پاسخ‌نامه

نیتروتست

پاسخ‌نامهٔ آزمون‌های نیتروتست

نیتروتست فصل ۱ ۷

۱. گزینهٔ «۳»
۲. گزینهٔ «۴»
۳. گزینهٔ «۲»
۴. گزینهٔ «۲»
۵. گزینهٔ «۲»
۶. گزینهٔ «۱»
۷. گزینهٔ «۲»
۸. گزینهٔ «۱»
۹. گزینهٔ «۲»
۱۰. گزینهٔ «۳»

نیتروتست فصل ۲ ۱۳

۱. گزینهٔ «۳»
۲. گزینهٔ «۲»
۳. گزینهٔ «۴»
۴. گزینهٔ «۴»
۵. گزینهٔ «۱»
۶. گزینهٔ «۲»
۷. گزینهٔ «۳»
۸. گزینهٔ «۴»
۹. گزینهٔ «۳»
۱۰. گزینهٔ «۲»

نیتروتست فصل ۳ ۲۱

۱. گزینهٔ «۲»
۲. گزینهٔ «۱»
۳. گزینهٔ «۲»
۴. گزینهٔ «۱»
۵. گزینهٔ «۲»
۶. گزینهٔ «۱»
۷. گزینهٔ «۲»
۸. گزینهٔ «۳»
۹. گزینهٔ «۲»
۱۰. گزینهٔ «۱»

نیتروتست فصل ۴ ۳۰

۱. گزینهٔ «۴»
۲. گزینهٔ «۳»
۳. گزینهٔ «۱»
۴. گزینهٔ «۳»
۵. گزینهٔ «۴»
۶. گزینهٔ «۳»
۷. گزینهٔ «۳»
۸. گزینهٔ «۳»
۹. گزینهٔ «۲»
۱۰. گزینهٔ «۳»

نیتروتست فصل ۵ ۳۸

۱. گزینهٔ «۲»
۲. گزینهٔ «۲»
۳. گزینهٔ «۴»
۴. گزینهٔ «۳»
۵. گزینهٔ «۳»
۶. گزینهٔ «۳»
۷. گزینهٔ «۲»
۸. گزینهٔ «۱»
۹. گزینهٔ «۳»
۱۰. گزینهٔ «۱»

نیتروتست فصل ۶ ۴۵

۱. گزینهٔ «۳»
۲. گزینهٔ «۴»
۳. گزینهٔ «۴»
۴. گزینهٔ «۴»
۵. گزینهٔ «۴»
۶. گزینهٔ «۱»
۷. گزینهٔ «۲»
۸. گزینهٔ «۲»
۹. گزینهٔ «۲»
۱۰. گزینهٔ «۱»

نیتروتست فصل ۷ ۵۴

۱. گزینهٔ «۳»
۲. گزینهٔ «۱»
۳. گزینهٔ «۱»
۴. گزینهٔ «۳»
۵. گزینهٔ «۳»
۶. گزینهٔ «۴»
۷. گزینهٔ «۱»
۸. گزینهٔ «۲»
۹. گزینهٔ «۲»
۱۰. گزینهٔ «۲»

نیتروتست فصل ۸ ۶۰

۱. گزینهٔ «۳»
۲. گزینهٔ «۳»
۳. گزینهٔ «۲»
۴. گزینهٔ «۳»
۵. گزینهٔ «۴»
۶. گزینهٔ «۴»
۷. گزینهٔ «۲»
۸. گزینهٔ «۴»
۹. گزینهٔ «۲»
۱۰. گزینهٔ «۲»

نیتروتست فصل ۹ ۶۸

۱. گزینهٔ «۴»
۲. گزینهٔ «۳»
۳. گزینهٔ «۳»
۴. گزینهٔ «۳»
۵. گزینهٔ «۱»
۶. گزینهٔ «۴»
۷. گزینهٔ «۱»
۸. گزینهٔ «۲»
۹. گزینهٔ «۲»
۱۰. گزینهٔ «۱»

نیتروتست فصل ۱۰ ۷۴

۱. گزینهٔ «۴»
۲. گزینهٔ «۴»
۳. گزینهٔ «۱»
۴. گزینهٔ «۱»
۵. گزینهٔ «۱»
۶. گزینهٔ «۲»
۷. گزینهٔ «۳»
۸. گزینهٔ «۴»
۹. گزینهٔ «۱»
۱۰. گزینهٔ «۴»

نیتروتست فصل ۱۱ ۸۱

۱. گزینهٔ «۲»
۲. گزینهٔ «۳»
۳. گزینهٔ «۳»
۴. گزینهٔ «۴»
۵. گزینهٔ «۱»
۶. گزینهٔ «۳»
۷. گزینهٔ «۳»
۸. گزینهٔ «۴»
۹. گزینهٔ «۳»
۱۰. گزینهٔ «۲»

نیتروتست فصل ۱۲ ۸۸

۱. گزینهٔ «۲»
۲. گزینهٔ «۳»
۳. گزینهٔ «۲»
۴. گزینهٔ «۳»
۵. گزینهٔ «۱»
۶. گزینهٔ «۱»
۷. گزینهٔ «۴»
۸. گزینهٔ «۲»
۹. گزینهٔ «۴»
۱۰. گزینهٔ «۲»

نیتروتست فصل ۱۳ ۹۹

۱. گزینهٔ «۲»
۲. گزینهٔ «۲»
۳. گزینهٔ «۳»
۴. گزینهٔ «۴»
۵. گزینهٔ «۲»
۶. گزینهٔ «۳»
۷. گزینهٔ «۱»
۸. گزینهٔ «۱»
۹. گزینهٔ «۱»
۱۰. گزینهٔ «۳»

