پاسخ‌نامهٔ آزمون جامع «۱»

۱. گزینهٔ «۴»

از $[x^2+2x]=3$ داریم:

$$3\le x^2+2x<4 \xrightarrow{+1} 4\le x^2+2x+1<5 \Rightarrow 4\le (x+1)^2<5$$

$$\Rightarrow 2\le |x+1|<\sqrt{5} \Rightarrow 2\le x+1<\sqrt{5} \text{ یا } -\sqrt{5}<x+1\le -2$$

$$\Rightarrow 3\le x+2<\sqrt{5}+1 \text{ یا } 1-\sqrt{5}<x+2\le -1$$

$$\xrightarrow{\sqrt{5}\simeq 2/2} 3\le |x+2|<3/2 \text{ یا } 1\le |x+2|<1/2 \Rightarrow [|x+2|]=3 \text{ یا } 1$$

۲. گزینهٔ «۲»

جملات را $a\,,\,aq\,,\,aq^2$ می‌نامیم. داریم:

$$\begin{cases} a+aq+aq^2=19 \\ a(aq)(aq^2)=216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+q+q^2)=19 \\ a^3q^3=216=6^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+q+q^2)=19 \\ aq=6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=\frac{6}{q}} \frac{6}{q}(1+q+q^2)=19 \Rightarrow 6q^2-13q+6=0 \xrightarrow{\text{جملهٔ مشترک}} (2q-3)(3q-2)=0$$

$$\Rightarrow q=\frac{2}{3} \text{ یا } \frac{3}{2} \Rightarrow a=9 \text{ یا } a=4$$

لذا دنبالهٔ موردنظر $(4,6,9)$ یا $(9,6,4)$ است. در هر حال، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ و جملهٔ دوم ۶ است. پس نسبت خواسته‌شده $\frac{5}{6}$ است.

۳. گزینهٔ «۳»

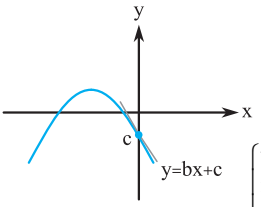
$$\frac{|3x+2|}{|x+3|}>4 \xrightarrow{|x+3| \text{ مثبت است}} |3x+2|>|4x+12| \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{دو طرف مثبت}}$$

$$9x^2+12x+4>16x^2+96x+144 \Rightarrow 7x^2+84x+140<0$$

$$\Rightarrow x^2+12x+20<0 \Rightarrow (x+10)(x+2)<0 \Rightarrow -10<x<-2$$

البته باید ریشهٔ مخرج را هم حذف کنیم: $(-10,-2)-\{-3\}$

۴. گزینهٔ «۳»



سهمی موردنظر باید از ناحیه‌های (۴) و (۳) و (۲) عبور کند. برای این‌که $y=ax^2+bx+c$ از این سه ناحیه عبور کند، باید $a\,,\,b\,,\,c<0$ و $\Delta>0$ باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} 2m-1<0 \\ m+1<0 \\ -\frac{1}{4}<0 \\ (m+1)^2-4(2m-1)(\frac{-1}{4})>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{2} \\ m<-1 \\ m^2+4m>0 \end{cases} \Rightarrow m>0 \text{ یا } m<-4$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} m<-4$$

دقت کنید که برای $m=-4$ نمودار بر محور xها مماس است و از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند.

۵. گزینهٔ «۳»

به خاطر دامنهٔ $\sqrt{x^2+3x}$، باید $x^2+3x\geq 0$ باشد، لذا $x\geq 0$ یا $x\leq -3$ است. اگر $x\geq 0$ باشد، داریم:

$$|2x+1|=2x+1\Rightarrow 2x+1=\sqrt{x^2+3x}+x\Rightarrow x+1=\sqrt{x^2+3x}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=x^2+3x\Rightarrow x=1\xrightarrow{\text{چک}}x=1\quad\checkmark$$

اما اگر $x\leq -3$ باشد، داریم:

$$|2x+1|=-2x-1\Rightarrow -2x-1=\sqrt{x^2+3x}+x\Rightarrow -3x-1=\sqrt{x^2+3x}$$

$$\Rightarrow 9x^2+6x+1=x^2+3x\Rightarrow 8x^2+3x+1=0\xrightarrow{\Delta<0}$$ جواب ندارد.

پس $x=1$ است و بنابراین $\frac{x+2}{x}=3$ است.

۶. گزینهٔ «۴»

از $6PQ=2AB=CD=12$ داریم: $PQ=2$, $AB=6$ و $CD=12$. از طرفی می‌دانیم که $EP=QF=x$ است و طبق قضیهٔ تالس در $\overset{\triangle}{DAB}$ داریم:

$$\frac{x}{AB}=\frac{DE}{DA}\Rightarrow\frac{x}{6}=\frac{DE}{DA}\Rightarrow\frac{x}{6-x}=\frac{DE}{EA}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases}EF=2x+2\\ EF=\dfrac{6ED+12AE}{AD}=\dfrac{6x+12(6-x)}{6}=12-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x+2=12-x\Rightarrow x=\frac{10}{3}\Rightarrow EF=2x+2=\frac{26}{3}$$

۷. گزینهٔ «۲»

$$\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{MH'C}\ (\text{درسنامهٔ هندسه})\xrightarrow{MC=AM=5,\ AB=6}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها}=(\text{نسبت اضلاع})^2=(\frac{5}{6})^2=\frac{25}{36}$$

۸. گزینهٔ «۱»

$$\frac{2\sin(3\pi+\frac{\pi}{6})+\cos(-3\pi+\frac{\pi}{6})\tan(4\pi-\frac{\pi}{3})}{\cos(-2\pi+\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{6})+2}$$

$$=\frac{-2\sin(\frac{\pi}{6})-(\cos\frac{\pi}{6})(-\tan\frac{\pi}{3})}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+2}=\frac{-2(\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2}=\frac{-1+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}+2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{8+\sqrt{3}}{4}}=\frac{2}{8+\sqrt{3}}$$

۹. گزینهٔ «۲»

از آن‌جا که نمودار کسینوسی داده‌شده در $x=0$ نزولی است، پس $a>0$ است. لذا داریم:

$$\min(y)=-a+2=1\Rightarrow a=1$$

حـــالا دقت کنید کـــه در $x=۰$ نمودار در ماکزیمم مقدار خود قرار دارد و در $x=۵$، برای دومین بار به مینیمم مقدار خود می‌رسد، یعنی $۵=\frac{T}{۲}+T$. به عبارتی $T=\frac{۱۰}{۳}$ است. اما می‌دانیم $T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}$ است:

$$\frac{۱۰}{۳}=\frac{۲\pi}{|b\pi|}\Rightarrow |b|=\frac{۳}{۵}$$

از طرفی $c=۰+\frac{T}{۲}=\frac{۵}{۳}$. بنابراین:

$$\frac{a|b|}{c}=\frac{۱\times\frac{۳}{۵}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۹}{۲۵}$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

دقت کنید که $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$. بنابراین:

$$۲\cos ۲x+\sin x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴\cos ۲x+۲\sin x=۳$$

$$\Rightarrow ۴(۱-۲\sin^۲ x)+۲\sin x=۳\Rightarrow ۸\sin^۲ x-۲\sin x-۱=۰$$

$$\Rightarrow (۲\sin x-۱)(۴\sin x+۱)=۰\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ \sin x=-\frac{۱}{۴}$$

جواب‌های $\sin x=\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر با $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ هستند که مجموع آن‌ها π است. اما جواب‌های $\sin x=-\frac{۱}{۴}$ به‌صورت $\pi+\alpha$ و $۲\pi-\alpha$ هستند که مجموع آن‌ها ۳π است. مجموع کل این جواب‌ها ۴π است.

۱۱. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که $f^{-۱}(۵)=۲$ و $f^{-۱}(۶)=۴$ است. حالا دقت کنید که از $y=f(\sqrt{x}+۱)$ داریم:

$$f^{-۱}(y)=\sqrt{x}+۱\Rightarrow \sqrt{x}=f^{-۱}(y)-۱\Rightarrow x=(f^{-۱}(y)-۱)^۲$$

$$\Rightarrow g(x)=(f^{-۱}(x)-۱)^۲\Rightarrow g(۶)-g(۵)=(f^{-۱}(۶)-۱)^۲-(f^{-۱}(۵)-۱)^۲$$

$$=(۴-۱)^۲-(۲-۱)^۲=۹-۱=۸$$

۱۲. گزینهٔ «۱»

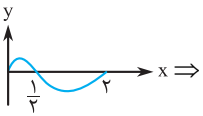
$$g^{-۱}(f(g(a)))=-۴\Rightarrow f(g(a))=g(-۴)=\frac{-۷}{-۱}=۷$$

$$\Rightarrow f(g(a))=۷\Rightarrow g(a)=۳\Rightarrow \frac{۲a+۱}{a+۳}=۳\Rightarrow ۲a+۱=۳a+۹\Rightarrow a=-۸$$

۱۳. گزینهٔ «۱»

نمودار $y=f(x+۱)$ را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=f(x)$ به‌دست آید:

حـــالا نمودار ار با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در جهت محور x هـــا منقبض می‌کنیم تا نمودار $y=f(۲x)$ به‌دست آید:



