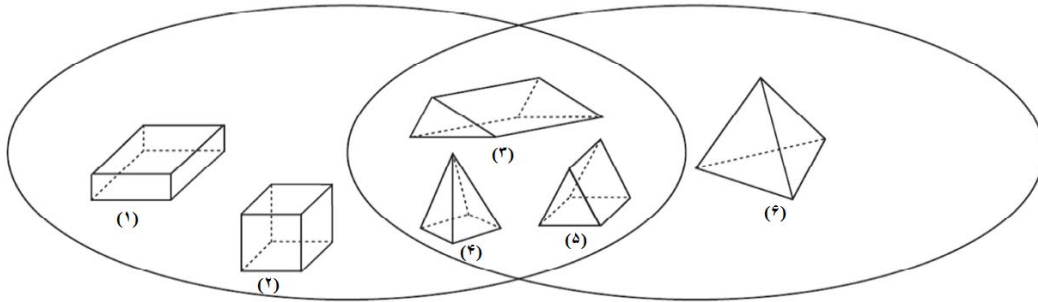


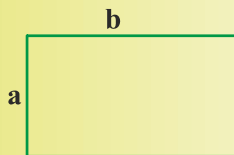
هندسه - هندسه‌ی فضایی



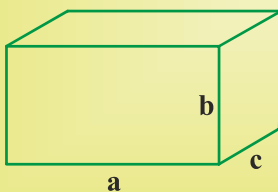
۱- مکعب مستطیل، ۲- مکعب، ۳، ۴، ۵ منشور و ۶- هرم

درسنامه: بخش اول آموزش هندسه‌ی فضایی (۱)

هندسه‌ی فضایی: هندسه‌ای که در آن سه بعد طول، عرض و ارتفاع مورد بررسی قرار می‌گیرد. توانایی هندسه‌ی فضایی یک فرد ذاتی و اکتسابی است. عده‌ای این توانایی را در زندگی روزمره‌ی خود کسب کرده‌اند و عده‌ی دیگری توانایی کم‌تری دارند. پس با انجام تمرین‌های زیر می‌توان این توانایی را در خود تقویت کرد. در این بخش، قسمت اول آموزش هندسه فضایی (۱) را ارائه می‌دهیم. به یاد داشته باشید در قسمت هندسه‌ی فضایی به جای حل چندین تمرین، سعی کنید در ابتدا یک تمرین را چندین بار حل کنید. در ضمن، سعی کنید مسائل و پرسش‌های این بخش را با قدرت ذهنی خود و با تمرین و تکرار زیاد حل کنید. در صورتی که نتوانستید آن‌ها را حل کنید، از مکعب‌های چینه یا حبه‌قند استفاده کنید. در آزمون‌های المپیاد و منابع خارجی از حروف لاتین (a, b, c, ...) در شکل‌ها و حل مسائل استفاده می‌شود. به همین دلیل در این قسمت از حروف لاتین استفاده می‌کنیم. یادگیری استفاده از حروف لاتین (فینگیلیش)



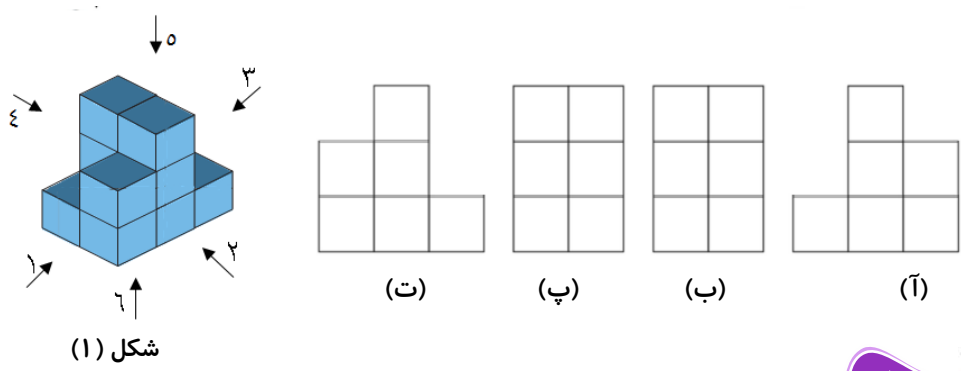
اگر مستطیلی به ابعاد روبه‌رو داشته باشیم، مساحت آن برابر است با:  $a \times b = \text{مساحت}$



اگر مکعب مستطیلی به ابعاد شکل زیر داشته باشیم، حجم آن برابر است با:  $a \times b \times c = \text{حجم}$

## سؤال

۱- با توجه به شکل (۱) هر کدام از شکل‌های (آ)، (ب)، (پ) و (ت) از کدام مسیر دیده می‌شوند؟



