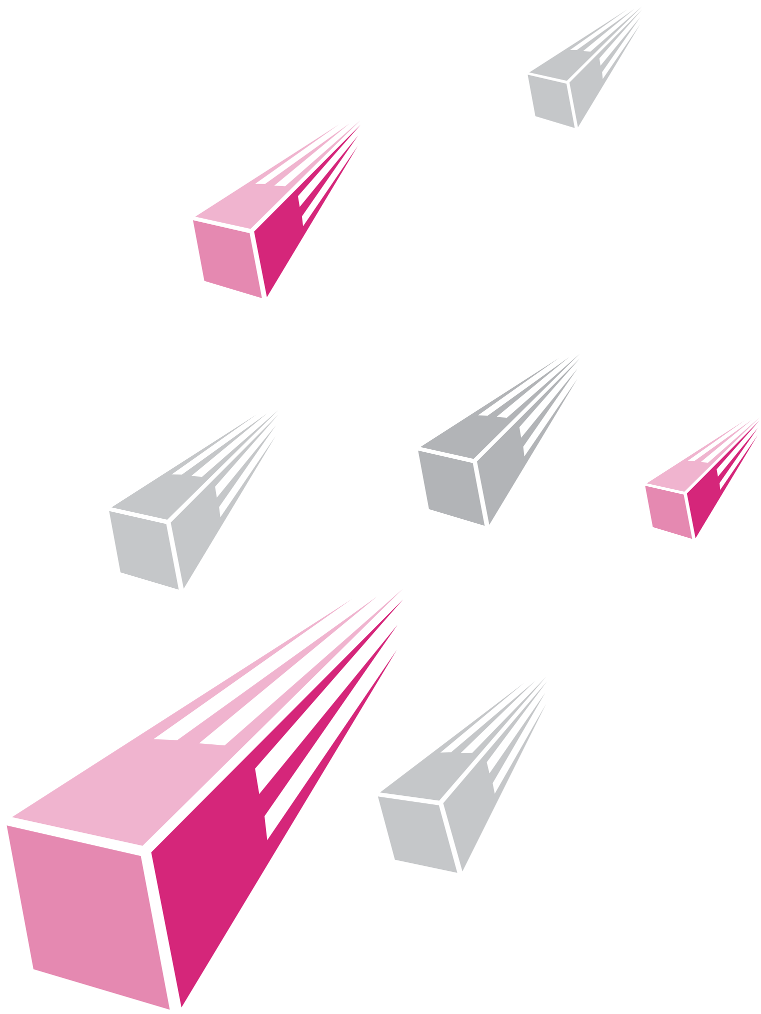


# ریاضی ۱۰ اُم

## شهاب


حمیدرضا بیات

مرتضی خمامی ابدی

کیان کریمی خراسانی

# پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که مجموعه کتاب‌های «شهاب» را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این مجموعه در اصل برای دانش‌آموزان «مدارس استعدادهای درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سایر مدارس کشور و داوطلبان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های «ریاضی ۱۰ اُم شهاب» می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل به همراه پاسخ‌نامهٔ تشریحی؛
- پرسش چهارگزینه‌ای برای هر فصل به همراه پاسخ‌نامهٔ تشریحی؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای به کمی دشوار ( )، دشوار ( ) و دارای نکتهٔ کلیدی ( )؛

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمامی‌ابدی و کیان کریمی‌خراسانی که این کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

هم‌چنین از خانم‌ها آهنگر، نوروزی و مرادی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و خانم سربندی که زحمت ترسیم شکل‌ها را برعهده داشته‌اند، سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

پست الکترونیک برای آگاهی از نقطه نظرها و پیشنهادها: bayat@mobtakeran.com

# فهرست

**عنوان** | **صفحه**

| عنوان | صفحه |
|---|---|

# فصل اول

## مجموعه، الگو و دنباله

## مجموعه‌های اعداد:

$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\ \ldots\}$ :مجموعهٔ اعداد طبیعی

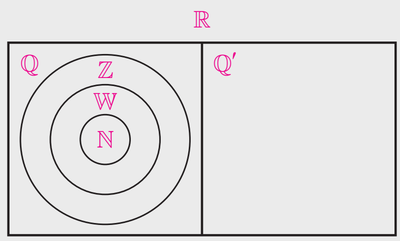
$\mathbb{W}=\{۰\ ,۱\ ,۲\ ,۳\ ,\ldots\}$ :مجموعهٔ اعداد حسابی

$\mathbb{Z}=\{\ldots\ ,-۲\ ,-۱\ ,۰\ ,۱\ ,۲\ ,\ldots\}$ :مجموعهٔ اعداد صحیح

$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\,|\,m\ ,n\in\mathbb{Z}\ ,n\neq۰\}$ :مجموعهٔ اعداد گویا

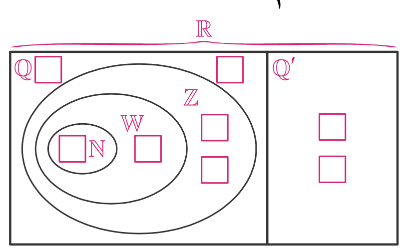
مجموعهٔ اعدادی که نتوان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد $=\mathbb{Q}'$ :مجموعهٔ اعداد گنگ

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$ :مجموعهٔ اعداد حقیقی

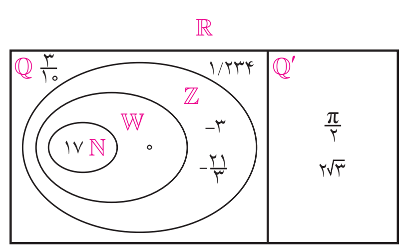



$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$
$$\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$$