$\Rightarrow$

		۰		$\frac{۱}{۲}$		۲	
x	−	۰	+	۰	+		+
f(۲x)		۰	+	۰	−	۰	
xf(۲x)		۰	+	۰	−	۰	

$$\Rightarrow D_{\sqrt{xf(۲x)}}=[۰,\frac{۱}{۲}]\cup\{۲\}$$

۱۴. گزینهٔ «۳»

$$(fog)(x)=\log_{۲}(۲x-۳\sqrt{x}+۱)\Rightarrow D_{(fog)(x)}:\begin{cases}x\geq ۰ & \text{(محدودیت رادیکالی)}\\ \text{و} & \\ ۲x-۳\sqrt{x}+۱>۰ & \text{(محدودیت لگاریتمی)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\geq ۰\\ ,\\ (۲\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۱)>۰\end{cases}\Rightarrow$$

x	۰		$\frac{۱}{۴}$		۱	
P(x)		+	○	−	○	+

$$\Rightarrow D_{fog}=[۰,\frac{۱}{۴})\cup(۱,+\infty)$$

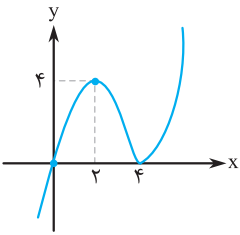
۱۵. گزینهٔ «۴»

$$\begin{cases}f(-۱)=۰\\ f(۰)=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-(\frac{۱}{۲})^{۲+a}+b=۰\\ -(\frac{۱}{۲})^{۲}+b=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=(\frac{۱}{۲})^{۲+a}=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲})^{a}\\ b=\frac{۹}{۴}\end{cases}\Rightarrow\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲})^{a}\Rightarrow ۹=(\frac{۱}{۲})^{a}$$

خواستهٔ مسئله $(\frac{b}{۹})^{a}$ است، یعنی:

$$(\frac{b}{۹})^{a}=(\frac{\frac{۹}{۴}}{۹})^{a}=(\frac{۱}{۴})^{a}=(\frac{۱}{۲})^{۲a}=۸۱$$

۱۶. گزینهٔ «۳»



نمودار $f(x)=x|x-۴|$ به‌صورت مقابل است:

لذا بزرگ‌ترین بازه‌ای که $y=f(x)$ روی آن اکیداً نزولی است $[۲,۴]$ است. روی این بازه برد $f(x)$ بازهٔ $[۰,۴]$ است. این یعنی $R_f=D_{f^{-۱}}=[۰,۴]$. داریم:

$$f(x)=x|x-۴|;۲\leq x\leq ۴\Rightarrow f(x)=x(۴-x);۲\leq x\leq ۴$$

برای یافتن ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ باید مربع کامل کنیم:

$$y=-x^{۲}+۴x=۴-(x-۲)^{۲}\Rightarrow(x-۲)^{۲}=۴-y$$

$$\Rightarrow|x-۲|=\sqrt{۴-y}\xrightarrow[|x-۲|=x-۲]{۲\leq x\leq ۴}x-۲=\sqrt{۴-y}\Rightarrow x=\sqrt{۴-y}+۲$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{۴-x}+۲;۰\leq x\leq ۴$$

۱۷. گزینهٔ «۲»

اولاً میانگین می‌شود:

$$\bar{x}=\frac{۴\times۴+۱\times۵+۴\times۶}{۹}=۵$$

و واریانس برابر است با:

$$var(x)=\frac{۴(۴-۵)^{۲}+۱\times(۵-۵)^{۲}+۴(۶-۵)^{۲}}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

بنابراین:

$$CV(x)=\frac{\sqrt{var(x)}}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{\frac{۸}{۹}}}{۵}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱۵}$$

۱۸. گزینهٔ «۳»

حاصل حد $\frac{0}{0}$ است، پس هوپیتال:

$$\lim_{x\to -1}\frac{4x+5}{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}\right)}=\frac{1}{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)}=16$$

۱۹. گزینهٔ «۲»

مخرج به صفر میل می‌کند. یعنی صفر حدی است، با این حال حاصل حد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ نشده. این نشان می‌دهد که صورت هم به صفر میل می‌کند و حاصل حد به کمک هوپیتال به‌دست آمده:

$$\begin{cases}\sqrt{2a+b}-3=0\\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{1}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2a+b}=3\\ \dfrac{a}{2\sqrt{2a+b}}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=9\\ \dfrac{a}{2\sqrt{2a+b}}=3\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{2\sqrt{9}}=3\Rightarrow a=18$$

با قرار دادن $a=18$ در معادلهٔ $2a+b=9$ به‌دست می‌آوریم $b=-27$. بنابراین $a+b=-9$ است.

۲۰. گزینهٔ «۴»

طبق نکتهٔ درسنامهٔ بخش ۲ فصل حد، داریم:

$$-\frac{a}{2}=1\Rightarrow a=-2\Rightarrow f(x)=[x^2-2x+3]\Rightarrow f(a)=f(-2)=[4+4+3]=11$$

۲۱. گزینهٔ «۴»

اولاً باید $f(x)$ در $x=1$ پیوسته باشد. یعنی:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}+2}=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+2x+b)=a+b+2\Rightarrow a+b+2=0\Rightarrow a+b=-2\\ f(1)=a+b+2\end{cases}$$

حالا باید $f'_+(1)=f'_-(1)$. دقت کنید برای $f'_+(1)$ می‌توانیم فقط از عامل صفرشونده مشتق بگیریم:

$$f'_+(x)=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+2}\Rightarrow f'_+(1)=\frac{\frac{3}{2}}{4}=\frac{3}{8}$$

$$f'_-(x)=2ax+2\Rightarrow f'_-(1)=2a+2$$

از اطلاعات به‌دست آمده داریم:

$$\begin{cases}2a+2=\dfrac{3}{8}\\ a+b=-2\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{13}{16},\ b=-\frac{19}{16}\Rightarrow f(-1)=a(-1)^2+2(-1)+b=a+b-2=-4$$

$$\Rightarrow f(f(-1)=f(-4)=16a-8+b=-13-8-\frac{19}{16}=-\frac{355}{16}$$

۲۲. گزینهٔ «۱»

آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ در $[1,4]$:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\frac{6}{6}-\frac{2}{3}}{3}=\frac{1}{9}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در $x=1$:

$$f'(x)=\frac{(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x+2)-1(x+\sqrt{x})}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{(\frac{3}{2})3-2}{9}=\frac{5}{18}$$

بنابراین:

$$\frac{5}{18}-\frac{1}{9}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

۲۳. گزینهٔ «۲»

$$f(x)=(\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)})^2=(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2})^2\Rightarrow f'(x)=2(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2})\times(\frac{-2+1}{(\sqrt{x}-2)^2})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(9)=2\times(\frac{2}{1})(\frac{-1}{1})\times\frac{1}{6}=\frac{-2}{3}$$

۲۴. گزینهٔ «۳»

۱) نقطهٔ تماس:

$$x=1\Rightarrow y=2+\sqrt{4}=4\Rightarrow(1,4)$$

۲) شیب خط مماس = مشتق تابع در نقطهٔ تماس:

$$y'=2+\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}\xrightarrow{x=1}a=2+\frac{5}{2\times2}=\frac{13}{4}$$

۳) معادلهٔ خط مماس:

$$y-4=\frac{13}{4}(x-1)\Rightarrow y=\frac{13}{4}x+\frac{3}{4}$$

لذا شیب $\frac{13}{4}$ و عرض از مبدأ $\frac{3}{4}$ است. نسبت این دو عدد $\frac{13}{3}$ است.

۲۵. گزینهٔ «۴»

$$f'(x)=2x(x-6)^2+x^2(2(x-6))=2x(x-6)(x-6+x)=0$$

$$\Rightarrow x=0,x=3,x=6$$

با قراردادن این اعداد در ضابطهٔ $f(x)$ به نقاط $(0,0)$ و $(3,81)$ و $(6,0)$ می‌رسیم. مساحت این مثلث هم خیلی راحت است:

$$\frac{1}{2}\times6\times81=243$$

۲۶. گزینهٔ «۴»

از $3x+4y=15$ داریم $y=\frac{15-3x}{4}$. بنابراین طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\text{وتر}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(\frac{15-3x}{4})^2}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+(\frac{15-3x}{4})^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x+2(\frac{15-3x}{4})(-\frac{3}{4})}{2\sqrt{x^2+(\frac{15-3x}{4})^2}}=0\Rightarrow 2x-\frac{3}{8}(15-3x)=0\Rightarrow x=\frac{9}{5}$$

بنابراین:

$$\text{Min}\,f(x)=f(\frac{9}{5})=\sqrt{(\frac{9}{5})^2+(\frac{15-\frac{27}{5}}{4})^2}=\sqrt{(\frac{9}{5})^2+(\frac{12}{5})^2}=\sqrt{\frac{81+144}{25}}=\sqrt{\frac{225}{25}}=\sqrt{9}=3$$

۲۷. گزینهٔ «۳»

از آن‌جا که $F(۲,۵)$ و $A(۲,۷)$ در راستای عمودی‌اند، پس بیضی قائم و $a-c=۲$ است. از طرفی $e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۴}$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a=c+۲ \\ \frac{c}{a}=\frac{۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{c+۲}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow c=۶ \Rightarrow a=۸$$

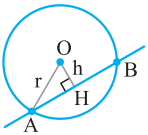
از طرفی $a^۲=b^۲+c^۲$. بنابراین:

$$۶۴=۳۶+b^۲ \Rightarrow b^۲=۲۸$$

آن‌چه مسئله می‌خواهد همان وتر کانونی MN است که نکته‌اش را از درسنامهٔ بخش (۲) فصل مقاطع بلدیم:

$$MN=\frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲\times ۲۸}{۸}=۷$$

۲۸. گزینهٔ «۲»



به وضوح $AH=۳$ است، زیرا طول وتر AB برابر با ۶ است. h هم، همان فاصلهٔ مرکز دایره از خط است. یعنی:

