً جدا از هم‌اند. از جملهٔ «بعضی از اعضای A، عضو B هستند» می‌فهمیم که A و B عضو مشترک دارند و از جملهٔ «تمام اعضای C یا عضو B هستند یا A» نیز می‌فهمیم که C زیرمجموعهٔ A است. چون B و C عضو مشترک نداشتند، پس تمام اعضای C عضو A هستند.

یک چنین شکلی داریم:



(A می‌تواند شامل همهٔ B باشد یا شامل قسمتی از آن باشد.)

گزینهٔ (۳) «بعضی از اعضای A، عضو C نیستند» درست است، زیرا عضوهای مشترک A و B حتماً عضو C نیستند.

۵۹- گزینه ۳ مجموعهٔ $M=\{\{\ \},\{\varnothing\}\}$ دو عضو دارد، پس $2^2=4$ زیرمجموعه دارد که فقط گزینهٔ (۳) این‌طور است. حالا اگر بخواهیم زیرمجموعه‌ها را بنویسیم، این‌طوری پیش می‌رویم:

$a=\{\ \}, \{b\}=\{\varnothing\} \Rightarrow$ زیرمجموعه‌های M: $\{\ \}, \{a\}, \{b\}, M$

الان به جای a و b، $\{\ \}$ و $\{\varnothing\}$ را بگذارید.

۶۰- گزینه ۲ مجموعه‌های ۳ عضوی دارای ۸ زیرمجموعه‌اند. پس A سه‌عضوی است: $A=\{-1,-2,-8,2x,y+1,z\}$

برای این‌که کم‌ترین مقدار مجموع $x+y+z$ به دست آید، باید سایر اعضا برابر ۸- باشند. یعنی:

$$z=-8, y+1=-8 \Rightarrow y=-9, 2x=-8 \Rightarrow x=-4$$

فب، پس جواب موردنظر $(-8)+(-9)+(-4)=-21$ است.

۶۱- گزینه ۴ فقط مجموعه‌های تک‌عضوی، دو زیرمجموعه دارند: $\{1,a\}=\{2,b,c\}=\{2,c\}$

از $\{1,a\}=\{2,c\}$ می‌فهمیم که $c=1$ و $a=2$. حالا این نتایج را در $\{1,a\}=\{2,b,c\}$ جای‌گذاری می‌کنیم تا بشود $\{1,2\}=\{1,2,b\}$، یعنی b هم می‌تواند ۱ باشد و هم ۲، پس $a+b+2c$ برابر می‌شود با $2+2+2\times1=6$ یا $2+1+2\times1=5$.

۶۲- گزینه ۲

$$\{a,\{1,2a+b\}\}\subset\{3,2a+1,\{-a,0\}\} \Rightarrow \{1,2a+b\}=\{-a,0\} \Rightarrow \begin{cases}-a=1 \Rightarrow a=-1\\ 2a+b=0 \Rightarrow -2+b=0 \Rightarrow b=2\end{cases}$$

۶۳- گزینه ۲ اگر تعداد اعضای این مجموعه را x بگیریم، طبق صورت سؤال، تعداد زیرمجموعه‌های آن می‌شود x^2. از طرفی می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌ها حتماً برابر 2^x است. حالا باید جواب‌های معادلهٔ زیر را حدس بزنیم:

$x^2=2^x \Rightarrow x=2$ یا $4 \Rightarrow$ تعداد اعضا، ۲ مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۶۴- گزینه ۲ x می‌تواند ۱، ۲، ... ، ۹۷ باشد.

$$x=1 \Rightarrow \{1,3\} \quad , \quad x=2 \Rightarrow \{2,4\} \quad , \quad \cdots \quad , \quad x=97 \Rightarrow \{97,99\}$$

۶۵- گزینه ۲ جمع ۳تا عضو باید بشود ۱۵. چون یکی‌شان ۴ است، پس جمع دوتای دیگر می‌شود ۱۱. دقت کنید که حالت $\{4,7,4\}$ جواب نیست؛ زیرا یک مجموعهٔ دوعضوی است. پس در مجموع سه مجموعه داریم که در شرایط سؤال صدق کنند: $\{4,9,2\},\{4,8,3\},\underbrace{\{4,7,4\}}_{4+7=11},\{4,6,5\}$

۶۶- گزینه ۳ دو زیرمجموعهٔ ۴ عضوی $\{x,y,z,t\}$ و $\{y,z,t,s\}$ را ببینید. هر کدام یکی از ۵ عضو اصلی را ندارند، پس این عضوهای حذف‌شده (در این‌جا s و x) نمی‌توانند جزء اشتراک باشند و ۳ عضو مشترک وجود دارد.

۶۷- گزینه ۱ تعداد کل زیرمجموعه‌ها می‌شود $2^6=64$، یعنی: $n_0+n_1+(n_2+n_3+n_4+n_5)+n_6=64$

قُب، معلوم است که $n_0=1$ و $n_1=6$ و $n_6=1$، در این صورت: $n_2+n_3+n_4+n_5=64-7=57$

۶۸- گزینه ۱ حاصل‌ضرب هر دو عضو از $\{7,8,9,\ldots,49,50\}$ از ۵۰ بزرگ‌تر است. پس این زیرمجموعه شرایط خواسته‌شده را دارد.

۶۹- گزینه ۳ ابتدا $A\cup B$ را تشکیل می‌دهیم: $A=\{2,3,5,7\},B=\{1,3,5,7,9\} \Rightarrow A\cup B=\{1,2,3,5,7,9\}$

تعداد زیرمجموعه‌های $A\cup B$ و A به ترتیب 2^6 و 2^4اند: $2^6-2^4=64-16=48$

در ذهنتان باشد که هر یک عضوی که به تعداد اعضا اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌ها را ۲ برابر می‌کند.

۷۰- گزینه ۴ اعضای مشترک A و B برابر $C=A\cap B=\{1,4,8,10\}$ است، پس فقط تمام زیرمجموعه‌های C، زیرمجموعه‌های A و B هم هستند، یعنی جواب $2^4=16$ است.

۷۱- گزینه ۳ مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۲۱، ۲۰ عضو دارد، پس تعداد زیرمجموعه‌های زوج‌عضوی آن می‌شود $\frac{2^{20}}{2}=2^{19}$.

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های زوج‌عضوی و فردعضوی هر مجموعه با هم برابر است، پس تعداد هر کدام می‌شود $\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$.

۷۲- گزینه ۲ با توجه به رابطهٔ مقابل، x غیر از اعضای A، $\underbrace{\{1,2,3,4\}}_{A}\subset X\subset\underbrace{\{1,2,3,4,5,6,7\}}_{B}$ که باید آن‌ها را داشته باشد، فقط می‌تواند اعضای ۵، ۶ و ۷ را داشته باشد. از طرفی داشتن این اعضا الزامی هم نیست. به طور دقیق‌تر هر زیرمجموعه‌ای از $\{5,6,7\}$ را به $\{1,2,3,4\}$ اضافه کنیم (حتی $\varnothing$) یک جواب برای x به دست می‌آید. پس x، $2^3=8$ حالت دارد.

۷۳- گزینه ۳ با توجه به این‌که x باید تمام اعضای A را داشته باشد و $\underbrace{\{1,2,3,4\}}_{A}\subset C\subset\underbrace{\{1,2,3,\ldots,10\}}_{B}$، ۶ عضوی است، پس برای تکمیل x باید ۲ عضو از $\{5,6,7,8,9,10\}$ انتخاب کنیم و به A اضافه کنیم؛ یعنی تعداد حالت‌های مختلف x برابر است با تعداد حالت‌های انتخاب ۲ عضو از ۶ عضو:

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\,(6-2)!}=\frac{6\times5\times4!}{2!\,4!}=\frac{6\times5}{2}=15$$

۷۴- گزینه ۲ کوچک‌ترین عضو زیرمجموعه‌های خواسته‌شده ۸ است، پس اعداد کوچک‌تر از ۸ حتی عضو زیرمجموعه‌ها نیستند. هر کدام از اعداد ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲می‌توانند باشند یا نباشند.

چون با این ۴ عدد، $2^4=16$ زیرمجموعهٔ مختلف می‌توان ساخت و عضو ۸ را به آن‌ها اضافه کرد، پس ۱۶تا زیرمجموعهٔ این طوری داریم.

۷۵- گزینه ۴ زیرمجموعه‌های B، یا زیرمجموعه‌های A هستند یا این‌که زیرمجموعه‌های A نیستند! دو حالت که بیشتر ندارد! (بیخ)

می‌آییم کل زیرمجموعه‌های B را منهای زیرمجموعه‌هایی از B می‌کنیم که زیرمجموعه‌های A نیز هستند.

کل زیرمجموعه‌های B می‌شود 2^{64}.

زیرمجموعه‌هایی از B که بخواهند زیرمجموعهٔ A نیز باشند، باید فقط شامل عضوهای مشترک A و B باشند که ۴تا است، پس A و 2^4تا B زیرمجموعهٔ مشترک دارند. جواب مسئله می‌شود $2^{64}-2^4$.

۷۶- گزینه ۱ زیرمجموعهٔ موردنظر باید ۵ را داشته باشد و ۲، ۳ و ۷ را نداشته باشد. فُپ، پس تکلیف ۴ تا از ۹ عدد مشخص است. می‌ماند اعداد ۱، ۴، ۶، ۸ و ۹ که می‌توانند داخل زیرمجموعهٔ موردنظر باشند یا نباشند. (در واقع بودن یا نبودن آن، حالت‌های مختلف مطلوب ما را ایجاد می‌کند.)

معلوم است که با این ۵ عضو می‌شود $2^5=32$ حالت مختلف ایجاد کرد و به عضو ثابت ۵ اضافه کرد.

۷۷- گزینه ۲ غیر از عضو ۵ که حتماً در این زیرمجموعه‌ها است، (چون زیرمجموعه‌ها ۴ عضوی‌اند.) باید ۳ عضو دیگر از ۱، ۴، ۶، ۸ و ۹ انتخاب کنیم. این کار را به $\binom{5}{3}$ حالت می‌شود انجام داد:

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=\frac{5\times4\times3!}{3!\,2!}=\frac{5\times4}{2}=10$$

۷۸- گزینه ۲ تکلیف ۲، ۳ و ۱۰ مشخص شده است، یعنی این اعداد نمی‌توانند حالت متفاوتی داشته باشند. می‌ماند ۱۲ عضو دیگر که باید دوتایشان انتخاب شود.

روش اول: برای انتخاب اولین عضو، ۱۲ گزینه و حالت مختلف داریم. برای انتخاب دومین عضو، ۱۱ انتخاب داریم. حالا چون ترتیب انتخاب‌شدن در مجموعه‌ها اهمیتی ندارد (مثلاً $\{4,6\}=\{6,4\}$)، باید تعداد حالت‌های به دست آمده را تقسیم بر ۲ کنیم، یعنی $\frac{12\times11}{2}=66$.

روش دوم: دقیقاً مثل این است که می‌خواهیم تعداد پاره‌خط‌هایی را که با ۱۲ نقطه می‌توان ساخت، به دست آوریم:

$$1+2+\cdots+11=\frac{11\times12}{2}=66$$

۷۹- گزینه ۴ اعضای زوج مجموعهٔ داده‌شده، $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ و اعضای فرد آن $B=\{1,3,5,7,9,11\}$اند. ما تعداد حالت‌هایی را می‌خواهیم که ۴ عضو از A و ۲ عضو از B انتخاب شود، پس تعداد حالت‌های کل $\binom{6}{4}\times\binom{6}{2}$ است: ($\binom{6}{4}=\binom{6}{2}$)

$$\frac{6!}{2!\,4!}\times\frac{6!}{2!\times4!}=\left(\frac{6\times5\times\cancel{4!}}{2\times\cancel{4!}}\right)^2=15^2=225$$

۸۰- گزینه ۲ این مجموعه ۶ تا عضو زوج دارد، پس همهٔ زیرمجموعه‌ها به درد می‌خورد، جز آن‌هایی که ۶ تا عدد زوج دارند:

تعداد زیرمجموعه‌ها با ۶ عضو زوج ـ تعداد کل زیرمجموعه‌ها = تعداد زیرمجموعه‌ها با حداکثر ۵ عضو زوج

یک زیرمجموعه در نظر بگیرید که تمام اعداد زوج را دارد و هر کدام از اعداد ۱۵، ۱۳، ۱۱، ۹ و ۷ می‌توانند مستقلاً در آن باشند یا نباشند؛ یعنی با این ۵ عدد می‌توان $2^5=32$ حالت مختلف ایجاد کرد و به آن ۶ عضو زوج اضافه کرد.

هر کدام از اعداد فرد، ۲ حالت جدید را ایجاد می‌کنند. در نصفی از زیرمجموعه‌ها هستند و در نصف دیگر نیستند.

حالا چون تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر 2^{11} است، پس جواب می‌شود $2^{11}-2^5$.

۸۱- گزینه ۳ فقط مجموع این ۵تا دوتایی ۱۱ می‌شود: $(1,11),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6)$

پس نباید از هیچ‌کدام از این دسته‌ها هر دو عضو را برداشت. حالا چون ۵تا دسته داریم و زیرمجموعهٔ ۵ عضوی می‌خواهیم، به راحتی می‌فهمیم که از هر دسته باید دقیق یک عدد را انتخاب کنیم، یعنی از هر دسته ۲ انتخاب و در کل $2\times2\times2\times2\times2=32$ انتخاب مختلف داریم.

۸۲- گزینه ۱ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعهٔ ما می‌تواند یکی از ۶ زوج زیر باشد: $(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(5,7),(6,8)$

این دوتایی‌ها به عنوان زیرمجموعه قبول‌اند. از طرفی بین هر کدام از این زوج‌ها هم می‌تواند یک عضو دیگر قرار گیرد، پس ۶ تا زیرمجموعهٔ ۳ عضوی هم داریم: $(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6),(5,6,7),(6,7,8)$

پس در مجموع ۱۲ زیرمجموعه با شرایط مطلوب وجود دارد.

۸۳- گزینه ۱ زوج مرتب‌های زیر اختلاف ۵تایی دارند: $(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)$

حالا در هر کدام ۴ عضو میانی می‌توانند باشند یا نباشند. مثلاً در (۲,۷) اعداد ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توانند باشند یا نباشند. پس 2^4 حالت برای هر کدام داریم. یعنی در مجموع: $2^4+2^4+2^4+2^4+2^4=5\times 2^4=80$

۸۰ زیرمجموعه داریم که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها ۵ است.

۸۴- گزینه ۲ زیرمجموعه‌های $\varnothing$ و T (تهی و خودش) به درد نمی‌خورند، چون مجموع اعضای T فرد $\left(\frac{(18+1)\times 18}{2}=19\times 9\right)$ است و $\varnothing$ هم که مجموع اعضا ندارد.