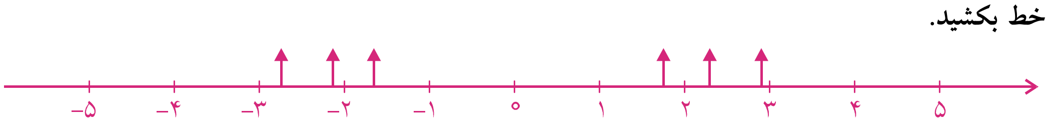
**مثال:** اعداد $\frac{۳}{۱۰}$، $-۳$، $۱/۲۳۴$، $\frac{\pi}{۲}$، ۰، $۲\sqrt{۳}$، ۱۷ و $-\frac{۲۱}{۳}$ را در جاهای خالی نمودار ون زیر قرار دهید.




**پاسخ:**



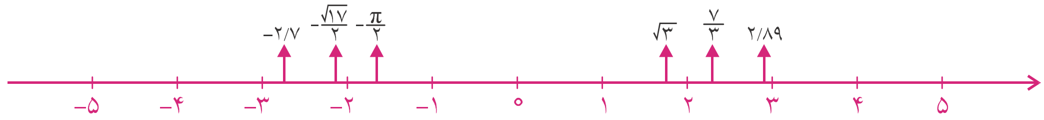

**مثال:** هر یک از اعداد $\sqrt{۳}$، $-۲/۷$، $\frac{۷}{۳}$، $-\frac{\pi}{۲}$، $۲/۸۹$ و $-\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ را در جاهای مشخص شده روی محور بنویسید و دور اعداد گنگ خط بکشید.



**پاسخ:**

$\frac{۷}{۳} \simeq ۲/۳$ $\qquad$ $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$

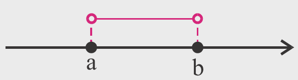
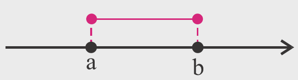
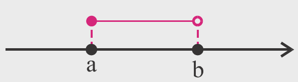
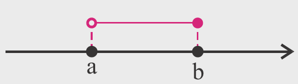
$-\frac{\sqrt{۱۷}}{۲} \simeq -\frac{۴/۱۲}{۲} = -۲/۰۶$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{۲} \simeq -\frac{۳/۱۴}{۲} = -۱/۵۷$




**بازه‌ها**

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که شامل تمام اعداد حقیقیِ بین دو عدد مشخص هستند را بازه یا فاصله می‌نامیم. اگر دو عدد ابتدایی و انتهایی بازه در زیرمجموعه باشند، آن را بازهٔ بسته و اگر نباشند آن را بازهٔ باز بین آن دو عدد می‌نامیم. اگر دقیقاً یکی از آن‌ها در زیرمجموعه باشند، آن را بازهٔ نیم‌باز بین آن دو عدد می‌نامیم.

بازه‌ها را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم: $(a < b)$

| نوع بازه | بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش هندسی |
|---|---|---|---|
| **باز** | $(a,b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |  |
| **بسته** | $[a,b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ |  |
| **نیم‌باز** | $[a,b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le x < b\}$ |  |
| **نیم‌باز** | $(a,b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ |  |

**مثال:** **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**

الف) $\sqrt{۲} \in (۱, \frac{۳}{۲}]$ $\qquad$ ب) $-\pi \in (-\pi, \frac{\pi}{۲})$

ج) $[-\frac{۱}{۲}, ۰) \subseteq (-\frac{۱}{۲}, ۰]$ $\qquad$ د) $[\sqrt{۳}, \pi] \subseteq (۱/۶, \frac{۷}{۲})$

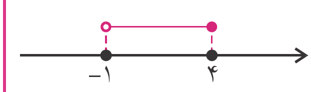
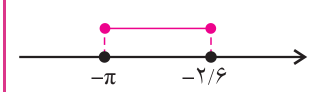
**پاسخ:** الف) $\sqrt{۲}$ تقریباً برابر ۱/۴ است که از ۱ بزرگ‌تر و از ۱/۵ کوچک‌تر است. پس در بازهٔ $(۱, \frac{۳}{۲}]$ قرار دارد و عبارت درست است.

ب) بازهٔ $(-\pi, \frac{\pi}{۲})$ باز است یعنی خود $-\pi$ و $\frac{\pi}{۲}$ در این بازه قرار ندارد. پس عبارت نادرست است.

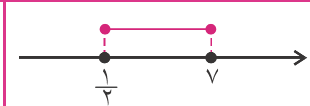
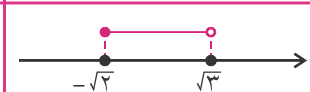
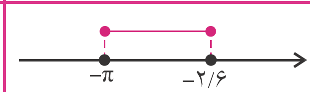
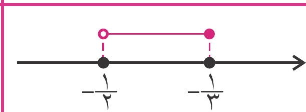
ج) $-\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $[-\frac{۱}{۲}, ۰)$ وجود دارد و در بازهٔ $(-\frac{۱}{۲}, ۰]$ وجود ندارد. پس $[-\frac{۱}{۲}, ۰)$ زیرمجموعه $(-\frac{۱}{۲}, ۰]$ نیست و عبارت نادرست است.

د) $\sqrt{۳}$ تقریباً برابر ۱/۷ است که از ۱/۶ بزرگ‌تر است و $\pi$ تقریباً برابر ۳/۱۴ است که از $\frac{۷}{۲}$ کوچک‌تر است، پس $[\sqrt{۳}, \pi]$ زیرمجموعهٔ $(۱/۶, \frac{۷}{۲})$ است و عبارت درست است.