نیتروتست فصل ۱۴ ۱۰۶

۱. گزینهٔ «۴»
۲. گزینهٔ «۱»
۳. گزینهٔ «۳»
۴. گزینهٔ «۳»
۵. گزینهٔ «۳»
۶. گزینهٔ «۴»
۷. گزینهٔ «۳»
۸. گزینهٔ «۳»
۹. گزینهٔ «۳»
۱۰. گزینهٔ «۴»

نیتروتست فصل ۱۵ ۱۱۳

۱. گزینهٔ «۲»
۲. گزینهٔ «۳»
۳. گزینهٔ «۲»
۴. گزینهٔ «۴»
۵. گزینهٔ «۳»
۶. گزینهٔ «۴»
۷. گزینهٔ «۱»
۸. گزینهٔ «۱»
۹. گزینهٔ «۲»
۱۰. گزینهٔ «۲»

نیتروتست فصل ۱۶ ۱۱۷

۱. گزینهٔ «۲»
۲. گزینهٔ «۳»
۳. گزینهٔ «۱»
۴. گزینهٔ «۱»
۵. گزینهٔ «۲»
۶. گزینهٔ «۲»
۷. گزینهٔ «۳»
۸. گزینهٔ «۱»
۹. گزینهٔ «۱»
۱۰. گزینهٔ «۲»

نیتروتست فصل ۱

۱. گزینهٔ «۳»

با تقسیم دو رابطه بر یکدیگر داریم:

$$\frac{۲^{۲x+y}}{۲^{۲y+x}}=\frac{۴۵}{۷۵}\Rightarrow ۲^{(۲x+y)-(۲y+x)}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۲^{x-y}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

اگر دو طرف این رابطه را مجذورکنیم، خواهیم داشت:

$$۴^{x-y}=۰/۳۶$$

۲. گزینهٔ «۴»

رابطه‌های داده‌شده را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\begin{cases}x^۳=۱۵-۳x^۲y\\ y^۳=۱۲-۳xy^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۳+۳x^۲y=۱۵\\ y^۳+۳xy^۲=۱۲\end{cases}$$

با جمع روابط بالا داریم:

$$x^۳+y^۳+۳x^۲y+۳xy^۲=۲۷\Rightarrow(x+y)^۳=۲۷\Rightarrow x+y=۳$$

۳. گزینهٔ «۲»

ابتدا x را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$x=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{۲}=\frac{(\sqrt[۳]{۳}-۱)(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱)}{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}=\frac{۳-۱}{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}$$

حالا دقت می‌کنیم که عبارت $\frac{۱}{x^۳}+\frac{۳}{x^۲}+\frac{۳}{x}$ خیلی شبیه به $(\frac{۱}{x}+۱)^۳$ است.

در واقع:

$$\frac{۱}{x^۳}+\frac{۳}{x^۲}+\frac{۳}{x}=(\frac{۱}{x}+۱)^۳-۱$$

با قرار دادن $x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}$ داریم:

$$(\frac{۱}{x}+۱)^۳-۱=(\sqrt[۳]{۳}-۱+۱)^۳-۱=۳-۱=۲$$

۴. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که برای محاسبهٔ $۲^x+۲^{۱-x}$ به نام‌گذاری احتیاج داریم. وقتی که $۲^x+۲^{۱-x}$ را به‌دست آوردیم، به کمک اتحاد مکعب، می‌توانیم $۸^x+۸^{۱-x}$ را هم حساب کنیم. پس برویم سراغ نام‌گذاری:

$$۲^x+۲^{۱-x}=A\xrightarrow{A>۰}(۲^x+۲^{۱-x})^۲=A^۲$$

$$\Rightarrow ۴^x+۴^{۱-x}+۲(۲^x)(۲^{۱-x})=A^۲\Rightarrow ۶+۲^{۱+x+۱-x}=A^۲$$

$$\Rightarrow ۶+۲^۲=۱۰=A^۲\xrightarrow{A>۰}A=\sqrt{۱۰}$$

حالا $8^x + 8^{1-x}$ را خیلی راحت می‌توانیم حساب کنیم. توجه کنید:

$$2^x + 2^{1-x} = \sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 3} 8^x + 8^{1-x} + 3\times 2^x \times 2^{1-x} \times (2^x + 2^{1-x}) = 10\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow 8^x + 8^{1-x} + 3\times 2^1 \times \sqrt{10} = 10\sqrt{10} \Rightarrow 8^x + 8^{1-x} = 4\sqrt{10}$$

بنابراین:

$$(8^x + 8^{1-x}) - (2^x + 2^{1-x}) = 4\sqrt{10} - \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

۵. گزینهٔ «۲»

باید آن‌قدر درسنامه را خوب خوانده باشید که خیلی سریع تشخیص دهید در این مسئله قرار است دوبار از روش ۲ab استفاده کنیم:

$$5 + 2\sqrt{6} \xlongequal{\text{روش } 2ab} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$3 + 2\sqrt{2} \xlongequal{\text{روش } 2ab} (\sqrt{2} + 1)^2$$

با جایگذاری در اطلاعات مسئله، داریم:

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2x} = \sqrt{2} - 1 \\ (\sqrt{2} + 1)^{2y} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{cases}$$

دقت کنید که $(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1)^{-1}$. با قرار دادن در معادلهٔ اول داریم:

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-2x} = \sqrt{2} + 1 \\ (\sqrt{2} + 1)^{2y} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{cases}$$

