هایپرتست

پاسخ‌نامهٔ فصل ۱ تا ۱۶

هایپرتست
فصل ۱

۱. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ دو عدد معکوس هستند. بنابراین:

$$a=\sqrt{\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^۲}+\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}}=\sqrt{|۲+\sqrt{۳}|+|۲-\sqrt{۳}|}=\sqrt{۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}}=\sqrt{۴}=۲$$

بنابراین $\sqrt{a+\sqrt{۳}}+\sqrt{a-\sqrt{۳}}=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$. حاصل این عبارت را با نامگذاری به‌دست می‌آوریم.

$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=A>۰\xrightarrow{\text{توان ۲}}(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^۲=A^۲$$

$$\Rightarrow ۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}+۲\sqrt{۴-۳}=A^۲\Rightarrow ۶=A^۲\xrightarrow{A>۰}A=\sqrt{۶}$$

۲. گزینهٔ «۲»

به کمک روش $۲ab$ می‌فهمیم که $۱۷+۱۲\sqrt{۲}=(۳+۲\sqrt{۲})^۲$ است. مجدداً روی $۳+۲\sqrt{۲}$ از این روش کمک می‌گیریم و می‌فهمیم که $۳+۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲}+۱)^۲$ است. پس:

$$(۱۷+۱۲\sqrt{۲})^{\frac{۵}{۸}}(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۴}{۳}}=((\sqrt{۲}+۱)^۴)^{\frac{۵}{۸}}(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۴}{۳}}=(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۵}{۲}}(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۴}{۳}}=(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۵}{۲}-\frac{۴}{۳}}=(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۷}{۶}}$$

۳. گزینهٔ «۲»

برای محاسبهٔ $\sqrt{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}-\sqrt{۲\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}$ اصولاً باید نام‌گذاری کنیم. اما طراح این کار را هم کرده است. بنابراین به کمک اتحاد اول خواهیم داشت:

$$\sqrt{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}-\sqrt{۲\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}=۲^a\Rightarrow(\sqrt{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}-\sqrt{۲\sqrt{۲}-\sqrt{۶}})^۲=۲^{۲a}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲}+\sqrt{۶}+۲\sqrt{۲}-\sqrt{۶}-۲\sqrt{(۲\sqrt{۲})^۲-\sqrt{۶}^۲}=۲^{۲a}\Rightarrow ۴\sqrt{۲}-۲\sqrt{۸-۶}=۲^{۲a}\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=۲^{۲a}$$

$$\Rightarrow ۲^{\frac{۳}{۲}}=۲^{۲a}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=۲a\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۴. گزینهٔ «۳»

در صورت کسر، اتحاد جملهٔ مشترک داریم:

$$\frac{(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲}{(|x|-۳)(|x|+۳)}=\frac{(x^۲+x-۱۲)(x^۲+x-۶)}{x^۲-۹}=\frac{(x+۴)(x-۳)(x+۳)(x-۲)}{(x-۳)(x+۳)}$$

$$=(x+۴)(x-۲)=x^۲+۲x-۸$$

۵. گزینهٔ «۲»

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=۷\Rightarrow\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲=۹\Rightarrow(\tan\alpha+\cot\alpha)^۲=۹\Rightarrow\tan\alpha+\cot\alpha=۳ \text{ یا } -۳$$

حالت اول اگر $\tan\alpha+\cot\alpha=۳$ باشد، داریم:

$$(\tan\alpha+\cot\alpha)^۳=۳^۳\Rightarrow\tan^۳\alpha+\cot^۳\alpha+۳(۱)(\tan\alpha+\cot\alpha)=۲۷$$

$$\Rightarrow\tan^۳\alpha+\cot^۳\alpha+۳(۱)(۳)=۲۷\Rightarrow\tan^۳\alpha+\cot^۳\alpha=۱۸$$

حالت دوم اگر $\tan\alpha+\cot\alpha=-۳$ باشد، داریم:

$$(\tan\alpha+\cot\alpha)^۳=(-۳)^۳\Rightarrow \tan^۳\alpha+\cot^۳\alpha+۳(۱)(\tan\alpha+\cot\alpha)=-۲۷$$

$$\Rightarrow \tan^۳\alpha+\cot^۳\alpha+۳(۱)(-۳)=-۲۷\Rightarrow \tan^۳\alpha+\cot^۳\alpha=-۱۸$$

که -۱۸ در گزینه‌ها موجود است.

۶. گزینهٔ «۳»

ابتدا روی $x+۸+۴\sqrt{x+۴}$ از روش $۲ab$ استفاده می‌کنیم:

$$۲ab=۴\sqrt{x+۴}\Rightarrow ab=۲\sqrt{x+۴}\begin{cases}۲,\sqrt{x+۴} & \checkmark\\ ۲\sqrt{x+۴}\,,۱ & \times\end{cases}$$

بنابراین:

$$\sqrt{x+۸+۴\sqrt{x+۴}}=\sqrt{(۲+\sqrt{x+۴})^۲}=۲+\sqrt{x+۴}$$

حالا قرار می‌دهیم $x=۲\sqrt{۳}$:

$$۲+\underbrace{\sqrt{۲\sqrt{۳}+۴}}_{\text{روش } ۲ab}=۲+\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^۲}=۲+\sqrt{۳}+۱=۳+\sqrt{۳}$$

۷. گزینهٔ «۱»

مخرج $\dfrac{۲}{\sqrt[۴]{x+۱}-\sqrt[۴]{x-۱}}$ را در مزدوجش ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲(\sqrt[۴]{x+۱}+\sqrt[۴]{x-۱})}{(\sqrt[۴]{x+۱}-\sqrt[۴]{x-۱})(\sqrt[۴]{x+۱}+\sqrt[۴]{x-۱})}=\frac{۲(۵)}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}=\frac{۱۰}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}$$

حالا مخرج کسر اخیر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱۰(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}{(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱})(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}=\frac{۱۰(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}{(x+۱)-(x-۱)}=\frac{۱۰(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}{۲}$$

$$=۵(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})$$

۸. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که اگر $-۱<a<۰$ باشد، آن‌گاه $۰<|a|<۱$ است. می‌دانیم که اعداد بین صفر و یک، برعکس توان‌شان رشد می‌کنند. از آن‌جا که $-\frac{۳}{۵}<-\frac{۱}{۳}<\frac{۵}{۳}$ است، لذا $|a|^{-\frac{۳}{۵}}>|a|^{-\frac{۱}{۳}}>|a|^{\frac{۵}{۳}}$، یعنی $x>y>z$.

۹. گزینهٔ «۱»

$$(a+۱)^{-\frac{۱}{۲}}+(b+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=(۳+۲\sqrt{۲})^{-\frac{۱}{۲}}+(۳-۲\sqrt{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\overset{\text{روش } ۲ab}{=\!=}((\sqrt{۲}+۱)^۲)^{-\frac{۱}{۲}}+((\sqrt{۲}-۱)^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$=(\sqrt{۲}+۱)^{-۱}+(\sqrt{۲}-۱)^{-۱}=(\sqrt{۲}-۱)^۱+(\sqrt{۲}+۱)^۱=۲\sqrt{۲}$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک، داریم: $(x^۴+x^۲)^۲-۸(x^۴+x^۲)+۱۲=(x^۴+x^۲-۶)(x^۴+x^۲-۲)$

مجدداً به کمک اتحاد جملهٔ مشترک، داریم: $(x^۴+x^۲-۶)(x^۴+x^۲-۲)=(x^۲+۳)(x^۲-۲)(x^۲+۲)(x^۲-۱)$

همان‌طور که می‌بینید، عامل $(x^۲-۳)$ مشاهده نمی‌شود.

هایپرتست
فصل ۲

۱. گزینهٔ «۲» ابتدا دقت می‌کنیم که $\alpha\beta=1$ است. پس ریشه‌ها معکوس هم هستند. در نتیجه:

$$\frac{\alpha^{\beta-1}}{\beta^{\alpha}}+\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\beta}}=\alpha^{\beta+\alpha-1}+\beta^{\alpha+\beta-1}$$

اما $\alpha+\beta=4$ است. پس در واقع $\alpha^3+\beta^3$ را باید حساب کنیم.

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta)=4(4^2-3(1))=52$$

۲. گزینهٔ «۳»

دقت کنید که $(2+\sqrt{3})^x$ و $(2-\sqrt{3})^x$ معکوس هم هستند. لذا باید تغییر متغیر $T=(2+\sqrt{3})^x$ را اعمال کنیم:

$$T+\frac{1}{T}=14\Rightarrow T^2+1=14T\Rightarrow T^2-14T+1=0\xrightarrow{\Delta=196-4=192}$$

$$T_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{192}}{2}=7\pm4\sqrt{3}\overset{\text{روش } 2ab}{=\!=}(2\pm\sqrt{3})^2$$

$$T_1=(2+\sqrt{3})^2\xrightarrow{\text{پس‌گرفتن } T}(2+\sqrt{3})^x=(2+\sqrt{3})^2\Rightarrow x=2$$

$$T_2=(2-\sqrt{3})^2\xrightarrow{\text{پس‌گرفتن } T}(2+\sqrt{3})^x=(2-\sqrt{3})^2=(2+\sqrt{3})^{-2}\Rightarrow x=-2$$

۳. گزینهٔ «۴»

در ابتدا داریم: $||2x+3|-x+1|=x+2\Rightarrow|2x+3|-x+1=x+2$ یا $|2x+3|-x+1=-x-2$

$\Rightarrow|2x+3|=2x+1$ یا $|2x+3|=-3$

معادلهٔ $|2x+3|=-3$ که تعطیل است. اما معادلهٔ اول:

$|2x+3|=2x+1\Rightarrow 2x+3=2x+1$ یا $2x+3=-2x-1\Rightarrow 3=1$ (بی‌معنی) یا $4x=-4\Rightarrow x=-1$

حالا باید جواب‌های به‌دست آمده را چک کنیم. کلاً یک جواب به‌دست آوردیم:

$x=-1\Rightarrow||-2+3|+1+1|=-1+2\Rightarrow|3|=1$ ✗

بنابراین این معادله فاقد جواب است.

۴. گزینهٔ «۴»

ابتدا دقت کنید که بنا به اتحاد جملهٔ مشترک داریم:

$$x^2-\underbrace{(3a+2)}_{\text{جمع}}x+\underbrace{2a(a+1)}_{\text{ضرب}}=0\Rightarrow x^2-(3a+2)x+a(2a+2)=0$$

$$\Rightarrow x^2-(a+2a+2)x+a(2a+2)=0\Rightarrow(x-a)(x-2a-2)=0\Rightarrow x=a \text{ یا } x=2a+2$$

حالا فهمیدیم که ریشه‌ها $x_1=a$ و $x_2=2a+2$ است. البته معلوم نیست که کدام ریشه بزرگ‌تر است. پس دو حالت داریم:

حالت اول $x_1=a$ ریشهٔ بزرگ‌تر باشد. در این حالت $x_2=2a+2$ ریشهٔ کوچک‌تر است.

پس: $a=(2a+2)+3\Rightarrow a=-5$

پس در این حالت ریشه‌ها $x_1=-5$ و $x_2=-10+2=-8$ هستند. یعنی ریشهٔ کوچک‌تر معادله -8 است.

حالت دوم اگر $x_2=2a+2$ ریشهٔ بزرگ‌تر باشد. در این صورت ریشهٔ کوچک‌تر $x_1=a$ است. پس:

$$2a+2=a+3\Rightarrow a=1$$

یعنی در این حالت ریشه‌ها ۴ و ۱ هستند. پس در این حالت $x=1$ ریشهٔ کوچک‌تر است.

۵. گزینهٔ «۱»

ابتدا به کمک اتحاد چاق‌ولاغر داریم:

$$\frac{(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}+x^2-2x+\frac{2}{3}=0\Rightarrow\frac{1}{x^2-2x+4}+x^2-2x+\frac{2}{3}=0$$

حالا به‌علت وجود عبارت پرتکرار از تغییر متغیر $x^2-2x=T$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{T+4}+T+\frac{2}{3}=0\Rightarrow\frac{1+(T+4)(T+\frac{2}{3})}{T+4}=0\Rightarrow\frac{T^2+\frac{14}{3}T+\frac{11}{3}}{T+4}=0\xrightarrow{\times 3}3T^2+14T+11=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیهٔ ضریب‌دار}}(T+1)(3T+11)=0\Rightarrow T=-1 \text{ یا } T=-\frac{11}{3}\xrightarrow{\text{پس‌گرفتن } T}x^2-2x=-1$$

$$\text{یا } x^2-2x=-\frac{11}{3}\Rightarrow x^2-2x+1=0 \text{ یا } x^2-2x+\frac{11}{3}=0\Rightarrow(x-1)^2=0 \text{ یا } x^2-2x+\frac{11}{3}=0$$

ریشهٔ معادلهٔ اول $x=1$ است. در معادلهٔ دوم $\Delta<0$ است و جواب ندارد. $x=1$ را باید چک کنیم که مخرج معادلهٔ اصلی را صفر نکند. خوشبختانه این کار را نمی‌کند. پس معادله فقط یک ریشه دارد و این ریشه البته که بزرگ‌ترین ریشهٔ معادله نیز هست.

۶. گزینهٔ «۳»

همین که ریشه‌ها جذر دارند یعنی مثبت هستند. پس یادتان باشد آخر راه‌حل چک کنیم که ریشه‌ها مثبت باشند. فرض کنیم ریشه‌ها α و β باشند. طبق فرض مسئله داریم:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}\Rightarrow\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=5\Rightarrow(m+2)+2\sqrt{m}=5\Rightarrow m+2\sqrt{m}-3=0$$

$$\Rightarrow(\sqrt{m}+3)(\sqrt{m}-1)=0\Rightarrow\sqrt{m}=-3 \text{ یا } \sqrt{m}=1\xrightarrow{\sqrt{m}\geq 0}m=1$$

با قراردادن $m=1$ می‌بینیم که معادله به‌صورت $x^2-3x+1=0$ است. بنابراین $\alpha\beta=+1$ است (یعنی α و β هم‌علامت هستند) و $\alpha+\beta=3$ است (پس β و α مثبت هستند) و البته که $\Delta>0$ است. لذا $m=1$ قابل قبول است.

۷. گزینهٔ «۱»

در ابتدا باید $k\geq 0$ باشد تا اصلاً معادله جواب داشته باشد. داریم:

$$||3x-2|-4|=k\Rightarrow|3x-2|-4=k \text{ یا } |3x-2|-4=-k$$

$$\Rightarrow|3x-2|=k+4 \text{ (۱) یا } |3x-2|=-k+4 \text{ (۲)}$$

چون $k \geq ۰$ است، پس $k+۴$ مثبت است. این یعنی معادلهٔ ۱ حتماً دو جواب دارد. حالا که می‌خواهیم معادلهٔ اصلی کلاً سه جواب داشته باشد، پس باید معادلهٔ ۲ یک جواب داشته باشد. برای این‌که $|۳x-۲|=-k+۴$ فقط یک جواب داشته باشد، یک راه بیشتر نداریم. این‌که $-k+۴=۰$ باشد. یعنی $k=۴$.

۸. گزینهٔ «۲»

ویژگی مهم $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ این است که $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$. در این مسئله که $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ جواب‌ها هستند، داریم:

$$S=\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{m+۱}{۲}\,,\ P=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{m}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲-۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۱=(-\frac{m+۱}{۲})^۲-۲(\frac{m}{۲})\Rightarrow m+۱=\frac{(m+۱)^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow m=-۱ \text{ یا } ۱=\frac{m+۱}{۴}\Rightarrow m=-۱ \text{ یا } m=۳$$

اگر $m=-۱$ باشد، داریم:

$$۲x^۲+(m+۱)x+m=۰\Rightarrow ۲x^۲-۱=۰$$

$$\Rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{۱}{(-\frac{۱}{۲})}=-۲$$

البته باید دقت کنیم که ریشه‌های معادله در بازهٔ $[-۱,۱]$ باشند که خوشبختانه هستند.

در حالتی که $m=۳$ است، هم داریم:

$$۲x^۲+(m+۱)x+m=۰\Rightarrow ۲x^۲+۴x+۳=۰\Rightarrow \Delta<۰$$

یعنی در این حالت اصلاً ریشه‌ای نداریم. (هر چه‌قدر بگوییم، کم است. چک‌کردن معادله‌ها فوق‌العاده مهم است. هرکسی در آزمونی سؤال معادله‌ای را غلط جواب داده، علت اصلی‌اش چک‌نکردن بوده است).

۹. گزینهٔ «۴»

$$\sqrt{x}+\sqrt{۸-x}=k\xrightarrow{k\geq ۰}x+۸-x+۲\sqrt{۸x-x^۲}=k^۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{۸x-x^۲}=\frac{k^۲-۸}{۲}\Rightarrow ۸x-x^۲=(\frac{k^۲-۸}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow x^۲-۸x+۱۶=۱۶-(\frac{k^۲-۸}{۲})^۲\Rightarrow (x-۴)^۲=۱۶-(\frac{k^۲-۸}{۲})^۲$$

اما برای این‌که این معادله تنها یک جواب داشته باشد، باید سمت راست آن صفر شود:

$$\Rightarrow ۱۶-(\frac{k^۲-۸}{۲})^۲=۰\Rightarrow \frac{k^۲-۸}{۲}=۴ \text{ یا } \frac{k^۲-۸}{۲}=-۴$$

$$\Rightarrow k=۰,۴,-۴\xrightarrow{k\geq ۰}k=۴,۰\xrightarrow{\text{چک}}k=۴$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

$x^۲-۲x$ پرتکرار است. پس:

$$x^۲-۲x=T\Rightarrow \frac{۱}{T+۵}+\frac{۲}{T+۶}=\frac{۶}{T+۷}\Rightarrow \frac{T+۶+۲(T+۵)}{(T+۵)(T+۶)}=\frac{۶}{T+۷}\Rightarrow \frac{۳T+۱۶}{T^۲+۱۱T+۳۰}=\frac{۶}{T+۷}$$

$$\Rightarrow (3T+16)(T+7)=6(T^2+11T+30)$$

$$\Rightarrow 3T^2+37T+112=6T^2+66T+180 \Rightarrow 3T^2+29T+68=0 \Rightarrow (3T+17)(T+4)=0$$

$$\Rightarrow T=-\frac{17}{3} \text{ یا } T=-4 \xrightarrow{\text{پس‌گرفتن } T} x^2-2x=-\frac{17}{3} \text{ یا } x^2-2x=-4$$

$$\Rightarrow x^2-2x+\frac{17}{3}=0 \text{ یا } x^2-2x+4=0$$

که Δ هر دو معادله منفی است. پس معادله فاقد ریشه است.