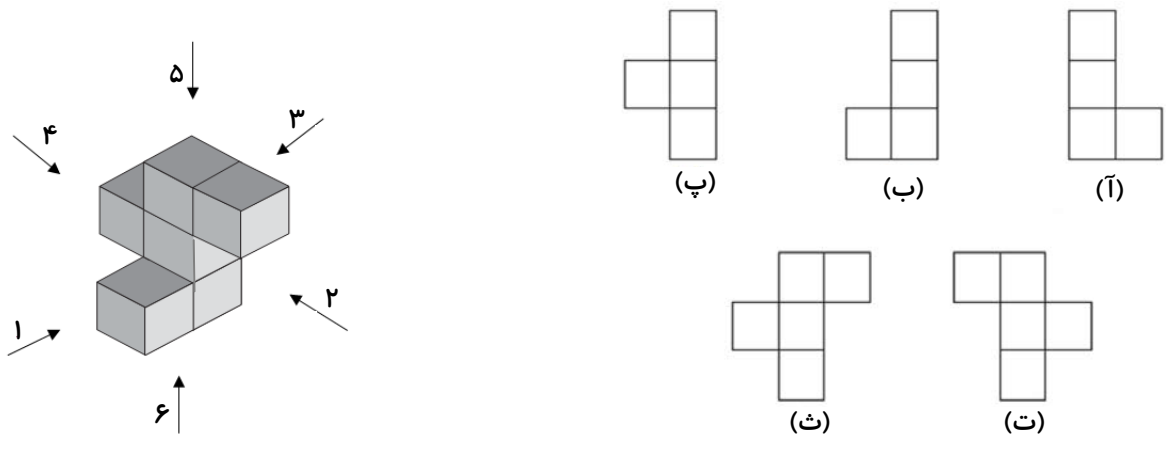
## حل

شکل (ت) از مسیر ۲ دیده می‌شود.  
 (یعنی اگر فردی از مسیر (۲) به این چینه‌ها (ساختمان) نگاه کند، شکل (ت) را خواهد دید. سعی کنید با چینه امتحان کنید.)  
 شکل (ب) و (پ) از مسیرهای ۱، ۳، ۵ و ۶ دیده می‌شود.  
 شکل (آ) از مسیر ۴ دیده می‌شود.  
 مسیر ۵، نما از بالا، مسیر ۶ نما از پایین، مسیرهای ۱، ۲، ۳ و ۴ نما از کنار هستند.  
**نکته** مسیر ۲ و ۴ برعکس هم هستند؛ یعنی وقتی شکل به دست آمده از مسیر ۲، یعنی (ت) را بر روی کاغذ رسم کنیم و کاغذ را بر گردانیم، شکل مسیر ۴، (آ) بدست می‌آید! (و برعکس). امتحان کنید.



## سؤال

۲- هر یک از نمادهای «آ»، «ب»، «پ»، «ت» و «ث» به کدام راستا (مسیر) تعلق دارند؟



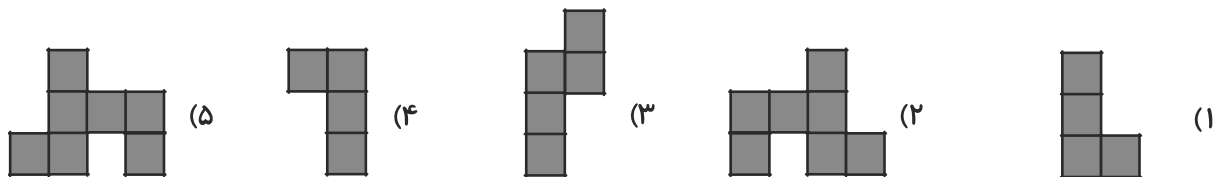
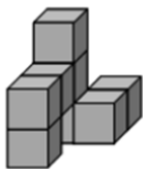
## حل

مسیر (۱): (ث)    مسیر (۲): (ب)    مسیر (۳): (ت)    مسیر (۴): (آ)    مسیر (۵): (پ)    مسیر (۶): (پ)

سؤال



۳- با چسباندن هشت قطعه مکعب هم اندازه، جسم زیر را ساخته ایم. اگر از بالا به این جسم نگاه کنیم، کدام شکل را می بینیم؟



حل



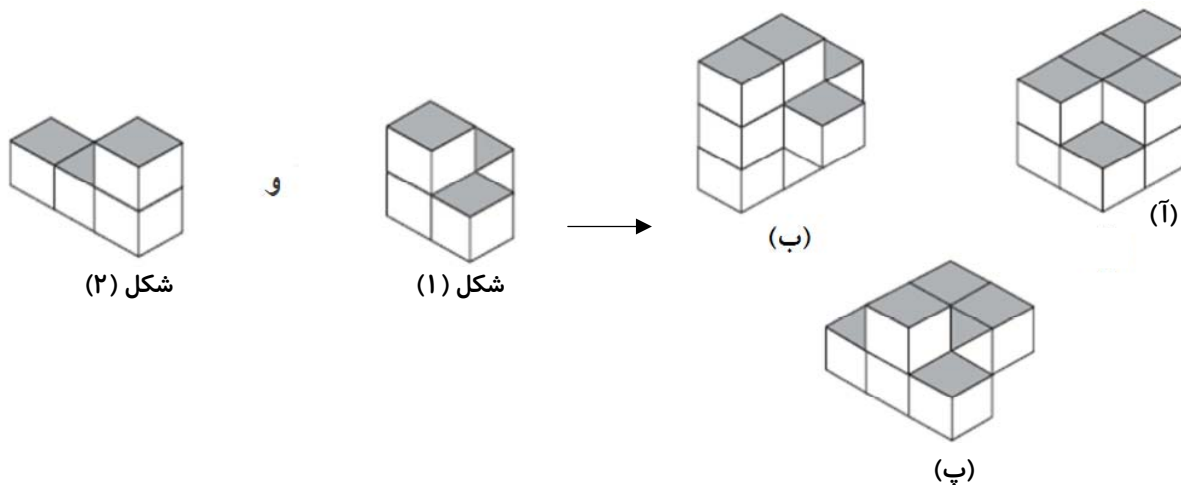
جواب گزینه‌ی (۳) است.