پس در تساوی دوم به جای $\sqrt{2} + 1$، می‌توانیم $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-2x}$ قرار دهیم:

$$(\sqrt{2} + 1)^{2y} = ((\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-2x})^{2y} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-4xy}$$

بنابراین:

$$(\sqrt{2} + 1)^{2y} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-4xy} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow -4xy = 1 \Rightarrow xy = -\frac{1}{4}$$

۶. گزینهٔ «۱»

با معکوس‌کردن رابطه‌ها داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{\sqrt{15} - \sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{5}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \dfrac{a+c}{ac} = \dfrac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{3} \\ \dfrac{b+c}{bc} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} - \sqrt{5} \end{cases}$$

حالا دقت کنیم که:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \frac{a+c}{ac}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\sqrt{5}-\sqrt{3} \xrightarrow{\text{جمع کنید}} 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=0 \\ \frac{b+c}{bc}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\sqrt{2}-\sqrt{5} \end{cases}$$

حالا با مخرج مشترک گرفتن داریم:

$$2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} 2(\frac{bc+ac+ab}{abc})=0 \Rightarrow bc+ac+ab=0$$

۷. گزینهٔ «۲»

هر کجا مجموع یا تفاضل دو رادیکال را خواستند، اولین چیزی که باید به ذهنمان برسد، نام‌گذاری است:

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=A>0$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \sqrt[3]{4}-1+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+2\sqrt{(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4})}=A^2$$

دقت کنید که با فاکتورگیری از $\sqrt[3]{4}$ در عبارت $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}$ داریم:

$$\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}-1)$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{4}-1+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+2\sqrt{(\sqrt[3]{4}-1)\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}-1)}=A^2$$

$$\Rightarrow -1+\sqrt[3]{8\times 2}+2\sqrt{(\sqrt[3]{4}-1)^2(\sqrt[3]{4})}=A^2$$

$$\Rightarrow -1+2\sqrt[3]{2}+2(\sqrt[3]{4}-1)\sqrt[3]{2}=A^2$$

$$\Rightarrow -1+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{8}-2\sqrt[3]{2}=-1+2\times 2=3=A^2 \xrightarrow{A>0} A=\sqrt{3}$$

۸. گزینهٔ «۱»

ابتدا $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{5}$ را معکوس کنیم:

$$\frac{x^2+1}{x}=5 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=5$$

برای حل این مسئله، نمی‌توانیم واقعاً A_{1399} یا A_{1400} یا A_{1401} را حساب کنیم.

(با کامپیوتر هم سخته) با توجه به توضیح بالا و این‌که $\frac{1}{A_n}=\frac{x^{2n}+1}{x^n}$ یا به عبارتی $\frac{1}{A_n}=x^n+\frac{1}{x^n}$، خواهیم داشت:

$$x^{1400}+\frac{1}{x^{1400}}=\frac{1}{A_{1400}}$$

با ضرب دو طرف در $x+\frac{1}{x}$، داریم:

$$(x+\frac{1}{x})(x^{1400}+\frac{1}{x^{1400}})=\frac{5}{A_{1400}}$$

$$\Rightarrow x^{1401}+\frac{1}{x^{1399}}+x^{1399}+\frac{1}{x^{1401}}=\frac{5}{A_{1400}}$$

$$\Rightarrow (x^{1401}+\frac{1}{x^{1401}})+(x^{1399}+\frac{1}{x^{1399}})=\frac{5}{A_{1400}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_{1401}}+\frac{1}{A_{1399}}=\frac{5}{A_{1400}}\Rightarrow b=5$$

۹. گزینهٔ «۲»

با توان ۲ رساندن $a+b+c=0$ شروع می‌کنیم:

$$(a+b+c)^2=0^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$$

$$\Rightarrow 3+2(ab+ac+bc)=0\Rightarrow ab+ac+bc=-\frac{3}{2}$$

برای محاسبهٔ $a^4+b^4+c^4$، باید $a^2+b^2+c^2=3$ را به توان ۲ برسانیم:

$$(a^2+b^2+c^2)^2=3^2$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=9$$

حالا باید $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$ را حساب کنیم. برای این کار باید $ab+ac+bc=-\frac{3}{2}$ را به توان ۲ برسانیم:

$$(ab+ac+bc)^2=(-\frac{3}{2})^2$$

$$\Rightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)=\frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow[\text{فرض سؤال}]{a+b+c=0} a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{9}{4}$$

بنابراین داریم:

$$a^4+b^4+c^4+2(\frac{9}{4})=9\Rightarrow a^4+b^4+c^4=\frac{9}{2}$$

از طرفی $a+b+c=0$ است. این نتیجه می‌دهد که:

$$a+b=-c\xrightarrow{\text{توان ۳}}a^3+b^3+3ab(\underbrace{a+b}_{-c})=-c^3$$

$$\Rightarrow a^3+b^3-3abc=-c^3\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

در نتیجه گزینهٔ دوم درست است، زیرا:

$$\frac{1}{2}(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc})^2=\frac{1}{2}(\frac{3abc}{abc})^2=\frac{1}{2}(3^2)=\frac{9}{2}$$

همان جوابی است که به‌دست آوردیم.

۱۰. گزینهٔ «۳»

این کارها را باید بکنیم:

۱ـ درست کردن چند عبارت مربع کامل که از مثبت بودن آن‌ها آگاهیم.

۲ـ استفاده کردن از ab و ac و bc، که به خوبی می‌دانیم یک ضریب ۲ کم دارند. پس با اجازهٔ سؤال:

$$2ab+2ac+2bc=4$$

۳ـ در آخر باید جوابمان را چک کنیم تا از صحت آن مطمئن شویم.