هایپرتست — فصل ۳

۱. گزینهٔ «۱»

با فرض $T=\frac{x+1}{2x-1}$، داریم:

$$T^2-4T+3<0 \Rightarrow (T-3)(T-1)<0 \Rightarrow 1<T<3 \Rightarrow 1<\frac{x+1}{2x-1}<3 \xrightarrow[\text{آزمون ۲}]{\text{سؤال ۱}} x\in(0/8,2)$$

۲. گزینهٔ «۳»

متأسفانه نمی‌توانیم به توان ۲ برسانیم، زیرا علامت x مشخص نیست. چارهٔ کار، حالت‌بندی است.

۱) اگر $x\le 0$ باشد، آن‌گاه سمت چپ نامعادله منفی یا صفر است، اما سمت راست ۲ است. لذا در این حالت نامعادله برقرار است. تا این‌جا $x\in(-\infty,0]$ را می‌پذیریم.

۲) اگر $x>0$ باشد، دو طرف مثبت خواهند بود و به توان ۲ رساندن مجاز است.

$$x>0 \Rightarrow \underset{\oplus}{x}\,\underset{\oplus}{|x-3|}<\underset{\oplus}{2} \Rightarrow x^2(x-3)^2<4$$

$$\Rightarrow x^2(x-3)^2-4<0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x(x-3)-2)(x(x-3)+2)<0$$

$$\Rightarrow (x^2-3x-2)(x^2-3x+2)<0 \Rightarrow$$

x		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		1		2		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	
$P(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow x\in\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2},1\right)\cup\left(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \xrightarrow{x>0} x\in(0,1)\cup\left(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

بنابراین جواب نهایی مسئله می‌شود:

$$(-\infty,0]\cup(0,1)\cup\left(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)=\left(-\infty,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)-[1,2]$$

۳. گزینهٔ «۱»

اولاً به خاطر وجود $\sqrt{x+3}$، داریم:

$$x+3\ge 0 \Rightarrow x\ge -3$$

حالا با روش ۲ab داریم:

$$\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}}-2=\sqrt{x+3}+2-2=\sqrt{x+3}<2x$$

حالا سمت چپ نامنفی است، لذا سمت راست باید مثبت باشد. این یعنی $x>0$ است و این یعنی به توان ۲ رساندن مجاز است:

$$x+3<4x^2 \Rightarrow 0<4x^2-x-3=(x-1)\underbrace{(4x+3)}_{\oplus} \Rightarrow 0<x-1 \Rightarrow 1<x$$

۴. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که کسر $\frac{3x-1}{|x+1|}$ بین ۱ و ۲ است. این یعنی این کسر حتماً مثبت است. از آن‌جا که مخرج آن مثبت است، پس باید صورت آن هم مثبت باشد:

$$3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$$

اما $x>\frac{1}{3}$ باعث می‌شود که $x+1$ هم مثبت باشد، که یعنی $|x+1|=x+1$. حالا داریم:

$$1<\frac{3x-1}{x+1}<2 \xrightarrow[\text{ضرب مجاز}]{x+1>0} \underbrace{x+1<\overbrace{3x-1}^{2}}_{1}<2(x+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1<3x-1 \\ 3x-1<2x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<x \\ \text{و} \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x\in(1,3)$$

که با $x>\frac{1}{3}$ هم سازگار است.

۵. گزینهٔ «۱»

از آن‌جا که $|x+2|$ مثبت است، پس می‌توانیم دو طرف را در $|x+2|$ ضرب کنیم:

$$\frac{2x+3}{|x+2|}<\frac{|2x+3|}{x+2} \xrightarrow[\text{ضرب در } |x+2|]{|x+2| \text{ مثبت}} 2x+3<\frac{|x+2||2x+3|}{x+2} \xrightarrow[\text{تقسیم بر } |2x+3|]{|2x+3| \text{ مثبت}} \frac{2x+3}{|2x+3|}<\frac{|x+2|}{x+2}$$

حالا با دوتا عبارت به فرم $\frac{|A(x)|}{A(x)}$ و $\frac{B(x)}{|B(x)|}$ مواجه هستیم. نکتهٔ مهم این است که:

$$\frac{A(x)}{|A(x)|}=\frac{|A(x)|}{A(x)}=\begin{cases} 1 & ; \ A(x)>0 \\ -1 & ; \ A(x)<0 \end{cases}$$

برای این‌که $\frac{2x+3}{|2x+3|}<\frac{|x+2|}{x+2}$ باشد، باید سمت راست ۱+ و سمت چپ ۱− باشد:

$$\begin{cases} 2x+3<0 \\ \text{و} \\ x+2>0 \end{cases} \Rightarrow -2<x<-\frac{3}{2}$$

۶. گزینهٔ «۲»

از نمودار $y=xf(x)$ جدول تعیین‌علامت $y=xf(x)$ را پیدا می‌کنیم و از تقسیم آن بر x به جدول $y=f(x)$ می‌رسیم:

x		0		1		4	
xf(x)	+	0	−	0	+	0	
x	−	0	+		+		+
f(x)	−		−	0	+	0	

حالا جدول $(x+2)f(x)$ ساده است:

x		−2		0		1		4	
x+2	−	0	+		+		+		+
f(x)	−		−		−	0	+	0	
(x+2)f(x)	+	0	−		−		+	0	

جواب

$$\Rightarrow x\in(-2,1)$$

۷. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که از $|x^2+x-6|=x^2+x-6$ نتیجه می‌گیریم که:

$$x^2+x-6\geq 0 \Rightarrow (x+3)(x-2)\geq 0 \Rightarrow$$

x		-3		2	
P(x)	+	○	−	○	+

$$\Rightarrow x\in\mathbb{R}-(-3,2)$$

۸. گزینهٔ «۱»

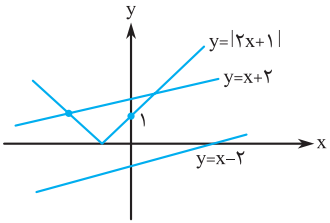
$$||2x+1|-x|<2 \Rightarrow -2\leq |2x+1|-x\leq 2 \Rightarrow -2+x\leq |2x+1|\leq 2+x$$

که بهترین راه‌حل آن، رسم است:

همان‌طور که می‌بینید، باید نقاط تلاقی $|2x+1|$ و $x+2$ را پیدا کنید:

$$|2x+1|=x+2 \Rightarrow 2x+1=x+2 \text{ یا } 2x+1=-x-2$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-1 \Rightarrow x\in(-1,1)$$



۹. گزینهٔ «۱»

معنی صورت سؤال این است که ۱ و ۳− ریشه‌های $2x^2+ax+b=0$ هستند. طبق قانون ویت، داریم:

$$-\frac{a}{2}=-3+1=-2 \Rightarrow a=4,\ \frac{b}{2}=-3(1) \Rightarrow b=-6$$

بنابراین:

$$\frac{a-x}{b+x}>0 \Rightarrow \frac{4-x}{x-6}>0 \Rightarrow \quad x\in(4,6)$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

به خاطر وجود $\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+5}$، شرط دامنه داریم:

$$\begin{cases}\sqrt{x+5} \Rightarrow x+5\geq 0 \Rightarrow x\geq -5 & ① \\ \sqrt{x} \Rightarrow x\geq 0 & ②\end{cases} \xrightarrow{① \cap ②} x\geq 0$$

که با توجه به مخرج، عملاً $x>0$ است. حالا با فاکتورگیری داریم:

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+5}(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})}{\sqrt{x(x+5)}}\geq 5 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+5}\geq 5$$

دقت کنید اگر $x=4$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$ است. حالا اگر $x>4$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+5}$ به‌ترتیب بزرگ‌تر از $\sqrt{4}$ و $\sqrt{9}$ هستند و لذا $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}>\sqrt{9}+\sqrt{4}=5$. پس $x>4$ جواب است. از طرفی اگر $x<4$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}<\sqrt{9}+\sqrt{4}=5$ است. پس $x<4$ جواب نیست. البته می‌توانستیم با به توان رساندن و کلی دعوا هم به جواب برسیم!

هایپرتست
فصل ٤

۱. گزینهٔ «۲»

دو خط موازی‌اند، پس اگر قرینهٔ L_1 نسبت به L_2 را L_3 بنامیم، آن‌گاه L_3 با دو خط L_1 و L_2 موازی است و L_2 دقیقاً وسط L_1 و L_3 قرار می‌گیرد:

$$\begin{cases} L_3: 2y+x=c \\ L_2: 2y+x=-1 \\ L_1: 2y+x=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{c+3}{2}=-1 \Rightarrow c=-5 \Rightarrow L_3: 2y+x=-5$$

۲. گزینهٔ «۴»

معنی این‌که پاره‌خط AB تماماً در ناحیهٔ دوم باشد، این است که نقاط A و B در ناحیهٔ دوم باشند:

$A: \begin{cases} a-1<0 \\ 2a+1>0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}<a<1$ در ناحیهٔ دوم باشد. ①

$B: \begin{cases} b-2<0 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow b<2, a>0$ در ناحیهٔ دوم باشد. ②

از ① و ② داریم: $0<a<1$ و $b<2$.

۳. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که $y=ax^2+bx+c$ از $(0,c)$ می‌گذرد. چون از $(2,c)$ هم گذشته، پس خط $x=1$ محور تقارن سهمی است. چون $(1,4)$ نقطه‌ای روی سهمی است و $x=1$ محور تقارن سهمی است، پس $(1,4)$ رأس سهمی است. لذا:

$$y=a(x-1)^2+4=ax^2-2ax+a+4=ax^2+bx+c \Rightarrow b=-2a, c=a+4$$

$$\Rightarrow \frac{b-c+4}{a}=\frac{-2a-a}{a}=-3$$

۴. گزینهٔ «۱»

سه میانهٔ مثلث در یک نقطه همرس هستند، یعنی نقطهٔ تلاقی سه خط یکی است:

نقطهٔ تلاقی: $\begin{cases} 2y=3x+2 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(2,4)$

پس $ay=(a+3)x+4$ از $(2,4)$ عبور می‌کند: $4a=2(a+3)+4=2a+10 \Rightarrow a=5$

۵. گزینهٔ «۳»

معادلهٔ خطی که از $A(-2,1)$ و $B(1,7)$ می‌گذرد، به روش معمول برابر است با:

$$a_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6}{3}=2 \Rightarrow y=2x+b \xrightarrow{(-2,1)} 1=-4+b$$

$$\Rightarrow b=5 \Rightarrow AB: y=2x+5=f(x)$$

خطی که بر AB عمود است، $y=-\frac{1}{2}x+b$ است که محور xها را در $x=6$ قطع می‌کند، یعنی از $(6,0)$ می‌گذرد:

$$0=-\frac{1}{2}(6)+b \Rightarrow b=3 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+3=g(x)$$

لذا سهمی مورد نظر $y=(۲x+۵)(-\frac{۱}{۲}x+۳)$ اســت. یک راه جالب پیدا کردن طول رأس سهمی، میانگین گرفتن از ریشه‌ها است. چون ریشه‌ها نسبت به طول رأس سهمی، یعنی محور تقارن سهمی، قرینه‌اند:

$$x_S=\frac{-\frac{۵}{۲}+۶}{۲}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow y_S=(۲(\frac{۷}{۴})+۵)(-\frac{۷}{۸}+۳)=(\frac{۱۷}{۲})(\frac{۱۷}{۸})=\frac{۲۸۹}{۱۶}$$

۶. گزینهٔ «۴»

اگر هندسه خوانده باشیم، به‌راحتی می‌گوییم جواب این مسئله همیشه ۷ است. حالا که هنوز هندسه نخوانده‌ایم، مکافات داریم:

$$A'=۲B-A=(-۲,۴)-(۲,۳)=(-۴,۱)$$
$$B'=۲C-B=(۶,۲)-(-۱,۲)=(۷,۰)$$
$$C'=۲A-C=(۴,۶)-(۳,۱)=(۱,۵)$$

$$S'=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}-۴ & ۱\\ ۷ & ۰\\ ۱ & ۵\\ -۴ & ۱\end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|۰+۳۵+۱-۷-۰+۲۰|=\frac{۴۹}{۲}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۲\\ ۳ & ۱\\ ۲ & ۳\end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|۴-۱+۹-(-۳)-۶-۲|=\frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{S'}{S}=۷$$

۷. گزینهٔ «۴»

برای این‌که خطی از ناحیهٔ چهارم عبور نکند، باید شیب آن مثبت باشد.

$$ay=۳x+(a-۱)\Rightarrow y=\frac{۳}{a}x+\frac{a-۱}{a}\Rightarrow \text{شیب}=\frac{۳}{a}>۰\Rightarrow a>۰$$

از طرفی باید عرض از مبدأ هم مثبت باشد:

$$\frac{a-۱}{a}>۰\xrightarrow{a>۰}a-۱>۰\Rightarrow a>۱$$

لذا جواب بازهٔ $(۱,+\infty)$ است.

۸. گزینهٔ «۲»

نکتهٔ مربوط به قرینه‌کردن خط نسبت به نقطه را در درسنامه خواندیم:

$$۳(۲(a+۳)-x)+۲(۲a-y)=۵\Rightarrow ۳(۲a+۶-x)+۴a-۲y=۵\Rightarrow ۱۰a+۱۸-۳x-۲y=۵$$

$$۳x+۲y=۱۰a+۱۳\xrightarrow[\text{(به خاطر صورت مسئله)}]{\times ۲}۶x+۴y=۲۰a+۲۶\xrightarrow[\text{مسئله}]{\text{فرض}}۲۰a+۲۶=۵\Rightarrow a=-\frac{۲۱}{۲۰}$$

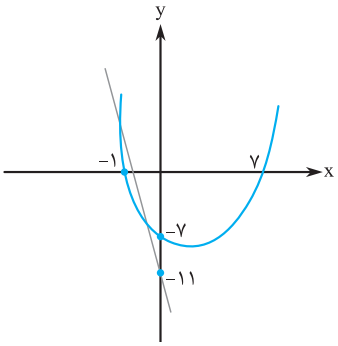
۹. گزینهٔ «۲»

اولاً در ناحیهٔ دوم و سوم، طول نقاط منفی است. لذا طول نقاط تلاقی این دو نمودار منفی است:

$$x^۲-۶x-۷=mx-۱۱\Rightarrow x^۲-(m+۶)x+۴=۰\xrightarrow{\text{ریشه‌ها منفی}}P>۰,S<۰,\Delta>۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P=۴>۰\ \checkmark\\ S=m+۶<۰\Rightarrow m<-۶\\ \Delta=(m+۶)^۲-۱۶=(m+۲)(m+۱۰)>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<-۶\\ \text{و}\\ m\in(-\infty,-۱۰)\cup(-۲,+\infty)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}m\in(-\infty,-۱۰)$$



از طرفی برای این‌که یکی از نقاط تلاقی در ناحیهٔ دوم باشد و یکی در ناحیهٔ سوم، لازم است که شیب خط منفی باشد و نقطهٔ تلاقی $y = mx - ۱۱$ با محور x ها هم از ریشهٔ منفی نمودار $y = x^۲ - ۶x - ۷$ بزرگ‌تر باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۱۱}{m} > -۱ \\ m < ۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۱ < -m \Rightarrow m < -۱۱$$

از اشتراک نتایج به‌دست آمده، داریم: $m \in (-\infty, -۱۱)$

۱۰. گزینهٔ «۳»

ویژگی لوزی این است که چهار ضلع آن برابرند و البته که یک متوازی‌الاضلاع است. پس:

$$|AB| = |BC| \Rightarrow \sqrt{۵^۲ + (a-۵)^۲} = \sqrt{۳^۲ + (a-۱)^۲} \Rightarrow ۲۵ + a^۲ - ۱۰a + ۲۵ = ۹ + a^۲ - ۲a + ۱$$

$$\Rightarrow a = ۵ \Rightarrow S = ۲S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۷ & ۵ \\ ۴ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} = ۲۰$$

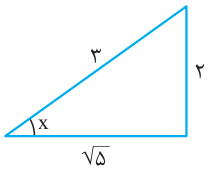
هایپرتست — فصل ۵

۱. گزینهٔ «۳»

$$\tan\frac{x}{۲} + \cot\frac{x}{۲} = ۳ \Rightarrow \frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}} + \frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} = ۳ \Rightarrow \frac{\sin^۲\frac{x}{۲} + \cos^۲\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = ۳ \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin x} = ۳$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{۲}{۳} \quad (۱)$$

با توجه به رابطهٔ (۱)، مثلث کمکی مقابل را رسم می‌کنیم:

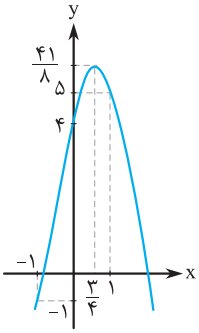


$$\xrightarrow{\text{حاده } x} \cos x = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

بنابراین:

$$\tan x + \cot x = \frac{۲}{\sqrt{۵}} + \frac{\sqrt{۵}}{۲} = \frac{۹}{۲\sqrt{۵}}$$

۲. گزینهٔ «۱»



$$2\cos^2 x+3\sin x+2=2(1-\sin^2 x)+3\sin x+2$$

$$=-2\sin^2 x+3\sin x+4$$

فرض می‌کنیم $\sin x=T$. در این‌صورت $-1\le T\le 1$ است و $y=-2T^2+3T+4$. نمودار این سهمی چنین است:

همان‌طور که می‌بینید، بیشترین مقدار آن در $[-1,1]$، برابر با $\frac{41}{8}$ است.

