پاسخنامهٔ آزمون موضوعی (۱)

۱. گزینهٔ «۳»

ابتدا رادیکال را تنها می‌کنیم:

$$\sqrt{۱۱+۴a}=۲-۲a \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۱+۴a=(۲-۲a)^۲ \xrightarrow{\text{اتحاد اول}} ۱۱+۴a=۴a^۲-۸a+۴$$

$$\Rightarrow ۴a^۲-۱۲a-۷=۰ \xrightarrow{\text{جملهٔ مشترک ضریب‌دار}} (۲a+۱)(۲a-۷)=۰$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}, a=\frac{۷}{۲} \xrightarrow{\text{چک کردن}} a=-\frac{۱}{۲} \checkmark$$

بنابراین $a=-\frac{۱}{۲}$ است و در نتیجه:

$$a|a+۱|=-\frac{۱}{۲}|-\frac{۱}{۲}+۱|=-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۴}$$

۲. گزینهٔ «۲»

دو طرف $x+\frac{۲}{x}=۵$ را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$(x+\frac{۲}{x})^۲=۵^۲ \xrightarrow{\text{اتحاد اول}} x^۲+\frac{۴}{x^۲}+۴=۲۵ \Rightarrow x^۴+\frac{۴}{x^۲}=۲۱ \Rightarrow \frac{x^۴+۴}{x^۲}=۲۱$$

حالا با توجه به این‌که حاصل $\frac{x^۲}{x^۴+۸x^۲+۴}$ را می‌خواهیم، به دو طرف ۸ واحد ۸ واحد اضافه کرده و معکوس می‌کنیم:

$$\frac{x^۴+۴}{x^۲}=۲۱ \Rightarrow \frac{x^۴+۴}{x^۲}+۸=۲۹ \Rightarrow \frac{x^۴+۸x^۲+۴}{x^۲}=۲۹ \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۴+۸x^۲+۴}=\frac{۱}{۲۹}$$

۳. گزینهٔ «۳»

با فاکتورگیری مناسب، داریم:

$$\frac{\sqrt{x^۳+۶x}+\sqrt{۲x^۲+۱۲}}{(\sqrt{x}+\sqrt{۲})}=\frac{\sqrt{x(x^۲+۶)}+\sqrt{۲(x^۲+۶)}}{(\sqrt{x}+\sqrt{۲})}$$

$$=\frac{\sqrt{x^۲+۶}(\sqrt{x}+\sqrt{۲})}{(\sqrt{x}+\sqrt{۲})}=\sqrt{x^۲+۶}$$

حالا دقت کنید که $x=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=۲+\sqrt{۳}$ است. با قراردادن $x=۲+\sqrt{۳}$ داریم:

$$\sqrt{x^۲+۶}=\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^۲+۶}=\sqrt{۴+۳+۴\sqrt{۳}+۶}=\sqrt{۱۳+۴\sqrt{۳}} \overset{\text{روش ۲ab}}{=\!=} \sqrt{(۲\sqrt{۳}+۱)^۲}=۲\sqrt{۳}+۱$$

۴. گزینهٔ «۳»

همین‌که معادلهٔ $||۲x-۱|-۵|=k-۱$ جواب دارد، باتوجه به نامنفی بودن سمت چپ نتیجه می‌گیریم که سمت راست نامنفی است. لذا:

$$k-۱\geq ۰ \Rightarrow k\geq ۱$$

البته $k>1$ است، زیرا برای $k=1$ معادله فقط دو جواب دارد. در نتیجه داریم:

$$||2x-1|-5|=k-1 \Rightarrow \begin{cases} |2x-1|-5=k-1 \\ \text{یا} \\ |2x-1|-5=1-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x-1|=k+4 \\ \\ |2x-1|=6-k \end{cases}$$

چون معادله چهار جواب دارد، باید هرکدام از طرف‌های راست این معادله‌ها مثبت باشند:

$$\begin{cases} k+4>0 \\ \text{و} \\ 6-k>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>-4 \\ \text{و} \\ k<6 \end{cases}$$

با اشتراک گرفتن داریم: $1<k<6$.

۵. گزینهٔ «۱»

دو ریشهٔ حقیقی مثبت یعنی: $P>0$ و $S>0$ و $\Delta>0$. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} P=\frac{c}{a}=m+3>0 \\ S=-\frac{b}{a}=-(2m+1)>0 \\ \Delta=(2m+1)^2-4(m+3)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m<-\frac{1}{2} \\ 4m^2-11>0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \begin{cases} -3<m<-\frac{1}{2} \\ m\in(-\infty,\frac{-\sqrt{11}}{2})\cup(\frac{\sqrt{11}}{2},+\infty) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دوباره اشتراک}} -3<m<-\frac{\sqrt{11}}{2}$$

۶. گزینهٔ «۴»

اول یک طرف معادله را صفر می‌کنیم:

$$2x^2+(m+2n)x+m-n=0$$

حالا با توجه به این‌که $x=3$ ریشهٔ مضاعف است، داریم:

$$2x^2+(m+2n)x+m-n=2(x-3)^2 \Rightarrow 2x^2+(m+2n)x+m-n=2x^2-12x+18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+2n=-12 \\ m-n=18 \end{cases} \Rightarrow n=-10,\ m=8 \Rightarrow m+n=-2$$

۷. گزینهٔ «۲»

ابتدا دقت می‌کنیم که چون α و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2=x+1$ هستند، داریم:

$$3x^2-x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{1}{3} \\ \alpha\beta=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

حالا باید S' و P' را حساب کنیم:

$$S'=\frac{2}{\alpha}+3+\frac{2}{\beta}+3=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+6=\frac{2(\frac{1}{3})}{-\frac{1}{3}}+6=4$$

$$P' = (\frac{۲}{\alpha}+۳)(\frac{۲}{\beta}+۳) = \frac{۴}{\alpha\beta}+(\frac{۶}{\alpha}+\frac{۶}{\beta})+۹ = \frac{۴}{-\frac{۱}{۳}}+\frac{۶(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+۹ = -۱۲+\frac{۶(\frac{۱}{۳})}{-\frac{۱}{۳}}+۹ = -۹$$

بنابراین معادلهٔ $۲x^۲ = ax+b$ معادل است با:

$$۲(x^۲ - S'x + P') = ۰ \Rightarrow ۲(x^۲ - ۴x - ۹) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۸x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ = ۸x + ۱۸ \Rightarrow a = ۸ , b = ۱۸ \Rightarrow b - a = ۱۸ - ۸ = ۱۰$$

۸. گزینهٔ «۴»

هر دو با هم مجله را در ۲۰ ساعت تایپ می‌کنند. بهروز به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد کار را تمام می‌کند. فرض کنیم بهروز در x ساعت کار را تمام کند. در این‌صورت فرهاد در $x-۹$ ساعت کار را تمام می‌کند. مقدار کار انجام‌شده توسط هر دو نفر در هر ساعت $\frac{۱}{x-۹}+\frac{۱}{x}$ است و از طرفی:

$$\frac{۱}{x-۹}+\frac{۱}{x} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲x-۹}{x(x-۹)} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow ۴۰x - ۱۸۰ = x^۲ - ۹x \Rightarrow x^۲ - ۴۹x + ۱۸۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۴۵)(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۴۵ \text{ یا } x = ۴$$

اما اگر $x = ۴$ باشد، آن‌گاه $x - ۹ = -۵$ است که بی‌معنی است، زیرا فرهاد نمی‌تواند در -۵ ساعت کار را تمام کند. لذا $x = ۴۵$ و $x - ۹ = ۳۶$.