دست به کار شویم:

$$10a^2+10b^2+c^2=10a^2+10b^2+c^2-2ab-2ac-2bc+4$$

$$\Rightarrow 4a^2-2ac+\bigcirc+4b^2-2bc+\triangle+\square$$

در ◯ باید جمله‌ای قرار دهیم که $4a^2-2ac+\bigcirc$ مربع کامل شود. با توجه به $4a^2$ و $-2ac$ این جمله باید $\frac{c^2}{4}$ باشد. در △ هم باید همین $\frac{c^2}{4}$ را قرار دهیم تا $4b^2-2bc+\triangle$ مربع کامل شود. در □ باید باقی‌ماندهٔ عبارت‌ها را قرار دهیم:

$$10a^2+10b^2+c^2-2ab-2ac-2bc+4$$

$$=4a^2-2ac+\frac{c^2}{4}+4b^2-2bc+\frac{c^2}{4}+(6a^2+6b^2+\frac{c^2}{2}-2ab+4)$$

$$=(2a-\frac{c}{2})^2+(2b-\frac{c}{2})^2+((a-b)^2+5a^2+5b^2+\frac{c^2}{2}+4)$$

$$=(2a-\frac{c}{2})^2+(2b-\frac{c}{2})^2+(a-b)^2+4+(5a^2+5b^2+\frac{c^2}{2})$$

حالا یک اتفاق خیلی جالب رخ داد. $5a^2+5b^2+\frac{c^2}{2}$ دقیقاً برابر با نصف عبارتی است که با آن شروع کردیم. پس عملیات مشابهی روی آن می‌توانیم انجام دهیم:

$$5a^2+5b^2+\frac{c^2}{2}$$

$$=4a^2+\frac{c^2}{4}-2ac+4b^2+\frac{c^2}{4}-2bc+a^2+b^2-2ab+4$$

$$=(2a-\frac{c}{2})^2+(2b-\frac{c}{2})^2+(a-b)^2+4$$

پس جواب مسئله می‌شود:

$$10a^2+10b^2+c^2=2((2a-\frac{c}{2})^2+(2b-\frac{c}{2})^2+(a-b)^2)+8$$

از آنجا که $(2a-\frac{c}{2})^2 \geq 0$، $(2b-\frac{c}{2})^2 \geq 0$ و $(a-b)^2 \geq 0$ هستند، لذا کمترین مقدار ممکن عبارت بالا ۸ است. دقت می‌کنیم، برای این‌که کمترین مقدار مساوی ۸ باشد، باید هر سه پرانتز ما صفر شوند. یعنی:

$$(2a-\frac{c}{2})^2=(2b-\frac{c}{2})^2=(a-b)^2=0 \Rightarrow a=b=\frac{c}{4}$$

فرض مسئله $ab+bc+ac=2$ است که حالا می‌شود:

$$(\frac{c}{4})^2+c(\frac{c}{4}+\frac{c}{4})=\frac{c^2}{16}+\frac{c^2}{2}=\frac{9c^2}{16}=2$$

$$\Rightarrow c^2=\frac{2\times 16}{9} \Rightarrow c=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

اگر $c=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ باشد، پس $a=b=\frac{c}{4}=\frac{\pm\sqrt{2}}{3}$. با جایگذاری این مقادیر، داریم:

$$10a^2+10b^2+c^2=10(\frac{2}{9})+10(\frac{2}{9})+\frac{16\times 2}{9}=\frac{40}{9}+\frac{32}{9}=\frac{72}{9}=8$$

پس واقعاً ۸ کمترین مقدار است.

به اعصاب خودتان مسلط باشید. تست این‌قدر دشوار، جنبهٔ طرح سؤال مستقیم ندارد. یک گوشهٔ کوچکی از آن را ممکن است بپرسند. این سؤال برای دست و پنجه نرم کردن با یک حریف چغر بد بدن بود و اگر آن را حل نکردید، لطفاً لطفاً از خودتان ناامید نشوید. حتی اگر نصف راه حل را هم فهمیده باشید، خیلی کارتان درست است.

نیتروتست فصل ۲

۱. گزینهٔ «۳»

فرض کنید جواب مشترک x_0 باشد. از آنجا که صفر نه در $\beta x^2+x+4=0$ صدق می‌کند و نه در $\alpha x^2+x-4=0$، پس می‌فهمیم که $x_0\neq 0$. این نکته به زودی به کارمان خواهد آمد.

از آن‌جایی که x_0 جواب هر دو معادله است، پس در هر دو معادله هم صدق می‌کند. یعنی:

$$\begin{cases}\alpha x_0^2+x_0-4=0\\ \beta x_0^2+x_0+4=0\end{cases}$$

این دو معادله را یک‌بار جمع می‌کنیم و یک بار منها:

$$\begin{cases}(\alpha+\beta)x_0^2+2x_0=0\\ (\alpha-\beta)x_0^2-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\alpha+\beta)x_0^2=-2x_0\\ (\alpha-\beta)x_0^2=8\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_0\neq 0}\begin{cases}(\alpha+\beta)x_0=-2\\ (\alpha-\beta)x_0^2=8\end{cases}$$

حالا دقت کنید که $\alpha+\beta=\frac{b}{64}$ و $\alpha-\beta=\frac{\sqrt{\Delta}}{64}=\frac{\sqrt{b^2-2^8}}{64}$. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}\frac{b}{64}x_0=-2\\ \frac{\sqrt{b^2-2^8}}{64}x_0^2=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\frac{-2^7}{b}\\ x_0^2\sqrt{b^2-2^8}=2^9\end{cases}$$