در مورد بقیهٔ زیرمجموعه‌ها می‌شود گفت: هر تعدادی از اعضای $\{1,2,3,\dots,18\}$ را برداریم و یک زیرمجموعه بسازیم، خودبه‌خود اعضای انتخاب‌نشده هم یک زیرمجموعه می‌سازند و چون مجموع اعضای T فرد است، حتماً مجموع اعضای یکی از این زیرمجموعه‌ها زوج و دیگری فرد می‌شود. پس مجموع اعضای نصف زیرمجموعه‌ها (غیر از $\varnothing$ و T) زوج و نصف دیگر فرد است:

تعداد زیرمجموعه‌ها (غیر از $\varnothing$ و T) $=2^{18}-2 \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌ها با مجموع اعضای زوج $=\frac{2^{18}-2}{2}=2^{17}-1$

۸۵- گزینه ۲ چون مجموع اعضای M زوج $\left(\frac{(1+20)\times 20}{2}=21\times 10\right)$ است، نمی‌شود از تکنیک سؤال قبل استفاده کرد. اما *ما پررو‌تر از این حرف‌هاییم*. نگاه کنید:

عضو «۱» را بگذارید کنار. در این صورت مجموع اعضای M فرد می‌شود و طبق توضیحات سؤال قبل، تعداد زیرمجموعه‌هایی که مجموع اعضایشان زوج است، می‌شود $a=\frac{2^{19}-2}{2}=2^{18}-1$

تعداد زیرمجموعه‌هایی که مجموع اعضایشان فرد است، برابر $b=1+\frac{2^{19}-2}{2}=2^{18}$ می‌شود. این‌ها همه زیرمجموعه‌هایی‌اند که بدون «۱» ساخته شده‌اند. حالا اگر به این مجموعه‌ها «۱» را اضافه کنیم، آن‌هایی که مجموعشان زوج بود، فرد می‌شوند و آن‌هایی که مجموعشان فرد بود، زوج می‌شوند. پس bتا زیرمجموعهٔ جدید هم به دست می‌آید. پس در کل «a+b» تا زیرمجموعه به درد ما می‌خورد:

$a+b=2^{18}-1+2^{18}=2\times 2^{18}-1=2^{19}-1$

۸۶- گزینه ۱ دنبال یک سری عدد متوالی می‌گردیم که نه تعدادشان را می‌دانیم و نه اولین آن‌ها را. فقط می‌دانیم که جمعشان می‌شود ۱۳۹۶. بیایید تعداد آن‌ها را بگیریم k و اولین آن‌ها را بگیریم n حالا می‌شود نوشت:

$$n+(n+1)+(n+2)+\dots+(n+(k-1))=1396 \Rightarrow \underbrace{(n+n+\dots+n)}_{tk}+(1+2+2+\dots+(k-1))$$

$$=kn+\frac{k(k-1)}{2}=\frac{k}{2}(2n+k-1)=4\times 349 \Rightarrow k(2n+k-1)=8\times 349$$

چون $k\geq 4$، پس k می‌تواند ۴ یا ۸ باشد: (k نمی‌تواند ۳۴۹ یا ۲×۳۴۹ و ... باشد، چون جمع ۳۴۹ عدد طبیعی حتی اگر از یک شروع شود، یه چیزی در حدود ۶۰,۰۰۰ می‌شود!!!)

$$k(2n+k-1)=8\times 349\ ;\ \begin{cases} k=4 \Rightarrow 4\times(2n+3)=8\times 349 \Rightarrow n=347/5 \\ k=8 \Rightarrow 8\times(2n+7)=8\times 349 \Rightarrow n=171 \end{cases}$$

پس فقط یک جواب داریم. یک مجموعهٔ ۸ عضوی با شروع از ۱۷۱. برای اطمینان خاطر: $171+172+\dots+178=\frac{(171+178)\times 8}{2}=1396$

۸۷- گزینه ۴

$$\frac{2^{n+3}}{2^{n-1}}=2^{(n+3)-(n-1)}=2^{3+1}=2^4=16$$

۸۸- گزینه ۲ از صورت سؤال، معادلهٔ $12\times 2^n-2^{n+3}=128$ به دست می‌آید. برای حل آن، این‌طوری می‌رویم:

$$12\times 2^n-2^n\times 2^3=12\times 2^n-8\times 2^n=(12-8)\times 2^n=4\times 2^n=128 \Rightarrow 2^n=\frac{128}{4}=32=2^5 \Rightarrow n=5$$

۸۹- گزینه۲ تعداد عضوهای اولیهٔ A را می‌گیریم a. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های آن می‌شود 2^a. حالا اگر ۲ واحد به عضوها اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌ها برابر 2^{a+2} به دست می‌آید که باید ۱۹۲ واحد بیشتر از 2^a باشد:

$$2^{a+2}-2^a=192 \Rightarrow 2^a\times 2^2-2^a=4\times 2^a-2^a=2^a(4-1)=192 \Rightarrow 3\times 2^a=192 \Rightarrow 2^a=\frac{192}{3}=64$$

$$\Rightarrow 2^a=2^6 \Rightarrow a=6$$

۹۰- گزینه۲

$$2^{n+2}+2^{n+1}+2^{n-1}=2^n\times 4+2^n\times 2+2^n\times\frac{1}{2}=2^n(4+2+\frac{1}{2})=104 \Rightarrow 2^n\times\frac{13}{2}=104$$

$$\Rightarrow 2^n=104\times\frac{2}{13}=16 \Rightarrow n=4$$

حالا باید ببینیم یک مجموعهٔ $n+2=6$ عضوی، چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی دارد. معلوم است که برای ساخت یک زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از یک مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۶ حالت می‌توان یک عضو را انتخاب کرد و کنار گذاشت و یک زیرمجموعهٔ ۵ عضوی ساخت.

در حالت کلی:

یادآوری: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی و $n-k$ عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر است.

به دلیل نکتهٔ بالا خوب فکر کنید!

۹۱- گزینه۳ توضیحات مفصل سؤال در معادلهٔ زیر خلاصه می‌شود:

$$3\times\underbrace{2^{n+1}\times 2^{2n+5}}_{2^{3n+6}}-6\times 2^{4n-1}=24\times 2^{4n-2} \Rightarrow 3\times 2^{3n}\times 2^6\underbrace{-6\times 2^{4n}\times\frac{1}{2}}_{-3\times 2^{4n}}=\underbrace{24\times 2^{4n}\times\frac{1}{8}}_{3\times 2^{4n}} \Rightarrow 3\times 2^6\times 2^{3n}$$

$$=3\times 2^{4n}+3\times 2^{4n}=6\times 2^{4n}$$

طرفین را بر ۶ تقسیم می‌کنیم:

$$2^5\times 2^{3n}=2^{4n} \Rightarrow 5+3n=4n \Rightarrow n=5$$

۹۲- گزینه۳ می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های $n-2$ عضوی و ۲ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی با هم مساوی است. از طرفی تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی می‌شود $\frac{n(n-1)}{2}$. پس می‌نویسیم:

$$\frac{n(n-1)}{2}=10 \Rightarrow n(n-1)=20 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=5 \Rightarrow n-2=3$$

هم‌چنین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی این مجموعه با ۲ عضوی‌ها برابرند.

۹۳- گزینه۲ تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعهٔ nعضوی می‌شود $\frac{n!}{3!\,(n-3)!}$ که باید ۵ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی آن باشد که می‌شود همان n

$$\frac{n!}{6(n-3)!}=5n \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!}=30n$$

یک لحظه دقت کنید:

$$n!=n\times(n-1)(n-2)(n-3)! \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!}=n(n-1)(n-2)$$

ادامه می‌دهیم:

$$n(n-1)(n-2)=30n \Rightarrow (n-1)(n-2)=30=6\times 5$$

چون $n\in\mathbb{N}$، پس $n-1=6$ یا $n=7$.

فُب، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه $2^7=128$ است.

۹۴- گزینه۴ می‌دانیم همواره $(A\cap B)\subset A$. این را می‌گذاریم در کنار فرض مسئله $(A\subset A\cap B)$ و نتیجه می‌گیریم $A\cap B=A$، پس $A\subset B$.

گزینه‌های (۱) و (۲) می‌توانند درست باشند ولی حتمی نیستند. برای رد گزینهٔ (۳) هم می‌گوییم که B می‌تواند تهی باشد. البته در این صورت A نیز باید تهی باشد.

۹۵- گزینه۳

نکته: به ازای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B داریم:

① $A\cap B\subset A,B$ اشتراک دو مجموعه، حتماً زیرمجموعهٔ هر دو مجموعه است.

② $A,B\subset A\cup B$ هر دو مجموعهٔ دلخواه حتماً زیرمجموعهٔ اجتماعشان هستند.

از دو مورد بالا می‌توان فهمید که همیشه داریم $A\cap B\subset A\cup B$. حالا در این سؤال گفته $A\cup B\subset A\cap B$، پس در این سؤال $A\cap B=A\cup B$ (این اتفاق فقط وقتی می‌افتد که $A=B$).

۹۶- گزینه۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر $A\subset\varnothing$، آن‌وقت $A=\varnothing$، پس $A\cup\varnothing=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

۲) می‌دانیم همواره $A\subset(A\cup B)$ و چون در این‌جا $(A\cup B)\subset A$ (این زیرمجموعهٔ اون و اون زیرمجموعهٔ این)، پس $A\cup B=A$.

۳) در درس‌نامه اشاره کردیم که اگر $A\subset B$ باشد، $A\cap B=A$ و $A\cup B=B$.

۴) فرض این گزینه $(A\subset A\cup B)$ همیشه درست است و هیچ نتیجه‌گیری خاصی ممکن نیست. مثال نقض برای رد این گزینه:

$A=\{1\},B=\{2\}$

۹۷- گزینه۳

۱) مثال نقض: $A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{2\}$

۲) مثال نقض: $A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{1\}$

اگر فرض گزینه‌های (۱) و (۲) یعنی $A\cup B=A\cup C$ و $A\cap B=A\cap C$ هم‌زمان درست باشند، می‌توان نتیجه گرفت $B=C$ *(خودتون دلیلشو پیدا کنید)*.

۳) اگر $(A\cup B)\subset C$، یعنی حتماً هر دوی A و B هم زیرمجموعهٔ C هستند. در این صورت معلوم است که اجتماعشان می‌شود C.

$A,B\subset C\Rightarrow(A\cup B)\cup C=C$

می‌شد این طوری هم گفت که $A\cup B$ را بگیریم D. آن‌وقت درستی گزینه خیلی واضح می‌شد: $\underbrace{(A\cup B)}_{D}\subset C\Rightarrow\underbrace{(A\cup B)}_{D}\cup C=C$

۴) با $A\cap B=D$ گزینه را بازنویسی می‌کنیم: $D\subset C\Rightarrow D\cup C=D$

غلط‌بودن این استدلال بسیار واضح است. مثال نقض هم می‌توان زد: $A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{1,3\}$

۹۸- گزینه۲

نکته: اگر $S\subset T$، آن‌وقت $S\cap T=S$ و $S\cup T=T$. عکس این جمله هم درست است، یعنی اگر $S\cap T=S$ یا $S\cup T=T$، آن‌وقت نتیجه می‌گیریم $S\subset T$.

از $B\cap C=C$ نتیجه می‌شود $C\subset B$ و $A\cap B=B$ می‌گوید $B\subset A$. این نتیجه‌ها را کنار هم می‌گذاریم و می‌نویسیم: $C\subset B\subset A$.

۹۹- گزینه۲ می‌گیریم $A\cap B=S$، در این صورت چون $S\subset A$، پس $A\cup S=A\cup(A\cap B)=A$.

○ به همین راحتی می‌شود اثبات کرد $A\cap(B\cup A)=A$.

۱۰۰- گزینه ۴ $A-B$ یعنی چیزهایی که در A هستند ولی حتماً در B نیستند. اگر ساده‌تر بگوییم یعنی عضوهای غیرمشترک B و A که در A هستند (عضوهای مخصوص A). فُپ، معلوم است که این عضوها اشتراکی با B ندارند، پس جواب تهی است. $\underbrace{(A-B)}_{\text{فقط عضوهای مخصوص } A}\cap B=\varnothing$

در گوشه و کنار این شهر شنیده شده که به $A-B$، مجموعهٔ «فقط A» و به $B-A$ مجموعهٔ «فقط B» هم می‌گویند. احتمالاً ما هم می‌گوییم.

۱۰۱- گزینه ۳ اعضای $M-A$ می‌شود اعضایی که در M هستند ولی در A نیستند، پس قطعاً چنین مجموعه‌ای برابر A نیست.

۱۰۲- گزینه ۱ با توجه به تعریف تفاضل مجموعه‌ها، مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هیچ‌وقت عضو مشترک ندارند.

اعضایی که فقط در B هستند: $B-A$

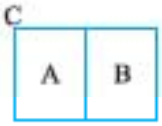
اعضایی که فقط در A هستند: $A-B$

۱۰۳- گزینه ۱

$$\begin{cases} x=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow A=\{-1,1\} \\ \frac{1}{x}=\frac{x}{4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow B=\{-2,2\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cup B=\{-2,-1,1,2\} \\ A\cap B=\varnothing \end{cases} \Rightarrow (A\cup B)-(A\cap B)=A\cup B$$

چون $n(A\cup B)=4$، پس این مجموعه $2^4=16$ تا زیرمجموعه دارد.

۱۰۴- گزینه ۳ معلوم است که A و B عضو مشترک ندارند و هر دو زیرمجموعهٔ Cاند. از طرفی هر عدد فرد در تقسیم بر ۴، باقی‌ماندهٔ «۱» دارد یا «۳». این مجموعه‌ها را می‌شود این طوری نشان داد:



فقط $A\cap C'=B$ غلط است، چون $A\cap C'=A-C \xrightarrow{A\subset C} \varnothing$

۱۰۵- گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} S=\{2,4,\cancel{6},\cancel{p},m\} \\ T=\{\cancel{6},7,8,\cancel{p},n,11,12\} \end{array}\right\} \Rightarrow S-T=\{q,5\}$$

چون $(S-T)\subset S$، پس $m=5$ و این‌که q یا ۲ است و یا ۴.

اگر $q=2$، آن‌وقت برای این‌که ۴ عضو $S-T$ نباشد، باید $n=4$ و اگر $q=4$، باید $n=2$. پس در هر صورت $q+n=6$. خلاصه این‌که:

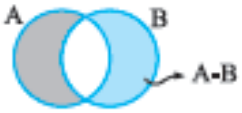
$m-n-q=m-(n+q)=5-6=-1$

۱۰۶- گزینه ۱ از تساوی $S\cap\{1,2,3,\dots,10\}=\{2,4,6,8\}$ معلوم می‌شود که S، ۲، ۴، ۶ و ۸ را دارد (و اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۰ را ندارد). در تساوی $S-\{5,6,7,\dots,15\}=T\cup\{20,30\}$ چون در سمت راست ۲۰ و ۳۰ حضور دارند، حتماً در سمت چپ هم باید باشند؛ یعنی $20,30\in S$، پس حداقل S می‌شود $\{2,4,6,8,20,30\}$ یا $n(S)\geq 6$. حداقل T هم برابر $\{2,4\}$ یا $n(T)\geq 2$ خواهد بود.