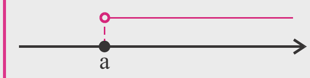
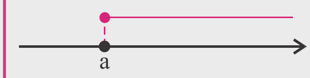
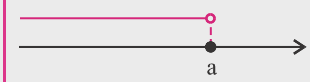
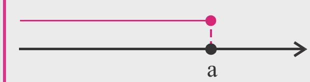
**مثال:** جدول زیر را کامل کنید:

| نمایش هندسی | نمایش مجموعه‌ای | بازه | نوع بازه |
|---|---|---|---|
| | $\{x \in \mathbb{R} \mid ۲ < x < ۵\}$ | | |
|  | | | نیم‌باز |
| | | $[\frac{۱}{۲}, ۷]$ | |
| | $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{۲} \le x < \sqrt{۳}\}$ | | |
|  | | | |
| | | $(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}]$ | |

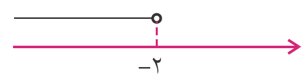
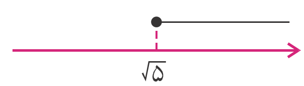
**پاسخ:**

| نمایش هندسی | نمایش مجموعه‌ای | بازه | نوع بازه |
|---|---|---|---|
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid ۲ < x < ۵\}$ | $(۲,۵)$ | باز |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x \le ۴\}$ | $(-۱,۴]$ | نیم‌باز |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{۱}{۲} \le x \le ۷\}$ | $[\frac{۱}{۲}, ۷]$ | بسته |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{۲} \le x < \sqrt{۳}\}$ | $[-\sqrt{۲}, \sqrt{۳})$ | نیم‌باز |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \le x \le -۲/۶\}$ | $[-\pi, -۲/۶]$ | بسته |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{۱}{۲} < x \le -\frac{۱}{۳}\}$ | $(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}]$ | نیم‌باز |

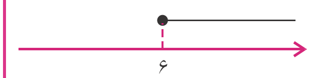
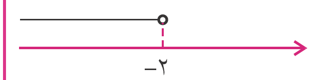
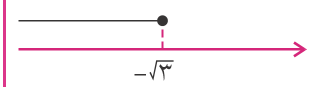
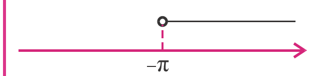
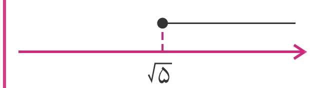
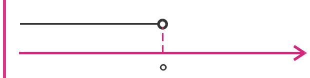
اگر بخواهیم اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک عدد مشخص را نشان دهیم، باید از نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و اگر بخواهیم اعداد حقیقی کوچک‌تر از یک عدد مشخص را نشان دهیم، باید از نماد $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) استفاده کنیم. این گونه از بازه‌ها را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

| نمایش هندسی | نمایش مجموعه‌ای | بازه | نوع بازه |
|---|---|---|---|
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ | $(a, +\infty)$ | باز |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ | $[a, +\infty)$ | نیم‌باز |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ | $(-\infty, a)$ | باز |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ | $(-\infty, a]$ | نیم‌باز |
|  | $\{x \in \mathbb{R}\}$ | $(-\infty, +\infty)$ | باز |

**مثال:** جدول زیر را کامل کنید:

| نمایش هندسی | نمایش مجموعه‌ای | بازه | نوع بازه |
|---|---|---|---|
| | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۶\}$ | | |
|  | | | |
| | | $(-\infty, -\sqrt{۳}]$ | |
| | $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\pi\}$ | | باز |
|  | | | |
| | | $(-\infty, ۰)$ | |

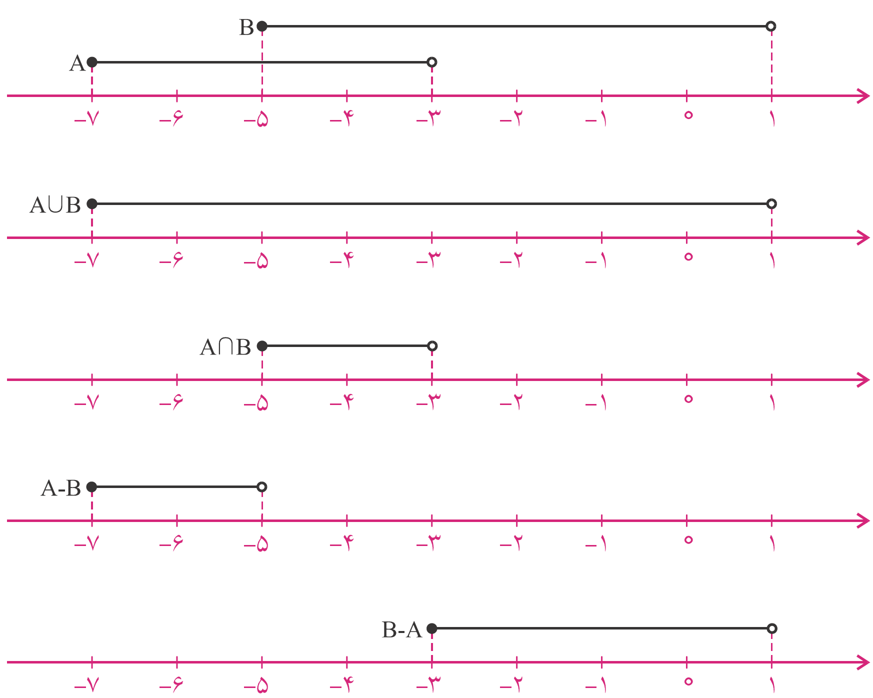
**پاسخ:**

| نمایش هندسی | نمایش مجموعه‌ای | بازه | نوع بازه |
| --- | --- | --- | --- |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۶\}$ | $[۶,+\infty)$ | **نیم‌باز** |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -۲\}$ | $(-\infty,-۲)$ | **باز** |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{۳}\}$ | $(-\infty,-\sqrt{۳}]$ | **نیم‌باز** |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\pi\}$ | $(-\pi,+\infty)$ | **باز** |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{۵}\}$ | $[\sqrt{۵},+\infty)$ | **نیم‌باز** |
|  | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < ۰\}$ | $(-\infty,۰)$ | **باز** |