با قراردادن $x_0=-\frac{2^7}{b}$ در معادلهٔ دوم، داریم:

$$\frac{2^{14}}{b^2}\sqrt{b^2-2^8}=2^9\Rightarrow\sqrt{b^2-2^8}=\frac{b^2}{2^5}\Rightarrow b^2-2^8=\frac{b^4}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow 2^{10}b^2-2^{18}=b^4\Rightarrow b^4-2^{10}b^2+2^{18}=0\Rightarrow(b^2-2^9)^2=0$$

$$\Rightarrow b^2=2^9\xrightarrow[b>0]{\frac{b}{64}=\alpha+\beta>0}b=16\sqrt{2}$$

با قرار دادن $b=16\sqrt{2}$ در $64x^2-bx+1=0$ می‌بینیم که معادله‌های گفته‌شده واقعاً جواب برابر دارند. لذا $b=16\sqrt{2}$ قابل قبول است.

۲. گزینهٔ «۲»

در ابتدا طبق قوانین ویت داریم:

$$\begin{cases} a+b=-\dfrac{b}{a} \\ ab=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+ab+b=0 \\ a^2b=c \end{cases}$$

توجه کنید که طبق فرض مسئله $c=-2-a-b$. بنابراین:

$$\begin{cases} a^2+ab+b=0 \\ a^2b=-2-a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+ab+b=0 \\ a^2b+a+b+2=0 \end{cases}$$

معادلهٔ اول را در b ضرب کرده و دو معادله را از هم منها می‌کنیم:

$$\begin{cases} a^2b+ab^2+b^2=0 \\ a^2b+a+b+2=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{منها کنید}} ab^2+b^2-a-b-2=0$$

$$\Rightarrow (ab^2-a)+(b^2-1)-(b+1)=0$$

$$\Rightarrow a(b^2-1)+(b-1)(b+1)-(b+1)=0$$

$$\Rightarrow (b+1)(a(b-1)+(b-1)-1)=0$$

$$\Rightarrow (b+1)(ab-a+b-2)=0 \Rightarrow b+1=0 \text{ یا}$$

$$ab-a+b-2=0 \Rightarrow b=-1 \text{ یا } b=\frac{a+2}{a+1}$$

اگر $b=-1$ باشد، داریم:

$$a^2b+a+b+2=0 \Rightarrow a^2-a=1$$

اما اگر $b=\dfrac{a+2}{a+1}$ باشد، داریم:

$$a^2b+a+b+2=0 \Rightarrow a^2\left(\frac{a+2}{a+1}\right)+(a+2)+\left(\frac{a+2}{a+1}\right)=0$$

$$\Rightarrow (a+2)\left(\frac{a^2}{a+1}+\frac{1}{a+1}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow (a+2)\left(\frac{a^2+a+2}{a+1}\right)=0 \Rightarrow a=-2$$

ولی اگر $a=-2$ باشد، آن‌گاه $b=0$ است و از $a+b+c=-2$ می‌فهمیم که $c=0$ اســـت. ولی در این حالت معادلهٔ اصلی به‌صورت $-2x^2=0$ در می‌آید که دو جواب متمایز ندارد.

لذا تنها جواب قابل قبول $a^2-a=1$ است.

۳. گزینهٔ «۴»

از آنجایی که α , β و γ جواب‌های معادلهٔ $x^3 = 81x + 1$ هستند، پس باید در آن صدق کنند. اما دقت کنید که:

$$x^3 = 81x + 1 \Rightarrow x^3 - 81x = 1 \Rightarrow x(x^2 - 81) = 1$$

$$\Rightarrow x(x-9)(x+9) = 1 \Rightarrow (x-9)(x^2+9x) = 1$$

یعنی اگر x جواب معادلهٔ $x^3 = 81x + 1$ باشد، آن‌گاه مقادیر $x - 9$ و $x^2 + 9x$ معکوس هم هستند. می‌دانیم اگر دو عدد a و b معکوس هم باشند، آن‌گاه:

$$\frac{c}{1+a} + \frac{c}{1+b} = \frac{c(1+a+b+1)}{(1+a)(1+b)} = \frac{c(a+b+2)}{a+b+ab+1} = \frac{c(a+b+2)}{a+b+1+1} = c$$

بنابراین:

$$A + B = \frac{1}{\underbrace{\alpha^2 + 9\alpha}_{\text{معکوس}} + 1} + \frac{1}{\underbrace{(\alpha - 9)}_{\text{معکوس}} + 1} + \frac{2}{\underbrace{\beta^2 + 9\beta}_{\text{معکوس}} + 1} + \frac{2}{\underbrace{(\beta - 9)}_{\text{معکوس}} + 1}$$

$$+ \frac{3}{\underbrace{\gamma^2 + 9\gamma}_{\text{معکوس}} + 1} + \frac{3}{\underbrace{(\gamma - 9)}_{\text{معکوس}} + 1} = 1 + 2 + 3 = 6$$

۴. گزینهٔ «۴»

دنبال مربع کامل هستیم:

$$x^2 - 23x + 2\sqrt{11x} + 110 = 0$$

به خاطر $2\sqrt{11x}$ بهتر است ۱۱ واحد به دو طرف اضافه کنیم.