۹. گزینهٔ «۲»

$$۲x^۲ - ۳ < |x| \Rightarrow ۲x^۲ - |x| - ۳ < ۰ \Rightarrow (|x|+۱)(۲|x|-۳) < ۰$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -\frac{۳}{۲} & & \frac{۳}{۲} & \\ + & \circ & - & \circ & + \end{array} \Rightarrow x \in (-\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}) \Rightarrow b - a = \frac{۳}{۲} - (-\frac{۳}{۲}) = ۳$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

مساحت این متوازی‌الاضلاع دو برابر مساحت مثلث ABC است:

$$۲S = ۲ \times \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} = |(۴+۰-۱)-(-۳+۲+۰)| = ۴$$

۱۱. گزینهٔ «۳»

باید ضریب $x^۲$ منفی باشد، ضریب x منفی باشد و عدد ثابت هم منفی باشد:

$$\begin{cases} a - ۲ < ۰ \\ a + ۱ < ۰ \\ -۱ < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -۱$$

۱۲. گزینهٔ «۱»

$$\begin{matrix} (۲,۱) \\ (-۱,-۲) \\ (۳,۳) \end{matrix} \begin{cases} ۱ = ۴a + ۲b + c \\ -۲ = a - b + c \\ ۳ = ۹a + ۳b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳ = ۳a + ۳b \\ -۵ = -۸a - ۴b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۱ \\ ۸a + ۴b = ۵ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}, b = \frac{۳}{۴}$$

با قراردادن $a=\frac{1}{4}$ و $b=\frac{3}{4}$ در یکی از معادلات اولیه، مقدار c را به‌دست می‌آوریم:

$$1=4a+2b+c=1+\frac{3}{2}+c\Rightarrow c=-\frac{3}{2}$$

بنابراین $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$. تقاطع با محور x ها یعنی ریشه‌ها، ریشه‌ها. را هم به کمک Δ حساب می‌کنیم:

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\,,\,x_2=\frac{-3-\sqrt{33}}{2}$$

۱۳. گزینهٔ «۴»

نقطهٔ $(1,2)$ در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کند:

$$\begin{cases}2b=5\\a=0\end{cases}\Rightarrow a=0\,,\,b=\frac{5}{2}\Rightarrow a-b=-\frac{5}{2}$$

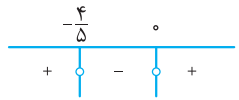
۱۴. گزینهٔ «۱»

چون دو طرف مثبت هستند، طرفین وسطین و توان ۲ رساندن مجاز است:

$$\frac{|3x+2|}{|x+1|}>2\Rightarrow|3x+2|>2|x+1|\xrightarrow{\text{توان ۲}}(3x+2)^2>4(x+1)^2$$

$$\Rightarrow(3x+2)^2-4(x+1)^2>0\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(3x+2-2x-2)(3x+2+2x+2)>0$$

$$\Rightarrow x(5x+4)>0\Rightarrow$$



$$\Rightarrow x\in(-\infty\,,-\frac{4}{5})\cup(0\,,+\infty)$$

۱۵. گزینهٔ «۲»

$$\sqrt{4x+3}=1+\sqrt{2x+1}\Rightarrow 4x+3=1+2x+1+2\sqrt{2x+1}\Rightarrow 2x+1=2\sqrt{2x+1}$$

$$\Rightarrow(2x+1)^2=4(2x+1)\xrightarrow{\text{ساده‌کردن}}\begin{cases}2x+1=0\\\text{یا}\\2x+1=4\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\ \text{یا}\ x=\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{چک}}x=-\frac{1}{2}\,,\,x=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اختلاف}}\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})=2$$

۱۶. گزینهٔ «۳»

$x=3$ در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{3+a}{1}+\frac{6}{4}=\frac{15}{2}\Rightarrow a+3+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}\Rightarrow a=3$$

حالا با قراردادن $a=3$ داریم:

$$\frac{x+3}{x-2}+\frac{2x}{x+1}=\frac{15}{2}\Rightarrow\frac{(x+3)(x+1)+2x(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{15}{2}\Rightarrow\frac{3x^2+3}{x^2-x-2}=\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 6x^2+6=15x^2-15x-30\Rightarrow 9x^2-15x-36=0\xrightarrow{\div 3}3x^2-5x-12=0$$

$$\Rightarrow(3x+4)(x-3)=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}\ \text{یا}\ x=3$$

۱۷. گزینهٔ «۴»

$$۵y+۱۲x-k=۰ \Rightarrow \frac{|۱۰-۱۲-k|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=۴ \Rightarrow \frac{|-۲-k|}{۱۳}=۴ \Rightarrow |k+۲|=۵۲ \Rightarrow \begin{cases} k+۲=۵۲ \\ \text{یا} \\ k+۲=-۵۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=۵۰ \\ \text{یا} \\ k=-۵۴ \end{cases}$$

۱۸. گزینهٔ «۳»

چون نمودار $y=(۲ax-۱)(x+a-۲)$ بر محور x ها مماس است، باید دو ریشه برابر باشند:

$$\begin{cases} ۲ax-۱=۰ \\ \text{یا} \\ x+a-۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۱}{۲a} \\ x=۲-a \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲a}=۲-a \Rightarrow ۴a-۲a^۲=۱ \Rightarrow ۲a^۲-۴a+۱=۰ \Rightarrow a=\frac{۴\pm\sqrt{۸}}{۴}=\frac{۲\pm\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۹. گزینهٔ «۲»

حل نامعادلهٔ قدرمطلقی روال مشخصی دارد:

$$|۳x+۲|<۲x+۵ \Rightarrow -۲x-۵<۳x+۲<۲x+۵ \Rightarrow \begin{cases} -۲x-۵<۳x+۲ \\ \text{و} \\ ۳x+۲<۲x+۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۷<۵x \\ \text{و} \\ x<۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{-۷}{۵}<x<۳$$

۲۰. گزینهٔ «۴»

$$|۳x^۲-۴|<۲x+۱ \Rightarrow -۲x-۱<۳x^۲-۴<۲x+۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲x-۱<۳x^۲-۴ \\ \text{و} \\ ۳x^۲-۴<۲x+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۰<۳x^۲+۲x-۳ \\ \text{و} \\ ۳x^۲-۲x-۵<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-۱-\sqrt{۱۰}}{۳} \quad \frac{-۱+\sqrt{۱۰}}{۳} \\ + \quad - \quad + \\ -۱ \quad \frac{۵}{۳} \\ + \quad - \quad + \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \left(\frac{-۱+\sqrt{۱۰}}{۳}, \frac{۵}{۳}\right)$$

استراتژی ۱) در این آزمون، تسلط بر درسنامه خیلی شرط است. علت این اهمیت در این است که چهار فصل اول، مهارتی هستند. در فصل‌های مهارتی، درسنامه را بیشتر بخوانید.

۲) سؤال‌های ۱۸ ـ ۱۶ ـ ۹ ـ ۷ ـ ۳ بسیار دشوار هستند. اگر این سؤال‌ها را درست حل کرده‌اید، خیلی خیلی خیلی دمتان گرم! تا این‌جای کار را عالی آمده‌اید جلو و قرار است در کنکور گل بکارید.

۳) این چهار فصل خیلی مهم هستند و تا فصل ۱۲ همه چیز به این فصل‌ها وابسته است. به همین خاطر این آزمون سخت‌تر از مسائل متعارف این فصل‌ها طراحی شده است.

۴) کسب درصد بالای ۶۰ عالی است.

۵) انتظار می‌رود ۳ الی ۵ سؤال از مباحث این آزمون در کنکور بیاید.