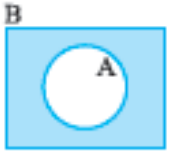
۱۰۷- گزینه ۴ X می‌تواند هر زیرمجموعه‌ای از $\{1,2,3,4\}$ باشد، پس معادله $2^4=16$ جواب مختلف دارد.

۱۰۸- گزینه ۲ $A-B$ فقط شامل عضوهای انحصاری A است (*یعنی اون‌هایی که تو B نیستن*). ولی $A\cup B$ علاوه بر عضوهای A، (چه مشترک و چه غیرمشترک) عضوهای B را هم دارد. حالا اگر این‌ها با هم مساوی باشند، می‌فهمیم که B نمی‌تواند حتی یک عضو داشته باشد.

۱۰۹- گزینه ۱ در شکل مقابل $B-A$ را رنگ کردیم. اگر اجتماع ناحیهٔ رنگ‌نشده با A بشود B، یعنی قسمت رنگی A هیچ عضوی ندارد. به زبان دیگر یعنی A هیچ عضوی خارج از B ندارد و تمام عضوهایش در Bاند، پس $A\subset B$.



۱۱۰- گزینه۲ این همان سؤال قبل است! اما برای توضیحات بیشتر حتماً توجه کنید.



روش اول: قسمت رنگی نشان‌دهندهٔ $(B-A)$ است. اگر آن را با مجموعهٔ A اجتماع کنیم، مجموعهٔ B درست می‌شود.

روش دوم: می‌دانیم $B-A=B\cap A'$. الان از قانون «توزیع‌پذیری» استفاده می‌کنیم:

$$A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{M}$$

چون اشتراک هر مجموعه با M می‌شود خود مجموعه، حاصل عبارت بالا برابر $A\cup B$ است. از طرفی چون $A\subset B$، پس $A\cup B=B$.

۱۱۱- گزینه۱ می‌دانیم که $(B-A)$ عضو مشترکی با $(A-B)$ ندارد که بخواهد حذف شود. منظورم این است:

$$S\cap T=\varnothing \Rightarrow S-T=S$$

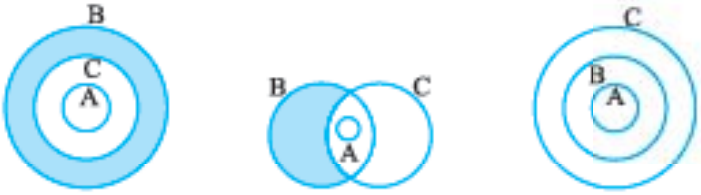
پس در مسئلهٔ خودمان می‌نویسیم:

$$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing \Rightarrow (A-B)-(B-A)=A-B$$

می‌خواهیم $A-B$ برابر A شود. این اتفاق فقط وقتی می‌افتد که A و B عضو مشترک نداشته باشند.

۱۱۲- گزینه۳ مجموعهٔ $(B-C)$ فقط شامل عضوهای غیرمشترک B است. چون A زیرمجموعهٔ هر دوی B و C است، پس عضوهای A بین این دو مشترک است. یعنی هیچ عضوی از A در $(B-C)$ وجود ندارد و اشتراکشان تهی است.

حالت‌های مختلف را ببینید: قسمت **رنگی** نشان‌دهندهٔ $B-C$ است.



۱۱۳- گزینه۱ اگر $A-B=A$، یعنی A و B هیچ عضو مشترکی ندارند. *(پس اگر عضو مشترکی می‌بود، آن‌وقت یه چیزی باید از A کم می‌شد بالأخره).*

پس $A\cap B=\varnothing$. الان خودتان می‌توانید بگویید که چرا $B-A=B$.

$$\underbrace{(B-A)}_{B}\cup\underbrace{(A\cap B)}_{\varnothing}=B$$

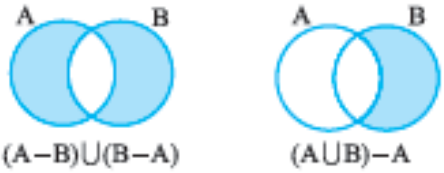
۱۱۴- گزینه۳

$$x\in B' \xrightarrow{\text{طبق تعریف}} x\notin B \xrightarrow{A\subset B} x\notin A \xrightarrow{\text{طبق تعریف}} x\in A'$$

ترجمه: هر چیزی عضو B' باشد (طبق تعریف مجموعهٔ متمم)، عضو B نیست. حالا چون $A\subset B$، هر چیزی در B نباشد، قطعاً در A هم نیست. پس (آن چیز که در A نیست) حتماً در A' هست.

با این استدلال نشان دادیم هر چیزی که در B' باشد، حتماً در A' نیز هست، یعنی $B'\subset A'$.

۱۱۵- گزینه۱



$(A-B)\cup(B-A)$ $\qquad$ $(A\cup B)-A$

همان‌طور که می‌بینید، طرفین تساوی گزینهٔ (۱) با هم برابر نیستند.

○ سمت چپ تساوی با $(A\cup B)-(A\cap B)$ برابر است. (شکل بکشید و رنگ بزنید تا مطمئن شوید.)

۱۱۶- گزینه۱

$$(A\cup B)' \xrightarrow{\text{دمورگان}} A'\cap B'=\{۲,۳\}$$

۱۱۷- گزینه۴ می‌دانیم $A\cap B'=A-B$ و چون A و B عضو مشترک ندارند، پس $A-B=A$.

۱۱۸- گزینه۲ با توزیع‌پذیری می‌رویم جلو:

$$A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')$$

طبق تعریف $A\cup A'$ می‌شود مجموعهٔ مرجع، و اشتراک هر چیزی با مجموعه‌های مرجع می‌شود خود آن چیز.

$$(A\cup B)\cap(A\cup A')=(A\cup B)\cap M=A\cup B \xrightarrow{A\subset B} B$$

۱۱۹- گزینه ۱ می‌دانیم $X-Y=X\cap Y'$، پس:

$$(B-A)'-A=(B\cap A')'\cap A'$$

$$\xrightarrow{\text{دمورگان}}(B'\cup A)\cap A'\xrightarrow{\text{توزیع‌پذیری}}(B'\cap A')\cup\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}=B'\cap A'$$

الان باید متمم $B'\cap A'$ را با دمورگان حساب کنیم:

$$(B'\cap A')'=B\cup A$$

۱۲۰- گزینه ۲ راه اول: $C=\{۱,۲\}$، $B=\{۲,۳\}$ و $A=\{۱,۳\}$ گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) را رد می‌کند. الان برای درستی $A-C=B-C$ دلیل می‌آوریم:

$A-C$ یعنی عضوهایی از A که در C نیستند. همین‌طور $B-C$ یعنی عضوهایی از B که در C نیستند. اگر این‌ها با هم مساوی نباشند، یعنی یکی‌شان حداقل یک عضو دارد که دیگری ندارد. مثلاً فرض کنید که $x\in(A-C)$ ولی $x\notin(B-C)$. چون $x\in(A-C)$ یعنی $x\in A$ و $x\notin C$ و چون x در C نیست و در $B-C$ نیز نیست، پس در B هم نیست ($x\notin B$).

با این نتایجی که به دست آمده، x در $A\cup C$ هست ولی در $B\cup C$ نیست ولی ما طبق فرض می‌دانیم که $A\cup C=B\cup C$. پس فرض ما برای وجود چنین xای غلط است.

راه دوم: از طرفین، C' را اشتراک بگیرید:

$$(A\cup C)\cap C'=(B\cup C)\cap C'\Rightarrow A\cap C'=B\cap C'\Rightarrow A-C=B-C\quad\checkmark$$

۱۲۱- گزینه ۴ اول این را ببینید:

$$D\cap E=(\underbrace{A-B}_{\text{اعضایی که در } B \text{ نیستند.}})\cap(\underbrace{B-C}_{\text{اعضایی که در } B \text{ هستند.}})=\varnothing$$

پس $D-E=D$. از طرفی چون طبق تعریف سوال داشتیم $D-E=F$، می‌شود گفت $F=D$. الان واضح شد که $(D\cap C)\subset F=D$ درست است.

۱۲۲- گزینه ۱ راه اول: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $A'\cup B'$ را به صورت $(A\cap B)'$ می‌نویسیم. از طرفی $(A\cap B)$ که زیرمجموعه A است، قطعاً متناهی است. پس متمم آن نامتناهی است.

۲) $A'\cap B'$ را به صورت $(A\cup B)'$ می‌نویسیم و می‌دانیم که $A\cup B$ نامتناهی است. پس متمم آن متناهی خواهد بود.

۳) چون B نامتناهی است، پس B' متناهی است و $A\cap B'$ نیز متناهی می‌شود.

۴) B و A' قطعاً نامتناهی‌اند ولی امکان دارد اشتراکشان متناهی باشد. مثال:

B را مجموعهٔ همهٔ اعداد اول تعریف می‌کنیم و A را مجموعهٔ اعداد فرد. در این صورت A' می‌شود مجموعهٔ اعداد زوج و $A'\cap B=\{۲\}$.

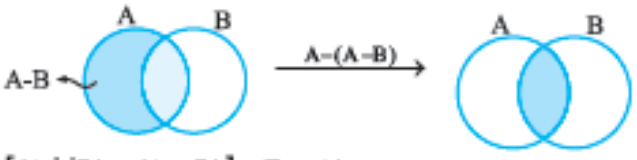
راه دوم: از روی صورت سوال می‌توان فهمید که A' و B نامتناهی‌اند. پس اجتماع آن‌ها با هر مجموعهٔ دیگری قطعاً نامتناهی می‌شود. پس عبارت گزینهٔ (۱) حتماً نامتناهی است ($A'\cup B'$).

۱۲۳- گزینه ۴ قسمت رنگی وجه اشترک C و $A\cup B$ است.

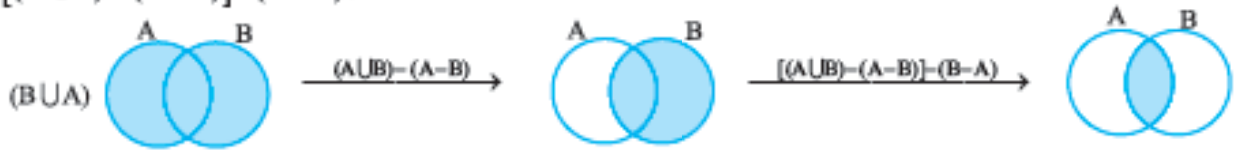
۱۲۴- گزینه ۳ ناحیهٔ رنگی، قسمتی از $A\cap B$ است که در C نیست، پس می‌توان آن را به صورت $(A\cap B)-C$ نشان داد.

۱۲۵- گزینه ۱ با رنگ‌کردن نمودار ون به راحتی می‌توانید بفهمید که هر دو مجموعهٔ داده‌شده برابر $A\cap B$ هستند.

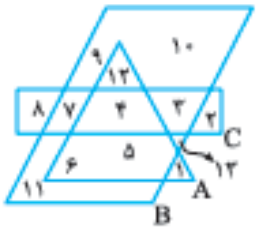
$A-(A-B)$:



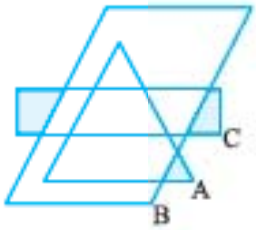
$[(A\cup B)-(A-B)]-(B-A)$:



۱۲۶- گزینه ۲



$(B-A)\cup C$



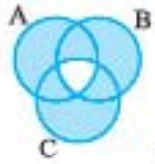
$(A\cup C)-B$

می‌بینید که فقط عضوهای ۵ و ۶ و ۱۲ در هیچ شکلی در قسمت رنگی نیستند.

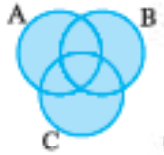
۱۲۷- گزینه ۴ قسمت رنگی در گزینهٔ (۴) را می‌توان به صورت $[(A\cup B\cup C)-(A\cup C)]\cup(A\cap C)$ نشان داد. در ضمن عبارت گزینهٔ (۴) برابر B است.

۱۲۸- گزینه ۲ با توجه به $(A-B)\cap C'=(A-B)-C$، دنبال اعضایی از A می‌گردیم که نه در B باشند و نه C. به اصطلاح دنبال اعضای مجموعهٔ «فقط A» می‌گردیم.

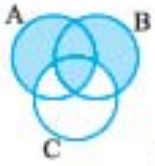
۱۲۹- گزینه ۴ برای هر گزینه یک نمودار ون می‌کشیم:



(۱



(۲



(۳

(۴

۱۳۰- گزینه ۴ به جای n، از صفر تا ۶ می‌گذاریم تا اعضای A مشخص شود. $A=\{1,2,4,8,16,32,64\}$

اعضای B تمام اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۴اند (چون $n\in\mathbb{N}$ حداقل مقدار $3n+1$ می‌شود ۴) که اگر تقسیم بر ۳ شوند، یکی باقی‌مانده دارند. در بین اعضای A، ۴ و ۱۶ و ۶۴ این‌طورند. (۲، ۸ و ۳۲ هم به صورت $3n+2$اند.)

۱۳۱- گزینه ۱ زیرمجموعه‌های ۶ عضوی پایین را ببینید: $A_1=\{1,2,3,4,5,6\}, A_2=\{5,6,7,8,9,10\}, A_3=\{1,2,3,8,9,10\}$

چون $A_1\cap A_2\cap A_3=\{\ \}$، پس هیچ عضوی وجود ندارد که در تمام زیرمجموعه‌های ۶ عضوی مشترک باشد، یعنی $S=\varnothing$. حالا چون $A_1\cup A_2=A$ پس $T=A$. خُب دیگر، جواب می‌شود $T-S=A-\varnothing=A$.

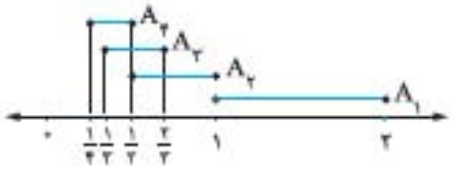
۱۳۲- گزینه ۱

$$\begin{cases} A_1=\{1,2,\dots,10\} \\ A_2=\{2,3,\dots,11\} \\ \vdots \\ A_8=\{8,9,10,\dots,17\} \end{cases} \Rightarrow A=\{8,9,10\}$$

۱۳۳- گزینه ۱ طبق تعریف A_i می‌نویسیم: $A_1=\{x\mid -1<x<1, x\in\mathbb{N}\}=\{0\}, A_2=\{-1,0,1\}, A_3=\{-2,-1,0,1,2\},\dots$

الان معلوم است که اشتراک همهٔ این‌ها می‌شود همان A_1. در واقع چون A_1 زیرمجموعهٔ همهٔ A_iهای دیگر است، پس اشتراکشان می‌شود A_1.