$$x^2 - 23x + 2\sqrt{11x} + 121 = 11$$

زیرا می‌دانیم که $121 = 11^2$ است. حالا با مرتب‌کردن جملات داریم:

$$(x^2 - 22x + 121) + (-x + 2\sqrt{11x}) = 11$$

$$\Rightarrow (x-11)^2 = x - 2\sqrt{11x} + 11 = (\sqrt{x} - \sqrt{11})^2$$

$$\Rightarrow (x-11)^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{11})^2 \Rightarrow |x - 11| = |\sqrt{x} - \sqrt{11}|$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} |(\sqrt{x} - \sqrt{11})(\sqrt{x} + \sqrt{11})| = |\sqrt{x} - \sqrt{11}|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{11} = 0 \text{ یا } |\sqrt{x} + \sqrt{11}| = 1 \Rightarrow x = 11 \text{ یا } \sqrt{x} + \sqrt{11} = 1 \text{ یا } \sqrt{x} + \sqrt{11} = -1$$

$$\Rightarrow x = 11 \text{ یا } \sqrt{x} = 1 - \sqrt{11} \text{ یا } \sqrt{x} = -1 - \sqrt{11}$$

اما $1 - \sqrt{11}$ منفی است و لذا معادلهٔ $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{11}$ جواب ندارد. به همین دلیل $\sqrt{x} = -1 - \sqrt{11}$ نیز جواب ندارد. پس فقط $x = 11$ جواب مسئله است.

۵. گزینهٔ «۱»

قرار دهید $x^2+x-a=t$، ولی قبل از اعمال تغییر متغیر، به دو طرف معادلهٔ اصلی x واحد اضافه می‌کنیم:

$$(x^2+x-a)^2+x^2+x=2a+x$$

$$\Rightarrow (x^2+x-a)^2+(x^2+x-a)-a=x$$

حالا داریم:

$$\begin{cases} t^2+t-a=x \\ x^2+x-a=t \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (t^2-x^2)+(t-x)=(x-t)$$

$$\Rightarrow (t^2-x^2)+2(t-x)=0 \Rightarrow (t-x)(t+x+2)=0$$

$$\Rightarrow t-x=0 \text{ یا } t+x+2=0 \Rightarrow x^2+x-a-x=0 \quad \text{یا}$$

$$x^2+x-a+x+2=0 \Rightarrow x^2-a=0 \text{ یا } x^2+2x+2-a=0$$

a هر مقداری که باشد، معادلهٔ $x^2-a=0$ یا جواب ندارد یا مجموع جواب‌هایش صفر است. پس ماجرای ما با $x^2+2x+2-a=0$ است.

قبل از هر چیز این معادله باید دو جواب داشته باشد، یعنی:

$$\Delta>0 \Rightarrow 4-4(2-a)>0 \Rightarrow -4+4a>0 \Rightarrow a>1$$

حال اگر $a>1$ باشد، معادلهٔ $x^2+2x+2-a=0$ قطعاً دو جواب متمایز دارد که طبق قضیهٔ ویت حتماً مجموع آن‌ها -2 است. کار تمام است.

۶. گزینهٔ «۲»

$$x^2+(a+2b+1)x+ab-a-\frac{9}{4}=0$$

چون $x=k$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس در واقع معادلهٔ بالا همان $(x-k)^2=0$ است. به عبارتی:

$$x^2+(a+2b+1)x+ab-a-\frac{9}{4}=x^2-2kx+k^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b+1=-2k \\ ab-a-\frac{9}{4}=k^2 \end{cases}$$

معادلهٔ اول را به توان ۲ می‌رسانیم و معادلهٔ دوم را در ۴ ضرب می‌کنیم تا هر دو معادله مساوی با $4k^2$ شوند:

$$\begin{cases} (a+2b+1)^2=4k^2 \\ 4ab-4a-9=4k^2 \end{cases} \Rightarrow (a+2b+1)^2=4ab-4a-9$$

$$\Rightarrow a^2+4b^2+1+4ab+2a+4b=4ab-4a-9$$

$$\Rightarrow a^2+6a+4b^2+4b+10=0 \Rightarrow (a+3)^2+(2b+1)^2=0$$

$$\Rightarrow a=-3\,,\, b=-\frac{1}{2}$$

برای پیدا کردن k، کافی است در $a+2b+1=-2k$ عددگذاری کنیم:

$$-3-1+1=-2k \Rightarrow k=\frac{3}{2}$$

۷. گزینهٔ «۳»

ابتدا طبق اتحاد جملهٔ مشترک داریم:

$$\frac{x^4-10x^2+9}{x^2+4x+3}=a \Rightarrow \frac{(x^2-9)(x^2-1)}{(x+1)(x+3)}=a$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+3)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+3)}=a$$

حالا قبل از ساده کردن باید دقت کنید که ۳− و ۱− ریشه‌های مخرج هستند. این نکته را تا آخر جواب نیاز داریم و مدام باید حواسمان به آن باشد.
با این تذکر، ساده کنید:

$$(x-1)(x-3)=a \Rightarrow x^2-4x+3-a=0 \quad (*)$$

یک حالت بدیهی داستان این است که $\Delta=0$ باشد:

$$\Delta=16-4(3-a)=0 \Rightarrow 4-(3-a)=0 \Rightarrow a=-1$$

با قرار دادن $a=-1$ داریم:

$$x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

که خوشبختانه ریشهٔ مخرج هم نیست و لذا $a=-1$ قابل قبول است. هنوز تمام نشده است. نکتهٔ اصلی سؤال باقی‌مانده!
ما باید حالت‌هایی را بررسی کنیم که معادلهٔ (*)، دو جواب دارد ولی یکی از این دو جواب ۳ یا ۱ است و آن را نپذیریم.

حالتی که یکی از جواب‌ها $x=-1$ است.