پاسخنامهٔ آزمون موضوعی (۲)

۱. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ است. لذا:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha=1\Rightarrow(\frac{1}{3})^2-\frac{2a}{3}=1\Rightarrow a=-\frac{4}{3}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{9}$$

حالا دقت بفرمایید که:

$$|\tan 2\alpha|=|\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}|=|\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}|=|\frac{2(-\frac{4}{9})}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}|$$

$$=\frac{\frac{8}{9}}{|\cos\alpha-\sin\alpha|\times\frac{1}{3}}=\frac{8}{3|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}|}=\frac{8}{3|\frac{\sqrt{1+16}}{3}|}=\frac{8}{\sqrt{17}}$$

۲. گزینهٔ «۲»

$$\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{4}=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8}$$

۳. گزینهٔ «۱»

$$\cos^4x-\sin^4x=\sin\frac{x}{2}\Rightarrow(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)=\sin\frac{x}{2}\Rightarrow(\cos 2x)\times 1=\sin\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow\cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})\Rightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{5}+\frac{4k\pi}{5}\\ 2x=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\end{cases}$$

۴. گزینهٔ «۳»

$$\frac{\sin 150^\circ\cos 120^\circ+2\tan 225^\circ}{\sin 330^\circ+3\cot 765^\circ}=\frac{\sin(180^\circ-30^\circ)\cos(180^\circ-60^\circ)+2\tan(180^\circ+45^\circ)}{\sin(360^\circ-30^\circ)+3\cot(720^\circ+45^\circ)}$$

$$=\frac{(\sin 30^\circ)(-\cos 60^\circ)+2\tan 45^\circ}{-\sin 30^\circ+3\cot 45^\circ}=\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})+2(1)}{-\frac{1}{2}+3(1)}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{7}{10}=0/7$$

۵. گزینهٔ «۲»

$$2\cos 3x=2\sin 2x\Rightarrow\cos 3x=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)\Rightarrow\begin{cases}3x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\\ 3x=2x-\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

حالا باید جواب‌هایی که در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ قرار دارند را بشماریم. داریم:

$$① \; -\pi < \frac{\pi}{۱۰} + \frac{۲k\pi}{۵} < ۲\pi \Rightarrow -\frac{۱۱}{۴} < k < \frac{۱۹}{۴} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow \text{جواب ۷}$$

$$② \; -\pi < -\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi < ۲\pi \Rightarrow -\frac{۱}{۴} < k < \frac{۵}{۴} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{۰,۱\} \Rightarrow \text{جواب ۲}$$

کلاً می‌شود ۹ تا جواب.

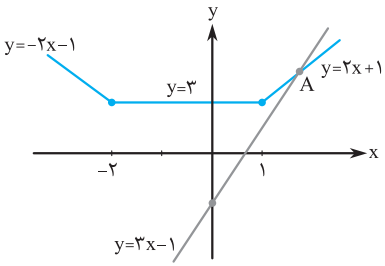
۶. گزینهٔ «۱»

$f(x)$ یک محدودیت دارد و آن هم رادیکال است. لذا باید:

$$۲x - |x-۱| \geq ۰ \Rightarrow |x-۱| \leq ۲x \Rightarrow -۲x \leq x-۱ \leq ۲x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲x \leq x-۱ \\ \text{و} \\ x-۱ \leq ۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۳} \leq x \\ \text{و} \\ -۱ \leq x \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{۱}{۳}, +\infty)$$

۷. گزینهٔ «۲»



اساساً نمودارهای گلدانی و آبشاری را بهتر است با رسم حل کنیم:

$y = |x-۱| + |x+۲|$

در نمودار می‌بینیم که A در واقع محل تلاقی $y = ۳x-۱$ و $y = ۲x+۱$ است: $۳x-۱ = ۲x+۱ \Rightarrow x = ۲$

و بنابراین جواب نامعادله $(۲, +\infty)$ است.

۸. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که:

$$f(x) = [۳x+۱] - ۳x = [۳x] + ۱ - ۳x$$

بنابراین برد $f(x)$ برابر است با:

$$R_{f(x)} = \underbrace{[۳x] - ۳x}_{(-۱,۰]} + ۱ = (-۱+۱, ۰+۱] = (۰,۱]$$

بنابراین در تابع $(gof)(x)$ با فرض $f(x) = T$، خواهیم داشت:

$$g(f(x)) = g(T)\,;\, ۰ < T \leq ۱ \Rightarrow g(T) = ۶T - T^۲\,;\, ۰ < T \leq ۱ \xrightarrow[\text{قرار ندارد.}]{\text{رأس g در این بازه}} \text{برد}: g(۰) = ۰,\ g(۱) = ۵$$

$$\Rightarrow (۰,۵]$$

۹. گزینهٔ «۱»

تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x-۳+۲x-۱ = ۳x-۴ & ; x \geq ۳ \\ -x+۳+۲x-۱ = x+۲ & ; \frac{۱}{۲} < x < ۳ \\ -x+۳-۲x+۱ = -۳x+۴ & ; x \leq \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

بدیهی است که $f(x)$ در بازهٔ $(-\infty, \frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی است:

$$f(x) = -۳x+۴\,;\, x \leq \frac{۱}{۲}$$

در این بازه، برد $f(x)$ برابر با $[f(\frac{1}{2}), +\infty) = [\frac{5}{2}, +\infty)$ است و ضابطهٔ تابع وارون هم ساده است:

$$f^{-1}(x) = \frac{4-x}{3} ; x \in [\frac{5}{2}, +\infty)$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases} f(2) = 6 \\ f(12) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \log_2(2b-4) = 6 \\ a + \log_2(12b-4) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2(2b-4) = 6-a \\ \log_2(12b-4) = 10-a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b-4 = 2^{6-a} \\ 12b-4 = 2^{10-a} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{2b-4}{12b-4} = 2^{6-a-10+a} = 2^{-4} \Rightarrow \frac{12b-4}{2b-4} = 2^4 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{4(3b-1)}{2(b-2)} = 16 \Rightarrow \frac{3b-1}{b-2} = 8 \Rightarrow 3b-1 = 8b-16 \Rightarrow 5b = 15 \Rightarrow b = 3$$

با قراردادن $b = 3$ در $2b-4 = 2^{6-a}$، داریم:

$$6-4 = 2^{6-a} \Rightarrow 2 = 2^{6-a} \Rightarrow 6-a = 1 \Rightarrow a = 5$$

۱۱. گزینهٔ «۴»

تقاطع با محور طولی، یعنی حل $f(x) = 0$:

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \Rightarrow 4^x - 2^x \times 2^3 + 15 = 0 \Rightarrow 4^x - 8(2^x) + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x - 3)(2^x - 5) = 0 \Rightarrow 2^x = 3 \text{ یا } 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 3 \text{ یا } x = \log_2 5$$

طول پاره‌خط AB، همان اختلاف این دو عدد است:

$$|AB| = |\log_2 5 - \log_2 3| = \log_2 \frac{5}{3}$$

۱۲. گزینهٔ «۴»

$$\frac{b}{a} = \frac{\log_{(\sqrt{2}+1)}(7-4\sqrt{3})}{\log_{(\sqrt{2}-1)}\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\log_{(\sqrt{2}+1)}(2-\sqrt{3})^2}{\log_{(\sqrt{2}-1)}(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\log_{(\sqrt{2}+1)}(2-\sqrt{3})}{\frac{1}{2}\log_{(\sqrt{2}+1)^{-1}}(2-\sqrt{3})^{-1}}$$

$$= \frac{4\log_{(\sqrt{2}+1)}(2-\sqrt{3})}{\frac{-1}{-1}\log_{(\sqrt{2}+1)}(2-\sqrt{3})} = 4$$

۱۳. گزینهٔ «۲»

تابع $f(x+2) = 3x+1$ تابعی صعودی است. پس اگر دامنهٔ آن $(-1, a)$ باشد، آن‌گاه برد آن $(-3+1, 3a+1)$ است. این یعنی:

$$(-2, 3a+1) = (b, 2) \Rightarrow \begin{cases} -2 = b \\ \text{و} \\ 3a+1 = 2 \end{cases} \Rightarrow b = -2, a = \frac{1}{3} \Rightarrow a+b = -\frac{5}{3}$$

۱۴. گزینهٔ «۳»

$$f(x+1)=\frac{3x+2}{x+1}\xrightarrow[x=T-1]{T=x+1}f(T)=\frac{3(T-1)+2}{(T-1)+1}=\frac{3T-1}{T}\Rightarrow f(x)=\frac{3x-1}{x}$$

بنابراین:

$$f(g(x))=2x-1\Rightarrow g(x)=f^{-1}(2x-1)$$

دقت داریم که: (تذکر آخر راه‌حل را بخوانید)

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{-x+3}\Rightarrow g(x)=\frac{1}{-(2x-1)+3}=\frac{1}{-2x+4}$$

حالا از $f(x+1)=\frac{3x+2}{x+1}$، با قراردادن $x=1$، داریم:

$$f(2)=\frac{5}{2}$$

بنابراین:

$$g(f(2))=g(\frac{5}{2})=\frac{1}{-2(\frac{5}{2})+4}=\frac{1}{-1}=-1$$

تذکر اگر $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$.