۱۳۴- گزینه ۴ در تعریف A_n، به‌جای n چند مقدار می‌گذاریم:



$$\begin{cases} A_1: \frac{1}{1} \le x \le \frac{2}{1} = 2 \\ A_2: \frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{2} = 1 \\ A_3: \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ A_4: \frac{1}{4} \le x \le \frac{2}{4} \\ \vdots \\ A_{n-1}: \frac{1}{n-1} \le x \le \frac{2}{n-1} \\ A_n: \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \end{cases}$$

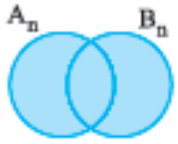
همان‌طور که در شکل می‌بینید، اجتماع این مجموعه‌ها، تمام اعداد مثبت کوچک‌تر یا مساوی ۲ را دارد، یعنی $A = \{x \mid 0 < x \le 2\}$.

فقط حواستان باشد که چون $\frac{1}{n}$ به ازای هیچ مقداری صفر نمی‌شود، پس صفر عضو هیچ کدام از مجموعه‌های A_n نیست، پس در اجتماعشان هم حضور ندارد.

۱۳۵- گزینه ۴ می‌رویم سراغ بررسی گزینه‌ها:

۱) مثلاً فرض کنید $n = 4$ و $m = 2$. نشان می‌دهیم که $B_2 \cap B_4 = \varnothing$. طبق تعریف $B_4 = A_4 - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$، یعنی B_4 شامل اعضایی است که در A_4 هستند ولی در A_1 و A_2 و A_3 نیستند. از طرفی $B_2 = A_2 - A_1$، یعنی B_2 فقط شامل بعضی از اعضای A_2 است (که در A_1 نیستند)، پس B_2 و B_4 اشتراک ندارند.

۲) با استفاده از تعریف به راحتی می‌شود فهمید که اولاً هیچ‌کدام از B_iها عضو اضافه‌ای ندارند، یعنی هر عضوی در هر کدام از B_iها باشد، حتماً از A_iها گرفته شده است.



دوماً هر عضوی از هر کدام از A_iها حداقل در یکی از B_iها هست. یعنی این گزینه هم درست است.

۳) این گزینه مستقل از این‌که A_n و B_n چه باشند، همواره درست است. اشتراک قسمت رنگ‌شده $(A_n \cup B_n)$ با A_n می‌شود A_n چون $A_n \subset (A_n \cup B_n)$.

۱۳۶- گزینه ۱ وقتی A و B عضو مشترک ندارند، آن‌وقت تعداد عضوهای اجتماعشان برابر مجموع عضوهای آن‌ها است.

به عبارت ریاضی‌تر:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

برای $A \cup B$ می‌نویسیم:

$$A \cup B = \{\underbrace{-15}_{-3\times5}, \underbrace{-10}_{-2\times5}, \underbrace{-5}_{-1\times5}, 0, \ldots, \underbrace{150}_{+30\times5}\} \Rightarrow n(A \cup B) = 34$$

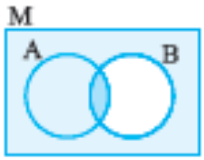
پس

$$n(B) = n(A \cup B) - n(A) = 34 - 10 = 24$$

۱۳۷- گزینه ۲

$$n(A \cup B) = \underbrace{n(A) + n(B)}_{2n(A \cap B)} - n(A \cap B) = 2n(A \cap B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = 2$$

۱۳۸- گزینه ۳ خیلی روشن است که $n(A) + n(A') = n(M) = 12$ (M مجموعهٔ مرجع است.) هم‌چنین:



$$\overbrace{\underbrace{n(A \cap B)}_{\text{رنگی پررنگ}} + \underbrace{n(B')}_{\text{رنگی}}}^{9} + \underbrace{n(B - A)}_{\text{سفید}} = n(M) = 12$$

پس:

$$n(B - A) = 12 - 9 = 3$$

۱۳۹- گزینه ۳

$$\begin{cases} n(A)+n(B')=۵ \\ n(B)+n(A')=۱۱ \end{cases} \xrightarrow{+} \underbrace{[n(A)+n(A')]}_{n(M)}+\underbrace{[n(B)+n(B')]}_{n(M)}=۱۶ \Rightarrow n(M)=۸$$

توجه کنید که $A-B$ و $B\cup A'$ متمم‌اند: $(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B \Rightarrow n(B\cup A')=n(M)-n(A-B)=۴$

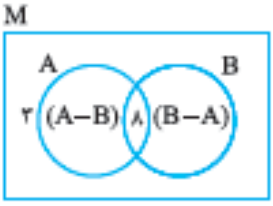
۱۴۰- گزینه ۱ ٪۴۰ فوتبالی و نصف بقیه $(\frac{٪۱۰۰-٪۴۰}{۲}=٪۳۰)$ اهل والیبال‌اند. پس $٪۳۰=[۱۰۰-(۴۰+۳۰)]٪$ نه اهل فوتبال‌اند و نه اهل والیبال:

$$\frac{۳۰}{۱۰۰}\times ۲۵۰=۷۵$$

۱۴۱- گزینه ۱ در واقع دنبال $n(A\cap B)$ می‌گردیم: (A مجموعهٔ کتاب تست داران و B مجموعهٔ کتاب کار داران است.)

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow ۲۰=۱۲+۱۰-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۲$$

۱۴۲- گزینه ۳ نمودار مقابل را ببینید. A اعضای تیم «رباتیک» و B اعضای تیم «روبوکاپ» را نشان می‌دهد. M (مجموعهٔ مرجع) شامل تمامی افراد است:



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۷+۱۳-۸=۲۲$$

$(A\cup B)$ نشان‌دهندهٔ تمام افرادی است که حداقل عضو یکی از دو تیم هستند، پس تعداد کل اعضای کلاس می‌شود $۲۲+۳=۲۵$.

۱۴۳- گزینه ۲ اگر مجموعه اعداد زوج دورقمی طبیعی را بگیریم A و مجموعه اعداد سه‌رقمی طبیعی بخش‌پذیر بر ۳ را بگیریم B، $(A\cup B)$ می‌شود اعداد طبیعی دورقمی که حداقل بر یکی از ۲ یا ۳ بخش‌پذیرند (بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیرند.):

$$n(A)=\frac{\text{اولین عدد زوج}-\text{آخرین عدد زوج}}{۲}+۱=\frac{۹۸-۱۰}{۲}+۱=۴۵$$

$$n(B)=\frac{\text{اولین مضرب ۳}-\text{آخرین مضرب ۳}}{۳}+۱=\frac{۹۹-۱۲}{۳}+۱=۳۰$$

معلوم است که اعداد مشترک A و B آن‌هایی‌اند که بر $۲\times۳=۶$ بخش‌پذیرند:

$$n(A\cap B)=\frac{\text{اولین مضرب ۶}-\text{آخرین مضرب ۶}}{۶}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۶}+۱=۱۵$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۴۵+۳۰-۱۵=۶۰$$

۱۴۴- گزینه ۳ A: مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ که بر ۳ بخش‌پذیرند.

B: مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ که بر ۵ بخش‌پذیرند.

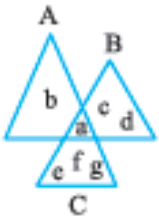
خواستهٔ سؤال $(A\cup B)'$ است، یعنی اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰ که نه عضو A باشد و نه عضو B. پس کافی است که $۹۹-n(A\cup B)$ را حساب کنیم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \qquad n(A)=\frac{۹۹-۳}{۳}+۱=۳۳\,,\, n(B)=\frac{۹۵-۵}{۵}+۱=۱۹$$

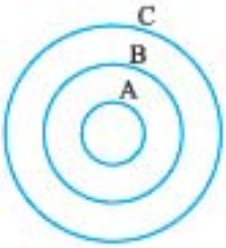
$$n(A\cap B)=\text{تعداد اعدادی که مضرب ۱۵}=\frac{۹۰-۱۵}{۱۵}+۱=۶\ \text{اند}\times۳\times۵=۱۵$$

الان داریم $n(A\cup B)=۳۳+۱۹-۶=۴۶$ و در آخر $۹۹-n(A\cup B)=۹۹-۴۶=۵۳$.

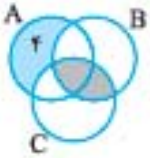
۱۴۵- گزینه ۱ حداکثر مقدار: در این حالت که هر مجموعه را با یک مثلث نشان داده‌ایم، طوری که هر سه در a مشترک‌اند، اجتماع این ۳ مجموعه، ۷ عضو دارد.



حداقل مقدار: در حالت مقابل، $A \subset B \subset C$، پس $A \cup B \cup C = C$ و $n(A \cup B \cup C) = ۴$.

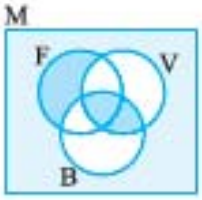


۱۴۶- گزینه ۲ قسمت رنگی نشان‌دهندهٔ $A - (B \cup C)$ است.



پس با توجه به $n(A \cup B \cup C) = ۱۸$ می‌شود فهمید که $n(B \cup C) = ۱۸ - ۴ = ۱۴$. قسمت خاکستری‌رنگ نشان‌دهندهٔ $B \cap C$ و قسمت‌های سفید روی هم نشان‌دهندهٔ $(C - B) \cup (B - C)$ است، پس: $n((C - B) \cup (B - C)) = n(B \cup C) - n(B \cap C) = ۱۴ - ۲ = ۱۲$

۱۴۷- گزینه ۲ چون در این باشگاه رشتهٔ ورزشی دیگری وجود ندارد، پس $M = (F \cup V \cup B)$. حالا می‌خواهیم با استفاده از رابطهٔ تعمیم‌یافتهٔ زیر، $n(A \cap B \cap C)$ را پیدا کنیم:

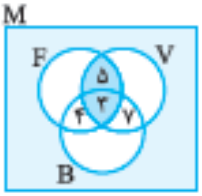


نکته:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow ۵۹ = ۲۹ + ۳۲ + ۲۰ - ۷ - ۸ - ۱۰ + n(A \cap B \cap C) = ۵۶ + n(A \cap B \cap C)$$

حالا قسمت رنگ‌شده را ببینید. با کمی دقت اعضای مشترک انحصاری V و F برابر ۵ به دست می‌آید. الان با توجه به $n(F) = ۲۹$، $n(B) = ۳۲$ و $n(V) = ۲۰$ می‌شود اعضایی را که فقط در یک گروه عضوند، به دست آورد:



$$n(F - (B \cup V)) = ۲۹ - (۵ + ۳ + ۴) = ۱۷ , n(V - (F \cup B)) = ۲۰ - (۵ + ۳ + ۷) = ۵$$

$$n(B - (F \cup V)) = ۳۲ - (۴ + ۳ + ۷) = ۱۸$$

خلاصه این‌که جواب مسئله $۱۷ + ۱۸ + ۵ = ۴۰$ است.

۱۴۸- گزینه ۱ مسئله تعداد اعضای قسمت رنگ‌شده را می‌خواهد. با توجه به اطلاعات مسئله *(از آخر به اول اطلاعات رو بخونین)* می‌شود تعداد اعضای هر ناحیه را داخل آن نوشت. پس:

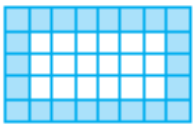
$$n((E \cup T) - R) = ۵ + ۵ + ۵ = ۱۵$$

۱۴۹- گزینه ۱ چون $\frac{۱}{۴}$ کارت‌ها آبی‌اند، پس احتمال آبی‌آمدن $\frac{۱}{۴}$ است، چون:

$$\text{احتمال آبی‌آمدن} = \frac{\text{تعداد کارت‌های آبی}}{\text{تعداد کل}} = \frac{۱}{۴}$$

۱۵۰- گزینه ۲ احتمال این‌که اولی به هدف خورده باشد $\frac{۳}{۷}$ است. پس احتمال این‌که به هدف نخورده باشد $۱ - \frac{۳}{۷} = \frac{۴}{۷}$ می‌شود.

۱۵۱- گزینه ۴ تعداد کاشی‌های مطلوب ۲۲ و تعداد کل کاشی‌ها ۴۰ است، پس احتمال موردنظر می‌شود $\frac{۱۱}{۲۰} = \frac{۲۲}{۴۰}$.



۱۵۲- گزینه ۳ مسیر حرکت از A تا B و از C تا D اصلاً مهم نیست. از B تا C، ۴ مسیر داریم که یکی از آن‌ها از رستوران می‌گذرد، پس احتمال سرزدن به آن‌ها $\frac{1}{4}$ است.

۱۵۳- گزینه ۳ هم‌تیمی A، یکی از ۵ نفر دیگر است، پس $\frac{1}{5}$ احتمال دارد که هم‌تیمی او B باشد.

۱۵۴- گزینه ۲ در هر زیرمجموعهٔ ۹۹ عضوی، یکی از ۱۰۰ عضو مجموعه را کنار می‌گذاریم و با ۹۹تای باقی‌مانده، زیرمجموعه می‌سازیم. به ۱۰۰ حالت می‌توان این کار را انجام داد که تنها در یکی از آن‌ها، ۱۹ انتخاب نشده است ($\{1,2,\ldots,18,20,\ldots,100\}$)، پس احتمال موردنظر می‌شود $\frac{1}{100}$.

۱۵۵- گزینه ۲ هر فرزند می‌تواند دختر یا پسر باشد، پس $2\times2\times2=8$ حالت وجود دارد:

(د،د،د)، (پ،د،د)، (د،پ،د)، (پ،پ،د) (د،د،پ)، (پ،د،پ)، (د،پ،پ)، (پ،پ،پ)

شاید به ذهنتان برسد که حالت‌های ۲، ۳ و ۵ یکی‌اند یا ۴، ۶ و ۷ یکی‌اند و در کل فضای نمونه ۴ حالت دارد. ولی باید بدانید که انسان‌ها با هم فرق دارند و نمی‌توان آن‌ها را یکی گرفت و اگر برای فضای نمونه ۴ عضو را در نظر بگیرید، این ۴ عضو هم‌شانس نیستند.

۱۵۶- گزینه ۴ این‌که یک سکه را ۳ بار بیندازیم یا ۳تا سکه را بیندازیم، هیچ فرقی با هم ندارد.

تعداد اعضای پیشامد مطلوب ما ۳ عضو (پ،ر،ر)، (ر،پ،ر)، (ر،ر،پ) است، پس احتمال برابر $\frac{3}{8}$ می‌شود.

۱۵۷- گزینه ۲ ۶ حالت مطلوب داریم:

(۶،۶)، (۶،۵)، (۶،۴)، (۵،۶)، (۵،۵)، (۴،۶)

و تعداد کل حالت‌ها 6×6 است، پس جواب $\frac{1}{6}=\frac{6}{6\times6}$ است.

۱۵۸- گزینه ۱ حالت‌های مطلوب را می‌نویسیم:

حالت‌هایی که مجموع اعداد ۷ می‌شود: $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

حالت‌هایی که مجموع اعداد ۸ می‌شود: $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

پس حالت‌های مطلوب ۱۱تا و تعداد کل حالات ۳۶تا است و احتمال موردنظر $\frac{11}{36}$ است.