سؤال



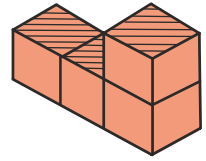
۴- با استفاده از شکل (۱) و (۲)، که چینه‌های به هم چسبیده هستند، شکل‌های (آ)، (ب) و (پ) را بسازید.



حل



مرحله اول: شکل شماره ۲ را رنگ آمیزی می‌کنیم.



مرحله دوم: سپس داخل هر یک از شکل‌های (آ)، (ب) و (پ) قرار می‌دهیم. جواب نهایی به صورت زیر می‌باشد:

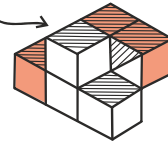


(ب)



(آ)

شماره ۲ پشت  
شکل است



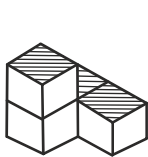
(پ)



سؤال



۵- با استفاده از شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) که چینه‌های به هم چسبیده هستند، شکل‌های (آ) و (ب) را بسازید.



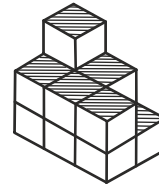
(۱)



(۲)



(۳)



(آ)

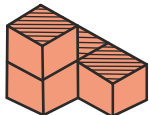


(ب)

حل



مانند مثال قبل شکل‌های ۲ و ۳ را رنگ آمیزی می‌کنیم و آن‌ها را در شکل‌های (آ) و (ب) قرار می‌دهیم.



(۱)



(۲)



(۳)



(آ)



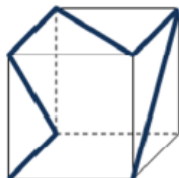
(ب)

سؤال



۶- روبان رنگی نازکی را مطابق شکل زیر، بر روی مکعب پلاستیکی شفاف چسبانده‌ایم. از جهت‌های مختلف به مکعب نگاه می‌کنیم. کدام شکل از هیچ جهتی دیده نمی‌شود؟

(کانگورو-۲۰۱۴)



(۵)



(۴)



(۳)



(۲)

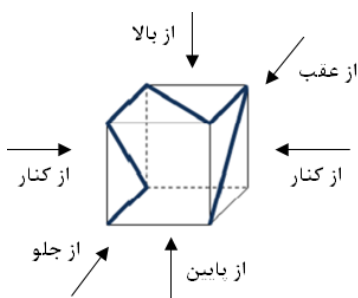


(۱)

حل



سعی کنید با مازیک بر روی یک ظرف شیشه‌ای این خطوط را بکشید. حال نمای هر یک از گزینه‌ها را بیان می‌کنیم.



از جلو  
از عقب



از کنار



از بالا  
از پایین



از بالا  
از پایین

جواب گزینه‌ی «۱» است.



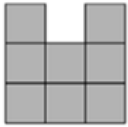
«کانگورو-۲۰۱۴»



(۱)

۷- مکعب  $3 \times 3 \times 3$  مقابل از ۲۷ مکعب ساخته شده است.

چند مکعب کوچک را باید حذف کنیم تا وقتی از بالا، از چپ و از راست به مکعب مقابل نگاه می‌کنیم، شکل مقابل را ببینیم؟



(۲)

۹ (۵)

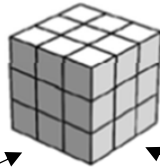
۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

از بالا



از چپ

(۳)

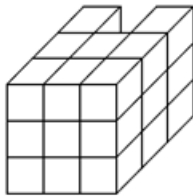
از راست

از بالا، از روبرو و از راست شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. (شکل ۳)

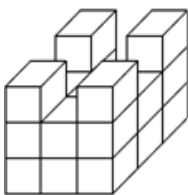


اگر از بالا بخواهیم شکل (۲) را ببینیم باید ۳ مکعب را حذف کنیم.

(شکل ۴) (سه مکعب پشتی حذف شده‌اند).



(۴)



(۵)

اگر بخواهیم از راست و روبرو شکل شماره‌ی (۲) را ببینیم باید ۴ مکعب دیگر را حذف کنیم. (شکل ۵)

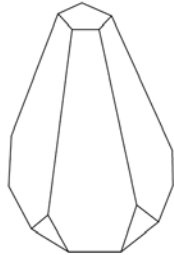
(مانند قلعه‌ای با ۴ برج، قسمت پشتی آن هم خالی است.) پس جواب ۷ مکعب است.