۱۵. گزینهٔ «۲»

اول gof را به‌دست می‌آوریم:

$$1\xrightarrow{f}1\xrightarrow{g}0\quad;\quad(1,0)\in gof$$

$$2\xrightarrow{f}3\xrightarrow{g}-1\quad;\quad(2,-1)\in gof$$

$$3\xrightarrow{f}5\xrightarrow{g}\text{هیچ‌جا}$$

بنابراین $gof=\{(1,0),(2,-1)\}$. در نتیجه:

$$\frac{gof(x)}{x+f(x)}=\{(1,\frac{0}{1+1}),(2,\frac{-1}{2+3})\}=\{(1,0),(2,\frac{-1}{5})\}\Rightarrow \text{برد}=\{0,-\frac{1}{5}\}\xrightarrow{\text{مجموع}}0-\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}$$

۱۶. گزینهٔ «۳»

$$f^{-1}(x)=2x\Rightarrow x=f(2x)=|2x-1|-\frac{2}{2x}$$

$$x=|2x-1|-\frac{1}{x}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=|2x-1|$$

این هم یک معادلهٔ قدرمطلقی است:

(۱) $x+\frac{1}{x}=2x-1\Rightarrow\frac{1}{x}=x-1\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

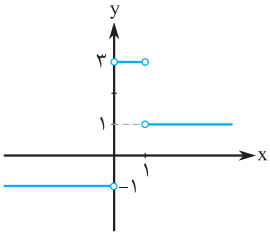
$$\xrightarrow{\text{چک}}x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \checkmark$$

(۲) $x+\frac{1}{x}=-2x+1\Rightarrow\frac{1}{x}=-3x+1\Rightarrow 1=-3x^2+x\Rightarrow 3x^2-x+1=0\Rightarrow\Delta<0$

بنابراین تنها نقطهٔ تلاقی همان $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

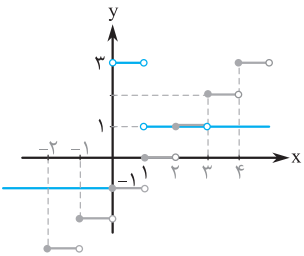
۱۷. گزینهٔ «۱»

رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases} ۲-۱=۱ & ; \quad x>۱ \\ ۲+۱=۳ & ; \quad ۰<x<۱ \\ -۲+۱=-۱ & ; \quad x<۰ \end{cases}$$

نمودار $y=[x-۱]=[x]-۱$ نیز همان $y=[x]$ است که یک واحد به پایین منتقل شده است:



همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ $[۲,۳)$ دو نمودار منطبق هستند.

لذا: $۲b-a=۶-۲=۴$

۱۸. گزینهٔ «۲»

اولاً داریم:

$$\log_۲ a+\log_۳ a=۵ \Rightarrow \frac{\log a}{\log ۲}+\frac{\log a}{\log ۳}=۵ \Rightarrow \frac{(\log a)(\log ۳+\log ۲)}{\log ۳ \log ۲}=۵$$

$$\Rightarrow (\log a)(\log ۶)=۵\log ۳\log ۲ \Rightarrow \log a=\frac{۵\log ۳\log ۲}{\log ۶}$$

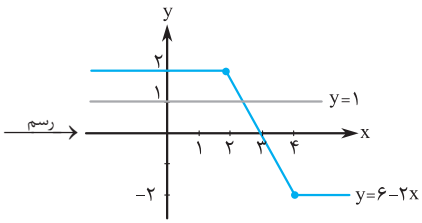
حالا دقت کنید که:

$$b=\log_۲ a \log_۳ a=\frac{\log a}{\log ۲}\times\frac{\log a}{\log ۳}=\frac{۲۵\log^۲ ۳\log^۲ ۲}{\log ۲\log ۳\log^۲ ۶}=\frac{۲۵\log ۳\log ۲}{\log^۲ ۶}=۲۵\log_۶ ۳\log_۶ ۲$$

۱۹. گزینهٔ «۲»

نمودار جدید $f(x-۲)-۱$ است. بنابراین:

$$f(x)=f(x-۲)-۱ \Rightarrow |x-۲|+۱=|x-۴| \Rightarrow |x-۴|-|x-۲|=۱$$



$$\Rightarrow ۶-۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$$

۲۰. گزینهٔ «۱»

اولاً $g^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۲}$ است. لذا $g^{-۱}(۳)=\frac{۴}{۲}=۲$ و در نتیجه $f(g^{-۱}(۳))=f(۲)$ است. اما چون ضابطهٔ $f(x-۱)$ را داریم، برای محاسبهٔ $f(۲)$ باید $x=۳$ را عددگذاری کنیم:

$$f(۳-۱)=\frac{۶+a}{۳+۱} \Rightarrow f(۲)=\frac{۶+a}{۴}=a+۱ \Rightarrow ۶+a=۴a+۴ \Rightarrow ۳a=۲ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

استراتژی ۱) این آزمون سطح بالا بود. تعداد مسائل دشوار آن هم زیاد بودند و تقریباً هر سؤال آزمون ریزه‌کاری‌های حرفه‌ای داشت.
۲) با این آزمون می‌توانید خود را برای یک کنکور دشوار هم آماده کنید.
۳) مسائل ترکیبی آن با فصل معادله‌ها، این حسن را داشتند که یک‌بار دیگر فصل مهم معادلات (فصل ۲) را مرور کردید.
۴) بیشتر دشواری‌های این آزمون از نوع تکنیکی ـ محاسباتی بودند.
۵) سؤالات مثلثات آن، همهٔ طیف‌های مسائل کنکور (از ساده تا سخت) را پوشش دادند.
۶) درصد بالای ۶۰ برای این آزمون، خیلی عالی است. ۷) انتظار می‌رود از مباحث این آزمون، ۷ یا ۸ سؤال در کنکور بیاید.
با شادی و شادکامی زندگی کنید.

پاسخنامهٔ آزمون موضوعی (۳)

۱. گزینهٔ «۲»

ابتدا فرض می‌کنیم $a > 0$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}[ax+1]=[(2a+1)^-]=3 \Rightarrow 3<2a+1\le 4 \Rightarrow 1<a\le \frac{3}{2} \xrightarrow{a\ge 0} \text{قابل قبول} \Rightarrow a\in(1,\frac{3}{2}]$$

$$\Rightarrow a\in(1,\frac{3}{2}]$$

حالا اگر $a<0$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}[ax+1]=[(2a+1)^+]=3 \Rightarrow 3\le 2a+1<4 \Rightarrow 1\le a<\frac{3}{2} \xrightarrow{a<0} \text{غیرقابل قبول} \Rightarrow \varnothing$$

بنابراین جواب مسئله تنها $a\in(1,\frac{3}{2}]$ است.