۱۵۹- گزینه ۳ عدد سمت چپ نشان‌دهندهٔ تاس اول و عدد سمت راست نشان‌دهندهٔ تاس دوم است:

حالت‌های مطلوب $=(8,1),\underbrace{(6,3),(3,6)}_{\text{تاس دوم، دوتا ۳ دارد.}},(5,4)$

چون تعداد حالت‌های کل ۳۶تا است، احتمال می‌شود $\frac{1}{9}=\frac{4}{36}$.

۱۶۰- گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) احتمال این‌که تاس مضرب ۳ نیاید $(\frac{1}{2}=\frac{n\{1,3,5\}}{n\{1,2,3,4,5,6\}})$ بیشتر از این است که تاس مضرب ۳ بیاید $(\frac{1}{3}=\frac{n=\{3,6\}}{6})$

۲) احتمال این‌که سکه رو بیاید برابر $\frac{1}{2}$ است. همین‌طور احتمال این‌که تاس عدد فرد بیاید می‌شود: $\frac{1}{2}=\frac{n\{1,3,5\}}{6}$

۳) احتمال این‌که دو سکه هم‌زمان رو بیاید می‌شود $\frac{1}{4}$. چون برای دو سکه ۴ حالت زیر وجود دارد که یکی از آن‌ها قابل قبول است.

$\{(ر،ر),(ر،پ),(پ،ر),(پ،پ)\}$

۴) در ۶ حالت، مجموع دو تاس ۷ می‌شود:

(۱،۶)، (۲،۵)، (۳،۴)، (۴،۳)، (۵،۲)، (۶،۱)

در ۴ حالت مجموع دو تاس ۵ می‌شود:

(۱،۴)، (۲،۳)، (۳،۲)، (۴،۱)

پس احتمال مجموع ۷ آمدن $(\frac{6}{36})$ بیشتر است از احتمال این‌که مجموع ۵ باشد $(\frac{4}{36})$.

۱۶۱- گزینه ۴ اختلاف دو عدد وقتی زوج است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. حالت‌های مطلوب را می‌نویسیم:

$A=\{(5,7),(5,11),(7,11),(10,12)\}$

از طرفی می‌دانیم که تعداد کل حالت‌ها انتخاب ۲ از ۵ است:

$$n=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\times3!}=\frac{5\times4\times\cancel{3!}}{2!\times\cancel{3!}}=\frac{5\times4}{2}=10 \qquad n(S)=\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2}=10 \Rightarrow \frac{n(A)}{n(B)}=\frac{4}{10}$$

۱۶۲- گزینه ۴ برای این‌که حاصل‌ضرب سه عدد تاس، اول باشد باید دوتا از آن‌ها برابر ۱ و یکی دیگر عددی اول باشد. اگر تاس اول ۲ یا ۳ یا ۵ باشد (۳ حالت) تاس‌های دیگر باید ۱ باشند. همین‌طور ۶ حالت وجود دارد که تاس‌های دوم یا سوم عدد اول باشند. پس حالت‌های مطلوب $۳ \times ۳ = ۹$ است:

{۲۱۱,۳۱۱,۵۱۱,۱۲۱,۱۳۱,۱۵۱,۱۱۲,۱۱۳,۱۱۵}

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{۹}{۶\times۶\times۶} = \frac{۱}{۶\times۲\times۲} = \frac{۱}{۲۴}$$

۱۶۳- گزینه ۱ برای دو تاس، ۴ حالت هم‌شانس وجود دارد:

	۱	۲	۳	۴
تاس اول	زوج	فرد	زوج	فرد
تاس دوم	زوج	زوج	فرد	فرد

چون احتمال زوج یا فرد آمدن هر تاس برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس تمام حالت‌های بالا هم‌شانس‌اند و احتمال رخ‌دادن هر کدامشان $\frac{۱}{۴}$ است. پس داریم:

$$P(A) = P(\text{حالت ۱}) = \frac{۱}{۴}, P(B) = P(\text{حالت‌های ۲ و ۳}) = ۲\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P^۲(A) + P^۲(B) = (\frac{۱}{۴})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۵}{۱۶}$$

فدایی نکرده، زبانم لال. یک وقت نگویید که پرتاب دو تاس، ۳ حالت دارد چون فرقی نمی‌کند که کدام فرد باشد و کدام زوج!! یادمان باشد: «دوتا چیز، دوتا چیزند و با هم فرق می‌کنند.»

۱۶۴- گزینه ۲ با توجه به اطلاعاتی که داریم، مطمئناً یکی از حالت‌های زیر وجود دارد:

{(د,پ,پ),(پ,د,پ),(پ,پ,د)}

پس فضای نمونه ۳ حالت دارد؛ (تعداد کل حالت‌ها ۳ است.) و دوتا از آن‌ها برای ما مطلوب است، پس احتمال این‌که بزرگ‌ترین فرزند پسر باشد می‌شود $\frac{۲}{۳}$.

۱۶۵- گزینه ۴ می‌دانیم که این خانواده پسر دارد. پس از فضای نمونه حالت (د,د) حذف می‌شود و ۳ حالت باقی می‌ماند:

{(پ,پ),(پ,د),(د,پ)}

پس احتمال این‌که هر دو فرزند خانواده پسر باشند می‌شود $\frac{۱}{۳}$.

۱۶۶- گزینه ۲ اگر عدد تاس قرمز از آبی بزرگ‌تر باشد، ۳ حالت برای این‌که مجموع اعداد تاس‌ها برابر ۷ شود وجود دارد.

تاس قرمز	۶	۵	۴
تاس آبی	۱	۲	۳

برای تعداد کل هم ۱۵ حالت ممکن است. در زیر عدد اول، نشان‌دهندهٔ عدد تاس قرمز و عدد دوم، نشان‌دهندهٔ عدد تاس آبی است.

$$\begin{cases} (۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵) \\ (۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴) \\ (۴,۱),(۴,۲),(۴,۳) \\ (۳,۱),(۳,۲) \\ (۲,۱) \end{cases}$$

پس احتمال آمدن مجموع ۷ برابر است با $\frac{۳}{۱۵}$.

تعداد کل را این طوری هم می‌شد شمرد:

در کل، حالت‌ها ۳۶تا است که در ۶ حالت اعداد تاس‌ها با هم برابرند. در نصف باقی‌مانده قرمز بزرگ‌تر است و در نصف دیگر آبی.

$$\text{تعداد کل حالت‌های ممکن} = \frac{۳۶-۶}{۲} = ۱۵$$

۱۶۷- گزینه ۴ عدد کارت اول می‌شود دهگان و عدد دوم می‌شود یکان.

از طرفی می‌دانیم برای این‌که عددی بر ۵ بخش‌پذیر باشد، یکان آن باید صفر یا ۵ باشد و عدد دهگان اصلاً مهم نیست. **قُمپ**، احتمال این‌که دومی صفر یا ۵ بیاید می‌شود $\frac{۲}{۱۰}$.

۱۶۸- گزینه ۳ عددهای فرد دورقمی $\frac{(۹۹-۱۰)+۱}{۲}=۴۵$ تا هستند که ۹۹، ۷۷، ۵۵، ۳۳ و ۱۱ رقم تکراری دارند، پس جواب $\frac{۴۰}{۹۰}=\frac{۴۵-۵}{(۹۹-۱۰)+۱}=\frac{\text{تعداد اعداد مطلوب}}{\text{تعداد کل دورقمی‌ها}}$ است.

۱۶۹- گزینه ۲ اعداد موردنظر ما این‌ها هستند. با کمی دقت می‌شود فهمید که ۱۸تا هستند:

۳,۱۳,۲۳,۳۰,۳۱,۳۲,۳۴,...,۳۹,۴۳,۵۳,۶۳,۷۳,۸۳,۹۳

پس جواب $\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱۸}{۹۹}$ است.

۱۷۰- گزینه ۱ دنبال عددی می‌گردیم که مضرب ۶ باشد ولی مضرب $۶\times۵=۳۰$ نباشد، چون $\frac{۹۹}{۶}=۱۶/۵$. پس ۱۶ مضرب ۶ داریم که ۳۰، ۶۰ و ۹۰ قابل‌قبول نیستند، پس احتمال موردنظر می‌شود $\frac{۱۶-۳}{۹۹}=\frac{۱۳}{۹۹}$.

۱۷۱- گزینه ۳ تعداد رقم‌های این ۳۲۰ صفحه برابر می‌شود با: $۱\times۹+۲\times۹۰+۳\times\underbrace{(۳۲۰-۱۰۰+۱)}_{۲۲۱}=۸۵۲$

حالا باید تعداد (۱) ها را بشماریم:

رقم‌های (۱) در هر گروه صدتایی، (۰ تا ۹۹ ـ ۱۰۰ تا ۱۹۹ ـ ۲۰۰ تا ۲۹۹) ۱۰ بار در یکان و ۱۰ بار در دهگان می‌آید. تا این‌جا شد $۳\times۲۰=۶۰$.

۱۰۰تا رقم (۱) هم در صدگان ۱۰۰تا ۱۹۹ داریم و ۱۲تا یک در ۳۰۰ تا ۳۲۰؛ یعنی کلاً $۶۰+۱۰۰+۱۲=۱۷۲$ تا رقم یک داریم و احتمال می‌شود $\frac{۱۷۲}{۸۵۲}=\frac{۴۳}{۲۱۳}$.

۱۷۲- گزینه ۳ احتمال بیرون‌آمدن هر رنگ را در ابتدای کار حساب می‌کنیم:

$\text{احتمال سبزآمدن}=P_۱(s)=\frac{۴}{۱۶}$ $\quad$ $\text{احتمال قرمزآمدن}=P_۱(g)=\frac{۷}{۱۶}$ $\quad$ $\text{احتمال زردآمدن}=P(z)=\frac{۵}{۱۶}$

در حالت دوم تعداد قرمزها ۱۱، تعداد زردها ۸ و تعداد سبزها ۵تا است:

$\text{احتمال سبزآمدن}=P_۲(s)=\frac{۵}{۲۴}$ $\quad$ $\text{احتمال قرمزآمدن}=P_۲(g)=\frac{۱۱}{۲۴}$ $\quad$ $\text{احتمال زردآمدن}=P_۲(z)=\frac{۸}{۲۴}$

احتمال سبزآمدن کم شده و احتمال قرمز و زرد آمدن بیشتر شده است.

○ گزینهٔ (۱) خیلی غلط است! مگر می‌شود تمام احتمال‌ها زیاد شوند؟!

۱۷۳- گزینه ۳ فرض کنیم xتا مهرهٔ زرد داریم. در این صورت احتمال زردآمدن می‌شود $\frac{x}{x+۱۴}$ که باید برابر ۰/۴۴ باشد.

$$\frac{x}{x+۱۴}=\frac{۱۱}{۲۵}\Rightarrow ۲۵x=۱۱x+۱۱\times۱۴\Rightarrow ۱۴x=۱۱\times۱۴\Rightarrow x=۱۱$$

۱۷۴- گزینه ۴ مشابه سؤال قبل عمل می‌کنیم. تعداد توپ‌های آبی را می‌گیریم a:

$$P(\text{آبی})=\frac{\text{تعداد آبی‌ها}}{\text{تعداد کل}}\Rightarrow\frac{۹}{۱۱}=\frac{a}{۲۰+۳۰+a}=\frac{a}{۵۰+a}$$

طرفین‌وسطین: $۱۱a=۹a+۹\times۵۰\Rightarrow ۲a=۹\times۵۰\Rightarrow a=۹\times۲۵=۲۲۵$

۱۷۵- گزینه ۲ اول معادله را برحسب A حل می‌کنیم: $۲x+A=۴x-۲\Rightarrow A+۲=۲x\Rightarrow x=\frac{A+۲}{۲}=\frac{A}{۲}+۱$

می‌خواهیم جواب معادله کم‌تر از ۳ باشد، یعنی $x<۳$: $x=\frac{A}{۲}+۱<۳\xrightarrow{-۱}\frac{A}{۲}<۲\xrightarrow{\times۲}A<۴$

پس A می‌تواند یکی از اعضای $\{۱,۲,۳\}$ باشد که احتمال آمدنش $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ است.

۱۷۶- گزینه ۴ چون $x=۱$ جواب معادله است، آن را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(A+۱)x^۲-۳x+۲B-۲=۰\xrightarrow{x=۱}A+۱-۳+۲B-۲=۰\Rightarrow A+۲B=۵$$

برای این‌که معادله جور شود، فقط حالت‌های زیر ممکن است: (عدد سمت چپ A و عدد سمت راست B است.)

مجموعه حالت‌های مطلوب $=\{(۱,۲),(۳,۱)\}$

در نتیجه احتمال موردنظر برابر $\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$ می‌شود.

۱۷۷- گزینه۳ در بین اعداد تاس فقط ۴ و ۶ مرکب‌اند. پس برای هر تاس ۲ حالت ممکن است رخ داده باشد.

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}=\frac{۱}{۲\times۲\times۲}=\frac{۱}{۸}$$

۱۷۸- گزینه۳ باقی افراد اهمیتی ندارند. این ۳ نفر به ۶ حالت نسبت به هم قرار دارند که یکی از آن‌ها برای ما مطلوب است. پس جواب می‌شود $\frac{۱}{۶}$.

$$\underbrace{ABC}_{\text{حالت مطلوب}}, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$$

۱۷۹- گزینه۴ اگر حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۵ باشد، حاصل‌ضرب این ۵ عدد بر ۵ بخش‌پذیر است. می‌خواهیم از روش متمم استفاده کنیم، یعنی وقتی حاصل‌ضرب، مضرب ۵ نیست که هیچ‌کدام از اعداد ۵ نیاید. یعنی همه می‌توانند ۵ حالت داشته باشند:

$$P(A')=\frac{۵^۵}{۶^۵}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۵^۵}{۶^۵}=\frac{۶^۵-۵^۵}{۶^۵}$$

۱۸۰- گزینه۱ راه اول: اگر تاس اول ۶ بیاید، مهم نیست تاس دوم چه عددی دارد.

پس ۱۲ = ۶ × ۲ حالت مطلوب در این‌جا داریم. اگر تاس اول ۲ بیاید، تاس دوم باید ۱ باشد. ۱۶ = ۴ × ۴ حالت مطلوب هم در این‌جا به دست آمد:

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}=\frac{۱۲+۱۶}{۶\times۶}=\frac{۲۸}{۳۶}=\frac{۷}{۹}$$

راه دوم: $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ احتمال دارد که تاس اول ۶ بیاید. در این صورت حتماً عدد تاس اول بزرگ‌تر است. حالت بعدی این است که تاس اول ۲ و تاس دوم ۱ بیاید. احتمال این رخداد برابر است با:

$$\underbrace{\frac{۴}{۶}}_{\text{احتمال این‌که اولی ۲ بیاید.}}\times\underbrace{\frac{۴}{۶}}_{\text{احتمال این‌که دومی ۱ بیاید.}}=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$$

در نهایت احتمال نهایی برابر $\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۹}=\frac{۷}{۹}$ است.