گزینه‌ی «۴» صحیح است.



۸- مطابق شکل تمامی گوشه‌های یک هرم را برش می‌دهیم. حجم حاصل چند وجه (سطح) خواهد داشت؟

«المپیاد مهرورزان مازندران»



۸ (۱)

۹ (۲)

۱۰ (۳)

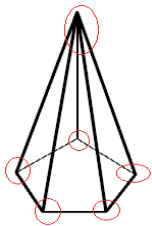
۱۲ (۴)

۱۵ (۵)

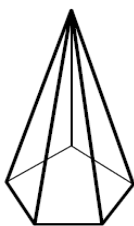
حل



دقت کنید که وجه (سطح) بالایی شکل، پنج‌ضلعی است. یعنی این‌که، هرم ما قاعده‌ی پنج‌ضلعی دارد. حتماً با برش دادن سیب‌زمینی این تمرین را انجام دهید.



وجه  $6 + 6 = 12$



وجه ۶

جواب گزینه‌ی «۴» است.



سؤال

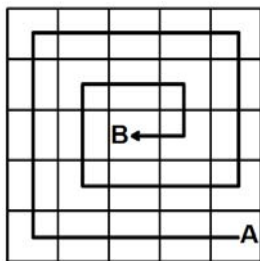


۹- در جدول مقابل می‌خواهیم از مسیر A به B برویم. مکعبی که یک وجه آن رنگی است را روی خانه A قرار می‌دهیم و به

سمت B و در مسیر مشخص شده می‌گلتانیم. به نظر شما چند

درصد از خانه‌های جدول رنگی می‌شود؟ (در ابتدا وجه رنگی رو به بالا قرار دارد).

«المپیاد مهرورزان مازندران»



۲۸٪ (۵)

۲۴٪ (۴)

۲۰٪ (۳)

۱۶٪ (۲)

۱۲٪ (۱)



سعی کنید یک طرف یک پاک‌کن مکعبی شکل را رنگ کنید و این تمرین را انجام دهید.

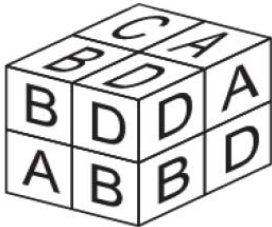
کنار	کنار	پایین	کنار	کنار
کنار	کنار	کنار	کنار	کنار
پایین	پایین	کنار	پایین	پایین
کنار	کنار	کنار	کنار	کنار
بالا	کنار	پایین	کنار	بالا

$$\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 24\%$$

گزینه‌ی «۴» صحیح است.



۱۰- لاین هشت مکعب داشت که روی همه‌ی وجه‌های هر کدام از آن‌ها فقط یکی از حروف A، B، C و D نوشته شده بود. لاین با این مکعب‌ها، مکعب شکل زیر را ساخت، که در آن حروف روی دو مکعب همسایه متفاوت است. چه حرفی روی مکعبی است که در شکل دیده نمی‌شود؟  
(کانگورو-۲۰۱۲)



A(۱)

B(۲)

C(۳)

D(۴)

(۵) نمی‌توان تعیین کرد



مکعبی که دیده نمی‌شود با A و C و D همسایه است. پس جواب مکعب B است، با چینه‌های هم‌رنگ امتحان کنید.  
جواب گزینه‌ی «۲» می‌باشد.





۱۱ - یک مکعب  $4 \times 4 \times 4$  را حداقل با چند برش می توان به ۶۴ مکعب  $1 \times 1 \times 1$  تقسیم کرد، به شرطی که مرتب کردن و جابه جا کردن قطعه ها بعد از هر برشی مجاز باشد؟

۱۱ (۵)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

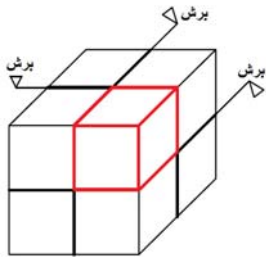
۶ (۲)

۵ (۱)

حل



ابتدا با سه برش مکعب را به ۸ مکعب  $2 \times 2 \times 2$  تقسیم می کنیم. شکل (۱)



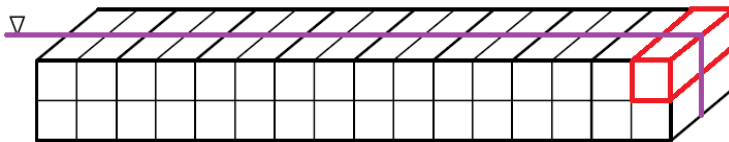
شکل (۱)

اگر این ۸ مکعب را کنار هم قرار دهیم و دو برش دیگر دهیم (برش چهارم و پنجم) آن گاه به ۳۲ مکعب  $1 \times 1 \times 2$  تبدیل می شود. شکل (۲)



شکل (۲)

دوباره این ۳۲ مکعب را به صورت زیر قرار می دهیم. سپس با برش ششم ۶۴ مکعب  $1 \times 1 \times 1$  ایجاد می شود.



جواب گزینه ی «۲» است.