با قرار دادن $x=-1$ در معادلهٔ (*) داریم:

$$1+4+3-a=0 \Rightarrow a=8$$

با قرار دادن $a=8$ داریم:

$$x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x+1)(x-5)=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=5$$

$$\xrightarrow[\text{ریشهٔ مخرج}]{x=-1 \text{ غیرقابل قبول}} x=5$$

یعنی اگر $a=8$ باشد هم، معادلهٔ ما عملاً یک جواب دارد.

حالتی که $x=-3$ یکی از جواب‌ها باشد.

در این حالت:

$$x^2-4x+3-a=0 \Rightarrow 9+12+3-a=0 \Rightarrow a=24$$

$$\Rightarrow x^2-4x-21=0 \Rightarrow (x+3)(x-7)=0$$

$$\Rightarrow x=-۳ \text{ یا } x=۷ \xrightarrow[\text{ریشهٔ مخرج}]{x=-۳ \text{ غیرقابل قبول}} x=۷ \checkmark$$

پس چه $a=-۱$ و چه $a=۸$ و چه $a=۲۴$ باشد، در هر کدام از این سه حالت، معادلهٔ کسری داده‌شده فقط یک جواب دارد.

$$a_۱+a_۲+a_۳=-۱+۸+۲۴=۳۱$$

می‌دونیم سؤال سختی بود. ولی ارزش چند بار خوندن و مرور و تمرین رو داره، چون کلی نکتهٔ مهم داشت.

۸. گزینهٔ «۴»

ابتدا ضابطهٔ تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=(۲x-۳a)(ax-۲)$$

$$\Rightarrow f(p)=p \Rightarrow (۲p-۳a)(ap-۲)=p$$ عددی اول:

چون حاصل‌ضرب $(۲p-۳a)$ و $(ap-۲)$ برابر با عدد اول p شد، پس باید یکی از این دو مقدار برابر با ± ۱ و دیگری برابر با $\pm p$ باشد، یعنی:

حالت اول
$$\begin{cases} ۲p-۳a=۱ \Rightarrow ۲p=۳a+۱ \\ ap-۲=p \Rightarrow a(\frac{۳a+۱}{۲})-۲=\frac{۳a+۱}{۲} \\ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a^۲-a-\frac{۵}{۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \Rightarrow p=-۱ \times \\ a=\frac{۵}{۳} \Rightarrow p=۳ \times \end{cases} \end{cases}$$

حالت دوم
$$\begin{cases} ۲p-۳a=p \Rightarrow p=۳a \\ ap-۲=۱ \Rightarrow a(۳a)-۲=۱ \Rightarrow ۳a^۲=۳ \\ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \Rightarrow p=۳ \checkmark \\ a=-۱ \Rightarrow p=-۳ \times \end{cases} \end{cases}$$

به همین ترتیب می‌توان حالت‌های $\begin{cases} ۲p-۳a=-p \\ ap-۲=-۱ \end{cases}$ یا $\begin{cases} ۲p-۳a=-۱ \\ ap-۲=-p \end{cases}$ را نیز بررســـی کرد ولی جواب قابل قبول ندارند. پس فقط به ازای $a=۱$ معادلهٔ $f(p)=p$ برقرار است.

۹. گزینهٔ «۳»

از آنجا که $۲\alpha+\frac{۱}{\beta}$ و $۲\beta+\frac{۱}{\alpha}$ ریشـــه‌های $x^۲-۱۲x+۹=۰$ هستند، طبق قوانین ویت داریم:

$$\begin{cases} ۲\alpha+\frac{۱}{\beta}+۲\beta+\frac{۱}{\alpha}=۱۲ \\ (۲\alpha+\frac{۱}{\beta})(۲\beta+\frac{۱}{\alpha})=۹ \end{cases} \xrightarrow[P=\alpha\beta]{S=\alpha+\beta} \begin{cases} ۲S+\frac{S}{P}=۱۲ \\ ۴P+۴+\frac{۱}{P}=۹ \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم داریم:

$$۴P+\frac{۱}{P}-۵=۰\Rightarrow\frac{۴P^{۲}-۵+۱}{P}=۰\Rightarrow\frac{(P-۱)(۴P-۱)}{P}=۰$$

$$\Rightarrow P=۱ \text{ یا } P=\frac{۱}{۴}$$

پس دو حالت وجود دارد:

حالت اول: $P=۱$

در این صورت داریم:

$$۲S+\frac{S}{P}=۱۲\Rightarrow ۲S+\frac{S}{۱}=۱۲\Rightarrow ۳S=۱۲\Rightarrow S=۴$$

که این یعنی $S=\alpha+\beta=۴$ و $P=\alpha\beta=۱$. لذا α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۴x+۱=۰$ هستند.

حالا باید k را به نحو مناسبی انتخاب کنیم تا:

$$\begin{cases}۳\alpha+k+۳\beta+k=-(a+k)\\(۳\alpha+k)(۳\beta+k)=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳(\alpha+\beta)+۲k=-a-k\\۹\alpha\beta+۳k(\alpha+\beta)+k^{۲}=a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱۲+۲k=-a-k\\۹+۱۲k+k^{۲}=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۲+۳k=-a\\۹+۱۲k+k^{۲}=a\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع کنید}}$$

$$k^{۲}+۱۵k+۲۱=۰\xrightarrow{\Delta>۰}k_{۱}+k_{۲}=-۱۵$$

حالت دوم: $P=\frac{۱}{۴}$

در این صورت داریم:

$$۲S+\frac{S}{P}=۱۲\Rightarrow ۲S+\frac{S}{\frac{۱}{۴}}=۱۲\Rightarrow ۶S=۱۲\Rightarrow S=۲$$

پس $\alpha+\beta=۲$ و $\alpha\beta=\frac{۱}{۴}$ این هم یعنی α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۲x+\frac{۱}{۴}=۰$ هستند.