برای به‌دست آوردن اجتماع، اشتراک و تفاضل دو بازه، ابتدا آن‌ها را روی یک محور اعداد رسم می‌کنیم. سپس با توجه به تعریف اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه بازهٔ حاصل را به‌دست می‌آوریم.

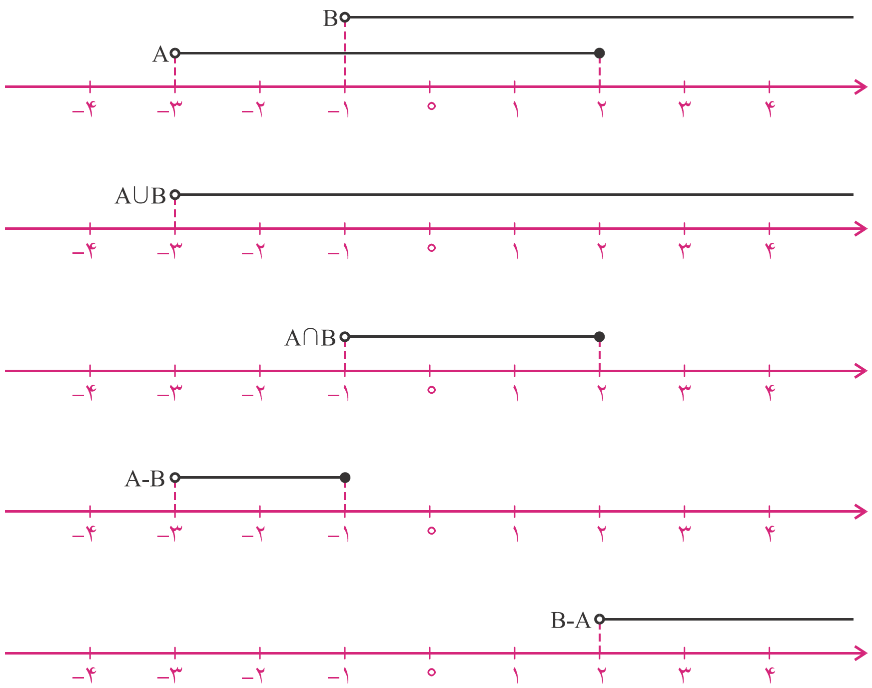
**مثال:** اگر $A=[-۷,-۳)$ و $B=[-۵,۱)$، با استفاده از ترسیم هندسی آن‌ها، بازه‌های $A\cup B$، $A\cap B$، $A-B$ و $B-A$ را تعیین کنید.

**پاسخ:**



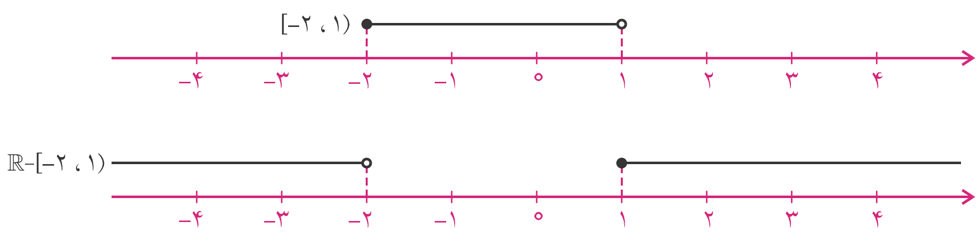
**مثال:** اگر $A=(-۳,۲]$ و $B=(-۱,+\infty)$، با استفاده از ترسیم هندسی آن‌ها، بازه‌های $A\cup B$ ، $A\cap B$، $A-B$ و $B-A$ را تعیین کنید.

**پاسخ:**




**مثال:** مجموعهٔ $\mathbb{R}-[-۲,۱)$ را روی محور اعداد نمایش دهید و آن را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

**پاسخ:** ابتدا نمودار $[-۲,۱)$ را رسم می‌کنیم و سپس از روی آن نمودار $\mathbb{R}-[-۲,۱)$ را رسم می‌کنیم.




با توجه به شکل داریم:

$$\mathbb{R}-[-۲,۱)=(-\infty,-۲)\cup[۱,+\infty)$$

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

به مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها عددی حسابی باشد، مجموعه‌های متناهی گفته می‌شود. به مجموعه‌هایی که متناهی نیستند، نامتناهی گفته می‌شود.

**مثال:** **کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی هستند؟**

**الف) مجموعهٔ اعداد صحیح مضرب ۵**

**ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از $۲^{۲۰}$**

**ج) مجموعهٔ تمام مورچه‌های ساکن کرهٔ زمین**

**د) بازهٔ $[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$**

**ه) $A=\{x\in \mathbb{W} \mid ۴<x<۵\}$**

**و) $B=\{x\in \mathbb{N} \mid \frac{x}{۳}>۱۰۰۰\}$**

**پاسخ:** الف) نامتناهی است.

ب) این مجموعه شامل اعداد ۱ تا $۲^{۲۰}-۱$ است که $۲^{۲۰}-۱$ عضو دارد، پس متناهی است.