۳. گزینهٔ «۱»

$$\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{\sin 2x}{2}\cos 2x=\frac{\sin 4x}{4}$$

حالا اگر $\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{3}$ باشد، آن‌گاه $\frac{\pi}{3}<4x<\frac{4\pi}{3}$. در بازهٔ $(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$ هم π و هم $\frac{\pi}{2}$ را داریم. لذا باید $\sin\frac{\pi}{3}$، $\sin\frac{4\pi}{3}$، $\sin\pi$ و $\sin\frac{\pi}{2}$ را محاسبه کنیم:

$$\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\frac{\pi}{2}=1,\sin\pi=0,\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 4x\le 1$$

$$\Rightarrow\frac{-\sqrt{3}}{8}<\frac{\sin 4x}{4}\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{-\sqrt{3}}{8}<\frac{m-1}{2}\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{-\sqrt{3}}{4}+1<m\le\frac{3}{2}$$

۴. گزینهٔ «۲»

ساده است:

$$\sin\alpha=\cos\hat{C}=\frac{4}{5}$$

۵. گزینهٔ «۳»

$$\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}+\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}=\sqrt{\cos^4 x+4(1-\cos^2 x)}+\sqrt{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}$$

$$=\sqrt{\cos^4 x+4-4\cos^2 x}+\sqrt{\sin^4 x+4-4\sin^2 x}=\sqrt{(\cos^2 x-2)^2}+\sqrt{(\sin^2 x-2)^2}$$

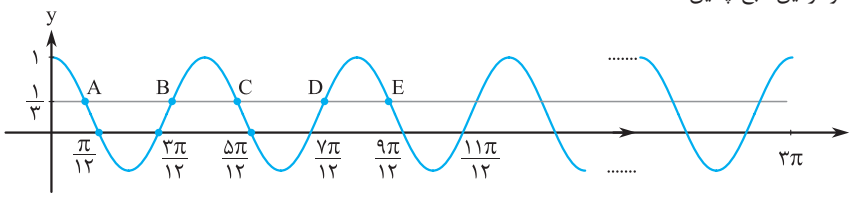
$$=|\cos^2 x-2|+|\sin^2 x-2|=2-\cos^2 x+2-\sin^2 x=4-(\sin^2 x+\cos^2 x)=4-1=3$$

۶. گزینهٔ «۴»

اولاً

$$y=\cos^4 3x-\sin^4 3x=(\cos^2 3x-\sin^2 3x)(\cos^2 3x+\sin^2 3x)=\cos 6x$$

نمودار این تابع چنین است:



دقت کنید که $|AB|>\frac{\pi}{6}$ است، اما $|BC|<\frac{\pi}{6}$. به همین نحو، $|CD|>\frac{\pi}{6}$ و $|DE|<\frac{\pi}{6}$.

نمودار $y=\cos 6x$ در بازهٔ $[0,3\pi]$، ۹ دورهٔ تناوب کامل را طی می‌کند. در هر دورهٔ تناوب فقط یکی از این پاره‌خط‌های بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{6}$ ایجاد می‌شود. مثلاً در تناوب اول، AB و در تناوب دوم، CD را داریم. لذا از تناوب اول، دو جواب A و B را داریم. C را نمی‌توانیم انتخاب کنیم (چون $BC<\frac{\pi}{6}$ است) لذا D را انتخاب می‌کنیم. از تناوب سوم هم یک جواب و ... از تناوب نهم هم یک جواب داریم. کلاً $2+1+1+\cdots+1=10$ جواب داریم. خیلی سؤال سخت و دشواری بود.

۷. گزینهٔ «۳»

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1})=\underbrace{(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})}_{\text{تا حالا ده بار حساب کرده‌ایم. برابر } \sqrt{6} \text{ است.}}(\sqrt[3]{2\sqrt{2}})=\sqrt{6}\sqrt[3]{\sqrt{8}}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{6}\sqrt{2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

۸. گزینهٔ «۳»

$$|\cos x|-|\sin 2x|=\frac{1}{|\sin 2x|}-\frac{1}{|\cos x|}=\frac{|\cos x|-|\sin 2x|}{|\sin 2x||\cos x|}\Rightarrow\begin{cases}|\cos x|-|\sin 2x|=0\\|\cos x||\sin 2x|=1\end{cases}$$

حالت اول

$$|\cos x|-|\sin 2x|=0\Rightarrow|\cos x|-2|\cos x||\sin x|=0\Rightarrow|\cos x|(1-2|\sin x|)=0$$

$$\xrightarrow[\text{به خاطر مخرج‌ها}]{|\cos x|\neq 0}|\sin x|=\frac{1}{2}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

که همهٔ این جواب‌ها در دامنهٔ معادله صدق می‌کنند و قابل قبول‌اند

حالت دوم

$$|\sin 2x||\cos x|=1$$

می‌دانیم سینوس و کسینوس حداکثر برابر ۱ هستند. پس اگر ضرب یک سینوسی و یک کسینوسی برابر ۱ باشد، باید هر دو هم‌زمان ۱ باشند:

$$\begin{cases}|\sin 2x|=1\\ \text{و}\\|\cos x|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \text{و}\\x=k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ \text{و}\\x=k\pi\end{cases}$$

بدیهی است که $k\pi$ و $\pm\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ هیچ اشتراکی ندارند. پس از این حالت هیچ جوابی به‌دست نیامد و همهٔ جواب‌ها، همان حالت اول بودند.

۹. گزینهٔ «۳»

$$\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})}{2\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})}=\tan\frac{x}{2}$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

$$(|\cos x|-\frac{1}{3})(\cos x-\frac{2}{3})=0\Rightarrow|\cos x|=\frac{1}{3}\text{ یا }\cos x=\frac{2}{3}$$

حالت اول

فرض کنید α جواب $|\cos x|=\frac{۱}{۳}$ در ربع اول باشد. در این صورت $\pi-\alpha$، $\pi+\alpha$، $۲\pi-\alpha$، $۲\pi+\alpha$، $۳\pi-\alpha$، $۳\pi+\alpha$ و $۴\pi-\alpha$ هم جواب‌های دیگر این معادله در $[۰,۴\pi]$ هستند که جمع آن‌ها با جواب اول که α بود، برابر ۱۶π است.

حالت دوم فرض کنید β جواب $\cos x=\frac{۲}{۳}$ در ربع اول باشد. در این‌صورت $۲\pi-\beta$، $۲\pi+\beta$ و $۴\pi-\beta$ هم بقیهٔ جواب‌های این معادله در $[۰,۴\pi]$ هستند که جمع آن‌ها با جواب اول که β بود، برابر ۸π است. پس جمع کل جواب‌ها ۲۴π است.

هایپرتست — فصل ۶

۱. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که نمودار $f(x)=\frac{x}{۲}-۲[\frac{x}{۴}]=۲(\frac{x}{۴}-[\frac{x}{۴}])$ همان نمودار $y=\frac{x}{۴}-[\frac{x}{۴}]$ است که عرض‌هایش دوبرابر شده‌اند.

۲. گزینهٔ «۲»

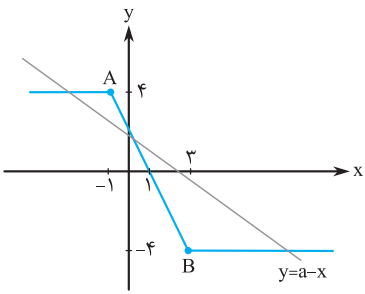
$$[x]^۲-۳[x-۲]=۴\Rightarrow[x]^۲-۳[x]+۶=۴\Rightarrow[x]^۲-۳[x]+۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جملهٔ مشترک}}([x]-۲)([x]-۱)=۰\Rightarrow[x]=۲\text{ یا }[x]=۱\Rightarrow x\in[۲,۳)\cup[۱,۲)\Rightarrow x\in[۱,۳)$$

۳. گزینهٔ «۱»

نمودار $f(x)=a-x$ خطی است با شیب -۱ و عرض از مبدأ a. نمودار $g(x)=|x-۳|-|x+۱|$ هم آبشاری است. برای این‌که خط $y=f(x)$ نمودار $y=g(x)$ را در سه نقطه قطع کند، باید دو ویژگی داشته باشد:

۱) خط $y=f(x)$ از پایین نقطهٔ A عبور کند. ۲) خط $y=f(x)$ از بالای نقطهٔ B عبور کند. (لطفاً قبل از ادامهٔ مطالعهٔ پاسخ، به این موضوع با دقت فکر کنید):



$$۱)\ f(-۱)<۴\Rightarrow a+۱<۴\Rightarrow a<۳$$

$$۲)\ f(۳)>-۴\Rightarrow a-۳>-۴\Rightarrow a>-۱$$

بنابراین: $-۱<a<۳$

۴. گزینهٔ «۱»

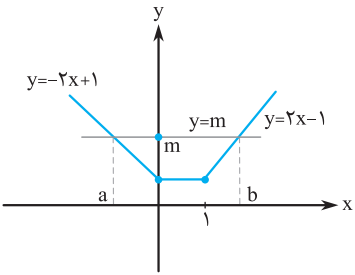
دقت کنید سمت چپ معادلهٔ $\left[۲x^۲-۴x\right]=x-۲$ عددی صحیح است، پس $x-۲$ صحیح است. در نتیجه x هم عددی صحیح است و بنابراین:

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۲x^۲-۴x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[۲x^۲-۴x\right]=۲x^۲-۴x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۴x+۲=x\Rightarrow ۲x^۲-۵x+۲=۰\Rightarrow x=۲\text{ یا }\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=۲$$

۵. گزینهٔ «۳»

نمودار $y=|x-۱|+|x|$ را رسم می‌کنیم:



می‌خواهیم جواب نامعادلهٔ $|x-۱|+|x|<m$ که همان (a,b) است، دقیقاً شامل ۶ عدد صحیح باشد.

دوتا از این عددها ۱ و ۰ هستند. پس دوتای بعدی ۲ و ۱− و آخری‌ها ۳ و ۲− هستند. تا این‌جا حداقل ۶ عدد صحیح جور می‌شوند. در صورتی که بازهٔ (a,b) اعداد ۴ و ۳− را شامل نشود، تعداد جواب‌های نامعادله می‌شود دقیقاً ۶ عدد صحیح:

$$-۳\le a<-۲\,,\,۳<b\le ۴\Rightarrow ۵<-۲a+۱\le ۷\,,\,۵<۲b-۱\le ۷\xrightarrow{۲a-۱=۲b-۱=m}۵<m\le ۷$$

۶. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم $[x]+[-x]$ دو مقدار دارد. لذا دو حالت داریم:

۱) $x\in\mathbb{Z}$ باشد. در این‌صورت $[x]+[-x]=۰$ است و بنابراین:

$$[x]^۲+[x]=۰\xrightarrow[{[x]=x}]{x\in\mathbb{Z}}x^۲+x=۰\Rightarrow x=۰\text{ یا }-۱\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=۰\,,\,x=-۱\ \checkmark$$

۲) $x\notin\mathbb{Z}$. در این‌صورت $[x]+[-x]=-۱$ است و لذا:

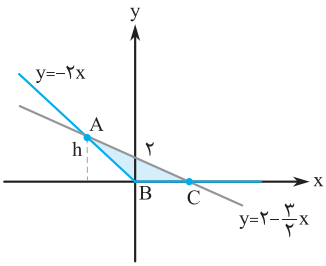
$$[x]^۲+[x]=-۲(-۱)=۲\Rightarrow [x]^۲+[x]-۲=۰\Rightarrow ([x]+۲)([x]-۱)=۰$$
$$\Rightarrow [x]=-۲\text{ یا }[x]=۱\Rightarrow x\in[-۲,-۱)\text{ یا }x\in[۱,۲)$$

اما دقت کنید که در این حالت فرض کردیم که x عددی صحیح نیست. پس در واقع $x\in(-۲,-۱)\cup(۱,۲)$ است. لذا کلاً می‌شود:

$$x\in(-۲,-۱)\cup(۱,۲)\cup\{۰,-۱\}=(-۲,-۱]\cup\{۰\}\cup(۱,۲)$$

۷. گزینهٔ «۳»

نمودارها را رسم می‌کنیم. در ابتدا دقت بفرمایید که داریم:



$$y=|x|-x=\begin{cases}۰ & ;\ x\ge ۰\\ -۲x & ;\ x<۰\end{cases}$$

نمودار خط $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ هم که تابلو است. در شکل مقابل هر دو را رسم کرده‌ایم:

باید مساحت مثلث ABC را حساب کنیم. A محل تلاقی $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ با $y=-۲x$ است:

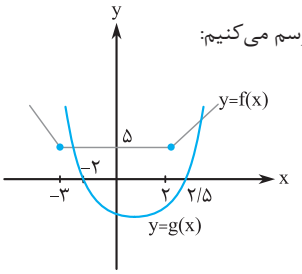
$$A:۲-\frac{۳}{۲}x=-۲x\Rightarrow x=-۴\Rightarrow y_A=۸\Rightarrow A=(-۴,۸)$$

و C نیز محل تلاقی خط $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ با محور طولی است:

$$C:۲-\frac{۳}{۲}x=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}h\times BC=\frac{۱}{۲}\times y_A\times(\frac{۴}{۳})=\frac{۱}{۲}\times ۸\times\frac{۴}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$$

۸. گزینهٔ «۴»

نمودار $f(x)=|x-۲|+|x+۳|$ و نمودار $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$ را رسم می‌کنیم:



بزرگ‌ترین بازه‌ای که $f(x)$ روی آن اکیداً نزولی است $\Leftarrow (-\infty,-۳]$

در $(-\infty,-۳]$: تعداد تقاطع‌ها $\Leftarrow$ صفر $\Leftarrow$ فاقد نقطهٔ مشترک

۹. گزینهٔ «۴»

$$[x-۲]=۱\Rightarrow ۱\le x-۲<۲\Rightarrow ۳\le x<۴$$

بنابراین تابع f به‌صورت زیر خواهد شد:

$$f(x)=\underbrace{|x-۳|}_{\text{مثبت}}-\underbrace{|x-۴|}_{\text{منفی}}=x-۳-(-x+۴)=۲x-۷$$

بنابراین:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow ۲x-۷=۲x^۲+x-۱۷$$

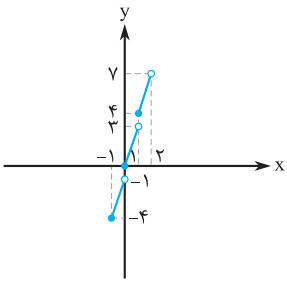
$$۲x^۲-x-۱۰=۰\Rightarrow (۲x-۵)(x+۲)=۰\Rightarrow x=\frac{۵}{۲},\ x=-۲$$

که این جواب‌ها به بازه $[۳,۴)$ تعلق ندارند، پس نمودارهای دو تابع نقطهٔ مشترکی ندارند.

۱۰. گزینهٔ «۳»

در بدبینانه‌ترین حالت، با ضابطه‌هایی مواجه می‌شویم که در درسنامه، نمونهٔ نظیر آن‌ها را ندیده‌ایم. در این حالت بهترین کار، بازه‌بندی است، به‌عنوان مثال:

$$f(x)=۳x+[x]=\begin{cases}۳x-۱ & ; \quad -۱\le x<۰\\ ۳x & ; \quad ۰\le x<۱\\ ۳x+۱ & ; \quad ۱\le x<۲\end{cases}$$



و رسم چندتا خط که کاری ندارد!

هایپرتست — فصل ۷

۱. گزینهٔ «۳»

دو حالت داریم:

حالت اول اگر $۰<a<۱$ باشد، آن‌گاه $f(x)=۳a^{۲-x}$ تابعی اکیداً صعودی است. دقت کنید که در این حالت $f(۰)=۳a^۲<۳$ است، یعنی اگر $f(x)$ صعودی باشد، $f(۰)<۳$ است. گزینه‌های «۱» و «۲» این ویژگی‌ها را رعایت کرده و صحیح هستند.

حالت دوم اگر $a>1$ باشد، آن‌گاه $f(x)=3a^{2-x}$ تابعی اکیداً نزولی است. دقت کنید که در این حالت $f(0)=3a^2>3$ است، یعنی اگر $f(x)$ نزولی باشد، آن‌گاه $f(0)>3$ است. گزینهٔ «۳» این ویژگی را رعایت نکرده و نادرست است. گزینهٔ «۴»، البته که رعایت کرده.

روش دوم: نمودار ما باید از نقطهٔ $(2,3)$ عبور کند، زیرا $3a^{2-2}=3\times a^0=3$. واضح است که گزینهٔ «۳» از پایین نقطهٔ $(2,3)$ عبور می‌کند.

۲. گزینهٔ «۳»

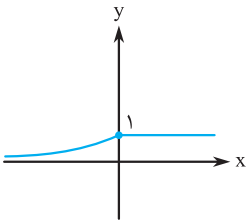
$$\sqrt{5^{\log_{\sqrt{3}}3}+12^{\log_{\sqrt{5}}5}+3^{\log_{\sqrt[3]{12}}12}}=\sqrt{5^2+12^2+3^3}=\sqrt{25+144+27}=\sqrt{196}=14$$

۳. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که به خاطر $|x|$ می‌توانیم $f(x)$ را به‌صورت دوضابطه‌ای بنویسیم:

$$f(x)=2^x\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=\begin{cases}2^x\left(\frac{1}{2}\right)^x=1 & ; \quad x\geq 0\\ 2^x\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=4^x & ; \quad x<0\end{cases}$$

بنابراین نمودار موردنظر برای $x<0$، به‌صورت نمودار تابع نمایی $y=4^x$ و برای $x\geq 0$، به‌صورت نمودار تابع ثابت $y=1$ است:



۴. گزینهٔ «۱»

بهانهٔ خوبی است کمی مثلثات مرور کنیم. اگر یادتان باشد $\tan 45^\circ=1$ است. می‌دانیم $1\text{rad}\simeq 57^\circ$ است. حالا دقت کنید که در زاویه‌های حاده، تا قبل از 45°، مقدار tan از ۱ کم‌تر است ولی cot از ۱ بیشتر است:

و البته:

$$0<x<45^\circ \Rightarrow \tan x<1<\cot x$$

$$45^\circ<x<90^\circ \Rightarrow \cot x<1<\tan x$$

حالا 1rad در بازهٔ دوم قرارداد، یعنی $\cot 1<1<\tan 1$. از همین‌جا معلوم می‌شود که $\cot 1^{\cot 1}<1$ و $\cot 1^{\tan 1}$ هستند، اما $\tan 1^{\tan 1}>\tan 1^{\cot 1}>1$ است. ما دنبال بزرگ‌ترین هستیم. پس باید $\tan 1^{\tan 1}$ را انتخاب کنیم.