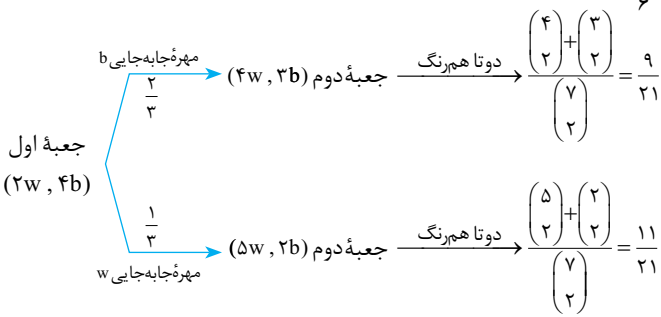
$$h=\frac{|۳+۱۲-۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

در نتیجه:

$$r^۲=h^۲+AH^۲ \Rightarrow r=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

۲۹. گزینهٔ «۳»

برای شروع دو حالت داریم: یا این‌که مهرهٔ اول که خارج می‌کنیم سیاه باشد (احتمال: $\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$) و یا این‌که مهره سفید باشد (احتمال: $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$). لذا نمودار خوشه‌ای چنین است:



بنابراین:

$$P=\frac{۲}{۳}\times\frac{۹}{۲۱}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۱}{۲۱}=\frac{۲۹}{۶۳}$$

۳۰. گزینهٔ «۳»

دقت کنید که پرتوان مخرج $۲x^۲$ است. پس از این‌که $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$ است، می‌فهمیم که پرتوان صورت باید $۴x^۲$ باشد. لذا $n=۲$ و $a=۴$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۲+x-۵}{۲x^۲-\sqrt{x+۳}}\overset{H}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۸x+۱}{۴x-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}}=\frac{۸+۱}{۴-\frac{۱}{۴}}=\frac{۹}{\frac{۱۵}{۴}}=\frac{۱۲}{۵}$$

پاسخ‌نامهٔ آزمون جامع «۲»

۱. گزینهٔ «۴»

از این‌که $\frac{4x-1}{|x+2|} > 2$ است، می‌فهمیم که سمت چپ مثبت است. از آن‌جا که مخرج این کسر همواره مثبت است، پس باید صورت کسر هم مثبت باشد. تا این‌جا فهمیدیم که $4x-1>0$ است که یعنی $x>\frac{1}{4}$. اما اگر $x>\frac{1}{4}$ باشد، $x+2$ هم مثبت است و لذا $|x+2|=x+2$ است. پس داریم:

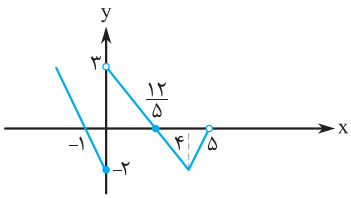
$$\frac{4x-1}{x+2}>2 \xrightarrow{\text{مثبت } (x+2)} 4x-1>2x+4 \Rightarrow 2x>5 \Rightarrow x>\frac{5}{2}$$

حالا با اشتراک گرفتن:

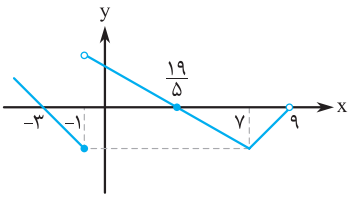
$$(\frac{1}{4},+\infty)\cap(\frac{5}{2},+\infty)=(\frac{5}{2},+\infty)$$

۲. گزینهٔ «۲»

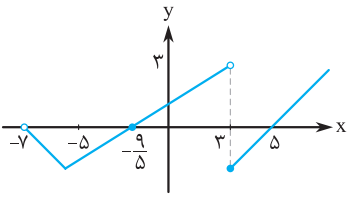
دقت کنید که قسمتی از نمودار $y=2f(2x-1)$ خطی است که $(0,3)$ را به $(4,-2)$ وصل می‌کند. معادلهٔ این خط $y=-\frac{5}{4}x+3$ است که محور xها را در نقطه $x=\frac{12}{5}$ قطع می‌کند. لذا نمودار $y=2f(2x-1)$ به‌صورت مقابل است:



اگر این نمودار را با ضریب ۲ در جهت محور افقی منبسط کنیم و یک واحد به عقب برگردانیم، نمودار $y=2f(x)$ به‌دست می‌آید:



این نمودار را ۲ واحد به چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا $y=2f(2-x)$ به‌دست آید:



بنابراین:

x		-7		$-\frac{9}{5}$		0		3		5	
$f(2-x)$			$-$	$\circ$	$+$		$+$		$-$	$\circ$	$+$
x	$-$		$-$		$-$	$\circ$	$+$		$+$		$+$
$xf(2-x)$			$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$		$-$	$\circ$	$+$

$$\Rightarrow D_{\sqrt{xf(2-x)}}=(-7,-\frac{9}{5}]\cup[0,3)\cup[5,+\infty)$$

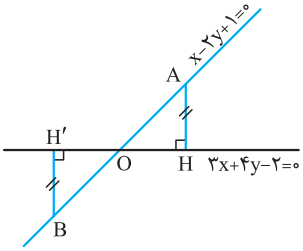
۳. گزینهٔ «۳»

به وضوح: $n(S)=۱۸\times۱۷\times۱۶\times۱۵$

اما برای این‌که مهره‌ها اعداد متوالی بیایند باید یا (۱, ۲, ۳, ۴) یا (۲, ۳, ۴, ۵) یا (۳, ۴, ۵, ۶) بیاید. دقت کنید که مثلاً در (۱, ۲, ۳, ۴)، تعداد انتخاب‌های مهره با شمارهٔ ۱ تا ۳۰ است (یک ① قرمز، یک ① آبی، یک ① سبز داریم). همین‌طور ۳ انتخاب برای ② و ... داریم. لذا برای (۱, ۲, ۳, ۴) در واقع $۳^۴$ حالت داریم. برای (۲, ۳, ۴, ۵) هم $۳^۴$ حالت و برای (۳, ۴, ۵, ۶) هم $۳^۴$ حالت داریم. لذا کلاً $۳^۴+۳^۴+۳^۴=۳\times۳^۴=۳^۵$ حالت داریم: پس $n(A)=۳^۵$ و در نتیجه:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳^۵}{۱۸\times۱۷\times۱۶\times۱۵}=\frac{۳^۲}{۲\times۱۷\times۱۶\times۵}=\frac{۹}{۲۷۲۰}$$

۴. گزینهٔ «۲»



طبق فرض مسئله $AH=BH'$. پس دو مثلث AHO و BH′O هم‌نهشت هستند. لذا وسط AB همان O، یعنی نقطهٔ تلاقی دو خط، است:

$$\begin{cases}x-۲y+۱=۰\\۳x+۴y-۲=۰\end{cases}\Rightarrow x=۰,\ y=\frac{۱}{۲}\Rightarrow O=(۰,\frac{۱}{۲})$$

۵. گزینهٔ «۲»

فرض کنید $g(۵)=x$ باشد. در این صورت $۵=g^{-۱}(x)$ است. لذا $f(g^{-۱}(x))=f(۵)$ است. اما $f^{-۱}(x)=x+۴\sqrt{x}$، نتیجه می‌دهد که $f^{-۱}(۱)=۵$. این یعنی $f(۵)=۱$ پس:

$$f(g^{-۱}(x))=۱\Rightarrow x=-۱$$

۶. گزینهٔ «۴»

اول دامنهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم تا بعد بتوانیم ضابطهٔ آن را ساده کنیم: $D_{f(x)}=[۰,+\infty)-\{۴\}$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}+۳)(\sqrt{x}-۲)}{(\sqrt{x}+۲)(\sqrt{x}-۲)}=\frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۲}=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}$$

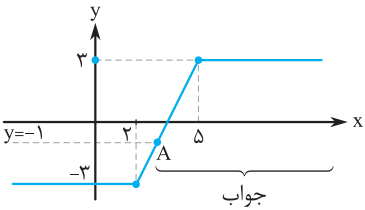
قرار دهید $\sqrt{x}=T$. در این صورت با توجه به دامنهٔ $f(x)$، در واقع $T\in[۰,+\infty)-\{۲\}$ است:

$$g(T)=۱+\frac{۱}{T+۲}\Rightarrow R_{g(T)}=(۱,\frac{۳}{۲}]-\{\frac{۵}{۴}\}=R_{f(x)}$$

۷. گزینهٔ «۱»

نمودار جدید، همان نمودار $y=f(x-۳)-۱$ است. لذا باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$f(x)>f(x-۳)-۱\Rightarrow|x-۲|+۱>|x-۵|$$
$$\Rightarrow\underbrace{|x-۲|-|x-۵|}_{\text{نمودار آبشاری}}>-۱$$



نقطهٔ تلاقی $y=۲x-۷$ و $y=-۱$ ساده است: $۲x-۷=-۱\Rightarrow x=۳\Rightarrow$ جواب مسئله: $(۳,+\infty)$

۸. گزینهٔ «۳»

دقت کنید $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ است. لذا داریم:

$$\cos^2 x = |\cos x|^2 = |\sin 2x| = |2\sin x\cos x| \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} \\ |\cos x| = 2|\sin x| \Rightarrow |\cot x| = 2 \end{cases}$$

می‌دانیم معادلهٔ $|\cot x| = 2$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای چهار جواب به‌صورت α ، $\pi - \alpha$ ، $\pi + \alpha$ ، $2\pi - \alpha$ است که مجموع آن‌ها 4π است، بنابراین مجموع کل جواب‌ها 6π است.