ج) تعداد مورچه‌های ساکن کرهٔ زمین بسیار زیادند، اما به هر حال تعدادشان متناهی است.

د) بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد، پس این مجموعه نامتناهی است.

ه) هیچ عدد حسابی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ وجود ندارد. پس این مجموعه عضوی ندارد، پس متناهی است.

و) نمایش عضوی این مجموعه $\{۳۰۰۱, ۳۰۰۲, ۳۰۰۳, ۳۰۰۴, ...\}$ است، پس نامتناهی است.

**مثال:** **آیا ممکن است دو مجموعه نامتناهی باشند، ولی یکی زیرمجموعهٔ دیگری باشد؟**

**پاسخ:** بله، مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی و اعداد صحیح هر دو نامتناهی هستند و اعداد طبیعی زیرمجموعهٔ اعداد صحیح هستند.

**مثال:** **آیا ممکن است یک مجموعهٔ نامتناهی، زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ متناهی باشد؟**

**پاسخ:** خیر، تعداد عضوهای یک مجموعهٔ متناهی را می‌توان با یک عدد حسابی نشان داد، می‌دانیم اگر یک مجموعه زیرمجموعهٔ دیگری باشد، تعداد عضوهایشان نمی‌تواند از آن مجموعه بیش‌تر باشد. امکان ندارد که یک مجموعه نامتناهی باشد و تعداد عضوهایش از یک عدد حسابی بیش‌تر نباشد.

اگر مجموعه‌ای دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه خود مجموعه نیز نامتناهی است.

**مثال:** **اگر $A$ مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۷ باشد،**

**الف) $A$ را با نمایش اعضای آن بنویسید.**

**ب) $A$ را با نماد ریاضی بنویسید.**

**ج) متناهی یا نامتناهی بودن $A$ را مشخص کنید.**

**د) یک مجموعهٔ متناهی به نام $B$ بنویسید، به‌طوری که $B\subseteq A$.**

**ه) یک مجموعهٔ نامتناهی به نام $C$ بنویسید، به طوری که $C\subseteq A$.**

**و) یک مجموعهٔ نامتناهی به نام $D$ بنویسید، به‌طوری که $D\subseteq C$.**

**پاسخ:**

الف) $A=\{۷, ۱۴, ۲۱, ۲۸, ...\}$

ب) $A=\{x \mid \frac{x}{۷}\in \mathbb{N}\}$

ج) $A=\{۷,۱۴,۲۱,۲۸,...\}\Rightarrow$ نامتناهی است

د) $B=\{۷,۱۴\}\Rightarrow B\subseteq A$

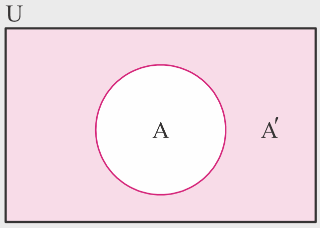
هـ) $C=\{x\mid \frac{x}{۱۴}\in\mathbb{N}\}=\{۱۴,۲۸,۴۲,۵۶,...\}\Rightarrow C\subseteq A$

و) $D=\{x\mid \frac{x-۱۴}{۱۴}\in\mathbb{N}\}=\{۲۸,۴۲,۵۶,۷۰,...\}\Rightarrow D\subseteq C$

## درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه‌ای که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعهٔ آن باشند را مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با $U$ نشان می‌دهیم.

هرگاه $U$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم مجموعهٔ $A$ می‌نامیم و آن را با نماد $A'$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $A'$ مجموعهٔ عضوهایی از $U$ است که در $A$ نیستند.




$$A'=\{x\mid x\in U\,,\,x\notin A\}$$

**مثال:** **اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی را مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶\}$، مجموعه‌های $A'$، $B'$، $(A\cup B)'$، $(A\cap B)'$، $(A-B)'$ و $(B-A)'$ را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.**

**پاسخ:** $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$A=\{۱,۲,۳\}\Rightarrow A'=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$B=\{۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow B'=\{۱,۲,۷,۸,۹\}$

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow (A\cup B)'=\{۷,۸,۹\}$

$A\cap B=\{۳\}\Rightarrow (A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$A-B=\{۱,۲\}\Rightarrow (A-B)'=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$B-A=\{۴,۵,۶\}\Rightarrow (B-A)'=\{۱,۲,۳,۷,۸,۹\}$

**مثال:** **اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ باشد، مجموعه‌های $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -۲\le x<۵\}$ و $A'$ را با نوشتن اعضای آن‌ها را مشخص کنید.**

**پاسخ:** $U=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

$A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$

$A'=\{...,-۵,-۴,-۳,۵,۶,۷,۸,...\}$

**مثال:** اگر $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ مرجع باشد، مجموعهٔ $\mathbb{W}'$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

**پاسخ:**

$$U=\{\dots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$$

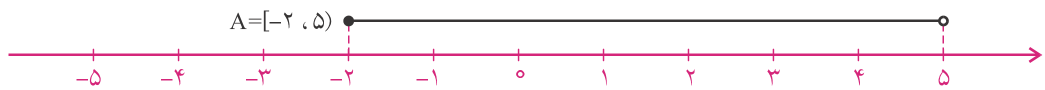
$$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$$

$$\mathbb{W}'=U-\mathbb{W}=\{\dots,-۳,-۲,-۱\}$$

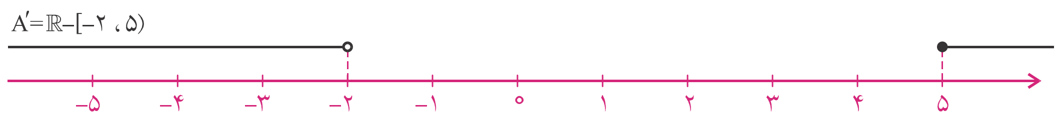
**مثال:** اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ باشد، مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\leq x<۵\}$ را به‌صورت یک بازه بنویسید و اعضای $A'$ را روی محور اعداد نشان دهید.