۲. گزینهٔ «۴»

$$f'(x)=\frac{(2+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x+1)-1(2x+\sqrt{x})}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1)=\frac{\frac{5}{2}(2)-3}{4}=\frac{1}{2}$$

۳. گزینهٔ «۴»

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x|x^3-x|+2x+2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x|x(x-1)(x+1)|+2(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x(-x)(-(x-1))|x+1|+2(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2(x-1)(x+1)+2(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)(x^2(x-1)+2)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}(x^3-x^2+2)=-1-1+2=0$$

۴. گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۳-[۵x-۱]}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۳-[۹^-]}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۳-۸}{x-\sqrt{x+۲}}\overset{H}{=}\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳x^۲}{۱-\frac{۱}{\sqrt{x+۲}}}$$

$$=\frac{۱۲}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱۲}{\frac{۳}{۴}}=۱۶$$

۵. گزینهٔ «۲»

مخرج به صفر میل می‌کند، درحالی‌که حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ نشده است. پس صورت هم باید به صفر میل کند. یعنی:

$$\lim_{x\to ۱}(ax^۲+x+b)=۰\Rightarrow a+۱+b=۰\Rightarrow a+b=-۱$$

از طرفی حاصل هوپیتال ۵ نشده است:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{ax^۲+x+b}{\sqrt{x+۳}-۲x}\overset{H}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۲ax+۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}-۲}=\frac{۲a+۱}{\frac{۱}{۴}-۲}=\frac{۲a+۱}{-\frac{۷}{۴}}\Rightarrow\frac{۸a+۴}{-۷}=۵\Rightarrow ۸a+۴=-۳۵$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۳۹}{۸}$$

از $a+b=-۱$ هم داریم:

$$-\frac{۳۹}{۸}+b=-۱\Rightarrow b=\frac{۳۱}{۸}$$

اکنون داریم:

$$b-a=\frac{۳۱}{۸}+\frac{۳۹}{۸}=\frac{۷۰}{۸}=\frac{۳۵}{۴}$$

۶. گزینهٔ «۴»

$$f(۱)=a(۱)+۱=a+۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳+x-۲}{x^۲-۱}\overset{H}{=}\lim_{x\to ۱^+}\frac{۳x^۲+۱}{۲x}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}۳[x+۲]+b=۳[۳^-]+b=۶+b$$

بنابراین باید:

$$\begin{cases}a+۱=۲\\۶+b=۲\end{cases}\Rightarrow a=۱,\ b=-۴\Rightarrow b-a=-۴-۱=-۵$$

۷. گزینهٔ «۴»

اول باید $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=۱^۳+a(۱)=۱+a$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=(۱+b)(a+۱)$$

تا همین‌جا نتیجه می‌گیریم که:

$$(۱+a)=(۱+b)(a+۱)\Rightarrow a+۱=۰ \text{ یا } b+۱=۱\Rightarrow a=-۱ \text{ یا } b=۰$$

از طرفی باید $f'_+(۱) = f'_-(۱)$، یعنی:

$$f'_+(۱) = (۳x^۲ + a)_{x=۱} = ۳ + a$$

$$f'_-(۱) = (۱(ax+۱) + (x+b)a)_{x=۱} = a + ۱ + a + ab$$

بنابراین:

$$a + ۳ = a + ۱ + a + ab \Rightarrow a + ab = ۲$$

حالا دو حالت داریم: اگر $a = -۱$ باشد، با توجه به $a + ab = ۲$ می‌فهمیم که $-۱ - b = ۲$ یا همان $b = -۳$.

در این حالت:

$$f'(۲) = (۳x^۲ + a)_{x=۲} = ۱۲ + a = ۱۲ - ۱ = ۱۱$$

اما حالت دوم $b = ۰$ است. در این حالت با توجه به $a + ab = ۲$ می‌فهمیم که $a = ۲$ است. بنابراین:

$$f'(۲) = (۳x^۲ + a)_{x=۲} = ۱۲ + a = ۱۲ + ۲ = ۱۴$$

تذکر در هر دو حالت ظاهراً نیازی به محاسبهٔ b نیست و با همان داشتن a می‌توانیم $f'(۲)$ را حساب کنیم. این نظر درست نیست. زیرا ما اول باید مطمئن شویم که اصلاً b وجود دارد، بعد به فکر محاسبهٔ $f'(۲)$ باشیم.

۸. گزینهٔ «۲»

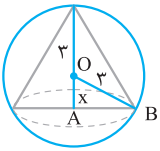
با توجه به این‌که $(۱, b)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} f'(۱) = ۰ \\ f(۱) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{(۴x+a)(x+۳) - (۲x^۲ + ax + ۱)۱}{(x+۳)^۲}\right)_{x=۱} = ۰ \\ \dfrac{۲ + a + ۱}{۴} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۴(a+۴) - (۳+a)}{۱۶} = ۰ \\ \dfrac{۳+a}{۴} = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a + ۱۳ = ۰ \\ \dfrac{a+۳}{۴} = b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{۱۳}{۳}, b = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow b - a = -\frac{۱}{۳} + \frac{۱۳}{۳} = \frac{۱۲}{۳} = ۴$$

۹. گزینهٔ «۱»

با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB داریم:



$$AB = \sqrt{۹ - x^۲}$$

بنابراین شعاع قاعدهٔ مخروط $\sqrt{۹ - x^۲}$ و ارتفاع آن $(۳ + x)$ است. پس حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi(۹ - x^۲)(x+۳)}{۳} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi(-x^۳ - ۳x^۲ + ۹x + ۲۷)}{۳}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \pi(-x^۲ - ۲x + ۳) \xrightarrow{f'(x)=۰} -\pi(x+۳)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = -۳ \text{ یا } x = +۱$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت هستند.}]{\text{اندازه‌ها در هندسه}} x = ۱$$

در نتیجه: $x = ۱$ و لذا ارتفاع مخروط برابر $۳ + ۱ = ۴$ است.

نکته اگر با فرمول حفظ کردن راحتید، ارتفاع مخروط با بیشترین حجم در کره‌ای به شعاع R برابر با $h = \frac{۴}{۳}R$ است.

۱۰. گزینهٔ «۳»

فرض کنید $B=(x\,,\sqrt{2x+10})$ نقطه‌ای روی نمودار $y=\sqrt{2x+10}$ باشد. در این‌صورت:

$$|AB|=\sqrt{(x+2)^2+\sqrt{2x+10}^{\,2}}=\sqrt{x^2+4x+4+2x+10}=\sqrt{x^2+6x+14}$$

حالا باید مینیمم تابع $f(x)=\sqrt{x^2+6x+14}$ را به‌دست آوریم:

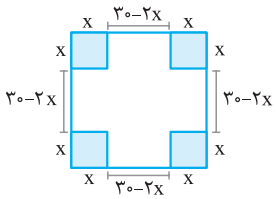
$$f'(x)=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+14}}=\frac{2(x+3)}{2\sqrt{x^2+6x+14}}=0\Rightarrow x=-3$$

در نتیجه:

$$\operatorname{Min} f(x)=f(-3)=\sqrt{9-18+14}=\sqrt{5}$$

۱۱. گزینهٔ «۳»

هر ضلع مربع در ابتدا ۳۰ است. بعد از بریدن گوشه‌ها، طول هر ضلع $30-2x$ می‌شود. وقتی که تا می‌زنیم، ارتفاع x می‌شود:



$$V=(30-2x)^2x\Rightarrow f(x)=(900-120x+4x^2)x=4x^3-120x^2+900x$$

$$\Rightarrow f'(x)=12x^2-240x+900=0\xrightarrow{\div 12}x^2-20x+75=0\Rightarrow(x-5)(x-15)=0$$

$$\Rightarrow x=5 \text{ یا } x=15$$

اما $x=15$ درست نیست، زیرا اگر $x=15$ باشد، بعد از بریدن مربع‌ها چیزی از ورقهٔ اصلی باقی نمی‌ماند. پس $x=5$ است.

۱۲. گزینهٔ «۲»

اول $f'(x)$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)\Rightarrow$$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

همان‌طور که می‌بینید، بزرگ‌ترین بازه‌ای که $f(x)$ در آن نزولی است، $[-1,+1]$ است. پس $a=-1$ و $b=1$ است.

لذا مسئله عرض‌ازمبدأ خط مماس بر $y=f(x)$ در نقطهٔ به طول $x=a+3b=-1+3=2$ را می‌خواهد.