۱۸۱- گزینه۴ تاس‌های اول و دومی می‌توانند یکسان باشند و سومی متفاوت باشد یا اولی و سومی یکسان باشد و یا دومی و سومی (یعنی ۳ حالت). حالا می‌گوییم آن‌هایی که می‌خواهند یکسان باشند، ۶ حالت مختلف دارند و آن یکی که با آن‌ها متفاوت است، ۵ حالت دارد. پس تعداد حالت‌های مطلوب می‌شود ۵ × ۶ × ۳ تا:

$$\frac{۳\times۶\times۵}{۶\times۶\times۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۸۲- گزینه۲ تعداد کل اعداد ۳ رقمی با ارقام ۱ تا ۷ و ارقام متمایز برابر ۵ × ۶ × ۷ است. حالا اگر بخواهیم این عدد فرد باشد و صدگانش ۴ نباشد، برای یکان ۴ حالت (۱، ۳، ۵ و ۷) و برای صدگان ۵ حالت (۳تا عدد فرد مانده به اضافهٔ ۲ و ۶) داریم. چون دهگان محدودیتی ندارد، از تمام ۵ عدد باقی‌مانده می‌توانیم استفاده کنیم. خلاصه این‌که تعداد حالت‌های مطلوب هم به دست آمد:

$$\frac{۵\times۵\times۴}{۷\times۶\times۵}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

۱۸۳- گزینه۱ سه‌تایی‌هایی را که جمعشان بر ۹ بخش‌پذیر است می‌نویسیم: (۷,۶,۵), (۶,۲,۱), (۵,۳,۱), (۴,۳,۲)

با هرکدام از این ۳تایی‌ها می‌شود ۶ تا عدد نوشت ۶ = ۱ × ۲ × ۳. به طور مثال اعداد (۵ و ۶ و ۷) را می‌نویسیم: ۷۶۵,۷۵۶,۶۷۵,۶۵۷,۵۷۶,۵۶۷

قُمپ دیگر، جواب سؤال برابر $\frac{۴\times۶}{۷\times۶\times۵}=\frac{۴}{۳۵}$ است.

۱۸۴- گزینه۴ روش اول: P(حداقل ۲ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند) = ۱ − P(همه در ماه‌های متفاوتی به دنیا آمده باشند)

۱۲ گزینهٔ مختلف برای تولد هر نفر وجود دارد. یعنی تعداد کل حالات به دنیا آمدن این ۴ نفر می‌شود ۱۲×۱۲×۱۲×۱۲. حالا اگر قرار باشد هر ۴ نفر در ماه‌های متفاوتی به دنیا بیایند، نفر اول ۱۲ گزینه، دومی ۱۱، سومی ۱۰ و چهارمی ۹ گزینه برای انتخاب ماه تولدش دارد. (مگه خودمون انتخاب می‌کنیم؟!)

پس تعداد حالت‌های مطلوب ۹×۱۰×۱۱×۱۲ است: $P(\text{حداقل ۲ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند})=۱-\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}{۱۲\times۱۲\times۱۲\times۱۲}=۱-\frac{۵۵}{۹۶}=\frac{۴۱}{۹۶}$

روش دوم: این طوری هم می‌شد به مسئله نگاه کرد:

$$P(\text{حداقل ۲ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند})=۱-\underbrace{\frac{۱۱}{۱۲}}_{\text{احتمال این‌که دومی، هم ماه اولی نباشد}}\times\underbrace{\frac{۱۰}{۱۲}}_{\text{احتمال این‌که سومی، هم‌ماه اولی و دومی نباشد}}\times\underbrace{\frac{۹}{۱۲}}_{\text{احتمال این‌که چهارمی، هم‌ماه قبلی‌ها نباشد}}=۱-\frac{۵۵}{۹۶}=\frac{۴۱}{۹۶}$$

۱۸۵- گزینه۳ زوج اول را با m_1z_1 و زوج دوم را با m_2z_2 نشان می‌دهیم. حالت‌های مطلوب این‌ها اند:

$m_1z_1z_2m_2 , z_1m_1m_2z_2 , m_2z_2z_1m_1 , z_2m_2m_1z_1$

همین‌طور می‌دانیم که تعداد کل حالت‌ها $۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ تا است، پس احتمال می‌شود $\frac{۴}{۲۴} = \frac{۱}{۶}$.

۱۸۶- گزینه۲

۱ حالت	۱ حالت	۱ حالت	۲ حالت	۱ حالت	۶ حالت
۶	۵	۴	۳	۲	۱

جایگاه نفرات را ببینید. نفر اول هر کدام از ۶ نفر می‌تواند باشد. نفر دوم حتماً باید همسر نفر اول باشد، یعنی فقط ۱ حالت دارد. نفر سوم حتماً باید هم‌جنس نفر دوم باشد، یعنی اگر نفر دوم مرد است، او هم باید مرد باشد و اگر نفر دوم زن است، سومی هم باید زن باشد. چون تا الان یک زوج جایگاهشان مشخص شده است، پس جایگاه سوم ۲ حالت دارد (۲ مرد یا ۲ زن). نفر چهارم حتماً باید همسر نفر سوم باشد. نفر پنجم هم‌جنس نفر چهارم است و نفر ششم هم همسر او. پس تعداد حالت‌های مطلوب، طبق اصل ضرب می‌شود $۶ \times ۲ = ۱۲$.

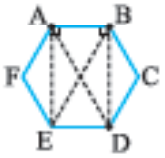
$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}} = \frac{۱۲}{۶!} = \frac{۱۲}{۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶} = \frac{۱}{۶۰}$$

۱۸۷- گزینه۱ هر کدام از خانواده‌ها به $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$ حالت مختلف می‌توانند فرزند داشته باشند، پس تعداد کل حالاتی که برای فرزندان (دختر یا پسر بودن) این دو خانواده می‌شود در نظر گرفت، برابر $۸ \times ۸ = ۶۴$ است. حالا می‌خواهیم ببینیم که در چند حالت، تعداد فرزندان پسر برابر است:

هر دو خانواده سه پسر داشته باشند: $۱ \times ۱ = ۱$ ، هر دو خانواده دو پسر داشته باشند: $۳ \times ۳ = ۹$

هر دو خانواده یک پسر داشته باشند: $۳ \times ۳ = ۹$ ، هر دو خانواده پسر نداشته باشند: $۱ \times ۱ = ۱$

یعنی در $۹ + ۱ + ۹ + ۱ = ۲۰$ حالت، تعداد پسرهای خانواده‌ها برابر است و در $۶۴ - ۲۰ = ۴۴$ حالت، تعداد آن‌ها نابرابر؛ پس در $\frac{۴۴}{۲} = ۲۲$ حالت از ۶۴ حالت، تعداد پسرهای تبریزی‌ها بیشتر است. جواب می‌شود $\frac{۲۲}{۶۴} = \frac{۱۱}{۳۲}$.

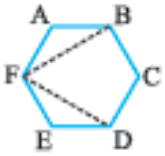


۱۸۸- گزینه۲ فقط در صورتی با ۳ رأس از رأس‌های یک ۶ ضلعی منتظم، مثلث قائم‌الزاویه درست می‌شود که ۲ تا از آن‌ها مجاور هم و دیگر غیرمجاور باشد.

حواستان باشد که برای هر ضلع، دو رأس غیرمجاور وجود دارد. مثلاً اگر رأس‌های مجاورمان A و B بشند، D و E را می‌شود به عنوان رأس غیرمجاور انتخاب کرد، پس تعداد حالت‌های مطلوب $۶ \times ۲ = ۱۲$ است:

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}} = \frac{۱۲}{\binom{۶}{۳}} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$$

۱۸۹- گزینه۳ در سؤال قبل فهمیدیم که کلاً ۲۰ انتخاب داریم که ۱۲تا از آن‌ها مثلث قائم‌الزاویهٔ غیر متساوی‌الساقین می‌سازد. حالا می‌خواهیم بگوییم که تمام ۸ حالت دیگر متساوی‌الساقین‌اند. ۲ حالت متساوی‌الاضلاع را در شکل مقابل می‌بینید.



۶ حالت دیگر متساوی‌الساقین، غیر متساوی‌الاضلاع‌اند. (۲تا را کشیدیم.)؛ در واقع هر رأس و دو رأس مجاورش تشکیل چنین مثلثی را می‌دهند. پس حالت‌های این سؤال متمم سؤال قبل است:

$$\text{احتمال مثلث متساوی‌الساقین داشتن} = \frac{۸}{۲۰} = \frac{۲}{۵}$$

۱۹۰- گزینه۴ قرار است انتخاب اول را به A و انتخاب دوم را به B وصل کنیم. اگر انتخاب اول H باشد، به‌هیچ‌وجه شکل به ۳ ناحیه تقسیم نمی‌شود. اگر انتخاب اول G باشد، انتخاب دوم می‌تواند ۴ حالت داشته باشد (D، E، F، G).

اگر انتخاب اول F باشد، دومی ۳ حالت دارد. (F، E، D) و اگر اولی E یا D باشد، دومی به ترتیب ۲ یا ۱ حالت مطلوب دارد:

تعداد حالات مطلوب $= ۴+۳+۲+۱=۱۰$

می‌دانیم که تعداد کل حالات $۶\times۶=۳۶$ است، یعنی جواب می‌شود $\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$.

۱۹۱- گزینه ۲ فرض کنید در خانهٔ مشخص‌شده، حرف a نوشته شده است. جدول را به دو حالت می‌شود پر کرد:

a	c	b
b	a	c
c	b	a

a	c	b
b	a	c
c	b	a

اگر خانه‌های مشخص‌شده b یا c باشد، ۴ حالت دیگر هم داریم، یعنی تعداد کل حالت‌های مطلوب می‌شود ۶تا.

حالا برویم سراغ تعداد کل حالت‌ها:

سطر اول را به ۶ حالت می‌توان پر کرد: $(۳\times۲\times۱=۶)$. در هر حالتی خانه‌های دیگر را به دو حالت می‌توان پر کرد:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌های کل $=۶\times۲=۱۲$

آفیش! احتمال این تست هم به دست آمد: $\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$

۱۹۲- گزینه ۴ اول تعداد کل حالت‌ها را حساب می‌کنیم. هر خانه مستقل از خانه‌های دیگر می‌تواند صفر یا یک باشد. پس هر خانه دو حالت دارد. تعداد کل حالت‌هایی که می‌شود جدول را پر کرد برابر $۲^{۱۶}$ است.

۲	۲	۲	۱
۲	۲	۲	۱
۲	۲	۲	۱
۱	۱	۱	۱

حالا تعداد حالت‌هایی را می‌شماریم که مجموع هر سطر و ستون زوج باشد. هر کدام از خانه‌های جدول رنگی، مستقل از بقیه دو حالت دارد. ولی خانه‌های کناری یک حالت دارند. اگر مجموع سه‌تا خانهٔ قبلی هم‌سطر آن‌ها زوج باشد، خانهٔ آخر باید صفر باشد (۱ حالت) و اگر مجموع آن‌ها فرد باشد، خانهٔ آخر باید ۱ باشد (۱ حالت). پس تعداد حالت‌های مطلوب می‌شود $۲^{۹}$.

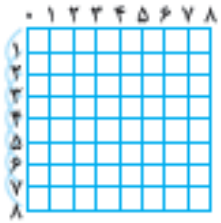
سفت بود! تموم شد دیگه: $\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}=\frac{۲^{۹}}{۲^{۱۶}}=\frac{۱}{۲^{۷}}=\frac{۱}{۱۲۸}$

۱۹۳- گزینه ۳ برای قراردادن مهرهٔ اول، ۶۴ حالت داریم، برای مهرهٔ دوم ۶۳ حالت؛ پس تعداد کل حالت‌های قراردادن این دو مهره می‌شود ۶۴×۶۳.

برویم سراغ حالت‌های مطلوب: گفتیم مهرهٔ اول را به ۶۴ حالت می‌توان در صفحه قرار داد. حالا اگر بخواهیم مهره‌ها، همدیگر را تهدید کنند، دومی باید هم‌سطح یا هم‌ستون مهرهٔ اول باشد، پس مهرهٔ دوم ۱۴ انتخاب دارد: $\frac{۶۴\times۱۴}{۶۴\times۶۳}=\frac{۱۴}{۶۳}=\frac{۲}{۹}$

۱۹۴- گزینه ۴ اسب‌ها فقط در صورتی همدیگر را تهدید می‌کنند که در دو گوشهٔ یک مستطیل ۲×۳ (یا ۳×۲) باشند:

در واقع در هر مستطیل این‌جوری، این دو اسب به ۴ حالت می‌توانند همدیگر را تهدید کنند. حالا باید ببینیم چندتا از این مستطیل‌ها در صفحهٔ شطرنج وجود دارد.



می‌خواهیم تعداد مستطیل‌های افقی ۲×۳ را بشماریم. برای این کار ۲تا خط افقی با فاصلهٔ ۲ واحد داشته باشیم و ۲تا خط عمودی با فاصلهٔ ۳ واحد:

تعداد مستطیل‌های افقی ۲×۳ $=۶\times۷=۴۲$ $\xrightarrow[\text{(به ۷ حالت می‌شود ۲تا خط افقی را انتخاب کرد.)}]{\text{(به ۶ حالت می‌شود ۲تا خط عمودی را انتخاب کرد.)}}$

۴۲تا هم مستطیل عمودی ۳×۲ داریم. پس تعداد مستطیل‌های مطلوب ۴۲×۲ و تعداد حالت‌هایی که اسب‌ها همدیگر را تهدید می‌کنند، $۴۲\times۲\times۴$ است. تعداد حالت‌های کل با مسئلهٔ قبلی فرقی ندارد: $\frac{۴۲\times۲\times۴}{۶۴\times۶۳}=\frac{۱}{۱۲}$

۱۹۵- گزینه ۲ تعداد کل حالت‌ها $(۵+۳)!=۸!$ است. برای شمردن تعداد حالت‌های مطلوب، اول می‌گوییم که به $۵!$ حالت می‌شود گوی‌های سیاه را چید. با چیدن آن‌ها، ۶ جا برای قرارگرفتن گوی‌های سفید به‌وجود می‌آید.

۱ ○ ۲ ○ ۳ ○ ۴ ○ ۵ ○ ۶

حالا گوی سفید اول ۶ انتخاب دارد. دومی ۵ انتخاب (سفیدها نباید کنار هم باشند.) و سومی ۴ انتخاب. خلاصه این‌که تعداد حالت‌های مطلوب می‌شود $۵!\times۶\times۵\times۴$. الان فقط محاسبهٔ کسر مانده است:

$$\frac{۵!\times۶\times۵\times۴}{۸!}=\frac{۶\times۵\times۴}{۸\times۷\times۶}=\frac{۵}{۱۴}$$

۱۹۶- گزینه ۲ در واقع می‌خواهیم ببینیم مجموعهٔ $\{A,B,M,N,P\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد. از آن‌جا که تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی و ۲ عضوی یک مجموعهٔ ۵ عضوی برابرند، جواب برابر می‌شود با:

$$\text{تعداد کل حالات}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

همهٔ این ۳تایی‌ها قبول‌اند به‌جز $\{M,N,P\}$، پس احتمال موردنظر $\frac{۹}{۱۰}$ است.