## ◀ خوب است بدانید که:



$$b = 2 \times a$$



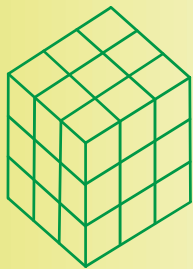
$$a$$

مطابق شکل مقابل ضلع مکعب بزرگ ۲ برابر ضلع مکعب کوچک است. پس  $b = 2 \times a$

$$\text{حجم مکعب بزرگ} = b \times b \times b = (2 \times a) \times (2 \times a) \times (2 \times a) = 8 \times a \times a \times a$$

$$\text{حجم مکعب کوچک} = 2 \times 2 \times 2 \times (\text{حجم مکعب کوچک}) = 8 \times (\text{حجم مکعب کوچک})$$

یعنی حجم مکعب بزرگ ۸ برابر حجم مکعب کوچک است.



$$b = 3 \times a$$

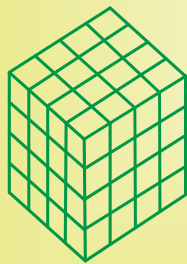


$$a$$

ضلع مکعب بزرگ ۳ برابر ضلع مکعب کوچک است. پس  $b = 3 \times a$

$$\text{حجم مکعب بزرگ} = b \times b \times b = (3 \times a) \times (3 \times a) \times (3 \times a) = 27 \times (\text{حجم مکعب کوچک})$$

یعنی حجم مکعب بزرگ ۲۷ برابر حجم مکعب کوچک است.



$$b = 4 \times a$$



$$a$$

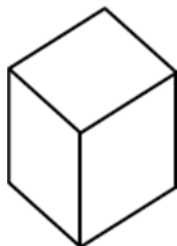
ضلع مکعب بزرگ ۴ برابر ضلع مکعب کوچک است؛ پس  $b = 4 \times a$

$$\text{حجم مکعب بزرگ} = b \times b \times b = (4 \times a) \times (4 \times a) \times (4 \times a) = 64 \times a \times a \times a$$

$$\text{حجم مکعب کوچک} = 4 \times 4 \times 4 \times (\text{حجم مکعب کوچک}) = 64 \times (\text{حجم مکعب کوچک})$$

یعنی حجم مکعب بزرگ ۶۴ برابر حجم مکعب کوچک است.

## چند مثال



$$b$$



$$a$$

$b = 2 \times a$  → حجم مکعب بزرگ ۸ برابر حجم مکعب کوچک است.

$b = 3 \times a$  → حجم مکعب بزرگ ۲۷ برابر حجم مکعب کوچک است.

$b = 4 \times a$  → حجم مکعب بزرگ ۶۴ برابر حجم مکعب کوچک است.

$b = 5 \times a$  → حجم مکعب بزرگ ۱۲۵ برابر حجم مکعب کوچک است.

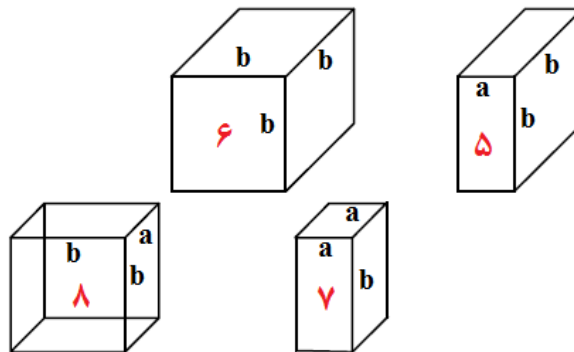
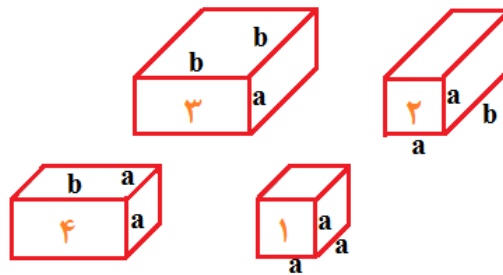
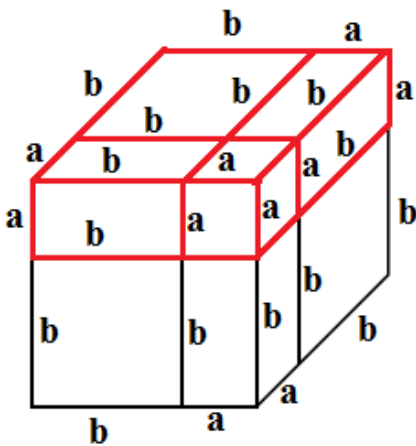
$b = 1/2 \times a$  → حجم مکعب بزرگ ۱/۷۲۸ برابر حجم مکعب کوچک است.

سؤال

۱۲- چگونه می توان یک مکعب را با ۳ برش به ۸ تکه تقسیم کرد، به طوری که ۲ قسمت از آن ۸ قطعه، مکعب هایی باشند که حجم یکی ۸ برابر دیگری باشد؟ (با شکل نشان دهید). در این صورت حجم مکعب کوچک به حجم کل چقدر است؟

حل

حل این سؤال بسیار آسان است؛ اما می خواهیم نکات بسیاری در حل آن بیان کنیم. ابتدا مطابق شکل زیر مکعب بزرگ اصلی را برش می دهیم:



۸ قطعه‌ای که با سه برش به دست می‌آید در شکل بالا نشان داده شده است.