۱) نقطهٔ تماس : $x=2\Rightarrow f(2)=8-6+1=3\Rightarrow(2\,,3)$

۲) شیب: $f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(2)=12-3=9$

۳) معادلهٔ خط مماس: $y-3=9(x-2)\Rightarrow y=9x-15$

۱۳. گزینهٔ «۲»

ابتد آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[1,1/21]$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{f(1/21)-f(1)}{1/21-1}=\frac{\frac{2/42+1}{\sqrt{1/21}}-\frac{3}{\sqrt{1}}}{0/21}=\frac{\frac{3/42}{1/1}-3}{0/21}=\frac{\frac{0/12}{1/1}}{0/21}=\frac{\frac{1/2}{11}}{0/21}=\frac{40}{77}$$

حالا آهنگ لحظه‌ای در $x=۴$:

$$f'(x)=\frac{۲(\sqrt{x})-(۲x+۱)\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۴-\frac{۹}{۴}}{۴}=\frac{۷}{۱۶}$$

در نتیجه ضرب این دو مقدار برابر است با:

$$\frac{۴۰}{۷۷}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۵}{۲۲}$$

۱۴. گزینهٔ «۱»

از آن‌جا که پرتوان مخرج $f(x)$ برابر $x^۲$ است و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=۱$، پس باید پرتوان صورت $f(x)$ هم $x^۲$ باشد و این یعنی $n=۲$ و $a=-۲$. در این‌صورت: $f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x^۲+x-۲}{x^۲+۴x-۵}=\frac{x^۲+x-۲}{x^۲+۴x-۵}$. حالا داریم:

$$\lim_{x\to۱} f(x)=\lim_{x\to۱}\frac{x^۲+x-۲}{x^۲+۴x-۵}\overset{H}{=}\lim_{x\to۱}\frac{۲x+۱}{۲x+۴}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱۵. گزینهٔ «۳»

از $x+y=۱$ داریم $y=۱-x$. با قراردادن $y=۱-x$، داریم:

$$\frac{xy+۵x+۲y}{۲x+y^۲}=\frac{x(۱-x)+۵x+۲(۱-x)}{۲x+(۱-x)^۲}=\frac{۴x-x^۲+۲}{x^۲+۱}$$

پس $f(x)=\frac{-x^۲+۴x+۲}{x^۲+۱}$ است.

$$f'(x)=\frac{(-۲x+۴)(x^۲+۱)-۲x(-x^۲+۴x+۲)}{(x^۲+۱)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow(-۲x^۳-۲x+۴x^۲+۴)+۲x^۳-۸x^۲-۴x=۰\Rightarrow-۴x^۲-۶x+۴=۰\Rightarrow۲x^۲+۳x-۲=۰$$

$$\Rightarrow(x+۲)(۲x-۱)=۰\Rightarrow x=-۲ \text{ یا } x=\frac{۱}{۲}$$

اگر $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، آن‌گاه $y=\frac{۱}{۲}$ است و:

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{-\frac{۱}{۴}+۲+۲}{\frac{۱}{۴}+۱}=\frac{\frac{۱۵}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=۳$$

اما اگر $x=-۲$ باشد، آن‌گاه $y=۳$ است و:

$$f(-۲)=\frac{-۴-۸+۲}{۵}=\frac{-۱۰}{۵}=-۲$$

واضح است که ۳ بیشترین مقدار $f(x)$ است.

۱۶. گزینهٔ «۳»

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۳|x|+۲}{bx+|x|+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۳x+۲}{bx+x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۳)x+۲}{(b+۱)x+۱}=\frac{a+۳}{b+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض مسئله}}\frac{a+۳}{b+۱}=۴$$

$$\lim_{x\to(-\infty)} f(x)=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{ax+۳|x|+۲}{bx+|x|+۱}=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{(a-۳)x+۲}{(b-۱)x+۱}=\frac{a-۳}{b-۱}\xrightarrow{\text{فرض مسئله}}\frac{a-۳}{b-۱}=۲$$

از اطلاعات به‌دست آمده به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}\dfrac{a+3}{b+1}=4\\ \dfrac{a-3}{b-1}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+3=4b+4\\ a-3=2b-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-4b=1\\ a-2b=1\end{cases}\Rightarrow b=0\,,\,a=1\Rightarrow f(x)=\frac{x+3|x|+2}{|x|+1}$$

دقت کنید که x در همسایگی نزدیک $x=1$ مثبت است و لذا در این همسایگی $|x|=x$ است. این یعنی:

$$f(x)=\frac{x+3|x|+2}{|x|+1}=\frac{x+3x+2}{x+1}=\frac{4x+2}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{4-2}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

۱۷. گزینهٔ «۱»

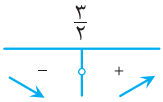
مختصات نقطهٔ C، $(x\,,\,x^2+x)$ است. پس:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 6\\ x & x^2+x\\ 1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|(6+3(x^2+x)-2x)-(-6+6x+x^2+x)|$$

$$=\frac{1}{2}|(3x^2+x+6)-(x^2+7x-6)|=\frac{1}{2}|2x^2-6x+12|=|x^2-3x+6|$$

حالا دقت کنید که دلتای عبارت x^2-3x+6 منفی است $(\Delta=-15)$. پس این عبارت همواره مثبت است و این یعنی:

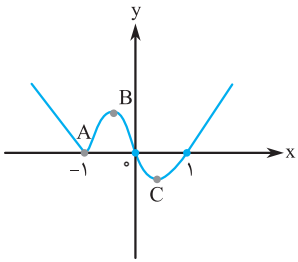
$$f(x)=|x^2-3x+6|=x^2-3x+6\Rightarrow f'(x)=2x-3\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \text{Minf}(x)=f(\frac{3}{2})=\frac{15}{4}$$

۱۸. گزینهٔ «۲»

توابع چندضابطه‌ای یا دارای قدرمطلق را که یادتان هست. بهترین راهکار شمردن نقاط بحرانی این توابع، رسم است: همان‌طور که می‌بینید، این تابع ۳ نقطهٔ بحرانی دارد.



۱۹. گزینهٔ «۲»

معادلهٔ خط مماس بر $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

۱) نقطهٔ تماس: $x=2\,,\,y=\dfrac{5}{3}$

۲) شیب: $f'(x)=\dfrac{2-1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{9}$

۳) معادلهٔ خط: $y-\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{9}(x-2)\Rightarrow y=\dfrac{1}{9}x+\dfrac{13}{9}$

پس خط $y=\frac{۱}{۹}x+\frac{۱۳}{۹}$ بر منحنی $y=ax^{۳}+bx$ در $x=۱$ مماس است. این یعنی:

$$\begin{cases} a+b=\frac{۱}{۹}(۱)+\frac{۱۳}{۹}=\frac{۱۴}{۹} \\ (۳ax^{۲}+b)_{x=۱}=۳a+b=\frac{۱}{۹} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{۱۴}{۹} \\ ۳a+b=\frac{۱}{۹} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{-۱۳}{۱۸}, b=\frac{۴۱}{۱۸} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{-۴۱}{۱۳}$$

۲۰. گزینهٔ «۱»

$f'(x)=x^{۲}+x-۲ \Rightarrow$

x		-۲		۱	
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

به وضوح $x=-۲$ طول ماکزیمم نسبی f است. لذا $y=f(-۲)=\frac{۱۹}{۳}$ عرض این نقطه است. پس $a=-۲$ و $b=\frac{۱۹}{۳}$. لذا ما به دنبال معادلهٔ خط مماس بر $f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۳ $x=\frac{۳b-a}{۷}=\frac{۱۹+۲}{۷}=۳$ هستیم.

۱) نقطهٔ تماس : $x=۳ \Rightarrow y=f(۳)=\frac{۲۱}{۲}$

۲) شیب: $f'(۳)=(x^{۲}+x-۲)_{x=۳}=۹+۲-۱=۱۰$

۳) معادلهٔ خط مماس: $y-\frac{۲۱}{۲}=۱۰(x-۳)$

طول‌ازمبدأ هم که یعنی عددگذاری $y=۰$:

$$۰-\frac{۲۱}{۲}=۱۰(x-۳) \Rightarrow \frac{-۲۱}{۲۰}=x-۳ \Rightarrow x=\frac{۳۹}{۲۰}=۱/۹۵$$

استراتژی ۱) آزمون از استاندارد کنکور دشوارتر بود. می‌توانید این آزمون را به عنوان نمونه‌ای از ۲۰ سؤال سخت کنکوری از این مباحث لحاظ کنید.