**پاسخ:**

$$A=[-۲,۵)$$



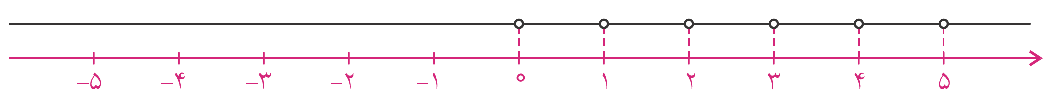

$$A'=\mathbb{R}-[-۲,۵)$$




**مثال:** اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، مجموعهٔ $\mathbb{W}'$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

**پاسخ:**

$$\mathbb{W}'=\mathbb{R}-\mathbb{W}=\mathbb{R}-\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$$



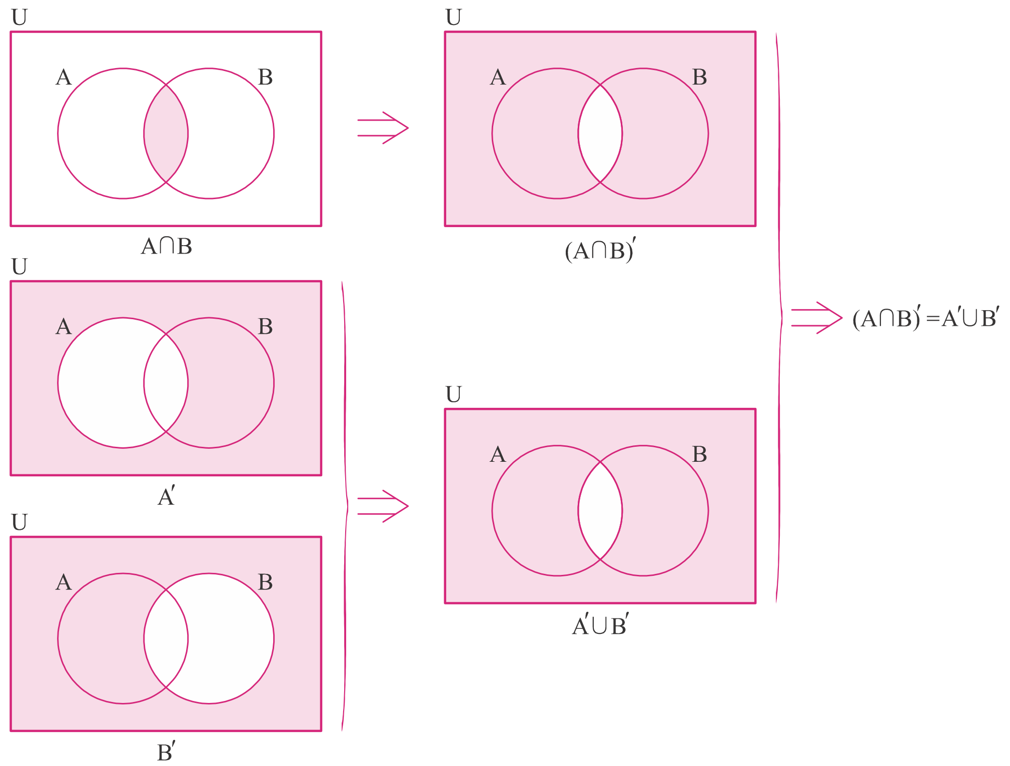

اگر $U$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A$ و $B$ دو مجموعه در $U$ باشند، داریم:

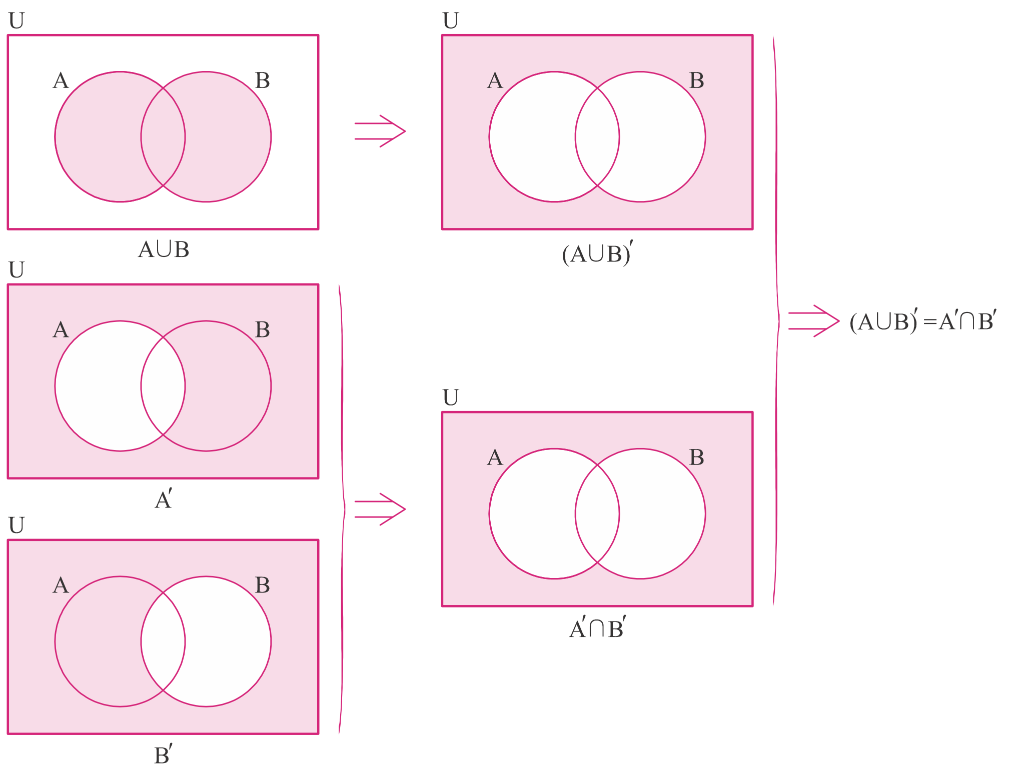
$$\begin{cases}\varnothing'=U\\ U'=\varnothing\end{cases}\qquad (A')'=A$$