حجم‌های شماره‌ی ۱ و شماره‌ی ۶ مکعب هستند.

$$۱ \text{ حجم} = a \times a \times a$$

$$۲ \text{ حجم} = a \times a \times b$$

$$۳ \text{ حجم} = a \times b \times b$$

$$۴ \text{ حجم} = a \times a \times b$$

$$۵ \text{ حجم} = a \times b \times b$$

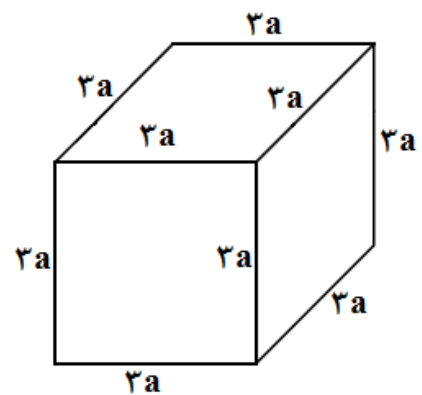
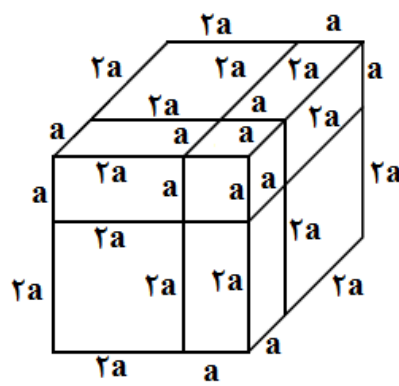
$$۶ \text{ حجم} = b \times b \times b$$

$$۷ \text{ حجم} = a \times a \times b$$

$$۸ \text{ حجم} = a \times b \times b$$

$$۲ \text{ حجم} = ۴ \text{ حجم} = ۷ \text{ حجم} = a \times a \times b$$

$$۳ \text{ حجم} = ۵ \text{ حجم} = ۸ \text{ حجم} = a \times b \times b$$



$$\frac{\text{حجم مکعب کوچک } ۱}{\text{حجم کل}} = \frac{a \times a \times a}{۳ \times a \times ۳ \times a \times ۳ \times a} = \frac{۱}{۲۷}$$

البته در این مسئله توضیحات بسیاری برای درک آن نوشتیم، در صورتی که حل آن بسیار راحت است.

✓ خلاصه:

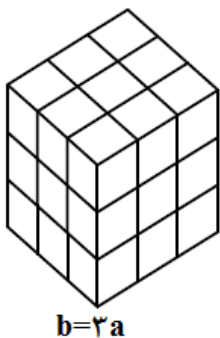
حجم مکعب بزرگ شماره‌ی ۶، هشت برابر حجم مکعب کوچک شماره‌ی ۱ است؛ پس ضلع آن، دو برابر ضلع مکعب کوچک است.

پس ضلع مکعب بزرگ اصلی به نسبت دو به یک تقسیم شده است.

پس نسبت ضلع مکعب کوچک ۱ به ضلع مکعب بزرگ اصلی ۱ به ۳ است. پس نسبت حجم مکعب کوچک شماره‌ی ۱ به حجم

مکعب بزرگ اصلی  $\frac{۱}{۲۷}$  است.

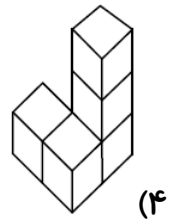
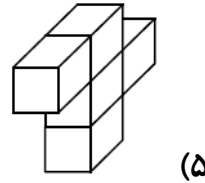
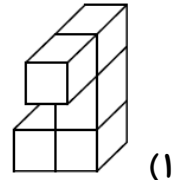
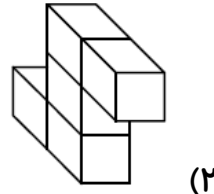
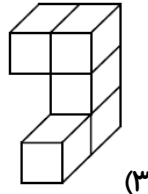
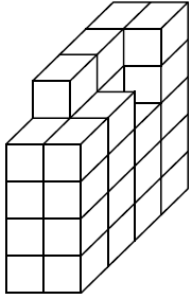
البته می‌توانید با مکعب‌های چینه یا حتی با بریدن سیب‌زمینی مثال بالا را به صورت دقیق بررسی کنید.





«کانگورو-۲۰۰۱»

۱۳- کدام یک از گزینه‌ها برای تبدیل حجم زیر به یک منشور لازم است؟



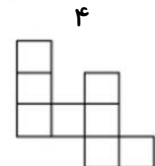
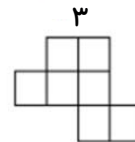
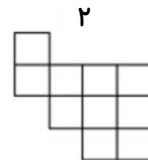
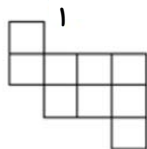
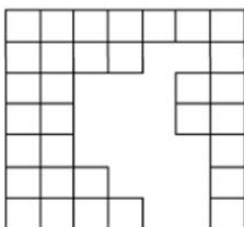
گزینه‌ی «۳» صحیح است.