۱۹۷- گزینه ۲ تمام حالت‌هایی که مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ می‌شود را می‌نویسیم:

$$۱+۲=۳,۱+۵=۶,۲+۴=۶,۳+۶=۹,۴+۵=۹$$

تعداد حالت‌های کل هم می‌شود تعداد حالت انتخاب ۲ مهره از ۶ مهره:

$$\text{تعداد حالت‌های کل}=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

پس احتمال موردنظر می‌شود $\frac{۵}{۱۵}$.

۱۹۸- گزینه ۱ تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعهٔ ۶ عضوی برابر $\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\,۳!}=۲۰$ است. با ۳ عددی می‌شود مثلث ساخت که مجموع دو عدد کوچک‌تر، بزرگ‌تر از عدد بزرگ‌تر باشد:

$$A=\{(۴,۶,۸),(۶,۸,۱۰),(۶,۸,۱۲),(۸,۱۰,۱۲)\}$$

پس جواب $\frac{۴}{۲۰}=\frac{۱}{۵}$ است.

۱۹۹- گزینه ۱ ۹تا کارت داریم که اعدادشان نه مضرب ۲اند و نه مضرب ۳: $\{۱,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۵\}$

تعداد حالت‌های مطلوب می‌شود انتخاب ۲ کارت از این ۹ کارت و تعداد حالت‌های کل می‌شود انتخاب ۲ از ۲۵:

$$\frac{\binom{۹}{۲}}{\binom{۲۵}{۲}}=\frac{\frac{۹\times۸}{۲}}{\frac{۲۵\times۲۴}{۲}}=\frac{۳\times۴}{۲۵\times۴}=۰/۱۲$$

۲۰۰- گزینه ۴ تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مطلوب باید از اعداد $\{۱,۴,۶,۸,۹,۱۰\}$ درست شود، پس $\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\,۳!}=۲۰$ حالت مطلوب داریم.

تعداد کل زیرمجموعه‌های فردعضوی هم می‌شود نصف کل زیرمجموعه‌ها:

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}=\frac{۲۰}{۲^{۱۰}\div۲}=\frac{۲۰}{۲^{۹}}=\frac{۵}{۲^{۷}}=\frac{۵}{۱۲۸}$$

۲۰۱- گزینه ۳ اول تعداد کل زیرمجموعه‌های ۵ عضوی $\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ را حساب می‌کنیم:

$$\binom{۱۰}{۵}=\frac{۱۰!}{۵!\,۵!}=۶\times۷\times۶$$

برویم سراغ حالت‌های مطلوب: ۷ عضو زیرمجموعه است. از ۸، ۹ و ۱۰ هم فقط یکی باید باشد. پس ۳ حالت برای انتخاب عضو دوم داریم. در انتها مجبوریم از $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، ۳ عضو دیگر انتخاب کنیم که تعداد حالت‌های آن $\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\,۳!}=۲۰$ تا است:

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}=\frac{۳\times۲۰}{۶\times۷\times۶}=\frac{۵}{۲۱}$$

۲۰۲- گزینه ۳ تعداد حالت‌های کل ممکن برابر است با انتخاب ۳ گوی از ۷تا:

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\,۴!}=\frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲}=۳۵$$

تعداد حالت‌های مطلوب یعنی حالاتی که یک گوی (از ۳تا گوی) آبی انتخاب شود و دو گوی (از ۴تا گوی) قرمز نیز انتخاب شوند. برای انتخاب آبی‌ها $\binom{۳}{۱}=۳$ حالت و برای انتخاب قرمزها $\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$ حالت وجود دارد:

$$\frac{۳\times۶}{۳۵}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

۲۰۳- گزینه ۱ حداکثر دو مهرهٔ سفید، یعنی یا سفید نداریم یا یک سفید و یا دو سفید داریم، پس تمام حالت‌ها را می‌خواهیم جز آن‌که هر سه مهره سفید باشد:

$$1-P(\text{هر سه سفید باشد})=1-\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=1-\frac{4}{3\times4\times7}=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$

۲۰۴- گزینه ۱ حالت مطلوب یکی است. برای شمارش کل حالت‌ها دو روش را می‌گوییم:

روش اول: $\binom{5}{4}=5$ = تعداد ۵تایی‌هایی که یک a دارند. ۱= تعداد ۵تایی‌هایی که a ندارند.

۳۲ = تعداد حالت‌های کل $\Rightarrow$ $\binom{5}{3}=10$ = تعداد ۵تایی‌هایی که دوتا a دارند.

$\binom{5}{1}=5$ = تعداد ۵تایی‌هایی که چهارتا a دارند. $\binom{5}{2}=10$ = تعداد ۵تایی‌هایی که سه‌تا a دارند.

۱= تعداد ۵تایی‌هایی که پنج‌تا a دارند.

روش دوم: مجموعهٔ $\{b,c,d,e,f\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه $2^5=32$ تا زیرمجموعه دارد. به هر زیرمجموعه‌اش آن‌قدر a اضافه می‌کنیم تا تعداد اعضای آن ۵تا شود. در این صورت تمام حالت‌ها را حساب کرده‌ایم. به طور مثال: $\{\}\xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود}}\{a,a,a,a,a\}$

$\{b,d\}\Rightarrow\{a,a,a,b,d\}$ $\qquad$ $\{b,c,d,e,f\}\Rightarrow\{b,c,d,e,f\}$

۲۰۵- گزینه ۳ تعداد کل حالت که می‌شود $6^3=216$تا. برای شمردن حالت‌های مطلوب این طور می‌گوییم: «از بین اعداد $\{1,2,3,4,5,6\}$ به $\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\,3!}=20$ حالت می‌شود ۳تا را انتخاب کرد. در هر ۳تایی که انتخاب شود، عدد کوچک‌تر را به عنوان پرتاب اول، عدد متوسط را برای پرتاب دوم و عدد بزرگ‌تر را برای پرتاب سوم در نظر می‌گیریم.

پس تعداد حالت‌های مطلوب همان $\binom{6}{3}$ است: $\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$

۲۰۶- گزینه ۳ اگر A را پیشامد زوج‌آمدن تاس آبی و B را پیشامد آمدن تاس قرمز تعریف کنیم، باید $P(A\cup B)$ را حساب کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}-\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{6}-\frac{3}{36}=\frac{24-3}{36}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

۲۰۷- گزینه ۲ می‌دانیم $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. پس:

$$2+P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\underbrace{(P(A)+1)(P(B)+1)}_{\text{ضرب می‌کنیم}}=P(A)+P(B)+P(A)P(B)+1$$

بعد از ساده‌کردن سمت راست و سمت چپ تساوی ۳تایی بالا، نتیجه می‌گیریم که: $2-P(A\cap B)=P(A)P(B)+1$

چون A و B مستقل‌اند، می‌توانیم بنویسیم $P(A)P(B)=P(A\cap B)$:

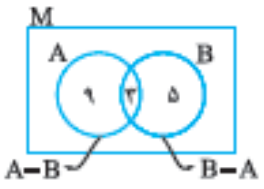
$$2-P(A\cap B)=P(A\cap B)+1\Rightarrow 2P(A\cap B)=1\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}$$

۲۰۸- گزینه ۲

$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=12-9=3$$

$$n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)\Rightarrow n(B-A)=8-3=5$$

الان با توجه به $P(B-A)=\frac{n(B-A)}{n(s)}=\frac{1}{4}$ معلوم می‌شود که $n(s)=20$. حالا می‌رویم سراغ اصل مطلب:



$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$$

با توجه به نمودار ون، معلوم شده است که $n(A\cup B)=17$، پس: $P(A'\cap B')=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}=15\%$

۲۰۹- گزینه ۱ **روش اول:** چه سکه‌ها با هم پرتاب شوند و چه با فاصلهٔ زمانی، فضای نمونه $۲\times۲\times۲=۸$ حالت دارد. از طرفی تعداد حالت‌های مطلوب ۲تا عضو دارد (همه رو بیایند یا همه پشت)، پس احتمال می‌شود $\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$.

روش دوم: احتمال این‌که هر کدام رو بیایند می‌شود $\frac{۱}{۲}$. حالا احتمال این‌که هر سه رو بیایند می‌شود $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$. پیشامدهای مستقل را یادتان هست:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

همین‌طور $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ احتمال دارد که هر سه «پشت» بیایند، پس احتمال یکسان‌بودن هر سه، برابر $۲\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$ است.

۲۱۰- گزینه ۴ حداقل یک سکه «رو» بیاید، یعنی یکی یا دوتا یا سه‌تا یا چهارتاشان «رو» بیاید.

در نتیجه ما همهٔ حالت‌ها را می‌خواهیم جز آن‌که هیچ سکه‌ای «رو» نیاید: $P(\text{حداقل یکی «رو» بیاید})=۱-P(\text{هیچ سکه‌ای «رو» نیاید})$

احتمال این‌که هر چهارتا سکه «پشت» بیاید، می‌شود: $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$

پس جواب مسئله $۱-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$ است.

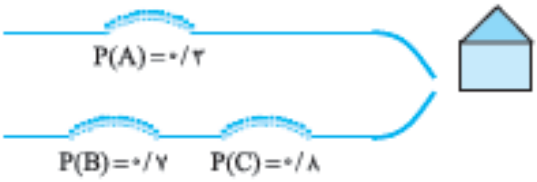
۲۱۱- گزینه ۴ احتمال این‌که یک سؤال دوگزینه‌ای را به صورت شانسی درست بزنیم می‌شود $\frac{۱}{۲}$. احتمال این‌که دومی را هم درست بزنیم می‌شود $\frac{۱}{۲}$ از $\frac{۱}{۲}$ یعنی $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$. به همین ترتیب احتمال این‌که ۵تا سؤال را درست بزنیم می‌شود $(\frac{۱}{۲})^۵$.

احتمال این‌که ۵ سؤال چهارگزینه‌ای را به صورت شانسی درست بزنیم برابر است با: $\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=(\frac{۱}{۴})^۵$

حالا نسبت را حساب می‌کنیم:

$$\frac{(\frac{۱}{۲})^۵}{(\frac{۱}{۴})^۵}=۲^۵=۳۲$$

۲۱۲- گزینه ۳ احتمال این‌که مسیر بالایی قابل عبور باشد، برابر $P(A)=۰/۳$ است. برای این‌که مسیر پایینی قابل عبور باشد، باید هم B رخ بدهد و هم C.



$$\text{احتمال این‌که مسیر پایینی قابل عبور باشد}=P(\underbrace{B\cap C}_{D})\xrightarrow{\text{مستقل}}P(B).P(C)=۰/۵۶$$

حالا باید ببینیم که چه‌قدر احتمال دارد حداقل یکی از مسیرها قابل عبور باشد:

$$P(A\cup D)=P(A)+P(D)-P(\underbrace{A\cap D}_{\text{A و D مستقل‌اند}})=P(A)+P(D)-P(A)P(D)$$

$$=۰/۳+۰/۵۶-۰/۳\times۰/۵۶=۰/۸۶-۰/۱۶۸=۰/۶۹۲$$

۲۱۳- گزینه ۴ می‌خواهیم احتمال این‌که این مهره‌ها هم‌رنگ شوند را حساب کنیم و از رابطهٔ زیر، احتمال خواسته‌شده را دربیاوریم:

$$P(\text{هم‌رنگ})+P(\text{غیرهم‌رنگ})=۱\Rightarrow P(\text{غیرهم‌رنگ})=۱-P(\text{هم‌رنگ})$$

اگر مهره‌ها بخواهند هم‌رنگ باشند، یا هر دو باید سفید باشند یا هر دو سبز:

احتمال این‌که هر دو مهره سفید باشند = احتمال این‌که اولی سفید باشد × احتمال این‌که دومی سفید باشد

$$=\frac{۴}{۴+۵+۱}\times\frac{۶}{۶+۲}=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۱۰}$$

احتمال این‌که هر دو مهره سبز باشند = احتمال این‌که اولی سبز باشد × احتمال این‌که دومی سبز باشد

$$=\frac{۱}{۴+۵+۱}\times\frac{۲}{۶+۲}=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴۰}$$

پس احتمال هم‌رنگ‌بودن برابر $\frac{۳}{۱۰}+\frac{۱}{۴۰}=\frac{۱۳}{۴۰}$ و احتمال غیرهم‌رنگ‌بودن برابر $۱-\frac{۱۳}{۴۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$ است.

۲۱۴- گزینه ۴ اول بگوییم که برداشت‌ها مستقل از هم‌اند، یعنی نتیجهٔ ظرف A و تأثیری روی احتمال نتیجهٔ ظرف B ندارد. پس:

(A): ۵ سفید، ۴ سیاه — (B): ۴ سفید، ۳ سیاه

$$P(\text{از A سفید و از B سیاه بیاید}) = P(\text{از A سفید بیاید}) \times P(\text{از B سیاه بیاید}) = \frac{۵}{۹} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۵}{۲۱}$$

۲۱۵- گزینه ۴ برداشت از جعبه‌ها کاملاً مستقل از هم است. پس احتمال این‌که هر دو رخ بدهد برابر است با حاصل‌ضرب احتمال آن‌ها:

(A): ۲ سفید، ۳ سیاه — (B): ۳ سفید، ۴ سیاه

$$P(\underbrace{\text{هر دو سیاه بیاید}}_{D}) = P(\text{از A سیاه بیاید}) \times P(\text{از B سیاه بیاید}) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۱۲}{۳۵}$$

$$P(\underbrace{\text{هر دو سفید بیاید}}_{E}) = P(\text{از A سفید بیاید}) \times P(\text{از B سفید بیاید}) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۶}{۳۵}$$

هر دو حالت بالا قابل‌قبول و برای ما مطلوب است. پس آن‌ها را جمع می‌زنیم. در واقع می‌خواهیم $P(D \cup E)$ را حساب کنیم ولی چون D و E هم‌زمان رخ نمی‌دهند (یعنی نمی‌شود که هم هر دوتا مهره سفید باشند و هم دوتا مهره سیاه!)، پس این طوری می‌نویسیم:

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - \underbrace{P(D \cap E)}_{0} = \frac{۱۲}{۳۵} + \frac{۶}{۳۵} = \frac{۱۸}{۳۵}$$

۲۱۶- گزینه ۲ مهرهٔ سفید یا از ظرف دوم برداشته می‌شود و یا از ظرف سوم:

(۱): ۴ سیاه — (۲): ۸ سفید — (۳): ۴ سیاه، ۸ سفید

$$\text{احتمال این‌که مهرهٔ سفید از ظرف دوم بیاید} = \underbrace{\frac{۱}{۳}}_{\text{احتمال این‌که ظرف دوم انتخاب شود.}} \times \underbrace{۱}_{\text{تمام مهره‌های ظرف دوم سفیدند.}} = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{احتمال این‌که مهرهٔ سفید از ظرف سوم دربیاید} = \underbrace{\frac{۱}{۳}}_{\text{احتمال این‌که ظرف سوم انتخاب شود.}} \times \underbrace{\frac{۸}{۸+۴}}_{\text{احتمال این‌که از ظرف سوم، مهرهٔ سفید بیاید.}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۹}$$

پس جواب نهایی برابر $\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۹} = \frac{۵}{۹}$ است.