$$A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'\qquad \begin{cases}A\cup A'=U\\ A\cap A'=\varnothing\end{cases}$$

$$\begin{cases}A-B=A\cap B'\\ A-B=A-(A\cap B)\end{cases}\qquad \begin{cases}(A\cap B)'=A'\cup B'\\ (A\cup B)'=A'\cap B'\end{cases}$$

**مثال:** با استفاده از رسم نمودار ون، درستی $(A\cap B)'=A'\cup B'$ و $(A\cup B)'=A'\cap B'$ را نشان دهید.




به هر دو مجموعه که عضو مشترک نداشته باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا گفته می‌شود.

اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، داریم:

$$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$$
$$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$$
$$n(A')=n(U)-n(A)$$

**مثال: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۱ نفر عضو تیم فوتبال کلاس و ۱۴ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۴ نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم باشند:**

**الف) چند نفر عضو تیم فوتبال نیستند؟**

**ب) چند نفر فقط عضو تیم بسکتبال هستند؟**

**ج) چند نفر عضو تیم فوتبال یا بسکتبال هستند؟**

**د) چند نفر عضو هیچ‌کدام از دو تیم نیستند؟**

پاسخ:

الف) $n(F')=n(U)-n(F)=۳۰-۱۱=۱۹$

ب) $n(B-F)=n(B)-n(B\bigcap F)=۱۴-۴=۱۰$

ج) $n(F\bigcup B)=n(F)+n(B)-n(F\bigcap B)=۱۱+۱۴-۴=۲۱$

د) $n(F\bigcup B)'=n(U)-n(F\bigcup B)=۳۰-۲۱=۹$

**مثال: اگر U مجموعهٔ مرجع باشد و A و B زیرمجموعه‌های آن باشند، به‌طوری که $n(U)=۱۱۰$، $n(A)=۷۰$، $n(B)=۲۵$ و $n(A\bigcap B)=۱۵$، هر یک از موارد زیر را به‌دست آورید.**

الف) $n(A\bigcup B)$ ب) $n(A\bigcap B')$

ج) $n(A'\bigcap B)$ د) $n(A'\bigcap B')$

پاسخ:

الف) $n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)=۷۰+۲۵-۱۵=۸۰$

ب) $n(A\bigcap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)=۷۰-۱۵=۵۵$

ج) $n(A'\bigcap B)=n(B-A)=n(B)-(A\bigcap B)=۲۵-۱۵=۱۰$

د) $n(A'\bigcap B')=n(A\bigcup B)'=n(U)-n(A\bigcup B)=۱۱۰-۸۰=۳۰$

## درس سوم: الگو و دنباله

ـ تعدادی عدد یا شکل که پشت سر هم قرار می‌گیرند، تشکیل یک الگو می‌دهند.

ـ معمولاً بین عددها یا شکل‌ها یک الگو وجود دارد.

ـ به هر عدد الگو، یک جمله گفته می‌شود.

ـ برای پیدا کردن جملهٔ بعدی (یا جملات بعدی)، باید الگوی بین جمله‌ها را پیدا کرد.

**مثال: عدد بعدی هر کدام از الگوهای زیر را حدس بزنید:**

**الف) $1, 3, 5, 7, 9, ?$**

**ب) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ?$**

**ج) $-1, 2, -3, 4, -5, ?$**

**د) $1, 4, 7, 10, 13, ?$**

**هـ) $1, 4, 9, 16, 25, ?$**

**پاسخ:** الف) هر جملهٔ این الگو ۲ تا بیش‌تر از جملهٔ قبلی است، پس جملهٔ بعدی می‌شود $11 = 2 + 9$.

ب) مخرج کسر هر جمله یکی بیش‌تر از مخرج کسر جملهٔ قبلی است و صورت همهٔ کسرها ۱ است، پس جملهٔ بعدی می‌شود $\frac{1}{7} = \frac{1}{6+1}$.

ج) جملات یکی در میان مثبت و منفی هستند و بدون علامت همان اعداد طبیعی هستند، پس جملهٔ بعدی می‌شود ۶.

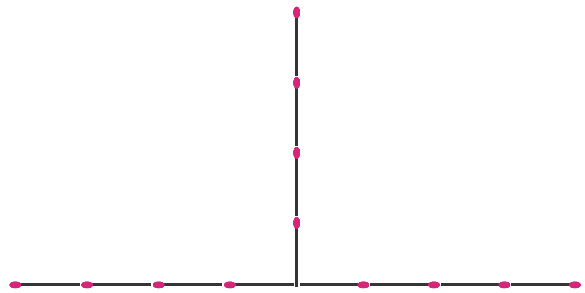
د) هر جملهٔ این الگو ۳ تا بیش‌تر از جملهٔ قبلی است، پس جملهٔ بعدی می‌شود $16 = 3 + 13$.