۹. گزینهٔ «۲»

بزرگ‌ترین عضو باید ۸ یا ۹ یا ۱۰ باشد. تعداد زیرمجموعه‌هایی که بزرگ‌ترین عضو آن‌ها ۸ است، برابر است با: $2^7 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2$. و به همچنین تعداد زیرمجموعه‌هایی با بزرگ‌ترین عضو ۹ یا ۱۰ به‌ترتیب برابر با 2^8 و 2^9 است. لذا جواب مسئله می‌شود:

$$2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^7(1 + 2 + 2^2) = 128 \times 7 = 896$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

$$2\log_2 x + 3(2\log_x 2) = 13 \Rightarrow 2\log_2 x + 6\log_x 2 = 13$$

از آن‌جا که $\log_x 2$ و $\log_2 x$ دو عدد معکوس هستند، پس:

$$\log_2 x = t \Rightarrow 2t + \frac{6}{t} = 13 \Rightarrow 2t^2 - 13t + 6 = 0 \xrightarrow{\text{جملهٔ مشترک}} (2t - 1)(t - 6) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ یا } t = 6 \Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \text{ یا } 6 \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} \text{ یا } 2^6 \Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ یا } 64$$

۱۱. گزینهٔ «۲»

می‌دانیم که $\lim\limits_{x \to (\frac{1}{2})^-} [x + a] = [(\frac{1}{2} + a)^-] = 2$. اگر $\frac{1}{2} + a$ عددی صحیح باشد، با توجه به این‌که فقط $[3^-] = 2$ است، پس باید $\frac{1}{2} + a = 3$ باشد که یعنی $a = \frac{5}{2}$. اما اگر $\frac{1}{2} + a$ عددی صحیح نباشد:

$$[(\frac{1}{2} + a)] = 2 \xrightarrow{\frac{1}{2} + a \notin \mathbb{Z}} 2 < \frac{1}{2} + a < 3 \Rightarrow \frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$$

در نتیجه $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.

۱۲. گزینهٔ «۲»

داده‌های اول را x_1, x_2, x_3, x_4 داده‌های دوم را $y_1, y_2, \ldots, y_6$ می‌نامیم.

داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

$$\Rightarrow \text{var}(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} - 25 = 4 \Rightarrow x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 116$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_6}{6} = 4 \Rightarrow y_1 + y_2 + \cdots + y_6 = 24$$

$$\Rightarrow \text{var}(y) = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_6^2}{6} - 16 = 5 \Rightarrow y_1^2 + \cdots + y_6^2 = 126$$

بنابراین میانگین و واریانس هر ۱۰ داده می‌شود:

$$\bar{z}=\frac{۲۰+۲۴}{۱۰}=۴/۴$$

$$\text{var}(z)=\frac{x_۱^۲+\cdots+x_۴^۲+y_۱^۲+\cdots+y_۶^۲}{۱۰}-(۴/۴)^۲=\frac{۱۱۶+۱۲۶}{۱۰}-۱۹/۳۶$$

$$=۲۴/۲-۱۹/۳۶=۴/۸۴\Rightarrow CV(z)=\frac{\sqrt{۴/۸۴}}{۴/۴}=\frac{۲/۲}{۴/۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۳. گزینهٔ «۱»

مشکل اصلی این است که نمی‌دانیم x بین کدام دو عدد است. لذا باید چهار حالت را لحاظ کنیم:

حالت اول اگر $x<۱$ باشد. در این صورت داده‌های مرتب شده $x, ۱, ۳, ۱۰$ هستند. میانهٔ این داده‌ها $\frac{۱+۳}{۲}=۲$ است و میانگین $\frac{x+۱+۳+۱۰}{۴}=\frac{x+۱۴}{۴}$ است. پس:

$$\frac{x+۱۴}{۴}=۲\Rightarrow x=-۶$$

که با $x<۱$ سازگار و لذا قابل قبول است.

حالت دوم اگر $۱<x<۳$ باشد. در این صورت داده‌های مرتب‌شده $۱, x, ۳, ۱۰$ هستند و:

$$\text{میانه}=\frac{x+۳}{۲}\ ,\ \text{میانگین}=\frac{x+۱۴}{۴}\Rightarrow\frac{x+۳}{۲}=\frac{x+۱۴}{۴}\Rightarrow x=۸$$

که با $۱<x<۳$ ناسازگار است.

حالت سوم اگر $۳<x<۱۰$ باشد. در این صورت داده‌های مرتب‌شده $۱, ۳, x, ۱۰$ هستند. دوباره به معادلهٔ $\frac{x+۳}{۲}=\frac{x+۱۴}{۲}$ می‌رسیم که $x=۸$ جوابش است، ولی این بار قابل قبول است.

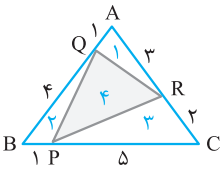
حالت چهارم

اگر $۱۰<x$ باشد. در این صورت داده‌های مرتب‌شده $۱, ۳, ۱۰, x$ هستند. در این‌جا میانه $\frac{۱۳}{۲}$ و میانگین $\frac{x+۱۴}{۴}$ است. لذا داریم:

$$\frac{x+۱۴}{۴}=\frac{۱۳}{۲}\Rightarrow x=۱۲$$

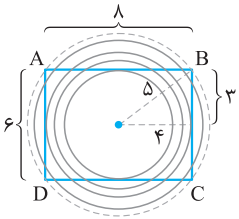
که با $x>۱۰$ سازگار است.

۱۴. گزینهٔ «۱»



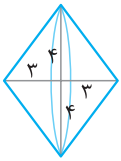
$$\frac{S_۴}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=۱-\left(\frac{S_۱+S_۲+S_۳}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}\right)=۱-\left(\frac{۱}{۵}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۴}{۵}\right)=\frac{۳۱}{۷۵}$$

۱۵. گزینهٔ «۴»



دایره‌ای به شعاع ۳ بر دو طول مستطیل مماس است. اما اگر شعاع دایره بین ۳ و ۴ شود، طول‌ها را در ۴ نقطه قطع می‌کند. ولی اگر شعاع دایره ۴ باشد، علاوه بر ۴ تقاطعی که با طول‌ها دارد، بر عرض‌ها هم مماس می‌شود و تعداد تلاقی‌ها به ۶ می‌رسد. اگر شعاع بین ۴ و ۵ شود، تعداد تلاقی‌ها به ۸ می‌رسد. اما اگر شعاع دایره به ۵ برسد، دیگر نه طول‌های مستطیل را قطع می‌کند و نه عرض‌های آن را، بلکه از ۴ رأس آن‌عبور می‌کند. پس برای $x=۵$ هم ۴ نقطهٔ تلاقی داریم. اگر شعاع بیشتر از ۵ شود دیگر نقطهٔ تلاقی نداریم. بنابراین پاسخ مسئله $x\in(۳,۴)\cup\{۵\}$ است.

۱۶. گزینهٔ «۳»



شکل حاصل از دوران دو مخروط به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ است:

$$V = ۲\times(\frac{۱}{۳}\pi(۱۶)(۳)) = ۳۲\pi$$

۱۷. گزینهٔ «۲»

رقم یکان باید زوج باشد. هرچه که باشد، رقم دهگان باید متفاوت از آن باشد. لذا برای رقم یکان ۵ انتخاب و برای رقم دهگان ۹ انتخاب داریم. اما صدگان هم باید متمایز از دهگان باشد. که یعنی ۹ انتخاب دارد. تا این‌جا $۹\times۹\times۵$ انتخاب انجام دادیم، اما صفر شدن صدگان را لحاظ نکردیم. کافی است، حالت‌هایی که صدگان صفر می‌شود را جداگانه بشماریم و از $۹\times۹\times۵$ تفریق کنیم:

$\underline{۰}$ — $\underline{\text{زوج} \neq ۰}$ $\Rightarrow$ در این حالت برای دهگان ۸ انتخاب داریم: $۱\times۸\times۴ = ۸\times۴ = ۳۲$

$\underline{۰}$ — $\underline{۰}$ $\Rightarrow$ در این حالت برای دهگان ۹ انتخاب داریم: $۱\times۹\times۱ = ۹$

لذا جواب مسئله می‌شود: $۹\times۹\times۵ - ۳۲ - ۹ = ۳۶۴$

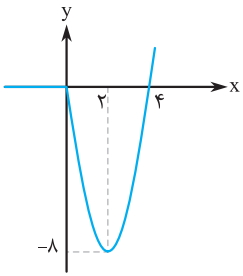
۱۸. گزینهٔ «۱»

$$f(x) = \sqrt{۲x\sqrt{\frac{۴}{x}}} = \sqrt{\sqrt{۴x^۲\times\frac{۴}{x}}} = \sqrt[۴]{۱۶x} = ۲\sqrt[۴]{x}$$

بنابراین:

$$g(x) = xf^۲(x) = ۴x\sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = ۶\sqrt{x} \Rightarrow g'(۴) = ۶\sqrt{۴} = ۱۲$$

۱۹. گزینهٔ «۴»



دقت بفرمایید که $f(x) = \begin{cases} ۲x(x-۴) & ; \ x \geq ۰ \\ ۰ & ; \ x < ۰ \end{cases}$:

بنابراین نمودار $y = f(x)$ به‌صورت مقابل است:

به وضوح کم‌ترین مقدار تابع -۸ است. باز هم یادآوری می‌کنیم: قدرمطلقی‌ها را بهتر ا ست رسم کنیم.

۲۰. گزینهٔ «۴»

اولاً $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ است. لذا مسئله می‌گوید $\lim\limits_{x\to۱} f(x) = a$ اما اگر $x \to ۱$، مخرج این کسر به صفر میل می‌کند درحالی که حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ نشده است. پس صورت آن هم به صفر میل کرده است و هوپیتال گرفته‌ایم:

$$\begin{cases} a - \sqrt{۱+b} = ۰ \\ \lim\limits_{x\to۱} \dfrac{۲ax - \dfrac{۱}{۲\sqrt{x+b}}}{۲x} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{۱+b} \\ ۲a - \dfrac{۱}{۲\sqrt{۱+b}} = ۲a \end{cases} \Rightarrow ۲a - \frac{۱}{۲a} = ۲a \Rightarrow \frac{۱}{۲a} = ۰ \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

لذا a وجود ندارد و در نتیجه b هم وجود ندارد. گزینهٔ «۱» دام آموزشی دارد.