۵. گزینهٔ «۳»

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}=3^x+\frac{8}{3}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^x+\frac{8}{3}\xrightarrow[\text{دو عدد معکوس}]{3^x=T>0}\frac{1}{T}=T+\frac{8}{3}\Rightarrow T^2+\frac{8}{3}T-1=0$$

$$\Rightarrow (T+3)\left(T-\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow T=-3 \text{ یا } T=\frac{1}{3}\xrightarrow{T>0}T=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=-1$$

با قراردادن $x=-1$ در $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ می‌فهمیم که $y=3$ و لذا $A(-1,3)$. بنابراین:

$$|AB|=\sqrt{(-1+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{(0)^2+2^2}=2$$

۶. گزینهٔ «۱»

این‌که نیمه‌عمر ماده‌ای ۲۰۰ است، یعنی ۲۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار این ماده نصف شود، یعنی بعد از ۴۰۰ سال این ماده $\frac{1}{4}$ مقدار اولیه می‌شود. به‌طور کلی بعد از T سال، این ماده $(\frac{1}{2})^{\frac{T}{200}}$ برابر می‌شود. حالا مسئله دارد می‌گوید که معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$(\frac{1}{2})^{\frac{T}{200}} \times 2500 = 156/25 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{\frac{T}{200}} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{T}{200} = 4 \Rightarrow T = 800$$

۷. گزینهٔ «۳»

اول دامنه:

$$\begin{array}{l} 1)\ 3x+4>0 \\ 2)\ 2x-1>0 \\ 3)\ 2x-1\neq 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{4}{3} \\ \text{و} \\ x>\frac{1}{2} \\ \text{و} \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(\frac{1}{2},+\infty)-\{1\}$$

حالا دقت کنید که نامعادلهٔ $\log_{(2x-1)}(3x+4)<0$ در واقع دارد می‌گوید این لگاریتم منفی است. اما در درسنامهٔ بخش ۳ خواندیم که علامت $\log_b a$ مانند علامت $(a-1)(b-1)$ است. لذا می‌توانیم بگوییم که در واقع:

$$(3x+4-1)(2x-1-1)<0 \Rightarrow (3x+3)(2x-2)<0 \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow x\in(-1,1)$$

که اشتراک آن با دامنه می‌شود $x\in(\frac{1}{2},1)$.

۸. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که از $\log_6 3=a$ نتیجهٔ مهم مقابل را داریم: $\log_6 2=\log_6\frac{6}{3}=\log_6 6-\log_6 3=1-a$

لذا $\log_6 3=a$ و $\log_6 2=1-a$. اینک داریم:

$$\log_{48}3\sqrt{12}=\frac{\log_6 3\sqrt{12}}{\log_6 48}=\frac{\log_6 6\sqrt{3}}{\log_6(6\times 8)}=\frac{\log_6 6+\frac{1}{2}\log_6 3}{\log_6 6+3\log_6 2}$$

$$=\frac{1+\frac{a}{2}}{1+3(1-a)}=\frac{\frac{2+a}{2}}{4-3a}=\frac{2+a}{8-6a}=\frac{a+2}{8-6a}$$

۹. گزینهٔ «۴»

فرض کنید $\log_{12}(a^2+b)=2+\log_3 b=3+\log_2 a=x$ باشد. در این‌صورت:

$$\begin{cases} \log_{12}(a^2+b)=x \\ \log_3 b=x-2 \\ \log_2 a=x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b=12^x \\ b=3^{x-2} \\ a=2^{x-3} \end{cases}$$

حالا از $b=3^{x-2}$ و $a=2^{x-3}$، داریم:

$$\begin{cases} b=\frac{3^x}{3^2} \\ a=\frac{2^x}{2^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2 b=3^x \\ 2^3 a=2^x \end{cases} \Rightarrow 12^x=(2^2\times 3)^x=(2^x)^2\times 3^x=(2^3a)^2\times 3^2 b=2^6\times 3^2 a^2 b$$

اما $۱۲^x = a^۲ + b$. بنابراین:

$$۲^۶ \times ۳^۲ a^۲ b = a^۲ + b \xrightarrow{\div a^۲ b} ۲^۶ \times ۳^۲ = \frac{a^۲ + b}{a^۲ b} = \frac{۱}{b} + \frac{۱}{a^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{۲^۶ \times ۳^۲} = \sqrt{\frac{۱}{b} + \frac{۱}{a^۲}} \Rightarrow ۲^۳ \times ۳ = \sqrt{\frac{۱}{b} + \frac{۱}{a^۲}} \Rightarrow ۲۴ = \sqrt{\frac{۱}{b} + \frac{۱}{a^۲}}$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

محدودیت اول لگاریتم است، اما محدودیت دوم رادیکال است. به خاطر لگاریتم باید $x^۲ - ۳x > ۰$ باشد و به‌خاطر رادیکال باید $۱ - \log(x^۲ - ۳x) \geq ۰$ باشد. پس با دو نامعادله طرفیم:

$$۱)\ x^۲ - ۳x > ۰ \Rightarrow x(x-۳) > ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, ۰) \cup (۳, +\infty) \quad ①$$

$$۲) ۱ - \log(x^۲ - ۳x) \geq ۰ \Rightarrow ۱ \geq \log(x^۲ - ۳x) \xrightarrow[۱۰>۱]{\log_{۱۰}} ۱۰^۱ \geq x^۲ - ۳x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۳x - ۱۰ \leq ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) \leq ۰ \Rightarrow x \in [-۲, ۵] \quad ②$$

$$\Rightarrow ① \cap ② = [-۲, ۰) \cup (۳, ۵]$$

هایپرتست — فصل ۸

۱. گزینهٔ «۳»

فرض کنیم دامنهٔ $f(x)$ بازهٔ (m, n) باشد. آن‌گاه دامنهٔ $f(\frac{x}{۲})$ بازهٔ $(۲m, ۲n)$ است که طبق فرض مسئله $(۳, c)$ شده. پس $m = \frac{۳}{۲}$. از طرفی دامنهٔ $f(x+a)$ باید $(m-a, n-a)$ باشد که طبق فرض مسئله $(۱, ۲)$ شده. لذا داریم:

$$\begin{cases} m - a = ۱ \\ n - a = ۲ \xrightarrow{m=\frac{۳}{۲}} n = \frac{۵}{۲}, a = \frac{۱}{۲}, c = ۵ \\ ۲n = c \end{cases}$$

در نتیجه $۱ < x < ۲$; $f(x + \frac{۱}{۲}) = ۳x + b$. از این‌جا می‌فهمیم که برد تابع $f(x + \frac{۱}{۲})$ بازهٔ $(۳ + b, ۶ + b)$ است. لذا:

$$R_{f(x+\frac{۱}{۲})} = R_{f(x)} = (۳ + b, ۶ + b) \Rightarrow R_{f(x-۱)+۱} = R_{f(x)+۱} = (۳ + b + ۱, ۶ + b + ۱)$$

$$= (۴ + b, ۷ + b)$$

که طبق فرض $(۵, d)$ شده است. یعنی:

$$\begin{cases} ۴ + b = ۵ \\ ۷ + b = d \end{cases} \Rightarrow b = ۱, d = ۸$$

از همهٔ این‌ها داریم:

$$a + b + c + d = \frac{۱}{۲} + ۱ + ۵ + ۸ = ۱۴/۵$$

۲. گزینهٔ «۱»

این مسئله ظرافت خاصی دارد. چون $g(x)$ تابع معکوس $f(x)$ است، پس $g(x)$ همان تابعی است که $g(f(x)) = x$. اما داریم:

$$f^{۳}(x)+f(x)=۳x \Rightarrow \frac{f^{۳}(x)+f(x)}{۳}=x \Rightarrow (\frac{x^{۳}+x}{۳})\,o\,f(x)=x \Rightarrow g(x)=\frac{x^{۳}+x}{۳}$$

$$\Rightarrow g(۱)+g(۲)=\frac{۱^{۳}+۱}{۳}+\frac{۸+۲}{۳}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

۳. گزینهٔ «۳»

$f(x-۱)$ همان $f(x)$ است که یک واحد به راست منتقل شده است پس برای یافتن $f(x-۱)$ کافی است به مؤلفه‌های طولی $f(x)$، یک واحد اضافه کنیم: $f(x-۱)=\{(a+۱,۲),(۳,b),(۴,c)\}$

از طرفی: $f^{-۱}(x)=\{(۲,a),(b,۲),(c,۳)\} \Rightarrow f^{-۱}(x)+۱=\{(۲,a+۱),(b,۳),(c,۴)\}$

با قراردادن در $f(x-۱)=f^{-۱}(x)+۱$، داریم:

$$\{(a+۱,۲),(۳,b),(۴,c)\}=\{(۲,a+۱),(b,۳),(c,۴)\}$$

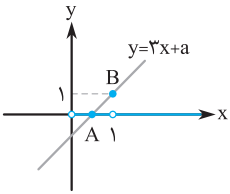
حالا $(a+۱,۲)$ باید با یکی از $(۲,a+۱)$ و $(b,۳)$ و $(c,۴)$ مساوی باشد. با توجه به مؤلفه‌های دوم، معلوم می‌شود که در حقیقت $(a+۱,۲)=(۲,a+۱)$. از این‌جا $a+۱=۲$ و لذا $a=۱$ است. در ادامه دو حالت داریم:

حالت اول $\begin{cases}(۳,b)=(b,۳)\\(۴,c)=(c,۴)\end{cases} \Rightarrow b=۳\,,\,c=۴$

حالت دوم $\begin{cases}(۳,b)=(c,۴)\\(۴,c)=(b,۳)\end{cases} \Rightarrow c=۳\,,\,b=۴$

در هر صورت $abc=۱۲$ است.

۴. گزینهٔ «۳»



دقت بفرمائید که اگر $x>۱$ باشد آن‌گاه $[\frac{۱}{x}]=۰$ و لذا $f(x)=۰$.

اگر $۰<x<۱$ باشد، آن‌گاه $[x]=۰$ و لذا $f(x)=۰$.

اگر $x=۱$ باشد، آن‌گاه $f(x)=f(۱)=۱$. پس نمودار $y=f(x)$ چنین است:

لذا اگر $y=۳x+a$ در دو نقطه این نمودار را قطع کند، یکی از این نقاط باید $(۱,۱)$ باشد و لذا: $۱=۳(۱)+a \Rightarrow a=-۲$

پس $y=۳x-۲$. اما این خط محور xها را در $x=\frac{۲}{۳}$ قطع می‌کند. در نتیجه:

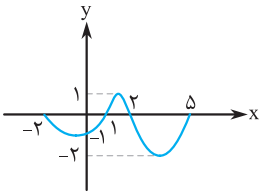
$$A=(\frac{۲}{۳},۰)\,,\,B=(۱,۱) \Rightarrow |AB|=\sqrt{(\Delta x)^{۲}+(\Delta y)^{۲}}=\sqrt{(\frac{۱}{۳})^{۲}+۱^{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$$

۵. گزینهٔ «۴»

اول دامنهٔ $\frac{f^{۲}-g^{۲}}{f-g}$ که می‌گوید $f-g\neq ۰$، یعنی $f\neq g$. اما $f(۲)=۴=g(۲)$ و $f(۳)=۵=g(۳)$. پس تنها عضوی که از دامنه باقی می‌ماند $x=۱$ است که داریم:

$$\frac{f^{۲}-g^{۲}}{f-g}=f+g=f(۱)+g(۱)=۹+۳=۱۲ \Rightarrow f+g=\{(۱,۱۲)\}$$

۶. گزینهٔ «۱»



نمودار $y=f(x+1)$ همان $y=f(x)$ که یک واحد به چپ منتقل شده است. لذا، اگر نمودار $y=f(x+1)$ را یک واحد به راست انتقال دهیم، نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید:

حالا برای محاسبهٔ برد $f(\sqrt{x})$ فرض کنید $\sqrt{x}=T\geq 0$. لذا باید برد $f(T)\,;\,T\geq 0$ را به‌دست آوریم که از نمودار معلوم است: $[-2,1]$

۷. گزینهٔ «۴»

$$\begin{cases} f(x+1)+f(x)=x^2+x \\ f(x+1)-f(x)=x^2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\text{جمع}\\ \text{منها}\end{matrix} \begin{cases} 2f(x+1)=2x^2 \\ 2f(x)=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+1)=x^2 \\ f(x)=x \end{cases}$$

اما اگر $f(x)=x$ باشد، لاجرم باید $f(x+1)=x+1$ باشد و این با $f(x+1)=x^2$ اصلاً جور درنمی‌آید. در حقیقت چنین تابعی وجود ندارد. (گزینه‌های «۲» و «۳» دام آموزشی هستند)

۸. گزینهٔ «۱»

ثابت می‌کنیم f و g هر دو وارون‌پذیرند. برای این کار ثابت می‌کنیم، هر دو ۱ـ۱ هستند، اول g:

$g(a)=g(b)\Rightarrow f(g(a))=f(g(b))\Rightarrow a+2=b+2\Rightarrow a=b\Rightarrow$ g یک‌به‌یک $\Rightarrow$ g وارون‌پذیر

حالا با توجه به این‌که $f(x+2)=g(x)$ است، پس اگر f را ۲ واحد به چپ انتقال دهیم، نمودار تابع وارون‌پذیر $g(x)$ به‌دست می‌آید. این یعنی خود f هم وارون‌پذیر بوده است (از لحاظ نموداری به این موضوع فکر کنید) زیرا اگر تابعی وارون‌پذیر باشد تحت هر انتقالی وارون‌پذیر می‌ماند.

۹. گزینهٔ «۱»

می‌فهمیم که $(-1,2)$ روی $y=x^3+c$ است. یعنی $2=(-1)^3+c$. پس $c=3$. در نتیجه نمودار تبدیل‌یافته $y=x^3+3$ است.

از طرفی اگر $y=(x+2)^3-1$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم به $y=x^3-1$ می‌رسیم حالا اگر ۴ واحد به بالا منتقل شود به $y=x^3+3$ می‌رسیم. پس نقطهٔ $(-1,2)$ را ۴ واحد به پایین $(-1,-2)$ و سپس ۲ واحد به راست $(-1+2,-2)$ یعنی $(1,-2)$ انتقال می‌دهیم تا به (a,b) بازگردد. لذا $a=1$ و $b=-2$ است و $a+b+c=1-2+3=2$.

۱۰. گزینهٔ «۲»

ابتدا دقت کنید که $f(x+2)=\begin{cases} 2x & ; \quad x\geq 2 \\ |x-3| & ; \quad x<2 \end{cases}$. با تغییر متغیر $x+2=2T$ داریم:

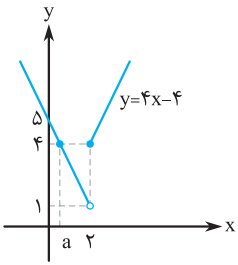
$$x=2T-2\Rightarrow f(2T)=\begin{cases} 2(2T-2) & ; \quad 2T-2\geq 2 \\ |2T-2-3| & ; \quad 2T-2<2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 4T-4 & ; \quad T\geq 2 \\ |2T-5| & ; \quad T<2 \end{cases}\Rightarrow f(2x)=\begin{cases} 4x-4 & ; \quad x\geq 2 \\ |2x-5| & ; \quad x<2 \end{cases}\Rightarrow f(2x)=\begin{cases} 4x-4 & ; \quad x\geq 2 \\ 5-2x & ; \quad x<2 \end{cases}$$

حالا رسم:

عدد a را در نمودار مشخص کرده‌ایم. a دارای این ویژگی است که:

$$۵-۲a=۴ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$



هایپرتست فصل ۹

۱. گزینهٔ «۳»

اطلاعات مسئله می‌گوید:

$$f(۱)=۲\,,\,g(۲)=۱\,,\,f'(۱)=\frac{۲}{۳}\,,\,g'(۲)=۳$$

مشـــتق تابع موردنظر در واقع ۸ بار استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای است. دقت بفرمایید که در عوض، عددهای مسئله خیلی خوب هستند:

$$۱)\ (g(f(x)))'=f'(x)g'(f(x))\xrightarrow{x=۱}f'(۱)g'(f(۱))=f'(۱)g'(۲)=\frac{۲}{۳}\times ۳=۲$$

$$۲)\ (f(g(f(x))))'=f'(x)\times g'(f(x))\times f'(g(f(x)))\xrightarrow{x=۱}f'(۱)\times g'(f(۱))\times f'(g(f(۱)))$$

$$=f'(۱)g'(۲)f'(g(۲))=f'(۱)g'(۲)f'(۱)=\frac{۲}{۳}\times ۳\times\frac{۲}{۳}=(\frac{۲}{۳})^{۲}\times ۳$$

و برای ۸ تا تابع هم داریم:

$$f'(۱)g'(۲)f'(۱)g'(۲)\dots f'(۱)g'(۲)=\frac{۲}{۳}\times ۳\times\frac{۲}{۳}\times ۳\times\cdots\times\frac{۲}{۳}\times ۳=(\frac{۲}{۳}\times ۳)^{۴}=۲^{۴}=۱۶$$

۲. گزینهٔ «۱»

با مشتق گرفتن از $y=f^{۲}(۳x-۱)$ شروع می‌کنیم:

$$y'=۲f(۳x-۱)\times(f(۳x-۱))'=۲f(۳x-۱)\times ۳f'(۳x-۱)\xrightarrow{x=۱}y'(۱)=۶f(۲)f'(۲)$$

برای محاسبهٔ $f(۲)$، در تساوی $f(x^{۳}+x)=۲x^{۲}+۱$ به‌جای x عدد ۱ را قرار می‌دهیم: $f(۲)=۳$

برای محاسبهٔ $f'(۲)$، ابتدا از دو طرف $f(x^{۳}+x)=۲x^{۲}+۱$ مشتق می‌گیریم و سپس $x=۱$ را عددگذاری می‌کنیم:

$$(۳x^{۲}+۱)f'(x^{۳}+x)=۴x\xrightarrow{x=۱}۴f'(۲)=۴\Rightarrow f'(۲)=۱$$

بنابراین: $y'(۱)=۶\times ۳\times ۱=۱۸$

۳. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که:

$$(g(x+۲)f(ax+۱))'=g'(x+۲)f(ax+۱)+g(x+۲)(af'(ax+۱))$$

$$\xrightarrow{x=۱}g'(۳)f(a+۱)+ag(۳)f'(a+۱)$$

لذا مسئله مشتق تابع $g(x+2)f(ax+1)=(2x^2+x+1)^2$ در نقطهٔ $x=1$ را می‌خواهد که برابر است با:

$$2(2x^2+x+1)(4x+1)\xrightarrow{x=1}2\times4\times5=40$$

۴. گزینهٔ «۲»