هـ) هر جملهٔ این الگو مربع شمارهٔ آن جمله است، پس جملهٔ ششم می‌شود $36 = 6^2$.

**مثال: در شکل چهارم چند چوب‌کبریت وجود دارد؟**

شکل اول — شکل دوم — شکل سوم ...

**پاسخ:** شکل چهارم به‌صورت زیر است و ۱۲ چوب‌کبریت دارد.



## جملهٔ عمومی

در الگوی اعداد زیر:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

- $a_1$، $a_2$، $a_3$ و $a_n$ به ترتیب جملات اول، دوم، سوم و $n$ اُم الگو هستند.
- $a_n$ را جملهٔ عمومی الگو می‌گویند.
- با ضابطهٔ $a_n$، ساختار جملات الگو مشخص می‌شود. مثلاً $a_n = 2n^2 + 1$.

**مثال:** **جملهٔ عمومی الگوهای زیر را به‌دست آورید:**

**الف) ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ...**

**ب) ۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰ , ...**

**ج) ۳ , ۵ , ۷ , ۹ , ۱۱ , ...**

**د) ۱ , ۴ , ۹ , ۱۶ , ۲۵ , ...**

**هـ) ۴ , ۹ , ۱۶ , ۲۵ , ۳۶ , ...**

**پاسخ:**

الف) $۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , \dots , a_n , \dots = ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , \dots , n , \dots \Rightarrow a_n = n$

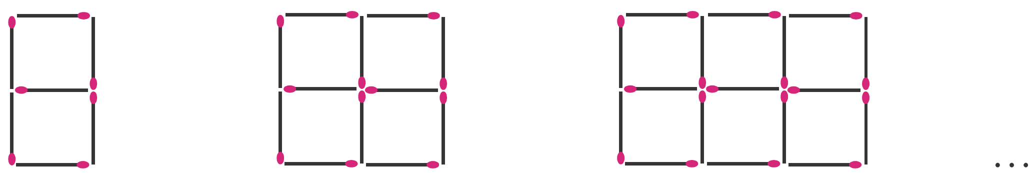
ب) $۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰ , \dots , a_n , \dots = ۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰ , \dots , ۲n , \dots \Rightarrow a_n = ۲n$

ج) $۳ , ۵ , ۷ , ۹ , ۱۱ , \dots , a_n , \dots = ۲+۱ , ۴+۱ , ۶+۱ , ۸+۱ , ۱۰+۱ , \dots , ۲n+۱ , \dots \Rightarrow a_n = ۲n+۱$

د) $۱ , ۴ , ۹ , ۱۶ , ۲۵ , \dots , a_n , \dots = ۱^۲ , ۲^۲ , ۳^۲ , ۴^۲ , ۵^۲ , \dots , n^۲ , \dots \Rightarrow a_n = n^۲$

هـ) $۴ , ۹ , ۱۶ , ۲۵ , ۳۶ , \dots , a_n , \dots = (۱+۱)^۲ , (۲+۱)^۲ , (۳+۱)^۲ , (۴+۱)^۲ , (۵+۱)^۲ , \dots , (n+۱)^۲ , \dots \Rightarrow a_n = (n+۱)^۲$

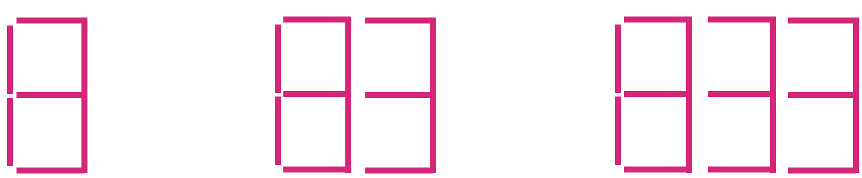
**مثال:** **فرض کنید $a_n$ برابر با تعداد چوب‌کبریت‌های شکل $n$ام در الگوی زیر باشد:**



شکل سوم     شکل دوم     شکل اول

**$a_{۱۰}$ و $a_n$ را به‌دست آورید.**

**پاسخ:** راه حل اول:



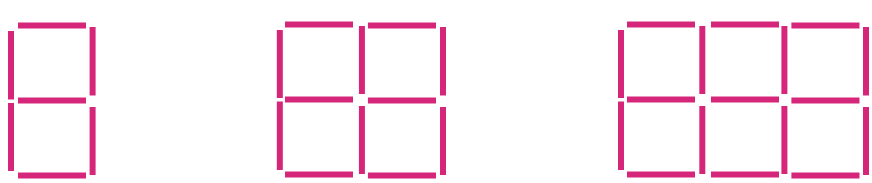
$a_۳ = ۳(۵)+۲$     $a_۲ = ۲(۵)+۲$     $a_۱ = ۱(۵)+۲$

پس:

$$a_{۱۰} = ۱۰(۵)+۲ = ۵۰+۲ = ۵۲$$

$$a_n = ۵(n)+۲ = ۵n+۲$$

راه حل دوم: به‌صورت $\underbrace{۳(\ )}_{\text{افقی‌ها}} + \underbrace{۲(\ )}_{\text{عمودی‌ها}}$ در نظر می‌گیریم:



$a_۳ = ۲(۴)+۳(۳)$     $a_۲ = ۲(۳)+۳(۲)$     $a_۱ = ۲(۲)+۳(۱)$