۲) آزمون با یک مسئلهٔ مفهومی شروع می‌شود. سپس ۶ مسئلهٔ محاسباتی و متوسط رو به ساده داریم. این تجربهٔ خوب را به یاد داشته باشید: با یک یا دو مسئلهٔ دشوار خودتان را نبازید. در اکثر مواقع بعد از نهایتاً ۳ مسئلهٔ دشوار، یک قطار سؤال کاملاً معمولی می‌آید.

۳) یکی از سؤالات مفهومی این آزمون، عیناً از کتاب درسی است. در این کتاب (جمع‌بندی ریاضی تجربی مهروماه) تأکید زیادی روی مسائل و تمرینات کتاب درسی، به‌خصوص در فصل‌های کاربرد مشتق و احتمال داریم.

۴) پیشنهاد می‌کنیم این آزمون را دوبار حل کنید و همهٔ سؤالات آن را بررسی کنید. انتظار می‌رود ۹ سؤال از این قسمت‌ها در کنکور مشاهده کنید.

به امید بهروزی‌تان

پاسخنامهٔ آزمون موضوعی (۴)

۱. گزینهٔ «۲»

از معلومات مسئله داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{a_2}+\frac{2}{a_4}=-\frac{5}{2}\\ a_6=2a_3+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a_3-d}+\frac{2}{a_3+d}=-\frac{5}{2}\\ a_3+3d=2a_3+3\end{cases}$$

از معادلهٔ دوم به $a_3=3d-3$ می‌رسیم. با قراردادن در معادلهٔ اول داریم:

$$\frac{1}{2d-3}+\frac{2}{4d-3}=-\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{8d-9}{(2d-3)(4d-3)}=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 16d-18=-5(8d^2-18d+9)\Rightarrow 40d^2-74d+27=0$$

$$\Rightarrow(2d-1)(20d-27)=0\Rightarrow d=\frac{1}{2}\ \text{یا}\ \frac{27}{20}$$

اگر $d=\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه $a_3=3d-3=-\frac{3}{2}$ خواهد بود. لذا $a_1=a_3-2d=-\frac{5}{2}$ و در نتیجه جملات دنباله $-\frac{5}{2},-2,-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\dots$ خواهند بود. همان‌طور که می‌بینید، جملهٔ هفتم اولین جملهٔ مثبت دنباله است.

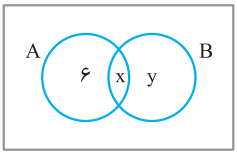
اگر $d=\frac{27}{20}$ باشد، آن‌گاه $a_3=3d-3=\frac{21}{20}$ است. در این‌صورت $a_2=-\frac{6}{20}$ می‌شود. پس همین جملهٔ سوم، نخستین جملهٔ مثبت دنباله است.

با توجه به گزینه‌ها، اولین جملهٔ مثبت همان جملهٔ هفتم است که برای $d=\frac{1}{2}$ و $a_1=-\frac{5}{2}$ رخ داده است.

۲. گزینهٔ «۴»

A : علاقه‌مندان به فوتبال

B : علاقه‌مندان به والیبال



طبق اطلاعات مسئله، داریم:

$$\begin{cases}6+x+y=16\\ 6+x+(30-(6+x+y))=22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=10\\ 30-y=22\end{cases}\Rightarrow y=8\,,\,x=2$$

بنابراین ۲ نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند.

۳. گزینهٔ «۲»

$$(x+\frac{4}{x})(x-1)=x^2\Rightarrow x^2-x+4-\frac{4}{x}=x^2\Rightarrow x+\frac{4}{x}-4=0\Rightarrow x^2-4x+4=0$$

$$\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x=2$$

بنابراین سه جملهٔ نخست دنباله ۱ , ۲ , ۴ هستند. لذا $a_1 = ۴$ و $q = \frac{۱}{۲}$ است.

این یعنی:

$$a_۷ = a_۱ q^۶ = ۴(\frac{۱}{۲})^۶ = \frac{۱}{۱۶}$$

۴. گزینهٔ «۴»

$$۳!۵! = ۶ \times ۱۲۰ = ۷۲۰$$

۵. گزینهٔ «۲»

اگر بزرگ‌ترین عضو ۵ باشد: $\binom{۴}{۳}$

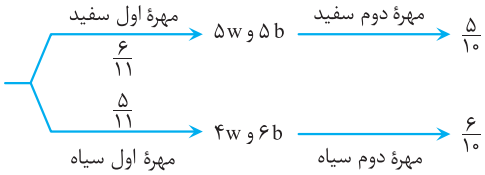
اگر بزرگ‌ترین عضو ۱۰ باشد: $\binom{۹}{۳}$

اگر بزرگ‌ترین عضو ۱۵ باشد: $\binom{۱۴}{۳}$

در کل داریم:

$$\binom{۴}{۳} + \binom{۹}{۳} + \binom{۱۴}{۳} = ۴۵۲$$

۶. گزینهٔ «۱»



احتمال خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{۶}{۱۱} \times \frac{۵}{۱۰} + \frac{۵}{۱۱} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۱۱} + \frac{۳}{۱۱} = \frac{۶}{۱۱}$$

۷. گزینهٔ «۳»

پرتاب دوم «رو» آمده اســـت. برای این‌که تعداد «رو»ها بیشـــتر از تعداد «پشت»ها نباشد، یا باید همین یک‌بار «رو» آمده باشد یا این‌که یک‌بار دیگر هم «رو» بیاید.

فضای نمونه‌ای:

$$n(S) = ۲ \times ۱ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

پیشامد:

$$A = \begin{cases} ۱ : \text{فقط پرتاب دوم «رو»} \\ \binom{۳}{۱} \times ۱ = ۳ : \text{پرتاب دوم و یک پرتاب دیگر «رو»} \end{cases}$$

بنابراین $n(A) = ۱ + ۳ = ۴$. در نتیجه:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

۸. گزینهٔ «۲»

مقسوم‌علیه‌های ۱۲ عبارت‌اند از:

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲$$

بنابراین:

$x + y = ۱ \Rightarrow$ در اعداد تاس جوابی ندارد.

$x + y = ۲ \Rightarrow (۱, ۱)$

$x + y = ۳ \Rightarrow (۱, ۲), (۲, ۱)$

$x+y=۴ \Rightarrow (۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)$

$x+y=۶ \Rightarrow (۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)$

$x+y=۱۲ \Rightarrow (۶,۶)$

روی‌هم‌رفته $n(A)=۱۲$. طبق معمول $n(S)=۳۶$ است و لذا:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

۹. گزینهٔ «۲»

$$(۵!۴!۳!)۳!=(۵!۴!۳!)\times ۶=(۶\times ۵!)۴!۳!=۶!۴!۳!$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

به $\binom{۶}{۳}$ طریق می‌توان از بین ۶ کتاب، ۳ تا را انتخاب کرد. ۳ کتاب را به $۲^۳=۸$ طریق می‌توان به افراد A و B هدیه کرد. اما در یک حالت همه کتاب‌ها به A و در یک حالت همهٔ کتاب‌ها به B داده می‌شوند. آن‌چه ما می‌خواهیم، ۶ حالت دیگر هدیه‌دادن هستند. لذا:

$$\binom{۶}{۳}\times ۶=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۳!}\times ۶=۱۲۰$$

۱۱. گزینهٔ «۲»

فضای نمونه‌ای: $n(S)=۳۶$

پیشامد: $(۱,۲),(۲,۳),\dots,(۵,۶),(۲,۱),(۳,۲),\dots,(۶,۵)$

بنابراین $n(A)=۱۰$. پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۱۲. گزینهٔ «۲»

ابتدا دقت کنید که داریم:

$$P(A')=۲P(A)\Rightarrow ۱-P(A)=۲P(A)\Rightarrow ۱=۳P(A)\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(B')=۳P(B)\Rightarrow ۱-P(B)=۳P(B)\Rightarrow ۱=۴P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۴}$$

از آن‌جا که A و B مستقل هستند، داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

بنابراین:

$$\text{احتمال رخ‌ندادن هیچ‌کدام}=۱-P(A\cup B)=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=۱-(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۲})$$

$$=۱-(\frac{۶}{۱۲})=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۳. گزینهٔ «۲»

فضای نمونه‌ای: $n(S)=۳۶$

پیشامد: $A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵),(۴,۴),(۲,۶),(۶,۲)\}$

یعنی $n(A)=۱۲$. بنابراین:

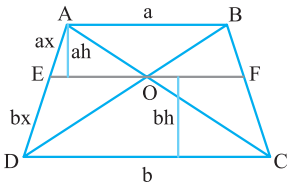
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴. گزینهٔ «۱»

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۶}{۰/۸}=\frac{۳}{۴}$$

این سؤال ساده بسیار مهم است.