اول این‌که به علت وجود $\sqrt{x}$ نتیجه می‌گیریم $x\geq0$ است. پس $|x|=x$. از این‌جا داریم:

$$f(x)=\frac{2x+\sqrt{x}-3}{x-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$$

و بنابراین:

$$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f(x)g(x))'=(\frac{\sqrt{x}+1}{x-3}\times\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1})'=(\frac{2\sqrt{x}+3}{x-3})'\overset{\text{قاعدهٔ تقسیم}}{=\!=\!=}$$

$$(\frac{2(\frac{1}{2\sqrt{x}})(x-3)-1(2\sqrt{x}+3)}{(x-3)^2})=\frac{\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}-3}{(x-3)^2}=\frac{-\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}-3}{(x-3)^2}=-\frac{x+3\sqrt{x}+3}{(x-3)^2\sqrt{x}}$$

۵. گزینهٔ «۳»

از آن‌جا که $f(x+1)$ را داریم و $f'(3)$ را می‌خواهیم، پس در واقع با $x=2$ داریم کار می‌کنیم. اما برای $x=2$ و تابع $f(x+1)=(x^3-1)(x^3-2)\cdots(x^3-28)$، عامل (x^3-8) صفرشونده است. پس فقط از همان مشتق می‌گیریم:

$$f'(x+1)=(x^3-1)(x^3-2)\cdots(x^3-7)(3x^2)(x^3-9)(x^3-10)\cdots(x^3-28)$$

$$\overset{x=2}{=\!=}7\times6\times\cdots\times1\times12\times(-1)(-2)\cdots(-20)=12\times7!\times20!$$

۶. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که $f'(x)=\frac{b(a+b)-a}{(x+a+b)^2}$. یعنی صورت $f'(x)$ یک عدد ثابت است و x ندارد. پس باید صورت $3-f(x)$، عدد ثابت باشد. یعنی:

$$3-f(x)=3-\frac{bx+a}{x+a+b}=\frac{(3-b)x+2a+3b}{(x+a+b)}\Rightarrow3-b=0$$

لذا $b=3$ است. با قراردادن $b=3$ در ضابطهٔ $f(x)$، داریم:

$$f(x)=\frac{3x+a}{x+a+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{3(a+3)-a}{(x+a+3)^2}=\frac{3-f(x)}{x+7}$$

$$\Rightarrow\frac{2a+9}{(x+a+3)^2}=\frac{3-\frac{3x+a}{x+a+3}}{x+7}=\frac{2a+9}{(x+a+3)(x+7)}\Rightarrow x+a+3=x+7\Rightarrow a=4$$

بنابراین $a-b=1$.

۷. گزینهٔ «۲»

از رابطهٔ $f^3(x)+2f(x)=5x-2$ با قراردادن $x=1$، داریم:

$$f^3(1)+2f(1)=3\xrightarrow{f(1)=T}T^3+2T=3\xrightarrow{\text{معادلهٔ درجهٔ ۳}}T=1\Rightarrow f(1)=1$$

و البته با مشتق گرفتن از دو طرف این رابطه هم داریم:

$$۳f^{۲}(x)f'(x)+۲f'(x)=۵\xrightarrow{x=۱}۳f^{۲}(۱)f'(۱)+۲f'(۱)=۵$$

$$\xrightarrow{f(۱)=۱}۳f'(۱)+۲f'(۱)=۵\Rightarrow ۵f'(۱)=۵\Rightarrow f'(۱)=۱$$

حالا با مشتق‌گیری از $y=xf^{۲}(x)$، داریم:

$$y'=۱\times f^{۲}(x)+x(۲f(x)f'(x))\xrightarrow{x=۱}y'(۱)=f^{۲}(۱)+۲f(۱)f'(۱)=۱+۲=۳$$

۸. گزینهٔ «۳»

$$f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}-\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}\overset{۲ab}{=}\sqrt{(\sqrt{x-۱}+۱)^{۲}}-\sqrt{(\sqrt{x-۱}-۱)^{۲}}$$

$$=|\sqrt{x-۱}+۱|-|\sqrt{x-۱}-۱|=\sqrt{x-۱}+۱-|\sqrt{x-۱}-۱|$$

حالا اگر $x=۴+۲\sqrt{۲}$، آن‌گاه $\sqrt{x-۱}-۱=\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}-۱=\sqrt{۲}+۱-۱=\sqrt{۲}$ عددی مثبت است. لذا برای این مقدار x، داریم: $f(x)=\sqrt{x-۱}+۱-(\sqrt{x-۱}-۱)=۲\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow f'(۴+۲\sqrt{۲})=۰$

اما اگر $x=۴-۲\sqrt{۲}$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{x-۱}-۱=\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}-۱=\sqrt{۲}-۲$ عدد منفی است. لذا برای این مقدار x، داریم:

$$f(x)=\sqrt{x-۱}+۱+(\sqrt{x-۱}-۱)=۲\sqrt{x-۱}\Rightarrow f'(x)=۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}})=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$$

$$\xrightarrow{x=۴-۲\sqrt{۲}}\frac{۱}{\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}}\overset{۲ab}{=}\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt{۲}+۱$$

بنابراین:

$$f'(۴+۲\sqrt{۲})-f'(۴-۲\sqrt{۲})=۰-(\sqrt{۲}+۱)=-\sqrt{۲}-۱$$

۹. گزینهٔ «۴»

از دو طرف $f(\sqrt{x})=g(x^{۲})$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})=۲xg'(x^{۲})\xrightarrow{x=۴}\frac{۱}{۴}f'(۲)=۸g'(۱۶)\Rightarrow\frac{۱}{۴}\times۳=۸g'(۱۶)\Rightarrow g'(۱۶)=\frac{۳}{۳۲}$$

حالا از تساوی $g'(x)=۲g'(x+۱)$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x=۱۵\Rightarrow g'(۱۵)=۲g'(۱۶)=۲\times\frac{۳}{۳۲}=\frac{۳}{۱۶}$$

$$x=۱۴\Rightarrow g'(۱۴)=۲g'(۱۵)=۲\times\frac{۳}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

$$x=۱۳\Rightarrow g'(۱۳)=۲g'(۱۴)=۲\times\frac{۳}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

$$x=۱۲\Rightarrow g'(۱۲)=۲g'(۱۳)=۲\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

چون α جواب معادلهٔ $f(x)=x$ است، لذا $f(\alpha)=\alpha$ است. حالا داریم:

$$(fofof(x))'=f'(x)\times f'(f(x))\times f'(f(f(x)))\xrightarrow{x=\alpha}f'(\alpha)\times f'(f(\alpha))\times f'(f(f(\alpha)))$$

$$\xrightarrow{f(\alpha)=\alpha}f'(\alpha)\times f'(\alpha)\times f'(f(\alpha))=(f'(\alpha))^{۲}\times f'(f(\alpha))$$

$$\xrightarrow{f(\alpha)=\alpha}(f'(\alpha))^{۲}\times f'(\alpha)=(f'(\alpha))^{۳}$$

از طرفی:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳\Rightarrow f'(\alpha)=۳\alpha^{۲}-۳\Rightarrow (f'(\alpha))^{۳}=(۳\alpha^{۲}-۳)^{۳}$$

هایپرتست — فصل ۱۰

۱. گزینهٔ «۲»

$$\lim_{x\to ۲^-}[x+a]=[(۲+a)^-]=۶$$

لذا اگر $۲+a$ عددی صحیح باشد، باید ۷ باشد. زیرا $[۷^-]=۶$ است. این یعنی $۲+a=۷$ که یعنی $a=۵$. اما اگر $[۲+a]=۶$ باشد، و a هم صحیح نباشد، باز تساوی برقرار است:

$$[۲+a]=۶\xrightarrow{a\notin\mathbb{Z}}۶\le ۲+a<۷\xrightarrow{a\notin\mathbb{Z}}۴\le a<۵\xrightarrow{a\notin\mathbb{Z}}۴<a<۵\Rightarrow a\in(۴,۵)$$

بنابراین:

$$a\in(۴,۵)\cup\{۵\}=(۴,۵]$$

۲. گزینهٔ «۱»

مخرج مشترک و ساده‌کردن، لطفاً:

$$\frac{۱}{۱+\cos x}-\frac{۱}{۱-\cos ۲x}=\frac{۱-\cos ۲x-۱-\cos x}{(۱+\cos x)(۱-\cos ۲x)}=\frac{-(\cos x+\cos ۲x)}{(۱+\cos x)(۱-\cos ۲x)}$$

$$=\frac{-(\cos x+۲\cos^{۲}x-۱)}{(۱+\cos x)(۱-\cos ۲x)}=\frac{-(۲\cos x-۱)(\cos x+۱)}{(۱+\cos x)(۱-\cos ۲x)}=\frac{۱-۲\cos x}{۱-\cos ۲x}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\pi}f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{۱-۲\cos x}{۱-\cos ۲x}=\frac{۱+۲}{۰^+}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$$

دقت کنید، از آن‌جا که $\cos ۲x\le ۱$ است، فهمیدیم که $۱-\cos ۲x$ مثبت است.

۳. گزینهٔ «۱»

روش اول: صورت و مخرج را گویا می‌کنیم تا بتوانیم از پرتوان استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۱})(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۱})}^{\text{مزدوج صورت}}\overbrace{(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲})}^{\text{مزدوج مخرج}}}{(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۲})(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۱})(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{((x+۲)-(x-۱))(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲})}{((x+۱)-(x-۲))(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۱})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲})}{۳(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۱})}$$

$$\overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}=۱$$

روش دوم: به‌طور کلی $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+c}-\sqrt{x+d}}=\frac{a-b}{c-d}$ اســت. در این مســئله، جواب حدبرابر است با $\frac{۲-(-۱)}{۱-(-۲)}=\frac{۳}{۳}=۱$.

۴. گزینهٔ «۳»

با توجه به فرمول روش دوم مسئلهٔ (۳) داریم:

$$\frac{۲a-(-۱)}{a-(-۲)}=\frac{۲a+۱}{a+۲}=۳\Rightarrow ۲a+۱=۳a+۶\Rightarrow a=-۵$$

۵. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که پیوسته بودن $f(x)$ در $\mathbb{R}$، معادل است با این‌که $f(x+۱)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

در تابع $f(x+۱)$ داریم:

$$f(x+۱)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-|x|}{\sqrt{|x|+۳}-۲} & ; \quad x\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)\\ ax+b & ; \quad x\in[-۱,۱]\end{cases}$$

در نتیجه نقاط مرزی تابع $f(x+۱)$، درواقع $x=۱$ و $x=-۱$ هستند.

$$۱)\ \lim_{x\to۱^+}f(x+۱)=\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۲-|x|}{\sqrt{|x|+۳}-۲}=\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۲-x}{\sqrt{x+۳}-۲}\overset{H}{=\!=}\lim_{x\to۱^+}\frac{۲x-۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}}=۴$$

$$۲)\ \lim_{x\to۱^-}f(x+۱)=\lim_{x\to۱^-}(ax+b)=a+b$$

لذا تا این‌جا $a+b=۴$ است.

حالا برای $x=-۱$ داریم:

$$۱)\ \lim_{x\to(-۱)^+}f(x+۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}(ax+b)=-a+b$$

$$۲)\ \lim_{x\to(-۱)^-}f(x+۱)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲-|x|}{\sqrt{|x|+۳}-۲}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲+x}{\sqrt{۳-x}-۲}$$

$$\overset{H}{=\!=}\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{۲x+۱}{-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-x}}}=۴$$

بنابراین $-a+b=۴$ است. لذا:

$$\begin{cases}a+b=۴\\ -a+b=۴\end{cases}\Rightarrow a=۰,\ b=۴$$

۶. گزینهٔ «۲»

$$\lim_{x\to۰}\frac{(۱+x)(۱+۲x)(۱+۳x)-۱}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{(۱+۳x+۲x^۲)(۱+۳x)-۱}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{۱+۶x+۱۱x^۲+۶x^۳-۱}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{x(۶+۱۱x+۶x^۲)}{x}=۶+۰+۰=۶$$

۷. گزینهٔ «۲»

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+2)^2+(x-1)^3-2x^3}{x(x+2)+(x+1)(x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+4x+x^3-3x^2+3x-1-2x^3}{2x^2+6x+3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+7x-1}{2x^2+6x+3}=\frac{1}{2}$$

۸. گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to2}\frac{f^2(x)-f^2(2)}{x^2-4}\overset{H}{=}\lim_{x\to2}\frac{2f(x)f'(x)}{2x}=\frac{f(2)f'(2)}{2}\Rightarrow\frac{f(2)f'(2)}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow f(2)f'(2)=\frac{1}{2}$$

اما $f(x)=\frac{3x+a}{x+2}$ است. لذا:

$$f'(x)=\frac{6-a}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(2)f(2)=\frac{6-a}{16}\times\frac{6+a}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow 36-a^2=32\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm2$$

۹. گزینهٔ «۲»

چون $f(x)=ax+b$ است، پس:

$$fof(x)=f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to2}\frac{a^2x+ab+b-6}{x-2}=4$$

حد مخرج صفر است، لذا حد صورت هم صفر است:

$$2a^2+ab+b-6=0\Rightarrow 2a^2+ab+b=6 \quad (1)$$

از طرفی بنا به قضیهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to2}\frac{a^2}{1}=4\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2 \text{ یا } -2\xrightarrow[\text{شیب منفی}]{f(x)\ \text{نزولی}} a=-2$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ } (1)} 2(-2)^2-2b+b=6\Rightarrow b=2$$

پس $f(x)=-2x+2$ و در نتیجه $f(-1)=4$.

۱۰. گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to1^-}f(\frac{x}{2})=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-}\frac{[(\frac{1}{4})^--1]\sqrt{(2x-1)^2}}{6x-3}=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-}\frac{-|2x-1|}{6x-3}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-}\frac{-(-(2x-1))}{6x-3}=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-}\frac{2x-1}{3(2x-1)}=\frac{1}{3}$$

هایپرتست

فصل ۱۱

۱. گزینهٔ «۲»

نقطهٔ $(۱,۲)$ بر $y=۲x^۲+x-۱$ قرار دارد. لذا: $a=y'(۱)\Rightarrow y'(x)=۴x+۱\xrightarrow{x=۱}a=۵$

معادلهٔ خط مماس: $y-۲=۵(x-۱)\Rightarrow y=۵x-۳$

لذا قرار است $y=۵x-۳$ در $x=۳$ بر $g(x)=\dfrac{۲x+a}{bx+۱}$ مماس باشد. این یعنی:

$$\begin{cases} g(۳)=۵\times ۳-۳ \\ g'(۳)=۵ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{۶+a}{۳b+۱}=۱۲ \\ \dfrac{۲-ab}{(۳b+۱)^۲}=۵ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۶+a=۳۶b+۱۲ \\ ۲-ab=۵(۹b^۲+۶b+۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=۳۶b+۶ \\ ۲-ab=۴۵b^۲+۳۰b+۵ \end{cases}\Rightarrow ۲-b(۳۶b+۶)=۴۵b^۲+۳۰b+۵$$

$$\Rightarrow ۸۱b^۲+۳۶b+۳=۰\xrightarrow{\Delta}b=-\frac{۱}{۳}\ \text{یا}\ b=-\frac{۱}{۹}$$

اگر $b=-\dfrac{۱}{۳}$، آن‌گاه $a=۳۶b+۶=-۶$.

اگر $b=-\dfrac{۱}{۹}$، آن‌گاه $a=۳۶b+۶=۲$.

۲. گزینهٔ «۱»

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{[x]|x-[x]|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{[۱^+]|x-[۱^+]|}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱|x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{x-۱}=۱$$

۳. گزینهٔ «۳»

دقت کنید اگر $x_۰=-۲$ باشد، با توجه ضابطهٔ خط $y_۰=-۲m+۱$ است. بنابراین باید:

$$\begin{cases} -۲m+۱=۴m-۶+n \\ m=۲m(-۲)+۳ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۶m+n=۷ \\ m=\dfrac{۳}{۵} \end{cases}\Rightarrow n=۷-۶(\frac{۳}{۵})=\frac{۱۷}{۵}$$

۴. گزینهٔ «۲»

راه‌حل مشتق را بی‌خیال شوید. ما کلی تابع بلدیم. در فصل تابع خواندیم که مماس‌بودن یعنی چه. باید دو تابع را از هم کم کنیم و سپس $\Delta=۰$ قرار دهیم:

$$\frac{x^۲+a}{x-۲}-(-۳x+۲)=\frac{x^۲+a+۳x^۲-۸x+۴}{x-۲}=\frac{۴x^۲-۸x+a+۴}{x-۲}$$

حالا Δ صورت کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $۶۴-۴(۴)(a+۴)=۰\Rightarrow ۴-(a+۴)=۰\Rightarrow a=۰$

با این روش عالی حتی معلوم است که طول نقطهٔ تماس $x=۱$ است. (مسئلهٔ (۳) را با این روش حل کنید.)

۵. گزینهٔ «۱»

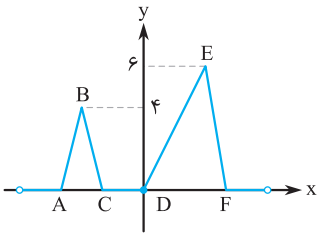
$$f'_+(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{(x^3-[2x^2]x)+(2\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x^3-[4^+]x+2\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x^3-4x+2\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{3x^2-4}{1} = 3\times 2-4=2$$

۶. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که $y=f(x)+|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & ; \quad f(x)>0\\ 0 & ; \quad f(x)\le 0\end{cases}$.

بنابراین نمودار $y=f(x)+|f(x)|$ با توجه به نمودار $y=f(x)$ به‌راحتی قابل رسم است:



که به وضوح در نقاط A, B, C, D, E, F مشتق ندارد.