نکته: مکعب مستطیل هم نوعی منشور است.



«کانگورو-۲۰۰۳»

۱۴- کدام یک از شکل‌های زیر جای خالی را پر می‌کند؟



۴ + ۳ (۵)

۴ + ۱ (۴)

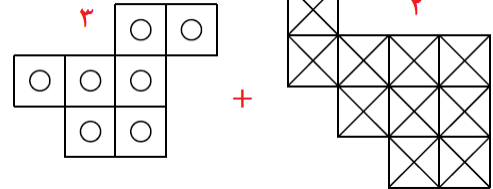
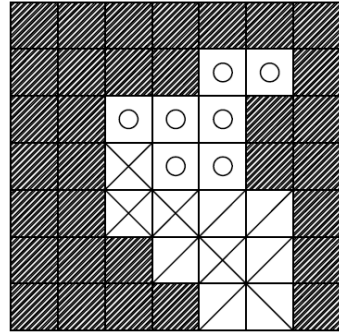
۳ + ۲ (۳)

۴ + ۲ (۲)

۳ + ۱ (۱)



گزینه‌ی «۳» صحیح است.

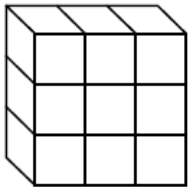


نکته‌ی بسیار مهم

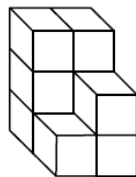
می‌توانید پارل‌ها را بچرخانید و برعکس کنید، مگر این‌که در صورت سؤال ذکر شده باشد که مجاز به انجام این کار نیستید.



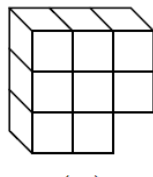
۱۵- شکل زیر از ۹ مکعب واحد تشکیل شده است. می‌توانیم با برش‌های مختلف روی خطوط مکعب‌های کوچک، این حجم را به چند بخش تقسیم کرده، دو بخش از این چند بخش را کنار هم گذاشته و شکل‌های مختلفی بسازید.



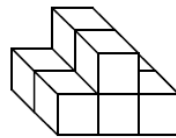
با این روش چند تا از شکل‌های زیر را می‌توان ساخت؟



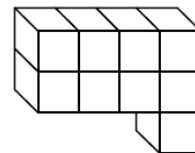
(ا)



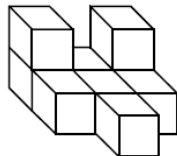
(ب)



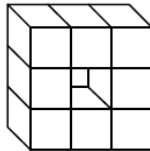
(ج)



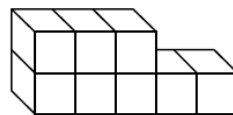
(د)



(ه)



(ف)



(گ)

۷ (۵)

۵ (۴)

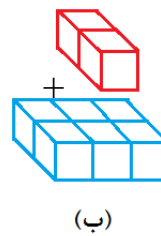
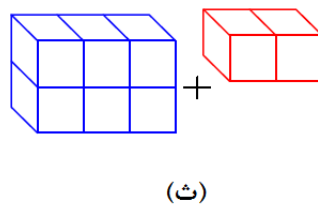
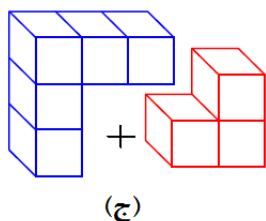
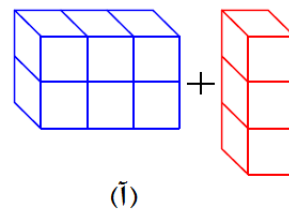
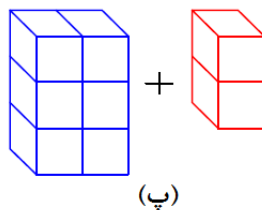
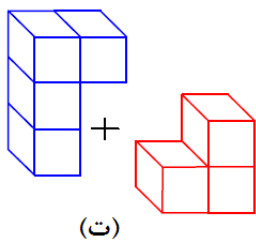
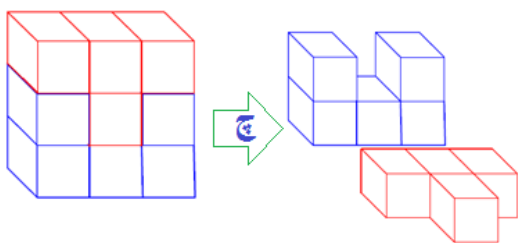
۴ (۳)

۲ (۲)

۰ (۱)



شکل های گزینه های ذکر شده را با برش های مختلف به صورت زیر می توان ساخت.



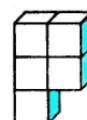
گزینه ی «۵» صحیح است.