۱۵. گزینهٔ «۱»



فرض کنید قاعده‌های ذوزنقه a و b باشند. مطابق درسنامهٔ هندسه (نکتهٔ صفحهٔ ۳۴۱)، خطی که به موازات قاعده‌ها، از محل تلاقی قطرها می‌گذرد، دو ساق را به نسبت قاعده‌ها تقسیم می‌کند. یعنی:

اکنون بنا به فرمول صفحهٔ ۳۴۴ کتاب، داریم:

$$EF=\frac{a(bx)+b(ax)}{ax+bx}=\frac{۲ab}{a+b}$$

ارتفاع‌ها هم که ah و bh هستند. بنابراین:

$$\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}ah(a+EF)}{\frac{۱}{۲}bh(b+EF)}=\frac{a(a+\frac{۲ab}{a+b})}{b(b+\frac{۲ab}{a+b})}=\frac{a(\frac{a^۲+۳ab}{a+b})}{b(\frac{b^۲+۳ab}{a+b})}=\frac{a(a^۲+۳ab)}{b(b^۲+۳ab)}$$

که طبق فرض سؤال برابر با $\frac{۷}{۲۰}$ است:

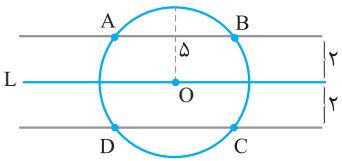
$$\frac{a^۳+۳a^۲b}{b^۳+۳ab^۲}=\frac{۷}{۲۰}\Rightarrow ۲۰a^۳+۶a^۲b=۷b^۳+۲۱ab^۲\Rightarrow ۲۰a^۳+۶۰a^۲b-۷b^۳-۲۱ab^۲=۰$$

$$\xrightarrow{\div a^۳}۲۰+۶۰(\frac{b}{a})-۷(\frac{b}{a})^۳-۲۱(\frac{b}{a})^۲=۰\xrightarrow{\frac{b}{a}=T}-۷T^۳-۲۱T^۲+۶۰T+۲۰=۰$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ درجهٔ ۳}}T=۲\Rightarrow\frac{b}{a}=۲$$

۱۶. گزینهٔ «۳»

۴ نقطه. با دقت نگاه کنید:



۱۷. گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}\\ ۲c=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}\\ c=۵\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۱۵}{۲},c=۵$$

حالا داریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow\frac{۲۲۵}{۴}=۲۵+b^۲\Rightarrow\frac{۱۲۵}{۴}=b^۲\Rightarrow b=\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow ۲b=۵\sqrt{۵}$$

۱۸. گزینهٔ «۴»

چون دایره بر محورهای مختصات مماس اســت و از $(-۳,-۱)$ می‌گذرد، پس مرکز آن در ربع سوم قرار دارد و معادلهٔ این دایره به‌صورت زیر است (درسنامهٔ صفحهٔ ۳۸۵):

$$(x+R)^۲+(y+R)^۲=R^۲ \xrightarrow{(-۳,-۱)} (-۳+R)^۲+(-۱+R)^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲-۶R+۹+R^۲-۲R+۱=R^۲ \Rightarrow R^۲-۸R+۱۰=۰ \Rightarrow R=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴-۴۰}}{۲}$$

$$=\frac{۸\pm\sqrt{۲۴}}{۲}=\frac{۸\pm۲\sqrt{۶}}{۲}=۴\pm\sqrt{۶}$$

بدیهی است که $R=۴+\sqrt{۶}$ شعاع بزرگ‌تر است.

۱۹. گزینهٔ «۲»

فرض کنید معادلهٔ دایره $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. داریم:

$$\begin{cases}(۲,۱):۵+۲a+b+c=۰\\(-۱,-۳):۱۰-a-۳b+c=۰\\(۱,-۱):۲+a-b+c=۰\end{cases} \xrightarrow{\text{منهاکردن}} \begin{cases}۳a+۴b=۵\\۲a+۲b=۸\end{cases} \Rightarrow a=۱۱,\ b=-۷$$

با قراردادن در یکی از معادلات اولیه، داریم:

$$۵+۲(۱۱)+(-۷)+c=۰ \Rightarrow c=-۲۰$$

لذا معادلهٔ این دایره $x^۲+y^۲+۱۱x-۷y-۲۰=۰$ است.

تقاطع با محور طولی یعنی y را برابر صفر قرار دهیم:

$$y=۰ \Rightarrow x^۲+۱۱x-۲۰=۰ \Rightarrow |AB|=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۱۲۱+۸۰}=\sqrt{۲۰۱}$$

۲۰. گزینهٔ «۳»

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_۹+۱۶}{۱۰}=۷ \Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_۹=۵۴$$

$$C.V(x)=۳ \Rightarrow \frac{\sqrt{var(x)}}{۷}=۳ \Rightarrow var(x)=۴۴۱ \Rightarrow \frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_۹^۲+۱۶^۲}{۱۰}-۴۹=۴۴۱$$

$$\Rightarrow x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_۹^۲=۴۶۴۴$$

حال داریم:

$$var(\text{داده باقی‌مانده ۹})=\frac{x_۱^۲+\cdots+x_۹^۲}{۹}-\left(\frac{x_۱+\cdots+x_۹}{۹}\right)^۲=\frac{۴۶۴۴}{۹}-\left(\frac{۵۴}{۹}\right)^۲=۵۱۶-۳۶=۴۸۰$$

استراتژی ۱) با این‌که این آزمون چهار سؤال بسیار دشوار (مسائل ۱، ۱۰، ۱۲ و ۱۵) داشت، در کل آزمون متوسطی محسوب می‌شود. اما چون مسائل سخت آن در نقاط حساسی قرار دارند (سؤال ۱ و سؤال ۱۵ آزمون خیلی سخت بودند)، کسب درصد خوب از آن نیازمند مدیریت خوبی در زمان است.

۲) ســعی کردیم با مسائل غیرمتداول، کمی شرایط آزمون را سخت کنیم تا تجربهٔ یک آزمون واقعی را ایجاد کنیم. پس یک‌بار دیگر تأکید می‌کنیم که از چند مسئلهٔ سخت در هیچ آزمونی نترسید. چون اولاً مسائل سخت کنکور هم اینقدر سخت نیستند و ثانیاً بعد از مسائل سخت، بدون شک چند مسئلهٔ معمولی خواهیم داشت.

۳) سؤال آمار این آزمون خیلی مهم است. با این‌که بعید است سؤالی در این سطح در کنکور بیاید، اما در عوض با مطالعهٔ جواب یا حل کردن آن، تمام آمار را دوره می‌کنید.

۴) انتظار می‌رود از این قسمت‌ها ۷ یا ۸ سؤال در کنکور بیاید.

پرهای تو بسته مباد لبات پر از رنگ‌های شاد