۷. گزینهٔ «۲»

باید دقت کنید که $h^2 \ge 0$ است. لذا:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h^2)-f(3)}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = f'_+(3) = (3x+2)'_{x=3} = 3$$

۸. گزینهٔ «۲»

دقت بفرمایید که $f(x)=|(x-3)(x-a)|$، لذا $x=3$ و $x=a$ ریشهٔ $f(x)$ هستند. اما اگر $f(x)$ ریشهٔ ساده داشته باشد، آن‌گاه در همان ریشه‌ها مشتق‌ناپذیر است. لذا نه $x=3$ و نه $x=a$ نباید ساده باشند و به‌عبارتی $(x-3)(x-a)$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد. خب، این یعنی $a=3$.

۹. گزینهٔ «۱»

$$|MA| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(2\sqrt{x-1}+3-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2+4(x-1)}$$
$$= \sqrt{x^2} = |x|$$

اما با توجه به دامنهٔ $y=2\sqrt{x-1}+3$ می‌فهمیم که $x\ge 1$ است و لذا $|x|=x$. پس:

$$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1 \xrightarrow{x=2} f'(2)=2$$

تبصره: $(2,3)$ تنها نقطه‌ای در صفحه است که فاصلهٔ نقاط روی نمودار $y=2\sqrt{x-1}+3$ از آن، به‌صورت خطی رشد می‌کند.

۱۰. گزینهٔ «۲»

اولاً چون طول نقطهٔ تماس $x_0=1$ است، پس:

$$\begin{cases} y_0 = a(1)+2 \\ y_0 = 1^3+b(1^2)\end{cases} \Rightarrow a+2=1+b \Rightarrow b=a+1 \quad (1)$$

ثانیاً شیب خط مماس برابر a است. این یعنی مشتق تابع در نقطهٔ تماس برابر a است:

$$y' = 3x^2+2bx \xrightarrow{x=1} 3+2b=a \quad (2)$$

از ۱ و ۲ داریم:

$$\begin{cases} b = a + 1 \\ 3 + 2b = a \end{cases} \Rightarrow a = -5 , b = -4$$

بنابراین معادلهٔ خط $y = -5x + 2$ و ضابطهٔ تابع $y = x^3 - 4x^2$ است. برای یافتن نقطهٔ تلاقی باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x^3 - 4x^2 = -5x + 2 \Rightarrow x^3 + 5x - 4x^2 - 2 = 0$$

می‌دانیم یکی از جواب‌های این معادله، $x = 1$ است، زیرا دو تابع در این نقطه مماس هستند. در واقع با تقسیم $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ بر $x - 1$، داریم:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$$

پس طول نقطهٔ تلاقی دوم $x = 2$ است. با قراردادن در $y = -5x + 2$، عرض این نقطه $y = -8$ به‌دست می‌آید. لذا $x + y = -6$.

هایپرتست — فصل ۱۲

۱. گزینهٔ «۲»

فرض کنیم شعاع قاعده r و ارتفاع استوانه h باشد. می‌دانیم حجم استوانه از فرمول $V = \pi r^2 h$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید $\pi r^2 h = 10$ که این یعنی $h = \frac{10}{\pi r^2}$. حالا مقدار فلزی که باید مصرف شود تا این استوانهٔ درباز ساخته شود را محاسبه می‌کنیم. مقدار πr^2 از فلز را برای دایرهٔ کف استوانه می‌خواهیم. مقدار $2\pi rh$ را برای دیوارهٔ استوانه می‌خواهیم (فرمول مساحت دیوارهٔ جانبی استوانه برابر با $2\pi rh$ است) که با توجه به $h = \frac{10}{\pi r^2}$ می‌شود $2\pi r(\frac{10}{\pi r^2}) = \frac{20}{r}$. چون استوانه درباز است، پس به فلز بیشتری نیاز نداریم. لذا تابع $f(r)$، مقدار فلز مصرفی، برابر است با:

$$f(r) = \pi r^2 + \frac{20}{r} \Rightarrow f'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \Rightarrow \pi r^3 = 10 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

لذا کم‌ترین مقدار مساحت قاعده برابر است با:

$$\pi\sqrt[3]{\frac{100}{\pi^2}} = \sqrt[3]{100\pi}$$

۲. گزینهٔ «۳»

اول این‌که $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|^2+3}$. لذا با فرض $|x| = T \geq 0$ می‌توانیم $f(x)$ را برحسب T، به این‌صورت بنویسیم:

$$f(T) = \frac{T+1}{T^2+3} ; T \in [0, +\infty).$$

حالا برای محاسبهٔ برد $f(T)$ باید نقاط بحرانی $f(T)$ را به‌دست آوریم. اما از آن‌جا که یک سمت بازه $+\infty$ است، باید $\lim\limits_{T \to +\infty} f(T)$ را نیز حساب کنیم. پس:

$$f'(T) = \frac{1(T^2+3) - 2T(T+1)}{(T^2+3)^2} = 0 \Rightarrow -T^2 - 2T + 3 = 0 \Rightarrow T = 1 \text{ یا } T = -3$$

$$\xrightarrow{T \geq 0} T = 1$$

عددگذاری‌ها:

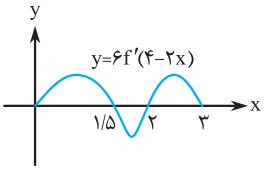
$$f(۱)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\ ,\ \lim_{T\to+\infty} f(T)=۰\ ,\ f(۰)=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین برد این تابع برابر است با :

$$R_f=(۰,\frac{۱}{۲}]$$

۳. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که $(-۳f(۴-۲x)+۱)'=۶f'(۴-۲x)$. به کمک انتقال و انبساط عرضی و انقباض طولی، داریم:



بنابراین جدول تعیین علامت $۶f'(۴-۲x)$ چنین است:

لذا تابع $y=-۳f(۴-۲x)+۱$ در $x=۱/۵$ ماکزیمم نسبی و در $x=۲$ یک مینیمم نسبی دارد.

x	۰		۱/۵		۲		۳
۶f′(۴-۲x)		+	۰	−	۰	+	۰
۲f(۴-۲x)+۱		↗		↘		↗	
			Max		Min		

۴. گزینهٔ «۱»

صورت مسئله می‌گوید جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت است و از طرفی:

x		−۲		۱	
f′(x)	−	۰	+	۰	−

$$f'(x)=\frac{a(۳x^۲+b)-۶x(ax+۱)}{(۳x^۲+b)^۲}$$

−۲ و ۱ ریشه‌های $f'(x)$ هستند. پس:

$$\begin{cases}a(۱۲+b)+۱۲(-۲a+۱)=۰\\ a(۳+b)-۶(a+۱)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۲a-ab=۱۲\\ ab-۳a=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow ab=۱۲\ ,\ a=۲\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۶$$

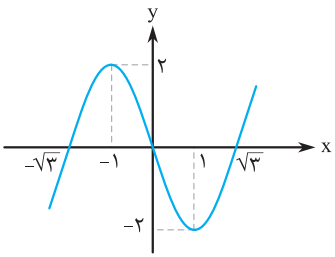
چون $b>۰$ است، جواب قابل قبول است. بنابراین:

$$b+\frac{۱}{a}=۶+\frac{۱}{۲}=\frac{۱۳}{۲}$$

۵. گزینهٔ «۲»

معنی سؤال این است که معادلهٔ $x^۳-۲x=x+k$ دارای سه جواب است. از این معادله، داریم:

$x^۳-۳x=k$. نمودار $y=x^۳-۳x$ به‌صورت مقابل است:

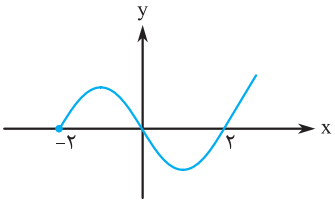


$$y'=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x_{Min}=۱, x_{Max}=-۱$$

$$\Rightarrow y_{Min}=-۲\ ,\ y_{Max}=۲$$

دقت کنید اگر $-۲<k<۲$ باشد، آن‌گاه $y=k$ این نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند. اگر $k=۲$ یا -۲ باشد، آن‌گاه $y=k$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند. (در این حالت یکی از دو ریشه،مضاعف است) اگر $k>۲$ یا $k<-۲$ باشد، خط $y=k$ این نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند. ما دنبال تقاطع سه تایی هستیم، لذا $k\in(-۲\ ,\ ۲)$.

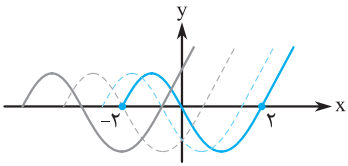
۶. گزینهٔ «۴»



نمودار $f(x)=x(x^{۲}-۴);x\in[-۲,+\infty)$ به‌صورت مقابل است:

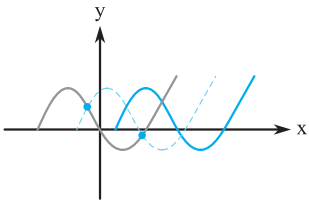
نمودار $y=f(x+a)$ از انتقال افقی این نمودار به‌دست می‌آید.

دو حالت داریم:



حالت اول انتقال به سمت چپ باشد، یعنی $a>۰$. در این‌صورت برای این‌که $y=f(x)$ و $y=f(x+a)$ تنها دارای یک نقطهٔ تلاقی باشند، باید $f(x+a)$ ریشهٔ نامنفی نداشته باشد:

این بدین معنی است که $a>۲$ است و البته نباید نمودار جدید کاملاً عقب‌تر از نمودار اولیه باشد. یعنی باید حداکثر ۴ واحد به عقب برگردیم و این یعنی $a\le ۴$.



حالت دوم انتقال به سمت راست، یعنی $a<۰$ باشد. در این‌صورت باید ریشه‌های $y=f(x+a)$ اعداد مثبت باشند که یعنی $a<-۲$ و البته $-۴\le a$ است، زیرا اگر بیشتر از ۴ واحد به راست انتقال دهیم، نمودارها تقاطعی نخواهند داشت.

بنابراین حدود a می‌شود: $a\in[-۴,-۲)\cup(۲,۴]$ که می‌توان به‌صورت $۲<|a|\le ۴$ بیان کرد.

۷. گزینهٔ «۴»

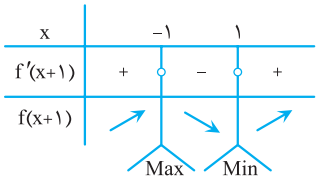
دقت بفرمایید که:

$$f(x+|x|)=\begin{cases} f(۲x) & ; \quad x>۰ \\ f(۰) & ; \quad x\le ۰ \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید، این تابع برای $x\le ۰$ تابع ثابت است. لذا هرکدام از اعداد منفی هم ماکزیمم نسبی این تابع‌اند، هم مینیمم نسبی. لذا این تابع بی‌شمار ماکزیمم نسبی و بی‌شمار مینیمم نسبی دارد.

۸. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که $(f(x+۱))'=f'(x+۱)=۳x^{۲}-۳=۳(x^{۲}-۱)$. لذا وضعیت یکنوایی و اکسترمم‌های نسبی $y=f(x+۱)$ به شرح زیر است:



دقت کنید که الان معلوم شد Min نسبی تابع $y=f(x+۱)$ نقطهٔ $(۱,f(۱+۱))$ یعنی $(۱,۱-۳+۱)=(۱,-۱)$ است. از آن‌جا که $f(x-۱)$ از انتقال $f(x+۱)$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست به وجود می‌آید، پس نقطهٔ Min نسبی $f(x-۱)$ برابر با $(۱+۲,-۱)=(۳,-۱)$ است. پس $\alpha=۳$ و البته تابع جدید $y=\beta x+f(x)=-x+f(x)$ است. حالا برای یافتن معادلهٔ خط مماس، به نقطهٔ تماس و مشتق نیاز داریم. طول نقطهٔ تماس $x=\alpha=۳$ است.

پس:

۱) $y=-۳+f(۳)=-۳+f(۲+۱)=-۳+(۲^۳-۳\times۲+۱)=۰\Rightarrow(۳,۰)$ نقطهٔ تماس:

۲) $(-x+f(x))'=-۱+f'(x)\xrightarrow{x=۳}a=-۱+f'(۳)$

امـا $f(x+۱)=x^۳-۳x+۱$ نتیجه می‌دهـد $f'(x+۱)=۳x^۲-۳$ و بنابراین با قـراردادن $x=۲$ داریم: $f'(۳)=۳\times۴-۳=۹$. بنابراین:

شیب خط مماس $=-۱+۹=۸$

۳) معادلهٔ خط مماس: $y-۰=۸(x-۳)\Rightarrow y=۸x-۲۴$

۹. گزینهٔ «۳»

می‌دانیم $(۲+\sqrt{۳})^x(۲-\sqrt{۳})^x=۱$ است. قرار می‌دهیم $T=(۲+\sqrt{۳})^x>۰$. در این‌صورت:

$$f(T)=[T(۲+\sqrt{۳})^۲+\frac{۱}{T}];T>۰$$

موقتاً جزءصحیح را بی‌خیال می‌شویم و کار را با تابع $g(T)=(۲+\sqrt{۳})^۲T+\frac{۱}{T};T>۰$ ادامه می‌دهیم:

$$g'(T)=(۲+\sqrt{۳})^۲-\frac{۱}{T^۲}=۰\Rightarrow T=\pm(۲-\sqrt{۳})\xrightarrow{T>۰}T=۲-\sqrt{۳}$$

$$g''(T)=\frac{۲}{T^۳}>۰\Rightarrow g''(۲-\sqrt{۳})>۰\Rightarrow$$ $T=۲-\sqrt{۳}$ طول یک نقطهٔ Min نسبی است.

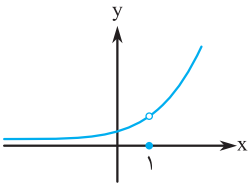
لذا کم‌ترین مقدار $g(T)$ همان $g(۲-\sqrt{۳})$ است:

$$g(۲-\sqrt{۳})=(۲+\sqrt{۳})^۲(۲-\sqrt{۳})+\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=۲+\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}=۴+۲\sqrt{۳}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $f(T)$ هم $[۴+۲\sqrt{۳}]$ است. البته:

$$\text{Min}\,f(T)=\text{Min}\,f(x)=[۴+۲\sqrt{۳}]=۴+[\sqrt{۱۲}]=۴+۳=۷$$

۱۰. گزینهٔ «۲»



الف) صحیح نیســت. تابع زیر در $x=۱$ دارای Min نسبی است، درحالی‌که یک‌به‌یک هست:

ب) صحیح نیست. مثلاً تابع $y=\sin x$ بی‌شمار اکسترمم نسبی و در نتیجه بی‌شمار نقطهٔ بحرانی دارد و البته هم که تابعی ثابت نیست.

پ) صحیح است. ما کل حالت‌های یک Min نسبی را در نکتهٔ (۴) درسنامه رسم کرده‌ایم. اگر $y=f(x)$ پیوسته باشد، آن‌گاه Min نســبی آن به‌صورت

اســت. در همهٔ این حالات، $f(x)$ تابعی یک‌به‌یک نیست. همین حرف برای Max نسبی هم صحیح است. لذا اگر تابع پیوســتهٔ $f(x)$، اکسترمم نسبی داشته باشد، دیگر نمی‌تواند وارون‌پذیر باشد. معادل این حرف می‌شود: اگر تابع پیوستهٔ $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، حتماً اکسترمم نسبی ندارد.

هایپرتست

فصل ۱۳

۱. گزینهٔ «۳»

ابتدا دقت کنید که چون دنباله حسابی است، پس:

$$d=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\xrightarrow{d<0}d^2=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2\sqrt{4-3}=2\xrightarrow{d<0}d=-\sqrt{2}$$

حالا طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$a_7^2-a_5^2=(a_7-a_5)(a_7+a_5)=(2d)(2a_6)=(-2\sqrt{2})2a_6$$

$$=-4\sqrt{2}a_6=-4\sqrt{2}(a_1+5d)=-4\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-5\sqrt{2})$$

$$=-4(\underbrace{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}_{\text{روش } 2ab}-10)=-4(\sqrt{3}+1-10)=4(9-\sqrt{3})=36-4\sqrt{3}$$

۲. گزینهٔ «۱»

اگر $[a-1,5]$ شامل دقیقاً سه عدد صحیح باشد، این اعداد باید $2,3,4$ باشند. لذا $2\in[a-1,5)$ است، اما $1\notin[a-1,5)$. به عبارتی $1<a-1\le 2$ که یعنی $2<a\le 3$.

۳. گزینهٔ «۱»

می‌دانیم که $a_5=a_1q^4$ و $a_3=a_1q^2$ است. اما باید $(a_1q^4,2a_1q^2,3a_1)$ دنبالهٔ حسابی باشد که یعنی:

$$a_1q^4+3a_1=4a_1q^2\Rightarrow a_1(q^4-4q^2+3)=0$$

$$\xrightarrow{a_1\neq 0}q^4-4q^2+3=0\Rightarrow(q^2-3)(q^2-1)=0\Rightarrow q=\pm1,\pm\sqrt{3}$$

۴. گزینهٔ «۴»

از این‌که $(x+2,3\sqrt{x},6)$ سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی‌اند، نتیجه می‌گیریم که:

$$x+2+6=6\sqrt{x}\Rightarrow x-6\sqrt{x}+8=0\Rightarrow(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-2)=0\Rightarrow\sqrt{x}=4 \text{ یا } 2\Rightarrow x=16 \text{ یا } 4$$

پس دو حالت داریم:

حالت اول با جایگذاری $x=4$ می‌بینیم که سه جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی مورد بحث، $(6,6,6)$ است. لذا $a_1=6$ و $d=0$ است. دنبالهٔ هندسی که جملهٔ اول آن $x=4$ و قدرنسبت آن $q=\frac{d+1}{2}=\frac{1}{2}$ است هم می‌شود:

$$(4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots)\Rightarrow b_5=\frac{1}{4}$$

حالت دوم اگر $x=16$ باشد، آن‌گاه سه جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $(18,12,6)$ است که یعنی $a_1=18$ و $d=-6$ است. لذا $b_1=x=16$ و $q=\frac{d+1}{2}=\frac{-5}{2}$ است. پس $b_5=b_1q^4=16(\frac{-5}{2})^4=625$.