۲۱. گزینهٔ «۳»

دقت کنید که اگر $x>1$ باشد آن‌گاه $|x-1|=x-1$ است. و لذا:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-(x-1)-2}{x^2+x-2} & ; \quad x>1\\ ax^2+bx+1 & ; \quad x\le 1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} & ; \quad x>1\\ ax^2+bx+1 & ; \quad x\le 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+2} & ; \quad x>1\\ ax^2+bx+1 & ; \quad x\le 1\end{cases}$$

حالا بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری ساده‌تر است. اول پیوستگی:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x+2}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx+1)=a+b+1\end{cases} \Rightarrow a+b+1=1 \Rightarrow a+b=0$$

و در آخر باید $f'_+(1)=f'_-(1)$ باشد، یعنی:

$$\left(\frac{4-1}{(x+2)^2}\right)_{x=1}=(2ax+b)_{x=1} \Rightarrow \frac{1}{3}=2a+b$$

با حل دستگاه $\begin{cases}a+b=0\\ 2a+b=\dfrac{1}{3}\end{cases}$، مقادیر $a=\dfrac{1}{3}$ و $b=-\dfrac{1}{3}$ به‌دست می‌آیند. بنابراین:

$$b-a=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

۲۲. گزینهٔ «۴»

فرض کنید n عدد صحیح دلخواهی باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1)\ \ n\le x<n+\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=[2x]-[x+\frac{1}{2}]=2n-n=n=[x]$$

$$2)\ \ n+\frac{1}{2}\le x<n+1 \Rightarrow f(x)=[2x]-[x+\frac{1}{2}]=(2n+1)-(n+1)=n=[x]$$

لذا کلاً $f(x)=[x]$. پیشنهاد می‌کنیم دانش‌آموزان عزیز اتحاد $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$ را بلد باشند و این دردسرها را نکشند. حالا داریم:

$$4f(x)-f(4x)=4[x]-[4x]$$

که برد آن $\{-3,-2,-1,0\}$ است.

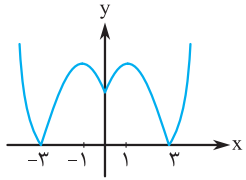
۲۳. گزینهٔ «۱»

مرکز دایره $(0,1)$ است. خطی که از $(0,1)$ و $(2\sqrt{2},2)$ عبور می‌کند، بر خط مماس عمود است. از آن‌جا که شیب این خط، $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{2}$ است، پس شیب خط مماس $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ است. لذا:

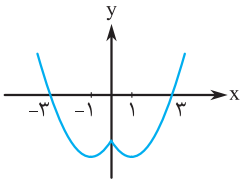
$$y-2\sqrt{2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2} \Rightarrow y=-\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

۲۴. گزینهٔ «۳»

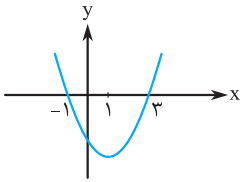
نمودار $y=|x^{۲}-۲|x|-۳|=|(|x|-۳)(|x|+۱)|$ رسم می‌کنیم:



$y=|(|x|-۳)(|x|+۱)|=f(x)$



$y=(|x|-۳)(|x|+۱)$



$y=(x-۳)(x+۱)$

همان‌طور که می‌بینید $x=-۳,-۱,۰,۱,۳$ طول نقاط بحرانی تابع $f(x)$ هستند که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

۲۵. گزینهٔ «۴»

شکل حاصل از دوران استوانه‌ای با شعاع قاعدهٔ BC و ارتفاع AB است. بدیهی است که در هر نقطه $AB=x$, $BC=\sqrt{۱۶-x}$. لذا:

$$V=\pi(\sqrt{۱۶-x})^{۲}x=\pi x(۱۶-x)\Rightarrow f(x)=\pi x(۱۶-x)\Rightarrow f'(x)=\pi(۱۶-x)+\pi x(-۱)=۰$$

$$\Rightarrow x=۸\Rightarrow \max V=۸\pi\times ۸=۶۴\pi$$

۲۶. گزینهٔ «۲»

ابتدا دقت کنید که:

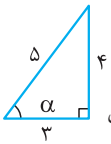
$$\tan\frac{\alpha}{۲}+\cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}}=\frac{\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}+\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۲}{\sin\alpha}$$

حالا به $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲۵}{۱۲}$ توجه می‌کنیم. با قراردادن $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$، داریم:

$$\tan\alpha+\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۲۵}{۱۲}\Rightarrow \tan^{۲}\alpha-\frac{۲۵}{۱۲}\tan\alpha+۱=۰\Rightarrow ۱۲\tan^{۲}\alpha-۲۵\tan\alpha+۱۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جملهٔ مشترک}}(۳\tan\alpha-۴)(۴\tan\alpha-۳)=۰\Rightarrow \tan\alpha=\frac{۴}{۳}\ \text{یا}\ \tan\alpha=\frac{۳}{۴}$$

اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ باشد، با رسم مثلث کمکی



به‌راحتی می‌فهمیم که $|\sin\alpha|=\frac{۴}{۵}$ است و اگر $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ باشد، $|\sin\alpha|=\frac{۳}{۵}$ است. از آن‌جا که α حاده است، پس $\sin\alpha>۰$ است. لذا:

$$\frac{۲}{\sin\alpha}=\frac{۲}{\frac{۳}{۵}}\ \text{یا}\ \frac{۲}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۱۰}{۳}\ \text{یا}\ \frac{۱۰}{۴}$$

۲۷. گزینهٔ «۳»

از $a_{۸}=۱۵۹$ و $a_{n+۱}=۲a_{n}+۱$ به‌طور متوالی استفاده می‌کنیم:

$$a_{۸}=۲a_{۷}+۱\Rightarrow ۱۵۹=۲a_{۷}+۱\Rightarrow a_{۷}=۷۹$$

$$a_{۷}=۲a_{۶}+۱\Rightarrow ۷۹=۲a_{۶}+۱\Rightarrow a_{۶}=۳۹$$
$$a_{۶}=۲a_{۵}+۱\Rightarrow ۳۹=۲a_{۵}+۱\Rightarrow a_{۵}=۱۹$$
$$a_{۵}=۲a_{۴}+۱\Rightarrow ۱۹=۲a_{۴}+۱\Rightarrow a_{۴}=۹$$
$$a_{۴}=۲a_{۳}+۱\Rightarrow ۹=۲a_{۳}+۱\Rightarrow a_{۳}=۴ \quad ✓$$

۲۸. گزینهٔ «۱»

چون α و β ریشه‌های $x^{۲}-ax+۱=۰$ هستند، پس $\alpha\beta=۱$ است و لذا:

$$\frac{\alpha^{۲}}{\beta}+\frac{\beta^{۲}}{\alpha}=\frac{\alpha^{۳}+\beta^{۳}}{\alpha\beta}=\alpha^{۳}+\beta^{۳}$$

اما:

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=a^{۳}-۳(۱)a=a^{۳}-۳a$$

۲۹. گزینهٔ «۳»

نمودار در $x=b$ مجانب آتشفشانی دارد. بنابراین $x=b$ ریشهٔ مضاعف مخرج $f(x)$، یعنی ریشهٔ مضاعف $x^{۲}+ax+۴$ است. پس $x^{۲}+ax+۴=(x-b)^{۲}$. از این‌جا داریم:

$$x^{۲}+ax+۴=x^{۲}-۲bx+b^{۲}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲b\\ b^{۲}=۴\end{cases}\xrightarrow{b>۰}a=-۴\,,\,b=۲$$

از طرفی: $c=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=۱$. در نتیجه:

$$a+bc=-۴+۲\times۱=-۲$$

۳۰. گزینهٔ «۲»

$$f(۳-۲x)=\sqrt{x(۸-x)}\xrightarrow[x=\frac{۳-T}{۲}]{T=۳-۲x}f(T)=\sqrt{(\frac{۳-T}{۲})(۸-\frac{۳-T}{۲})}=\sqrt{\frac{(۳-T)(۱۳+T)}{۴}}$$
$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۳-T)(۱۳+T)}$$

دام آموزشی این سؤال این است که بنویسیم $f^{۲}(x)=\frac{۱}{۴}(۳-x)(۱۳+x)$. هرگز این اشتباه را نکنید. قبلاً قرار گذاشتیم که هرگونه ساده‌کردن، بعد از محاسبهٔ دامنه است نه قبل آن. لذا باید بنویسیم:

$$f^{۲}(x)=(\frac{۱}{۲}\sqrt{(۳-x)(۱۳+x)})^{۲}\Rightarrow D_{f^{۲}(x)}:(۳-x)(۱۳+x)\geq۰\Rightarrow x\in[-۱۳\,,\,۳]$$

پاسخ‌نامهٔ آزمون جامع «۳»

۱. گزینهٔ «۳»

ابتدا به کمک نام‌گذاری مناسب، $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=A>۰\Rightarrow ۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}+۲\sqrt{۴-۳}=۶=A^{۲}\xrightarrow{A>۰}A=\sqrt{۶}$$

پس: $x=\frac{۲\sqrt{۶}+۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{\sqrt{۶}(۲+\sqrt{۳})}{\sqrt{۶}}=۲+\sqrt{۳}$. در نتیجه:

$$\sqrt{۴x-۱}-\sqrt{۲x}=\sqrt{۸+۴\sqrt{۳}-۱}-\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}=\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}-\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}$$
$$\overset{\text{روش } ۲ab}{=\!=\!=}(۲+\sqrt{۳})-(\sqrt{۳}+۱)=۱$$

۲. گزینهٔ «۳»

دقت کنید اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $a_n=(-1)(2n-1)<0$ است. لذا برای n فرد، هیچ جمله‌ای از a_n با هیچ جمله‌ای از دنبالهٔ b_n مساوی نیست.