سؤال

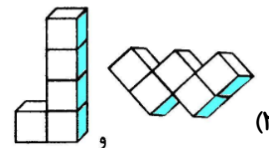
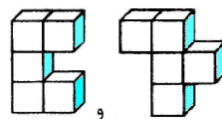
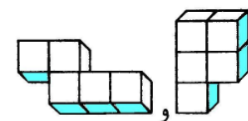
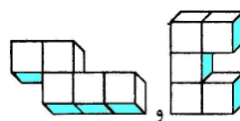
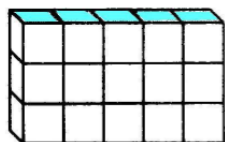


داریم. می خواهیم با اضافه کردن دو قطعه ی دیگر به آن، یک مکعب مستطیل به شکل زیر

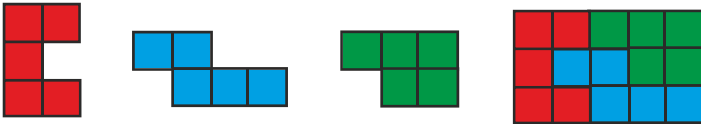


۱۶ - قطعه ای به شکل روبرو

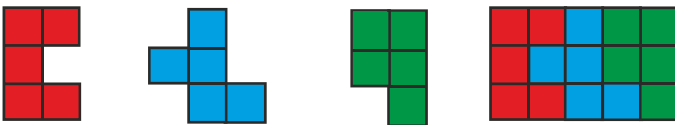
بسازیم. برای این کار کدام دو قطعه ی زیر مناسب است؟



(۵) گزینه ی ۲ و ۴ صحیح می باشد.



مسئله را از حالت سه بعدی خارج می کنیم.



حل مسائلی که به صورت پازل (مشابه هوش تحلیلی غیر کلامی) طراحی شده است، نیاز به تمرین زیاد دارد. با تمرین و تکرار زیاد کم کم به مرحله ای خواهید رسید که می توانید به سرعت بعضی از گزینه ها را حذف کنید. (مثال های پازل، همان پازل های بازی ای هستند که در کودکی انجام می دادید). گزینه ی «۵» صحیح است.

## بخش دوم آموزش هندسه ی فضایی (۲)

برای یادگیری گسترده ی شکل های مختلف و حل سؤالاتی که این گونه طراحی می شوند، باید آموزش های اولیه را طی کرد.

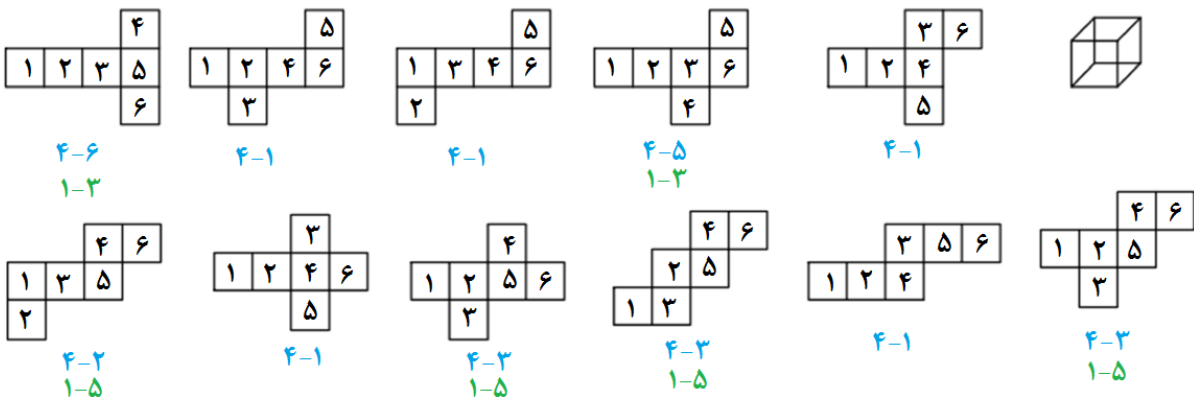
(۱) شکل های زیر را با قیچی برش دهید. (یا روی کاغذ بکشید و برش دهید).

(۲) شکل های زیر اکثراً گسترده ی حجم های بسته هستند. (بعضی از شکل های زیر گسترده ی حجم بسته نیستند). بارها و بارها آن ها را جلوی چشم های خود تا بزینید تا حجم بسته ی مورد نظر به دست آید.

**نکته ی** (هر بار از جهت های مختلف تا زدن را شروع کنید). این عملیات را بارها و بارها تکرار کنید تا آهسته آهسته بتوانید این عملیات را به صورت ذهنی انجام دهید. (در جلسه ی امتحان، نمی توانید این شکل ها را برش دهید).

**تمرین** مکعب دارای ۱۱ گسترده ی مختلف است. به نظر شما، در تمام ۱۱ گسترده ی زیر، بعد از بسته شدن شکل، روبه روی وجه شماره ۱ و ۴، چه وجهی قرار می گیرد؟ تمامی وجه ها از ۱ تا ۶ شماره گذاری شده اند.

(۴-۶): یعنی وجه شماره ۴ روبه روی وجه شماره ۶ است.





شکل‌های زیر را بر روی یک کاغذ بکشید، سپس با قیچی ببرید و سعی کنید با چسب، شکل هندسی آن را بسازید.