۵. گزینهٔ «۴»

اگر قدرنسبت دنباله را d بگیریم، داریم: $(t=x+3d,z=x+2d,y=x+d)$. با جایگذاری در اطلاعات مسئله، داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{t}=\frac{15}{4}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{2x+3d}{x(x+3d)}=\frac{15}{4}\\ \frac{2x+3d}{(x+d)(x+2d)}=\frac{5}{2}\end{cases}$$

از تقسیم این دو معادله بر هم، داریم:

$$\frac{(x+d)(x+2d)}{x(x+3d)}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2(x^2+3dx+2d^2)=3(x^2+3dx)\Rightarrow x^2+3dx-4d^2=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}(x+4d)(x-d)=0\Rightarrow x=d \text{ یا } x=-4d$$

حالت $x=d$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{t}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3d}=\frac{1}{d}+\frac{1}{4d}=\frac{5}{4d}=\frac{15}{4}\Rightarrow d=\frac{1}{3}$$

حالت $x=-4d$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{t}=\frac{1}{-4d}+\frac{1}{-4d+3d}=-\frac{1}{4d}+\frac{-1}{d}=\frac{15}{4}\Rightarrow\frac{-5}{4d}=\frac{15}{4}\Rightarrow d=-\frac{1}{3}$$

۶. گزینهٔ «۱»

فرض کنیم این جملات $(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3)$ باشند. در این‌صورت:

$$\frac{a_1+a_1q^3}{a_1q+a_1q^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a_1(1+q^3)}{a_1q(1+q)}=\frac{a_1(1+q)(1-q+q^2)}{a_1q(1+q)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1-q+q^2}{1+q}=\frac{1}{2}\Rightarrow q=1 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}q=1\Rightarrow a_1+a_1=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2} & \text{کوچک‌ترین جمله}\\ q=\frac{1}{2}\Rightarrow a_1+\frac{a_1}{8}=1\Rightarrow a_1=\frac{8}{9}\rightarrow\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{9}\longrightarrow\frac{1}{9} & \text{کوچک‌ترین جمله}\end{cases}$$

۷. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $(2^x, 2^{2x+1}, 2^{3x+2})$ برابر است با $q_1=\frac{2^{2x+1}}{2^x}=2^{x+1}$ و قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $(3^y, 3^{2y+1}, 3^{3y+2})$ هم برابر است با $q_2=\frac{3^{2y+1}}{3^y}=3^{y+1}$. بنابراین داریم:

$$q_1=q_2=6\Rightarrow 2^{x+1}=3^{y+1}=6\Rightarrow\begin{cases}2^{x+1}=6\\ 3^{y+1}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x\times 2=6\\ 3^y\times 3=6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2^x=3\\ 3^y=2\end{cases}\Rightarrow x=\log_2 3, y=\log_3 2\Rightarrow xy=\log_2 3\times\log_3 2=\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 2}{\log 3}=1$$

بنابراین $xy=1$ است. حالا می‌خواهیم $(\frac{1}{1+x}, z, \frac{1}{1+y})$ دنبالهٔ حسابی شود. باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}=2z\Rightarrow\frac{1+y+1+x}{(1+x)(1+y)}=2z\Rightarrow\frac{2+x+y}{1+x+y+\underbrace{xy}_{1}}=2z$$

$$\Rightarrow\frac{2+x+y}{2+x+y}=2z\Rightarrow 2z=1\Rightarrow z=\frac{1}{2}$$

۸. گزینهٔ «۳» توجه کنید که $۳۷^۲=۱۳۶۹<۱۴۰۰$ ولی $۳۸^۲=۱۴۴۴>۱۴۰۰$ است. لذا (a,b,c) می‌تواند $(۱,۳۷,۳۷^۲)$ باشد، اما نمی‌تواند $(۱,۳۸,۳۸^۲)$ باشد. از آن‌جا که بیشترین مقدار q وقتی رخ می‌دهد که جملهٔ اول تا جای ممکن کوچک باشد، پس ۳۷ واقعاً بزرگ‌ترین مقدار q است.

۹. گزینهٔ «۳»

$$a_n=\frac{۲n^۲+n-۳}{۲n+۳}=\frac{(n-۱)(۲n+۳)}{(۲n+۳)}=n-۱$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{\sqrt{a_۱}+\sqrt{a_۲}}+\frac{۱}{\sqrt{a_۲}+\sqrt{a_۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{a_۹}+\sqrt{a_{۱۰}}}=\frac{۱}{۰+\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۸}+\sqrt{۹}}$$

$$\xlongequal{\text{گویاکردن}}۱+\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}+\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۳-۲}+\cdots+\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۸}}{۹-۸}$$

$$=۱+\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{۹}-\sqrt{۸}=\sqrt{۹}-۰=۳$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

فرض کنید واسطه‌ها $a_۱,a_۲,\dots,a_n$ باشند. در این‌صورت دنبالهٔ $\cos^۲۱۵^\circ,\ a_۱,a_۲,\dots,a_n,\sin^۲۱۵^\circ$ است. این به‌خصوص نتیجه می‌دهد که: $\cos^۲۱۵^\circ+\sin^۲۱۵^\circ=a_۱+a_n\Rightarrow a_۱+a_n=۱$

پس مجموع واسطه‌ها می‌شود: $n(\frac{a_۱+a_n}{۲})=n(\frac{۱}{۲})=\frac{n}{۲}=۲۰\Rightarrow n=۴۰$

لذا ۴۰ واسطه داریم. پس کلاً ۴۲ جمله داریم و لذا: $d=\frac{\sin^۲۱۵^\circ-\cos^۲۱۵^\circ}{۴۲-۱}=\frac{-\cos۳۰^\circ}{۴۱}=\frac{-\sqrt{۳}}{۸۲}$

هایپرتست — فصل ۱۴

۱. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که $\cot\hat{B}=\frac{۴}{۳},\cot\hat{C}=\frac{۱۲}{۵}$ است. بنابراین: $\cot\hat{B}=\frac{BH}{AH}=\frac{۴}{۳},\cot\hat{C}=\frac{HC}{AH}=\frac{۱۲}{۵}$

در نتیجه: $\cot\hat{B}+\cot\hat{C}=\frac{BH+HC}{AH}=\frac{a}{h_a}=\frac{۴}{۳}+\frac{۱۲}{۵}=\frac{۵۶}{۱۵}$

حالا دقت کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم:

$$\frac{h_a}{b}=\sin\hat{C}\xrightarrow[\sin\hat{C}=\frac{۵}{۱۳}]{\tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}}\frac{h_a}{b}=\frac{۵}{۱۳}\Rightarrow h_a=\frac{۵}{۱۳}b$$

بنابراین:

$$\frac{a}{h_a}=\frac{a}{\frac{۵}{۱۳}b}=\frac{۵۶}{۱۵}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۵۶}{۳۹}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۳۹}{۵۶}$$

از فصل مثلثات خیلی استفاده کردیم، به‌خصوص آن‌جا که $\sin\hat{C}=\frac{۵}{۱۳}$ را پیدا کردیم.

۲. گزینهٔ «۲»

اولاً $BM=\sqrt{5}$ است. طبق تعریف $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در مثلث CBM داریم: $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

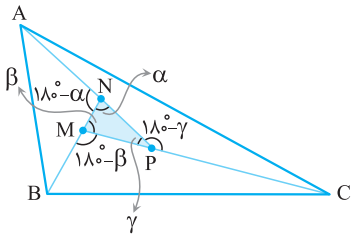
فرض کنید $MA=x$ باشد. از تعریف $\tan 2\alpha$ در $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\tan 2\alpha=\frac{x+1}{2}\Rightarrow\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{x+1}{2}\Rightarrow\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{1}{5}}=\frac{4}{3}=\frac{x+1}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

از طرفی در $\overset{\triangle}{CBD}$، نیمساز و ارتفاع منطبق شده‌اند، پس این مثلث متساوی‌الساقین است و $BC=BD=2$ است. لذا:

$$\frac{BD}{MA}=\frac{2}{\frac{5}{3}}=\frac{6}{5}$$

۳. گزینهٔ «۳»



دقت کنید که:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MBC}}}{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}=\frac{\frac{1}{2}\times 2\times 7\times\sin(180^\circ-\beta)}{\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin\beta}=7$$

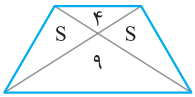
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{PAC}}}{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}=\frac{\frac{1}{2}\times 5\times 5\sin(180^\circ-\gamma)}{\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\gamma}=\frac{25}{4}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ANB}}}{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}=\frac{\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sin(180^\circ-\alpha)}{\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin\alpha}=\frac{9}{2}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{7S_{\overset{\triangle}{MNP}}+\frac{25}{4}S_{\overset{\triangle}{MNP}}+\frac{9}{2}S_{\overset{\triangle}{MNP}}+S_{\overset{\triangle}{MNP}}}=\frac{1}{\frac{75}{4}}=\frac{4}{75}$$

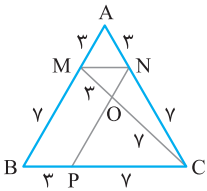
۴. گزینهٔ «۳»



بنا به قضیهٔ پروانه داریم: $S=\sqrt{36}=6$. بنابراین مساحت ذوزنقه می‌شود:

$4+9+6+6=25$

۵. گزینهٔ «۱»



با توجه به موازی بودن خطوط، نسبت‌ها به‌صورت مقابل هستند:

با توجه به خط NO و مثلث NMC، $\frac{S_{\overset{\triangle}{NOM}}}{S_{\overset{\triangle}{NOC}}}=\frac{3}{7}$ است.

لذا $S_{\overset{\triangle}{NOM}}=3x, S_{\overset{\triangle}{NOC}}=7x$ است.

حالا در مثلث AMC و با توجه به خط MN داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MNA}}}{S_{\overset{\triangle}{MNC}}}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{MNA}}}{۱۰x}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MNA}}=\frac{۳۰x}{۷}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{۳x}{\frac{۳۰x}{۷}}=\frac{۷}{۱۰}=۷۰\%$$

۶. گزینهٔ «۳»

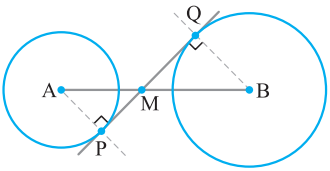
دقت کنید که $EG = BM$ و $GF = NC$ است و خط‌های موازی، مثلث‌های متشابه ساخته‌اند. لذا:

$$\frac{۹}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{EG}{BC})^۲=(\frac{BM}{BC})^۲,\ \frac{۱۶}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{MN}{BC})^۲,\ \frac{۴}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{GF}{BC})^۲=(\frac{NC}{BC})^۲$$

از جمع جذر این روابط داریم:

$$\frac{\sqrt{۴}+\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}}{\sqrt{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}}=\frac{BM+MN+NC}{BC}=۱\Rightarrow ۲+۳+۴=\sqrt{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۸۱$$

۷. گزینهٔ «۱»



فاصلهٔ ۴ از نقطهٔ B یعنی دایره به شعاع ۴ و مرکز B. وجود یک نقطه روی خط L، یعنی دایره بر L مماس است. به نحو مشابه دایره به شعاع ۳ و مرکز A هم بر L مماس است. حالا $\overset{\triangle}{APM}\sim\overset{\triangle}{BQM}$ و بنابراین:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AP}{BQ}=\frac{۳}{۴}$$

۸. گزینهٔ «۱»

$\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OMN}$ دو قاعدهٔ موازی دارند، لذا متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}=(\frac{MN}{AB})^۲=\frac{(MN)^۲}{۳۶}$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$S_{ABCD}=S_{\overset{\triangle}{OAB}}+(\frac{۸۱}{۳۶})S_{\overset{\triangle}{OAB}}+۲(\frac{۹}{۶})S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{۲۵}{۴}S_{\overset{\triangle}{OAB}}$$

می‌دانیم $EM = NF$ و طبق تالس در $\overset{\triangle}{DAB}$ داریم:

$$\frac{EM}{۶}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow EM=۱$$

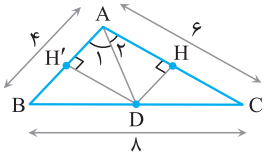
محاسبهٔ MN هم که کاری ندارد.

$$MN=EF-۲EM=\frac{۶\times۱+۹\times۵}{۱+۵}-۲(۱)=۶/۵$$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}۱)\ S_{\overset{\triangle}{OMN}}=\frac{(MN)^۲}{۳۶}S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{(۶/۵)^۲}{۳۶}S_{\overset{\triangle}{OAB}}\\ ۲)\ S_{ABCD}=\frac{۲۵}{۴}S_{\overset{\triangle}{OAB}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{(۶/۵)^۲}{۳۶}}{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۱/۶۹}{۹}$$

۹. گزینهٔ «۲»



کوچک‌ترین نیمساز روی بزرگ‌ترین ضلع می‌نشیند.

چون AD نیمساز $\hat{A}$ است، پس ارتفاع‌هایی که از D بر دو ضلع AB و AC وارد می‌شوند، درواقع حکم فاصلهٔ نقطهٔ D از دو خط AC و AB را دارند. می‌دانیم روی نیمساز، فاصله از دو ضلع زاویه برابر است.

پس: $DH = DH'$

بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times ۴}{\frac{۱}{۲}DH \times ۶} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

اما از طرفی می‌دانیم که:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BD = ۲x\,,\ DC = ۳x \Rightarrow ۵x = ۸ \Rightarrow x = \frac{۸}{۵} \Rightarrow BD = \frac{۱۶}{۵}\,,\ DC = \frac{۲۴}{۵}$$

حالا دقت می‌کنیم که دو مثلث ADH و ADH′ در واقع قابل انطباق هستند، زیرا $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $DH = DH'$ و AD هم وتر مشترک است. پس: $AH = AH' = y$ و $DH = DH' = h$. حالا در مثلث‌های BH′D و CHD، طبق فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} h^۲ + (۴-y)^۲ = (\frac{۱۶}{۵})^۲ \\ h^۲ + (۶-y)^۲ = (\frac{۲۴}{۵})^۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{منها}} (۶-y)^۲ - (۴-y)^۲ = (\frac{۲۴}{۵})^۲ - (\frac{۱۶}{۵})^۲$$

$$\Rightarrow y = \frac{۹}{۵}\,,\ h = ۳\sqrt{\frac{۳}{۵}} \Rightarrow AD = \sqrt{y^۲ + h^۲} = \sqrt{\frac{۸۱}{۲۵} + \frac{۲۷}{۵}} = \sqrt{\frac{۲۱۶}{۲۵}} = \frac{۶\sqrt{۶}}{۵}$$

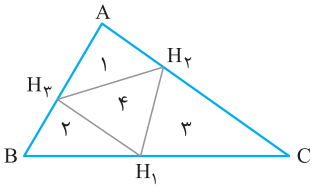
روش تستی: به‌طور کلی اندازهٔ نیمساز زاویهٔ A برابر است با:

$$AD = \sqrt{bc(۱ - (\frac{a}{b+c})^۲)}$$

پس در این مسئله:

$$AD = \sqrt{۲۴(۱ - (\frac{۸}{۱۰})^۲)} = \frac{۶\sqrt{۶}}{۵}$$

۱۰. گزینهٔ «۴»



فرض کنید $AB = ۵$ و $AC = ۶$ و $BC = ۷$.

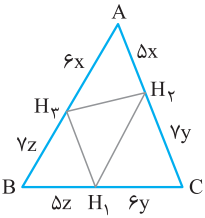
مثلث $AH_۳H_۲$ با مثلث ABC متشابه و دارای تناسب معکوس است:

$$\frac{AH_۳}{AC} = \frac{AH_۲}{AB} = \frac{H_۲H_۳}{BC} \Rightarrow \frac{AH_۳}{۶} = \frac{AH_۲}{۵} = \frac{H_۲H_۳}{۷}$$

به همین نحو مثلث‌های $CH_۱H_۲$ و $BH_۱H_۳$ هم با $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه‌اند و:

$$\frac{CH_۲}{۷} = \frac{CH_۱}{۶} = \frac{H_۱H_۲}{۵}\,,\ \frac{BH_۱}{۵} = \frac{BH_۳}{۷} = \frac{H_۱H_۳}{۶}$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



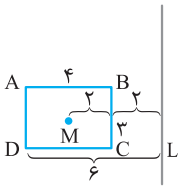
$$\begin{cases} ۶x+۷z=۵ \\ ۵x+۷y=۶ \Rightarrow x=\frac{۱}{۵}, y=\frac{۵}{۷}, z=\frac{۱۹}{۳۵} \\ ۵z+۶y=۷ \end{cases}$$

حالا داریم:

$$\frac{S_۴}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=۱-(\frac{S_۱+S_۲+S_۳}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}})=۱-(\frac{۶x}{۵}\times\frac{۵x}{۶}+\frac{۷y}{۶}\times\frac{۶y}{۷}+\frac{۵z}{۷}\times\frac{۷z}{۵})=۱-(\frac{۲۰۷}{۲۴۵})=\frac{۳۸}{۲۴۵}$$

هایپرتست — فصل ۱۵

۱. گزینهٔ «۳»



درواقع خط L تا عرض مســتطیل ۲ واحد فاصله دارد. شکل حاصل از دوران یک استوانه به ارتفاع ۳ و شعاع قاعدهٔ ۶ است که یک استوانه به ارتفاع ۳ و شعاع قاعدهٔ ۲ از وسط آن حذف شده است:

$$V=\pi(۶^۲)\times۳-\pi(۲)^۲\times۳=۹۶\pi$$

۲. گزینهٔ «۲»

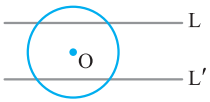
می‌دانیم $AF=a-c$ و $A'F=a+c$.

$$A'F\times AF=۱۶\Rightarrow(a+c)(a-c)=۱۶\Rightarrow a^۲-c^۲=۱۶\Rightarrow b^۲=۱۶$$

از طرفی $MF=\frac{b^۲}{a}$. در نتیجه داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{A'MA}}=\frac{MF\times AA'}{۲}=\frac{\frac{b^۲}{a}\times۲a}{۲}=b^۲=۱۶$$

۳. گزینهٔ «۲»



اگر خوب دقت کنیم می‌فهمیم دو خط موازی هستند. دو خط موازی تنها به شرطی وترهای مســاوی روی دایره ایجاد می‌کنند که نسبت به مرکز دایره متقارن باشند. پس باید قرینهٔ خط $۳x+۴y=۲$ را نســبت به $O(-۱,۲)$ پیدا کنیم. در فصل معادلهٔ خط فرمول قرینهٔ خط نسبت به نقطه را خواندیم:

$$۳(-۲-x)+۴(۴-y)=۲\Rightarrow-۳x-۴y+۱۰=۲\Rightarrow۳x+۴y=۸$$

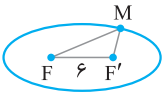
۴. گزینهٔ «۱»

مرکز و شــعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x+۲y=۳$ به‌ترتیب $O=(-۱,-۱)$ و $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۴(-۳)}=\sqrt{۵}$ است. برای این‌که دو دایره مماس خارج باشند، باید $|OO'|=d=R+r$ باشد. یعنی:

$$|OO'|=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳}=R+\sqrt{۵}\Rightarrow R=\sqrt{۱۳}-\sqrt{۵}\Rightarrow S=\pi R^۲=\pi(\sqrt{۱۳}-\sqrt{۵})^۲$$

$$=\pi(۱۸-۲\sqrt{۶۵})$$

۵. گزینهٔ «۴»



اگر یک ضلع ۶ و محیط ۱۴ باشد، پس جمع دو ضلع دیگر ۸ است. لذا ما دنبال مثلث‌هایی با یک ضلع ۶ و مجموع دو ضلع دیگر ۸ هستیم. یک بیضی با فاصلهٔ کانونی $۲c = ۶$ در نظر بگیرید. FF' ضلع ۶ مثلث است. اگر قطر اصلی بیضی را ۸ بگیریم، آن‌گاه مجموع دو ضلع دیگر، درواقع مساوی با مجموع فواصل نقطهٔ M روی بیضی، از دو کانون است.