اگر $n=2k$ عددی زوج باشد، آن‌گاه $a_n=(-1)^{2k}(2(2k)-1)=4k-1$ است. پس سؤال واقعی این است که دنباله‌های $c_k=4k-1$ و $b_n=3n$ چند جملهٔ مشترک سه رقمی دارند.

دقت کنید که اولین جملهٔ این دنباله‌ها مشترک است: $b_1=3=c_1$. قدر نسبت c_k برابر ۴ و قدر نسبت b_n برابر ۳ است. لذا قدرنسبت جمله‌های مشترک ۱۲ است. در نتیجه جملهٔ عمومی دنبالهٔ جملات مشترک $d_n=12(n-1)+3=12n-9$ است.

چون دنبال سه‌رقمی‌ها می‌گردیم، داریم:

$$100\le 12n-9\le 999\Rightarrow \frac{109}{12}\le n\le \frac{1008}{12}\Rightarrow 9/08\le n\le 84\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}10\le n\le 84$$

$$\Rightarrow \text{تعداد}=84-10+1=75$$

۳. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که ضریب x^2 برابر a و جملهٔ ثابت برابر $-a$ است که حاصل‌ضرب آن‌ها $-a^2<0$ است. پس این سهمی از چهار ناحیه عبور می‌کند. برای این‌که این نمودار در ناحیهٔ چهارم صعودی باشد، لازم و کافی است که دهانهٔ سهمی رو به بالا $(a>0)$ و رأس سهمی هم در ناحیهٔ سوم باشد. یعنی:

$$\begin{cases}a>0\\ ,\\ x_S\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \dfrac{a^2-1}{2a}\le 0\end{cases}\Rightarrow 0<a\le 1$$

۴. گزینهٔ «۳»

$$\frac{3x+a}{2x+a}-b>0\Rightarrow\frac{(3-2b)x+a-ab}{2x+a}>0$$

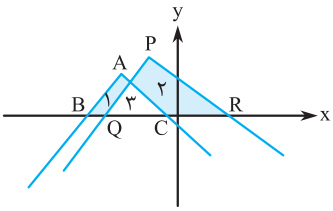
برای این‌که جواب این نامعادله $(1,+\infty)$ باشد، باید صورت ریشه نداشته باشد و ریشهٔ مخرج هم ۱ باشد. لذا:

$$\begin{cases}3-2b=0\\ 2+a=0\end{cases}\Rightarrow a=-2\,,\,b=\frac{3}{2}$$

حالا نامعادلهٔ $\dfrac{3x+b}{2x+b}<a$ را می‌توانیم حل کنیم:

$$\frac{3x+\frac{3}{2}}{2x+\frac{3}{2}}<-2\Rightarrow\frac{6x+3}{4x+3}<-2\Rightarrow\frac{6x+3}{4x+3}+2<0\Rightarrow\frac{14x+9}{4x+3}<0\Rightarrow-\frac{3}{4}<x<-\frac{9}{14}$$

۵. گزینهٔ «۲»



دقت کنید که اضلاع مثلث‌های ABC و PQR موازی‌اند. پس این دو مثلث متشابه‌اند. از طرفی ارتفاع وارد بر BC در $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۲ و ارتفاع وارد بر QR در $\overset{\triangle}{PQR}$ برابر b است. لذا:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{PQR}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{b^2}{4}\Rightarrow\frac{S_3+S_1+5}{S_1+S_3}=\frac{b^2}{4}$$

اما $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$ است (زیرا $B=(-5,0), C=(-1,0)$)، یعنی $S_3 + S_1 = 4$ است. با قراردادن در ☼، داریم:

$$\frac{9}{4} = \frac{b^2}{4} \xrightarrow{b>0} b = 3$$

۶. گزینهٔ «۲»

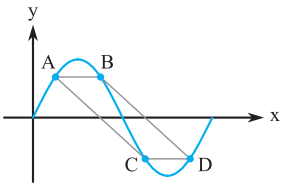
قرار دهید $x = 3^T$. در این صورت:

$$\log_x 3 - \log_{3x} 3 = \frac{1}{13} \Rightarrow \log_{3^T} 3 - \log_{3^{T+1}} 3 = \frac{1}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} - \frac{1}{T+1} = \frac{1}{13} \Rightarrow \frac{1}{T^2+T} = \frac{1}{13} \Rightarrow T^2 + T = 13$$

$$\Rightarrow T^2 + T - 13 = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = -1, x_1 = 3^{T_1}, x_2 = 3^{T_2} \Rightarrow x_1 x_2 = 3^{T_1+T_2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۷. گزینهٔ «۴»



خط $y = \frac{1}{2}$ نمودار $y = \sin x$ را در $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ قطع می‌کند و $y = -\frac{1}{2}$ همین نمودار را در $x = \frac{7\pi}{6}$ و $x = \frac{11\pi}{6}$ قطع می‌کند. ارتفاع متوازی‌الاضلاع ABCD برابر با $\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$ و طول قاعده‌های آن $\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ است. پس مساحت آن $S = 1 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ است.

۸. گزینهٔ «۴»

دقت داریم که $(f^2 - fg + g^2)(f+g) = f^3 + g^3$ است. از طرفی دامنهٔ $g(x)$ بازهٔ $[0, +\infty)$ و دامنهٔ f مجموعهٔ $\{-2, 4, 1\}$ است. پس اشتراک دامنه‌ها $\{4, 1\}$ است. لذا:

$$f^3 + g^3 = \{(4, f^3(4) + g^3(4)), (1, f^3(1) + g^3(1))\} = \{(4, 8 + (4+2)^3), (1, 27 + (1+1)^3)\}$$

$$= \{(4, 224), (1, 35)\} \Rightarrow R_{f^3+g^3} = \{224, 35\} \Rightarrow \text{مجموع اعضای برد} = 259$$

۹. گزینهٔ «۲»

چون B قرینهٔ A نسبت به خط L است، نتیجه می‌گیریم که L عمودمنصف پاره‌خط AB است. برای نوشتن معادلهٔ عمودمنصف به مختصات نقطهٔ M (وسط AB) و شیب خط AB نیاز داریم:

$$M = \frac{A+B}{2} = (-1, 2) \ , \ a_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{-4-2} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow L: y = 3x + b \xrightarrow{(-1,2)} 2 = -3 + b \Rightarrow b = 5 \Rightarrow L: y = 3x + 5$$

حالا قرینه‌کردن L نسبت به نقطهٔ $C(1,5)$، با توجه به فرمولی که قبلاً در درسنامهٔ فصل ۴ گفتیم، ساده است:

$$L': 10 - y = 3(2 - x) + 5 \Rightarrow y = 3x - 1$$

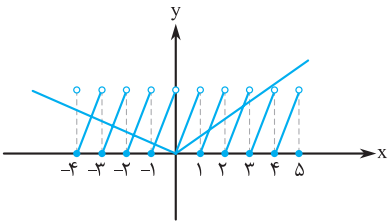
۱۰. گزینهٔ «۳»

$$f(x+۲)=۲x+۱;-۱\le x<۳ \xrightarrow{\text{۲ واحد انتقال به راست}} f(x)=۲(x-۲)+۱;۱\le x<۵$$

$$\Rightarrow f(x)=۲x-۳;۱\le x<۵ \Rightarrow x-f(x)=x-(۲x-۳);۱\le x<۵$$

$$\Rightarrow y=-x+۳;۱\le x<۵ \Rightarrow \text{برد}=(-۲,۲]$$

۱۱. گزینهٔ «۳»



نقاط تلاقی دو نمودار یعنی جواب‌های معادلهٔ $a|x|+[x]=x$. این معادله را می‌توان به‌صورت $a|x|=x-[x]$ نوشت. حالا سمت راست نامنفی است، پس سمت چپ هم باید نامنفی باشد. لذا $a\ge ۰$. از طرفی اگر $a=۰$ دو نمودار بی‌شمار نقطهٔ برخورد دارند (در تمام اعداد صحیح). لذا درواقع می‌خواهیم تعداد نقاط برخورد $y=x-[x]$ و $y=a|x|$، با شرط $a>۰$، برابر با ۷ باشد. حالا دقت کنید که:

تقاطع‌های دو نمودار در سمت چپ محور y ها، دوتا بیشتر از تقاطع‌های سمت راست محور y ها است. بنابراین تعداد تقاطع‌های سمت چپ باید ۴ و سمت راست ۲ تا باشد و یک تقاطع هم که در مبداء داریم. (که جمعاً بشود ۷ تقاطع) برای این‌که در سمت راست ۲ تقاطع داشته باشیم، لازم است که: $۳a<۱\le ۴a \Rightarrow \frac{۱}{۴}\le a<\frac{۱}{۳}$

۱۲. گزینهٔ «۴»

اولین ماکزیمم برای $y=۲-۲\sin(b\pi x)$ وقتی رخ می‌دهد که $\sin(b\pi x)$ برای اولین بار برابر -۱ باشد که با توجه به مثبت بودن b، یعنی زمانی‌که $b\pi x=\frac{۳\pi}{۲}$ باشد. مسئله می‌گوید در این لحظه $x=۲$ است، پس:

$$۲\pi b=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow b=\frac{۳}{۴}$$

لذا $f(x)=۲-۲\sin\frac{۳\pi x}{۴}$ است. اولین مینیمم این تابع زمانی رخ می‌دهد که $\frac{۳\pi x}{۴}=\frac{\pi}{۲}$، یعنی $x=\frac{۲}{۳}$. در ضمن، دورهٔ تناوب این تابع $T=\frac{۲\pi}{\frac{۳\pi}{۴}}=\frac{۸}{۳}$ است. لذا طول پانزدهمین مینیمم برابر است با:

$$\frac{۲}{۳}+۱۴T=\frac{۲}{۳}+\frac{۱۴\times ۸}{۳}=\frac{۱۱۴}{۳}=۳۸$$

۱۳. گزینهٔ «۱»

اگر ۹ = دهگان باشد، آن‌گاه ۱۹۸, ...,۷۹۲, ۸۹۱, ۹۹۰، یعنی ۹ عدد داریم.