۲۱۷- گزینه ۴

خشاب هفت‌تیر

روش اول: چون ۳تا از ۷تا جای تیر پر است، احتمال این‌که اولین شلیک خالی باشد، می‌شود $\frac{۴}{۷}$. حالا احتمال این‌که دومین شلیک هم خالی باشد (اولی خالی بوده است) می‌شود $\frac{۳}{۶}$ و احتمال بودن هر دو و زنده‌ماندن فرد برابر $\frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۲}{۷}$ است.

روش دوم: در این خشاب، هفت جای تیر وجود دارد و پس از کشیدن ماشه، دو بار متوالی کشیدن ماشه، دوتا از هفت‌تا جای گلوله که به هم چسبیده‌اند برای شلیک انتخاب می‌شوند. فرض کنید A و B قرار است شلیک شوند، می‌خواهیم ببینیم چه‌قدر احتمال دارد که در آن‌ها گلوله باشد.

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}} = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۷}{۳}} = \frac{\frac{۵!}{۳!\,۲!}}{\frac{۷!}{۳!\,۴!}} = \frac{۱۰}{۳۵} = \frac{۲}{۷}$$

حواستان باشد که تعداد حالت‌های مطلوب یعنی در هیچ‌کدام از A و B گلوله نباشد و هر سه گلوله در پنج جای دیگر باشد.

۲۱۸- گزینه ۴ روش اول: چون دومی اهمیتی ندارد و در هر حالتی برای ما مطلوب است، فکر می‌کنیم که انگار برداشت دوم صورت نگرفته است (سومی می‌شه دومی!):

$$\underbrace{\frac{۵}{۸}}_{\text{اولی سفید}} \times \underbrace{\frac{۳}{۷}}_{\text{دیگری سیاه}} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

روش دوم: دومی چه سیاه باشد و چه سفید فرقی ندارد. پس احتمال هر دو حالت را حساب می‌کنیم و با هم جمع می‌زنیم:

$$\underset{\text{اولی سفید}}{\frac{5}{8}} \times \underset{\text{دومی سفید}}{\frac{4}{7}} \times \underset{\text{سومی سیاه}}{\frac{3}{6}} = \frac{10}{56} \quad , \quad \underset{\text{اولی سفید}}{\frac{5}{8}} \times \underset{\text{دومی سیاه}}{\frac{3}{7}} \times \underset{\text{سومی سیاه}}{\frac{2}{6}} = \frac{5}{56}$$

پس جواب می‌شود $\frac{10+5}{56} = \frac{15}{56}$.

۲۱۹- گزینه ۱ برای این‌که هیچ‌کدام از فردها پشت سر هم بیرون نیایند، باید اولی و سومی و پنجمی فرد باشند و دومی و چهارمی زوج:

$$\underset{\text{احتمال این‌که اولی فرد باشد}}{\frac{3}{5}} \times \underset{\text{احتمال این‌که دومی زوج باشد (با فرض فرد بودن اولی)}}{\frac{2}{4}} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{10}$$

۲۲۰- گزینه ۴ خیلی حواستان باشد که فرقی نمی‌کند گوی‌ها را با هم بیرون بیاورید یا یکی‌یکی. با هر دو روش مسئله را حل می‌کنیم:

روش اول: احتمال این‌که اولین گوی زوج باشد، برابر $\frac{4}{9}$ است. حالا احتمال این‌که دومی هم زوج باشد (با شرط این‌که یکی از کارت‌های زوج حذف شده است) می‌شود $\frac{3}{8}$. پس احتمال این‌که اولی و دومی زوج باشند، می‌شود $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$.

روش دوم: به $\frac{9 \times 8}{2} = 36$ حالت می‌توان ۲ گوی را از ۹تا گوی انتخاب کرد. به $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ حالت می‌شود ۲ عدد زوج از ۴ عدد زوج را انتخاب کرد. پس احتمال موردنظر ما $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$ است.

۲۲۱- گزینه ۴ متمم پیشامد «$\underbrace{\text{حداقل ۲ نفر در یک ماه به دنیا آمده‌اند}}_{A}$» می‌شود «$\underbrace{\text{تمام افراد در ماه‌های متفاوتی به دنیا آمده‌اند}}_{A'}$»، الان می‌خواهیم $P(A')$ را حساب کنیم. نفر اول در هر ماهی که می‌خواهد به دنیا بیاید (خوش آمدا) نفر دوم به احتمال $\frac{11}{12}$ در ماه متفاوتی به دنیا می‌آید. نفر سوم به احتمال $\frac{10}{12}$ با هیچ‌کدام از نفرات اول و دوم هم‌ماه نیست. این احتمال برای برای نفرات چهارم و پنجم به ترتیب برابر $\frac{9}{12}$ و $\frac{8}{12}$ است:

$$P(A') = 1 \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^4} = \frac{12^4 - 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^4} = \frac{144 \times 144 - 110 \times 72}{144 \times 144}$$

$$= \frac{12816}{20736} \simeq \frac{12000}{20000} = 0/6$$

۲۲۲- گزینه ۳ روش اول: اگر هر دو بخواهند سفید باشند، احتمال می‌شود $P_1(A) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$ و اگر هر دو بخواهند سبز باشند، داریم: $P_2(A) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$. پس احتمال برابر می‌شود با $P(A) = P_1(A) + P_2(A) = \frac{3}{7}$.

روش دوم: این طوری هم می‌شود:

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}} = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3+6}{\frac{7 \times 6}{2}} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

۲۲۳- گزینه ۱ بدون جای‌گذاری یعنی مهره‌های برداشته‌شده دیگر به کیسه برنمی‌گردند:

$$\underset{\text{اولی سفید}}{\frac{5}{10}} \times \underset{\text{دومی قرمز}}{\frac{4}{9}} \times \underset{\text{سومی آبی}}{\frac{1}{8}} = \frac{5}{180} = \frac{1}{36}$$

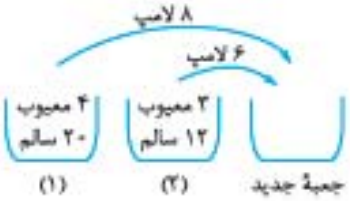
اگر مهره‌ها را جای‌گذاری کنیم، احتمال می‌شود:

$$\frac{5}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{20}{1000} = \frac{1}{50}$$

اختلاف احتمال‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{36} - \frac{1}{50} = \frac{50-36}{36 \times 50} = \frac{14}{36 \times 50} = \frac{7}{900}$$

۲۲۴- گزینه ۲



دو حالت مطلوب داریم:

۱) لامپ انتخابی معیوب، از جعبهٔ (۱) آمده باشد: $\frac{۴}{۴+۲۰}=\frac{۸}{۱۴}\times\frac{۴}{۲۴}=\frac{۲}{۲۱}$ × $\frac{۸}{۸+۶}$

احتمال این‌که لامپ انتخابی از جعبهٔ (۱) معیوب باشد — احتمال این‌که لامپ انتخابی از جعبهٔ (۱) آمده باشد

۲) لامپ انتخابی معیوب، از جعبهٔ (۲) آمده باشد: $\frac{۳}{۳+۱۲}=\frac{۶}{۱۴}\times\frac{۳}{۱۵}=\frac{۳}{۳۵}$ × $\frac{۶}{۸+۶}$

احتمال این‌که لامپ انتخابی از جعبهٔ (۲) معیوب باشد — احتمال این‌که لامپ انتخابی از جعبهٔ (۲) آمده باشد

حالا مانده که جواب نهایی را حساب کنیم: $\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۳۵}=\frac{۲\times۵+۳\times۳}{۳\times۷\times۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$

۲۲۵- گزینه ۴ اول احتمال این‌که عقربه در ناحیهٔ سفید قرار بگیرد را حساب می‌کنیم: $\frac{\text{مقدار زاویهٔ مطلوب}}{\text{مقدار کل زاویه‌ها}}=\frac{۱۵۰}{۳۶۰}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

حالا می‌گوییم $۱-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$ احتمال دارد که سفید نیاید.

۲۲۶- گزینه ۴ طول مار را می‌گیریم x. حالا می‌خواهیم تمایش ریاضی «سه برابر طول آن کوچک‌تر از یکی بیشتر از دو برابر طول آن است.» را بنویسیم:

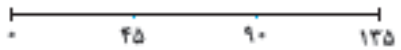
$۳x<۲x+۱ \xrightarrow{\text{طرفین را منهای ۲x می‌کنیم}} x<۱$

پس پیشامد مطلوب ما این است که طول مار بین ۰/۹ تا ۱ باشد: $\frac{\text{طول پیشامد مطلوب}}{\text{طول فضای نمونه}}=\frac{۱-۰/۹}{۱/۲-۰/۹}=\frac{۰/۱}{۰/۳}=\frac{۱}{۳}$

۲۲۷- گزینه ۳ جواب معادلهٔ $۲x-a=۰$ یعنی $x=\frac{a}{۲}$: $\frac{a}{۲}<\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\times۲} a<\frac{۱}{۲}$: جواب معادله کم‌تر از $\frac{۱}{۴}$ باشند.

می‌دانیم که a از بین اعداد ۰ تا ۲ انتخاب می‌شود و می‌خواهیم کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ باشد. پس احتمال موردنظر برابر $\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۱}{۴}$ می‌شود.

۲۲۸- گزینه ۴ معلوم است که چون $\hat{A}=۴۵^\circ$، پس $\hat{B}+\hat{C}=۱۳۵^\circ$. یعنی زاویهٔ B می‌تواند از نزدیکی‌های صفر درجه تا نزدیکی‌های ۱۳۵° تغییر کند:

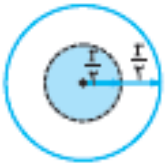


اگر $۹۰^\circ<\hat{B}<۱۳۵^\circ$ باشد، یک زاویهٔ باز داریم و اگر $\hat{B}<۴۵^\circ$ باشد، آن‌وقت $\hat{A}+\hat{B}<۹۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{C}>۹۰^\circ$، یعنی باز هم زاویهٔ باز داریم.

(فقط وقتی $۴۵^\circ<\hat{B}<۹۰^\circ$، آن‌وقت $۴۵^\circ<\hat{C}<۹۰^\circ$ و زاویهٔ باز نداریم.) در این‌جا احتمال را این طور به دست می‌آوریم:

$\text{احتمال موردنظر}=\frac{\text{طول بازهٔ مطلوب}}{\text{طول کل بازه}}=\frac{۴۵+۴۵}{۱۳۵}=\frac{۲}{۳}$

۲۲۹- گزینه ۲ دایره‌ای به شعاع r را ببینید. اگر نقطهٔ انتخاب‌شده، داخل دایره به شعاع $\frac{r}{۲}$ باشد، به مرکز دایره نزدیک‌تر از هر نقطهٔ محیط است. پس پیشامد مطلوب ما سطح رنگی می‌شود:



$\frac{\text{مساحت رنگی}}{\text{مساحت کل}}=\frac{\pi(\frac{r}{۲})^۲}{\pi r^۲}=\frac{\frac{r^۲}{۴}}{r^۲}=\frac{۱}{۴}$

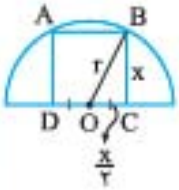
۲۳۰- گزینه ۱ سطح دایره برابر فضای نمونه است که مساحت آن می‌شود $\pi R^۲$. از طرفی، سطح مطلوب ما سطح مربع با مساحت $=\frac{(\text{قطر})^۲}{۲}=\frac{(۲R)^۲}{۲}=۲R^۲$ مساحت مربع است. پس:

$\text{احتمال موردنظر}=\frac{\text{مساحت سطح مطلوب}}{\text{مساحت فضای نمونه}}=\frac{۲R^۲}{\pi R^۲}=\frac{۲}{\pi}$

۲۳۱- گزینه ۱ نقاط ناحیهٔ سفیدرنگ می‌شود اعضای پیشامد A ، پس A' یعنی نقاط رنگ‌شده. حالا می‌رویم تا نسبت مساحت را حساب کنیم:

$$P(A') = \frac{\text{مساحت رنگی}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{۴\times(\frac{\pi\times ۱^۲}{۴})}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

۲۳۲- گزینه ۳ طول ضلع مربع را با x و شعاع دایره را با r نشان می‌دهیم. در این صورت معلوم است که $OC = \frac{x}{۲}$. حالا برای این‌که ارتباطی بین x و r پیدا کنیم در مثلث OCB فیثاغورس می‌نویسیم:

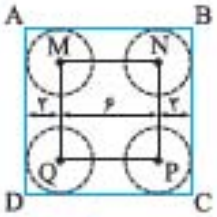


$$r^۲ = x^۲ + (\frac{x}{۲})^۲ = x^۲ + \frac{x^۲}{۴} \Rightarrow r^۲ = \frac{۵x^۲}{۴}$$

الان باید نسبت مساحت‌ها را حساب کنیم:

$$\frac{\text{مساحت مطلوب}}{\text{مساحت کل}} = \frac{x^۲}{\frac{\pi r^۲}{۲}} = \frac{x^۲}{\frac{\pi}{۲}\times\frac{۵x^۲}{۴}} = \frac{۸x^۲}{\pi\times ۵x^۲} = \frac{۸}{۵\pi}$$

۲۳۳- گزینه ۲ مرکز سکه همیشه داخل مربع ABCD است. حالا برای این‌که کل سکه روی این سطح بیفتد، باید مرکز سکه داخل مربع MNPQ باشد.



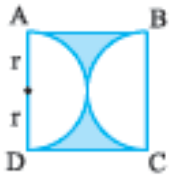
برویم سراغ نسبت مساحت‌ها:

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{۶^۲}{۱۰^۲} = ۰/۳۶$$

۲۳۴- گزینه ۳ اگر هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ‌تر را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنیم و خطوطی موازی اضلاع بکشیم، یک همچین شکلی خواهیم داشت:

۲۵تا مثلث هم‌نهشت داریم که ۲۱تای آن‌ها رنگ شده است، پس احتمال خواسته‌شده می‌شود: $\frac{۲۱}{۲۵} = ۰/۸۴$

۲۳۵- گزینه ۱ در درس هندسهٔ سال قبل یاد گرفتید که اگر M نقطه‌ای روی دایره باشد و روبه‌رو به قطر، آن‌وقت $\hat{M} = ۹۰^\circ$. از طرفی اگر رأس M را از دایره خارج کنیم، زاویه کوچک‌تر و اگر M را بیاوریم به داخل دایره، زاویه بزرگ‌تر می‌شود. پس برای این‌که زاویهٔ حاده داشته باشیم، رأس M باید خارج از دو نیم‌دایره به قطرهای AD و BC باشد:



$$\text{احتمال این‌که هر دو زاویه حاده باشند} = \frac{\text{مساحت رنگی}}{\text{مساحت مربع}}$$

$$= \frac{(۲r)^۲ - ۲\times(\frac{\pi r^۲}{۲})}{(۲r)^۲} = \frac{۴r^۲ - \pi r^۲}{۴r^۲} = ۱ - \frac{\pi}{۴}$$