بین تمام مثلث‌های از این نوع، بیشترین مساحت وقتی است که M در بالاترین نقطه، یعنی روی B قرار بگیرد.

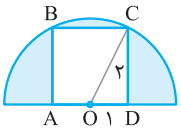
در این حالت مساحت مثلث برابر با $\frac{۱}{۲}(۲c)b = cb$ می‌شود:

$$c = ۳ , a = ۴ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۶ = ۹ + b^۲ \Rightarrow b = \sqrt{۷} \Rightarrow s = bc = ۳\sqrt{۷}$$

۶. گزینهٔ «۱»

شعاع دایره برابر است با:

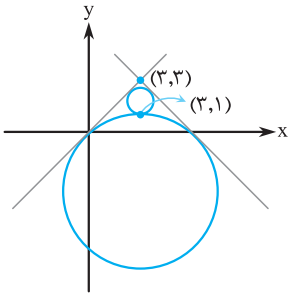
$$OC = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$$



وقتی این شکل را دوران می‌دهیم، کره‌ای به شعاع $\sqrt{۵}$ خواهیم داشت که استوانه‌ای به شعاع ۲ و ارتفاع ۲ از دل آن حذف شده است. پس:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi(\sqrt{۵})^۳ - \pi(۲^۲)۲ = \frac{۲۰\sqrt{۵}}{۳}\pi - ۸\pi = \pi(\frac{۲۰\sqrt{۵}}{۳} - ۸)$$

۷. گزینهٔ «۴»



ابتدا دقت کنید که $y = x$ و $x + y = ۶$ در نقطهٔ $(۳ , ۳)$ تلاقی دارند.

حالا اگر (h , k) مرکز دایرهٔ مورد بحث باشد، لزوماً باید $k < ۳$ باشد.

از طرفی داریم:

$$r = \frac{|h + k - ۶|}{\sqrt{۲}} = \frac{|k - h|}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow (h + k - ۶ = k - h) \text{ یا } (h + k - ۶ = h - k) \Rightarrow h = ۳ \text{ یا } k = ۳$$

پس طبق معمول دو حالت داریم:

حالت اول اگر $h = ۳$ باشد، مرکز دایره $(۳ , k)$ و شعاع دایره $r = \frac{|k - ۳|}{\sqrt{۲}}$ است. لذا معادلهٔ دایره می‌شود:

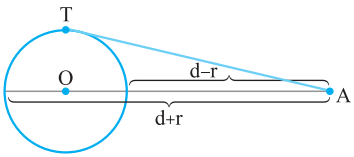
$$(x - ۳)^۲ + (y - k)^۲ = r^۲ \Rightarrow (x - ۳)^۲ + (y - k)^۲ = \frac{(k - ۳)^۲}{۲} \xrightarrow{(۳,۱)} ۰ + (۱ - k)^۲ = \frac{(k - ۳)^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲k^۲ - ۴k + ۲ = k^۲ - ۶k + ۹ \Rightarrow k^۲ + ۲k - ۷ = ۰ \Rightarrow k = -۱ \pm ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow r = \frac{|k - ۳|}{\sqrt{۲}} = \frac{|-۴ - ۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۲}} \text{ یا } \frac{|-۴ + ۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۲}} \Rightarrow r = ۲\sqrt{۲} + ۲ \text{ یا } ۲\sqrt{۲} - ۲$$

حالت دوم اگر $k = ۳$ باشد، این حالت با توجه به شرط $k < ۳$ منتفی است.

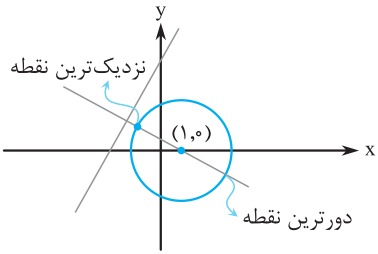
۸. گزینهٔ «۳»



برای هر نقطهٔ بیرون دایره مانند A، فاصلهٔ A تا مرکز دایره را d می‌نامیم. یعنی $d=|OA|$. مثلاً در این مسئله $O(-۱,-۲)$ و $A(۲,۱)$ است و لذا $d=|OA|=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=۳\sqrt{۲}$. در این صورت کم‌ترین فاصلهٔ A تا دایره برابر $d-r$ و بیشترین فاصلهٔ A تا دایره $d+r$ است (شکل را نگاه کنید). لذا حاصل‌ضرب این دو مقدار برابر با $(d-r)(d+r)=d^۲-r^۲$ است. لذا داریم:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۴^۲-۴(-۱)}=\sqrt{۶}\Rightarrow d^۲-r^۲=۱۸-۶=۱۲$$

۹. گزینهٔ «۴»



خطی که از مرکز دایره می‌گذرد و بر خط $y=x+۱۰$ عمود است؛ از این نقطه هم عبور می‌کند! نگاه کنید:
جالب است که این خط از دورترین نقطه هم می‌گذرد. لذا کار ما این است که معادلهٔ این خط را پیدا کنیم و با دایره تقاطع دهیم. همین اول کار، شیب این خط -۱ است. پس:

$$y=-x+b\xrightarrow{\text{مرکز دایره}:(۱,۰)}۰=-۱+b\Rightarrow b=۱$$

لذا خط موردنظر $y=-x+۱$ است. با دایره تقاطع می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲+y^۲=۸\Rightarrow(x-۱)^۲+(-x+۱)^۲=۸\Rightarrow ۲(x-۱)^۲=۸\Rightarrow(x-۱)=۲$$

یا $x-۱=-۲\Rightarrow x=۳$ یا $x=-۱$

بدیهی است که برای نزدیک‌ترین نقطه $x=-۱$ است. لذا برای یافتن y داریم: $y=-x+۱\Rightarrow y=۱+۱=۲$
پس نزدیک‌ترین نقطه $(-۱,۲)$ است.

۱۰. گزینهٔ «۳»

فرض می‌کنیم خط $d: y-mx+h=۰$ بر هر دو دایره مماس باشد، مرکز دایره ها به‌ترتیب $(۰,۰)$ و $(۵,۵)$ و شعاعشان به‌ترتیب ۳ و ۴ است. بنابراین فاصلهٔ مرکز دایره‌ها از d باید به‌ترتیب ۳ و ۴ باشد:

$$\frac{|h|}{\sqrt{۱+m^۲}}=۳\Rightarrow h=۳\sqrt{۱+m^۲}\quad \text{یا}\quad -۳\sqrt{۱+m^۲}$$

$$\frac{|۵-۵m+h|}{\sqrt{۱+m^۲}}=۴\Rightarrow ۵-۵m+h=۴\sqrt{۱+m^۲}\quad \text{یا}\quad -۴\sqrt{۱+m^۲}$$

اکنون چهار حالت داریم:

حالت اول

$$۵-۵m+۳\sqrt{۱+m^۲}=۴\sqrt{۱+m^۲}$$

$$\Rightarrow ۵-۵m=\sqrt{۱+m^۲}\Rightarrow ۱۲m^۲-۲۵m+۱۲=۰\Rightarrow m=\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\text{چک}}m=\frac{۳}{۴}$$

حالت دوم

$$۵-۵m+۳\sqrt{۱+m^۲}=-۴\sqrt{۱+m^۲}$$

$\Rightarrow 5-5m=-7\sqrt{1+m^2} \Rightarrow 12m^2+25m+12 \Rightarrow m=\frac{-3}{4}, \frac{-4}{3} \rightarrow$ هر دو غیر قابل قبول‌اند

حالت سوم

$5-5m-3\sqrt{1+m^2}=4\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow 5-5m=7\sqrt{1+m^2} \Rightarrow 12m^2+25m+12=0 \Rightarrow m=\frac{-3}{4}, \frac{-4}{3} \rightarrow$ هر دو قابل قبول‌اند

حالت چهارم

$5-5m-3\sqrt{1+m^2}=-4\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow 5-5m=-\sqrt{1+m^2} \Rightarrow 12m^2-25m+12=0 \Rightarrow m=\frac{3}{4}, \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{چک}} m=\frac{4}{3}$

بنابراین شیب‌های قابل قبول عبارت‌اند از $\pm\frac{3}{4}$ و $\pm\frac{4}{3}$.

هایپرتست — فصل ۱۶

۱. گزینهٔ «۲»

میانگین این داده‌ها $\bar{a}=\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{a_n}{2}$ است و واریانس آن‌ها $\text{var}(a)=(\frac{n^2-1}{12})d^2$. بنابراین داریم:

$$\sigma_a=\frac{\sqrt{10}}{5}\bar{a} \Rightarrow \sqrt{(\frac{n^2-1}{12})d^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}\times(\frac{a_n}{2})=\frac{\sqrt{10}}{5}(\frac{0+(n-1)d}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2-1)}{12}d^2=\frac{10}{25}\times\frac{(n-1)^2d^2}{4} \Rightarrow \frac{n+1}{3}=\frac{2}{5}(n-1) \Rightarrow 5n+5=6n-6 \Rightarrow n=11$$

۲. گزینهٔ «۲»

علی و مهدی به !۲ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. حالا $\boxed{\text{علی و مهدی}}$ یک شخص جدید است که البته نباید هم کنار هیچ پسری (۴ پسر باقی‌مانده‌اند)، قرار بگیرد و بقیهٔ پسرها هم کنار هم نباشند. ابتدا ۵ دختر را به !۵ حالت قرار می‌دهیم:

$\bigcirc g_1 \bigcirc g_2 \bigcirc g_3 \bigcirc g_4 \bigcirc g_5 \bigcirc$

در ۶ مکان ایجادشده ۴ پسر و $\boxed{\text{علی و مهدی}}$ را قرار می‌دهیم: $\binom{6}{5}\times 5!$

کلاً می‌شود: $5!\times\binom{6}{5}\times 5!=120\times 6\times 120=86400$

۳. گزینهٔ «۳»

$n(S)=6^3$ اما برای $n(A)$ داستان داریم. ضرب سه عدد از $\{1,2,\ldots,6\}$ در چه حالت‌هایی مضرب ۶ است؟ کافی است یک عدد مضرب ۳ و یک عدد زوج داشته باشیم، اما حالت خاصی که ۶ داریم را باید جداگانه بررسی کنیم، چون ۶ به تنهایی هم مضرب ۳ است و هم زوج است. پس:

حالت اول حداقل یکی از سه عدد ۶ باشد. این می‌شود کل حالت‌ها (6^3) منهای حالت‌هایی که ۶ نداریم (5^3)، یعنی 6^3-5^3.

حالت دوم در اعداد ظاهر شـــده ۶ نداشته باشـــیم، در عوض یک عدد زوج و یک مضرب ۳ (که یعنی خود ۳) داشته باشیم. لذا:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{یکی از}\\ \text{سه عدد}}}{\binom{۳}{۱}}\times ۱\times(\underbrace{۴\times۴-۲\times۲}_{\substack{\text{از دو عدد باقی مانده}\\ \text{حداقل یکی زوج باشد.}}})=۳\times۱۲=۳۶$$

برابر ۳ باشد

حالت سوم در اعداد ظاهرشده دوتا ۳ داشته باشیم و یک عدد زوج:

$$\binom{۳}{۲}\times۱\times۲=۶$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶^۳-۵^۳+۳۶+۶}{۶۳}=\frac{۱۳۳}{۲۱۶}$$

۴. گزینهٔ «۲»

به دنبال عددی چهاررقمی هســـتیم که همهٔ ارقامش فرد باشـــد و حداقل یکی از ارقامش ۵ باشد پس کل اعداد چهار رقمی با ارقام فرد را منهای اعداد چهار رقمی با ارقام ۱، ۳، ۷ و ۹ می‌کنیم:

$$۵^۴-۴^۴=۳۶۹$$

۵. گزینهٔ «۱»

می‌دانیم: $\binom{۲۰}{n}+\binom{۲۰}{n+۱}=\binom{۲۱}{n+۱}$ پس:

$$\binom{۲۰}{n+۱}=\binom{۲۰}{n^۲-۱}$$

بنابراین:

$$n+۱+n^۲-۱=۲۰ \text{ یا } n+۱=n^۲-۱\Rightarrow n=۴,-۵,۲,-۱\xrightarrow{\text{چک}}n=۴,۲,-۱$$

در نتیجه حاصل‌ضرب مقادیر n برابر با ۸− است.

۶. گزینهٔ «۲»

حالت اول کوچک‌ترین فرزند خانواده مریم باشـــد. احتمال این موضوع $\frac{۱}{۶}$ اســـت. حالا برای این‌که مریم برادر بزرگ‌تر داشته باشد، کافی است حداقل یکی از بقیهٔ فرزندان پسر باشد. یعنی $\frac{۳۱}{۳۲}$. یعنی تا این‌جا $\frac{۱}{۶}\times\frac{۳۱}{۳۲}$. حالت‌های دیگر هم به همین صورت محاسبه می‌شود. لذا داریم:

$$\frac{۱}{۶}\times\frac{۳۱}{۳۲}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱۵}{۱۶}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۷}{۸}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}+۰=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۳۱+۳۰+۲۸+۲۴+۱۶}{۳۲}\right)=\frac{۱۲۹}{۱۹۲}$$

۷. گزینهٔ «۱»

$$n(S)=۱۲!$$

$n(A)$: کتاب‌های زیســـت کنار هم !۵. حالا یک شیء داریم که بستهٔ ۵ تایی کتاب‌های زیست است، ۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک داریم. ابتدا این بسته و ۴ کتاب ریاضی را به !۵ حالت کنار هم قرار می‌دهیم و ۳ کتاب فیزیک را در ۳ تا از ۶ جایگاه باقی‌مانده قرار می‌دهیم تا کنار هم نباشند: $\bigcirc B_۱\bigcirc B_۲\bigcirc B_۳\bigcirc B_۴\bigcirc B_۵\bigcirc$

بنابراین:

$$n(A)=۵!\times۵!\times\binom{۶}{۳}\times۳!$$

پس:

$$P(A)=\frac{۵!^۲\times۳!\times\binom{۶}{۳}}{۱۲!}$$

۸. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که $(A-B)\cap(B)=\varnothing$ است. از طرفی $P(x|y)$ همان ویژگی‌های احتمال عادی است که فضای نمونه‌ای آن y شده است. لذا:

$$P((A-B)|(A\cup B))+P(B|A\cup B)=P((A-B)\cup B|A\cup B)=P((A\cup B)|(A\cup B))=1$$

۹. گزینهٔ «۱»

میانگین ۹,۱۰,۱۱ برابر ۱۰ است. پس افزودن این داده‌ها، باعث تغییر میانگین نمی‌شود. میانگین ۶,۴,۲۰ نیز برابر ۱۰ است که حذف این داده‌ها هم میانگین را تغییر نمی‌دهد. پس میانگین این داده‌ها هنوز ۱۰ است. فرض کنیم داده‌های اولیه $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$, ۶,۴,۲۰ باشند. حالا باید داده‌های جدید $x_1, x_2, \dots, x_7$, ۹,۱۰,۱۱ باشند. طبق فرض مسئله داریم:

$$var(x_1)=16 \Rightarrow \frac{(x_1-10)^2+(x_2-10)^2+\dots+(x_7-10)^2+16+36+100}{10}=16$$

$$\Rightarrow (x_1-10)^2+(x_2-10)^2+\dots+(x_7-10)^2=8$$

بنابراین:

$$var(x_2)=\frac{(x_1-10)^2+(x_2-10)^2+\dots+(x_7-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2}{10}$$

$$=\frac{8+2}{10}=1$$

بنابراین:

$$CV(x_2)=\frac{\sqrt{1}}{10}=\frac{1}{10}$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

$$n(S)=6^3$$

$n(A)$: برای این‌که (a,b,c) تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، باید $a+c=2b$ باشد. پس $a+c$ زوج است. لذا a,c هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، یعنی $3\times3+3\times3=18$ حالت دارد. (b خودبه‌خود، میانگین a و c است و به ۱ طریق انتخاب می‌شود.)

برای این‌که (a,b,c) تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهد، بهتر است برحسب q فکر کنیم:

$1)\ q=1 \Rightarrow (1,1,1),(2,2,2),\dots,(6,6,6) \Rightarrow$ حسابی هم هستند $\Rightarrow$ قبلاً شمرده شدند

$2)\ q=2 \Rightarrow (1,2,4)$

$3)\ q=\frac{1}{2} \Rightarrow (4,2,1)$

اگر $q=3$ باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین دنبالهٔ ممکن $(1,3,9)$ است که ۹ در اعداد تاس نیست. لذا فقط ۸ دنبالهٔ هندسی داریم که تنها دو حالت آن‌ها را قبلاً نشمرده‌ایم:

$$n(A)=18+2=20 \Rightarrow P(A)=\frac{20}{6^3}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$$