اگر ۸ = دهگان باشد، آن‌گاه ۱۸۷, ...,۷۸۱, ۸۸۰، یعنی ۸ عدد داریم.

⋮

اگر دهگان ۲ باشد، آن‌گاه ۱۲۱ و ۲۲۰، یعنی ۲ عدد داریم.

اگر دهگان ۱ باشد، فقط ۱۱۰، یعنی یک عدد داریم. لذا جمعاً: $۱+۲+\cdots+۹=\frac{۹\times ۱۰}{۲}=۴۵$ عدد داریم.

۱۴. گزینهٔ «۳»

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_۵+۱+۴+۴}{۸}=۴\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۲۳\Rightarrow \bar{y}=\frac{۲۳}{۵}$$

$$CV(x)=\frac{\sqrt{var(x)}}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow var(x)=۴$$

$$\Rightarrow \frac{x_۱^۲+\cdots+x_۵^۲+۱+۱۶+۱۶}{۸}-۱۶=۴\Rightarrow x_۱^۲+\cdots+x_۵^۲=۱۲۷$$

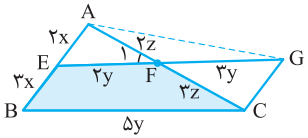
بنابراین:

$$var(y)=\frac{x_۱^۲+\cdots+x_۵^۲}{۵}-\bar{y}^۲=\frac{۱۲۷}{۵}-(\frac{۲۳}{۵})^۲=\frac{۱۰۶}{۲۵}$$

در نتیجه:

$$CV(y)=\frac{\sqrt{\frac{۱۰۶}{۲۵}}}{\frac{۲۳}{۵}}=\frac{\sqrt{۱۰۶}}{۲۳}$$

۱۵. گزینهٔ «۲»



چون خط‌ها موازی‌اند، پس نسبت‌ها به‌صورت مقابل هستند:

با توجه به خط AF در مثلث AEG ، داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{AFG}}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AFG}}=\frac{۳}{۲}S_{\overset{\triangle}{AEF}}$$

از طرفی:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۲۵}\Rightarrow\frac{S_{BEFC}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=۱-\frac{۴}{۲۵}=\frac{۲۱}{۲۵}\Rightarrow\frac{S_{BEFC}}{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}=\frac{\frac{۲۱}{۲۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow S_{BEFC}=\frac{۲۱}{۴}S_{\overset{\triangle}{AEF}}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AFG}}}{S_{BEFC}}=\frac{\frac{۳}{۲}S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{\frac{۲۱}{۴}S_{\overset{\triangle}{AEF}}}=\frac{۲}{۷}$$

۱۶. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم که اضلاع مثلث با ارتفاع‌های آن نسبت معکوس دارند. پس اگر دو تا از ارتفاع‌ها $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ باشند، یعنی دو تا از ضلع‌ها ۳x و ۴x هستند. بنابراین دو حالت داریم:

۱) ۳x و ۴x اضلاع قائمه باشند. در این صورت وتر ۵x است. از طرفی ۳x و ۴x ارتفاع هم هستند، لذا $۳x=\frac{۱}{۴}$ و $۴x=\frac{۱}{۳}$ که یعنی $x=\frac{۱}{۱۲}$. پس وتر $\frac{۵}{۱۲}$ و در نتیجه ارتفاع سوم: $h_c=\frac{ab}{c}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱}{۵}$ است.

۲) ۴x وتر باشد. در این صورت ضلع سوم بنا به قضیهٔ فیثاغورس $\sqrt{۱۶x^۲-۹x^۲}=x\sqrt{۷}$ است. در این حالت $\frac{۱}{۴}$ ارتفاع وارد بر وتر است و این یعنی:

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۳x(x\sqrt{۷})}{۴x}\Rightarrow x=\frac{۱}{۳\sqrt{۷}}\Rightarrow \text{ارتفاع سوم}=۳x=\frac{۱}{\sqrt{۷}}$$

۱۷. گزینهٔ «۳»

بدون شرح!

$$\lim_{x\to 1^+}[f^{-1}(x)]=[5^-]=4$$

۱۸. گزینهٔ «۱»

باید مخرج هم برای $x\to 3^-$ و هم برای $x\to 3^+$ به صفر میل کند. یعنی:

$$\lim_{x\to 3^+}(2x^2+a[x]+b)=18+a[3^+]+b=0\Rightarrow 3a+b=-18$$

$$\lim_{x\to 3^-}(2x^2+a[x]+b)=18+a[3^-]+b=0\Rightarrow 2a+b=-18$$

در نتیجه $a=0$ و $b=-18$ پس $b-a=-18$

۱۹. گزینهٔ «۴»

از آن‌جا که $[1,2]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که $f(1-x)$ در آن صعودی است، پس: $x=2$ و $x=1$ به‌ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(1-x)$ هستند. لذا: $x=0$ و $x=-1$ به‌ترتیب طول نقاط مینیمم و ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ هستند. بنابراین: $\max f(x)=(-1,f(-1))$ است. حالا دقت کنید که:

$$\begin{cases}(f(1-x))'_{x=1}=0\\(f(1-x))'_{x=2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-f'(0)=0\\-f'(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(0)=0\\f'(-1)=0\end{cases}$$

اما دقت بفرمایید که:

$$(f(x-2))'=3x^2+2ax+b\Rightarrow f'(x-2)=3x^2+2ax+b$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}x=2:\\x=1:\end{matrix}\begin{cases}f'(0)=12+4a+b=0\\f'(-1)=3+2a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{9}{2},\ b=6$$

$$\Rightarrow f(x-2)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+1\xrightarrow{x=1}f(-1)=1-\frac{9}{2}+6+1=\frac{7}{2}$$

بالاخره داریم:

$$\text{Max}f(x)=(-1,f(-1))=(-1,\frac{7}{2})=(-1,3/5)$$

۲۰. گزینهٔ «۲»

نقطه‌ای به طول $x=-1$ روی خط $y=3x+2$ دارای عرض $y=3(-1)+2=-1$ است. لذا نقطهٔ $(-1,-1)$ روی نمودار $y=xf(x+1)+1$ قرار دارد که یعنی:

$$-1=-1f(0)+1\Rightarrow f(0)=2$$

حالا دقت داریم که شیب خط مماس ۳ شده است. پس:

$$(xf(x+1)+1)'_{x=-1}=3\Rightarrow(f(x+1)+xf'(x+1))_{x=-1}=f(0)-f'(0)=3$$

$$\xrightarrow{f(0)=2}2-f'(0)=3\Rightarrow f'(0)=-1$$

حالا معادلهٔ خط مماس بر $y=3x+f(x-1)$ در نقطهٔ $x=1$ را به‌دست می‌آوریم:

۱) $x=1\Rightarrow y=3+f(1-1)=3+f(0)=3+2=5\Rightarrow$ نقطهٔ تماس $(1,5)$

۲) شیب $=(3x+f(x-1))'_{x=1}=(3+f'(x-1))_{x=1}=3+f'(0)=3-1=2$

۳) $y-5=2(x-1)\Rightarrow y=2x+3$

که عرض‌ازمبدأ آن ۳ است.

۲۱. گزینهٔ «۳»

طبق قضیهٔ مشتق تابع صفرشونده (حالت دقیق قضیه)، نتیجه می‌گیریم که:

$$g'(2)=1\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x+1}=1\times\lim_{x\to 2}\frac{4x-x^2}{x}=\frac{4}{3}$$

۲۲. گزینهٔ «۲»

ابتدا دقت بفرمایید که:

$$f(x)=\begin{cases} x^{3}+ax & ; \quad [x]>1 \\ bx^{2}+\frac{4}{x}+1 & ; \quad [x]\le 1 \end{cases}=\begin{cases} x^{3}+ax & ; \quad x\ge 2 \\ bx^{2}+\frac{4}{x}+1 & ; \quad x<2 \end{cases}$$

حالا باید مشتق‌پذیری $f(x)$ را در $x=2$ بررسی کنیم. اول پیوستگی:

$$\lim_{x\to 2^{-}} f(x)=\lim_{x\to 2^{-}}(bx^{2}+\frac{4}{x}+1)=4b+3$$

$$\lim_{x\to 2^{+}} f(x)=\lim_{x\to 2^{+}}(x^{3}+ax)=8+2a=f(2)$$

$$\Rightarrow 4b+3=8+2a\Rightarrow 4b-2a=5 \quad (1)$$

و حالا باید $f'_{+}(2)=f'_{-}(2)$. یعنی:

$$(3x^{2}+a)_{x=2}=(2bx-\frac{4}{x^{2}})_{x=2}\Rightarrow 12+a=4b-1\Rightarrow 4b-a=13 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) داریم: $a=8$ و $b=\frac{21}{4}$. بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases} x^{3}+8x & ; \quad x\ge 2 \\ \frac{21}{4}x^{2}+\frac{4}{x}+1 & ; \quad x<2 \end{cases}$$

برای محاسبهٔ $f'(1)$، فقط باید از ضابطهٔ $\frac{21}{4}x^{2}+\frac{4}{x}+1$ مشتق بگیریم:

$$(\frac{21}{2}x-\frac{4}{x^{2}})_{x=1}=\frac{21}{2}-4=\frac{13}{2}$$

۲۳. گزینهٔ «۲»

آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ دربازهٔ $[2,6]$ برابر است با: $\frac{f(6)-f(2)}{6-2}$. اما دقت کنید که:

$$f(x+1)=f(x)+x\Rightarrow f(6)=f(5)+5=f(4)+4+5=f(3)+3+4+5$$

$$=f(2)+2+3+4+5=f(2)+14\Rightarrow f(6)-f(2)=14\Rightarrow \frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{14}{4}=3/5$$

حالا فرض کنید $x\in[0,1)$ باشد. در این‌صورت:

$$f(x+1)=f(x)+x=x^{2}+x\,;x\in[0,1)\xrightarrow[T\in[1,2]]{x+1=T}f(T)=(T-1)^{2}+(T-1)$$

$$=T^{2}-T\,;T\in[1,2)$$

بنابراین: $f(x)=x^{2}-x \;;x\in[1,2)$. هم‌چنین:

$$f(x+1)=f(x)+x=x^{2}-x+x=x^{2}\,;x\in[1,2)\xrightarrow[z\in[2,3)]{z=x+1}f(z)=(z-1)^{2}\,;[2,3)$$

از آن‌جا که $\frac{5}{2}\in[2,3)$ است، پس:

$$f(z)=(z-1)^{2}\Rightarrow f'(z)=2(z-1)\Rightarrow f'(\frac{5}{2})=2(\frac{5}{2}-1)=3$$

بنابراین جواب مسئله می‌شود:

$$\frac{3/5}{3}=\frac{7}{6}$$

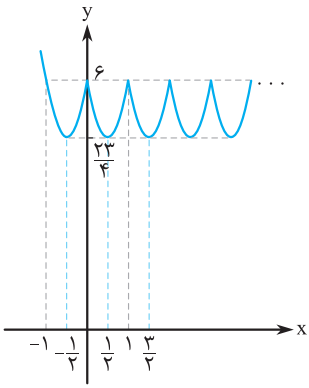
۲۴. گزینهٔ «۱»

بدیهی است که $f(x)$ در هر نقطهٔ $x<0$ پیوسته است. لذا برای این‌که در $x=0$ پیوسته باشد، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim_{x\to 0^{-}} f(x)=f(0)=6\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} f(x-1)=6\Rightarrow \lim_{x\to (-1)^{+}} f(x)=6$$

$$\xrightarrow{\text{f در } x=-1 \text{ پیوسته است.}} f(-1)=6 \Rightarrow 1-a+6=6 \Rightarrow a=1$$

بنابراین $a=1$ است و نمودار $y=f(x)$ به‌صورت زیر است:



همان‌طور که می‌بینید مینیمم نسبی $f(x)$ برابر با $\frac{23}{4}$ و ماکزیمم نسبی آن ۶ است. بنابراین:

$$6-\frac{23}{4}=\frac{1}{4}$$

۲۵. گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases} f(2)=-3 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-2a+b=-3 \\ (3x^2-a)_{x=2}=12-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=12, b=13$$

اما حالا باید بررسی کنیم که $x=2$ واقعاً طول مینیمم نسبی است:

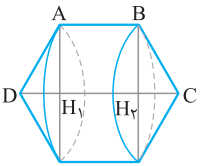
$$f(x)=x^3-12x+13 \Rightarrow f'(x)=3x^2-12 \Rightarrow$$

x		-۲		۲	
f′(x)	+	۰	−	۰	+
f(x)	↗		↘		↗

بنابراین $x=2$ واقعاً طول مینیمم نسبی و $x=-2$، طول نقطهٔ max نسبی است. در نتیجه $y_{max}=f(-2)=-8+24+13=29$. پس مختصات این نقطه $(-2,29)$ است.

۲۶. گزینهٔ «۳»

اولاً $AB=AH_1=H_1H_2=4$ است. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AH_1D و BH_2C، به کمک قضیهٔ فیثاغورس، به‌راحتی معلوم می‌شود که $DH_1=H_2C=3$. لذا $DC=10$. شکل حاصل از دوران یک استوانه به ارتفاع و شعاع قاعدهٔ ۴ و دو مخروط به ارتفاع ۳ و شعاع قاعدهٔ ۴ هستند.



$$V=\pi(4^2)4+2\times\frac{\pi\times 4^2\times 3}{3}=96\pi$$

۲۷. گزینهٔ «۱»

معادلهٔ دایره‌ها را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x^2+(y-3)^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

فرض کنید $y=ax+b$ بر هر دو دایرهٔ بالا مماس باشد. آن‌گاه از آن‌جا که فاصلهٔ خط مماس تا مرکز دایره مساوی با شعاع دایره است، داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{|۳-a(۰)-b|}{\sqrt{۱^۲+a^۲}}=۲\\ \dfrac{|۰-۰-b|}{\sqrt{۱+a^۲}}=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|b-۳|=۲\sqrt{۱+a^۲}\\ |b|=\sqrt{۱+a^۲}\end{cases}\Rightarrow|b-۳|=۲|b|$$

بنابراین:

$$\begin{cases}b-۳=۲b\\ \text{یا}\\ b-۳=-۲b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-۳\\ \text{یا}\\ b=۱\end{cases}$$

اگر $b=-۳$ باشد، آن‌گاه:

$$|b|=\sqrt{۱+a^۲}\Rightarrow ۳=\sqrt{۱+a^۲}\Rightarrow ۹=a^۲+۱\Rightarrow a=\pm۲\sqrt{۲}$$

اگر $b=۱$ باشد، آن‌گاه:

$$|b|=\sqrt{۱+a^۲}\Rightarrow ۱=\sqrt{۱+a^۲}\Rightarrow a=۰$$

پس بیشترین شیب ممکن $a=۲\sqrt{۲}$ است که برای عرض‌ازمبدأ $b=-۳$ اتفاق می‌افتد.

۲۸. گزینهٔ «۳»

فاصلهٔ کانونی بیضی اول: $۲c_۱=۱-(-۵)=۶$ است. لذا $c_۱=۳$. در بیضی دوم نقاط $(۲,۱)$ و $(۲,-۵)$ رأس‌های قطر اصلی هستند که یعنی $۲a_۲=۶$، پس $a_۲=۳$ ولی می‌دانیم که $e_۲=\frac{۱}{۳}$ است، که یعنی:

$$\frac{c_۲}{a_۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{c_۲}{۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow c_۲=۱$$

بنابراین:

$$a_۲^۲=c_۲^۲+b_۲^۲\Rightarrow ۹=۱+b_۲^۲\Rightarrow b_۲=\sqrt{۸}$$

طبق فرض مسئله: $b_۱=۲b_۲$. یعنی $b_۱=۲\sqrt{۸}$. بنابراین:

$$a_۱^۲=b_۱^۲+c_۱^۲=(۲\sqrt{۸})^۲+(۳)^۲=۳۲+۹=۴۱\Rightarrow a_۱=\sqrt{۴۱}\Rightarrow e_۱=\frac{c_۱}{a_۱}=\frac{۳}{\sqrt{۴۱}}=\frac{۳\sqrt{۴۱}}{۴۱}$$

۲۹. گزینهٔ «۲»

$$\frac{\sin x}{\sin x-\cos x+۱}=۲\Rightarrow\sin x=۲\sin x-۲\cos x+۲\Rightarrow\sin x=۲\cos x-۲ \quad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\sin^۲x+\cos^۲x=۱\Rightarrow(۲\cos x-۲)^۲+\cos^۲x=۱\Rightarrow ۵\cos^۲x-۸\cos x+۳=۰$$

$$\cos x=۱ \text{ یا } \cos x=\frac{۳}{۵}$$

اگر $\cos x=۱$ باشد، آن‌گاه با توجه به (۱)، $\sin x=۰$ است. و این یعنی $\frac{\sin x}{\sin x-\cos x+۱}=۰$ که این با فرض مسئله جور نیست. پس $\cos x=\frac{۳}{۵}$ است که در این حالت:

$$\sin x=۲\cos x-۲=\frac{۶}{۵}-۲=-\frac{۴}{۵}$$

در این‌صورت $\frac{\sin x}{\sin x - \cos x + ۱} = ۲$ است. پس این جواب قابل قبول است و داریم:

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x + ۲} = \frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۴}{۵} + \frac{۳}{۵} + ۲} = \frac{-\frac{۴}{۵}}{\frac{۹}{۵}} = -\frac{۴}{۹}$$

۳۰. گزینهٔ «۲»

می‌دانیم $f(x) = \begin{cases} ۵x & ; \quad x \geq ۰ \\ x & ; \quad x < ۰ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} (a+b)x & ; \quad x \geq ۰ \\ (a-b)x & ; \quad x < ۰ \end{cases}$. بنابراین:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} (a+b)f(x) & ; \quad f(x) \geq ۰ \\ (a-b)f(x) & ; \quad f(x) < ۰ \end{cases} = \begin{cases} (a+b)۵x & ; \quad ۵x \geq ۰ \\ (a-b)x & ; \quad x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۵(a+b)x & ; \quad x \geq ۰ \\ (a-b)x & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

حال واضح است که برای $x > ۰$، مشتق تابع $(gof)(x)$ برابر $۵(a+b)$ و برای $x < ۰$، مشتق این تابع $(a-b)$ است. مسئله می‌گوید همه‌جا، مشتق این تابع ۶ است. لذا:

$$\begin{cases} ۵a + ۵b = ۶ \\ a - b = ۶ \end{cases} \Rightarrow a = ۳/۶ , b = -۲/۴ \Rightarrow g(x) = ۳/۶x - ۲/۴|x|$$

و بنابراین: $g(۵) = ۱۸ - ۱۲ = ۶$