مسئله از ما می‌خواهد k را به نحوی پیدا کنیم که:

$$\begin{cases}۳\alpha+k+۳\beta+k=-(a+k)\\(۳\alpha+k)(۳\beta+k)=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳(\alpha+\beta)=-a-۳k\\۳\alpha\beta+۳k(\alpha+\beta)+k^{۲}=a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۶=-a-۳k\\\frac{۳}{۴}+۶k+k^{۲}=a\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع کنید}}\frac{۲۷}{۴}+k^{۲}+۶k=-۳k$$

$$\Rightarrow k^2+9k+\frac{27}{4}=0 \xrightarrow{\Delta>0} k_1+k_2=-9$$

در نتیجه مجموع کل مقادیر ممکن k برابر است با:

$$k_1+k_2+k_3+k_4=-15-9=-24$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

$$x^5-8x^3+x^2+12x+4=0$$

ابتدا $12x$ را به صورت $16x-4x$ می‌نویسیم:

$$\underbrace{x^5-8x^3+16x}_{\text{فاکتورگیری از } x}+\underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}=0\Rightarrow$$

$$x\underbrace{(x^4-8x^2+16)}_{(x^2-4)^2=(x-2)^2(x+2)^2}+(x-2)^2=0$$

حال از $(x-2)^2$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x-2)^2(x(x+2)^2+1)=0\Rightarrow x=2$$

از طرفی:

$$x(x+2)^2+1=0\Rightarrow x^3+4x^2+4x+1=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^3+1}_{\text{چاق و لاغر}}+4x^2+4x=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)+4x(x+1)=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2+3x+1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+3x+1=0 \end{cases}$$

معادلهٔ $x^2+3x+1=0$ دارای دلتای مثبت است و مجموع ریشه‌های آن -3 است. هیچ‌کدام از این ریشه‌ها ۲ یا -1 نیست، پس مجموع همهٔ ریشه‌های معادله برابر است با:

$$2+(-1)+(-3)=-2$$

نیتروتست فصل ۳

۱. گزینهٔ «۲»

در ابتدا به سادگی داریم:

$$||x-۳|-k|<۲ \Rightarrow -۲<|x-۳|-k<۲ \Rightarrow k-۲<|x-۳|<k+۲$$

طرف راست این نامعادله (یعنی $k+۲$) از $|x-۳|$ بزرگ‌تر است. پس حتماً باید مثبت باشد. یعنی:

$$k+۲>۰ \Rightarrow k>-۲$$

از طرفی سمت چپ نامعادله باید عددی نامثبت باشد، زیرا اگر سمت چپ هم عددی مثبت باشد، جواب به‌صورت اجتماع دو بازه است، نه یک بازه:

$$k-۲<۰ \Rightarrow k<۲$$

در کل باید $-۲<k<۲$.

۲. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که $\frac{x^۲}{x^۲-۴x+۴}=(\frac{x}{x-۲})^۲$ است.

با جایگذاری در نامعادلهٔ اصلی داریم:

$$(\frac{x}{x-۲})^۲+۶<۵(\frac{x}{x-۲})$$

قرار می‌دهیم $t=\frac{x}{x-۲}$. حالا داریم:

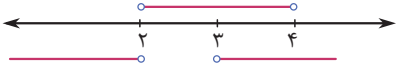
$$t^۲+۶<۵t \Rightarrow t^۲-۵t+۶<۰ \Rightarrow (t-۳)(t-۲)<۰ \Rightarrow ۲<t<۳$$

بنابراین:

$$۲<\frac{x}{x-۲}<۳ \Rightarrow \begin{cases} ۲<\frac{x}{x-۲} \\ \text{و} \\ \frac{x}{x-۲}<۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۰<\frac{x}{x-۲}-۲ \\ \text{و} \\ \frac{x}{x-۲}-۳<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۰<\frac{-x+۴}{x-۲} \Rightarrow ۲<x<۴ \\ \text{و} \\ \frac{-۲x+۶}{x-۲}<۰ \Rightarrow x>۳ \cup x<۲ \end{cases}$$

در آخر با یک اشتراک ساده داریم:



$$\Rightarrow x \in (۳,۴)$$

پس $a=۳$ و $b=۴$ و لذا $۲a+b=۱۰$ است.

۳. گزینهٔ «۲»

اگر جواب نامعادلهٔ $|x^2-6x-10|>3x$ به‌صورت $\mathbb{R}-[a,b]$ باشد، پس جواب نامعادلهٔ $|x^2-6x-10|\le 3x$ به‌صورت $[a,b]$ است. خوبی این نامعادله این است که فوراً می‌فهمیم $x>0$ و لذا دو طرف را می‌توانیم به توان ۲ برسانیم:

$$|x^2-6x-10|^2\le(3x)^2\Rightarrow(x^2-6x-10)^2-(3x)^2\le 0$$

$$\Rightarrow(x^2-6x-10-3x)(x^2-6x-10+3x)\le 0$$

$$\Rightarrow(x^2-9x-10)(x^2-3x-10)\le 0$$

$$\Rightarrow(x-10)(\underbrace{x+1}_{\text{به خاطر } x>0 \text{ مثبت است.}})(x-5)(\underbrace{x+2}_{\text{به خاطر } x>0 \text{ مثبت است.}})\le 0\Rightarrow(x-10)(x-5)\le 0$$

$$\Rightarrow 5\le x\le 10\Rightarrow a=5\,,\,b=10\Rightarrow ab=50$$

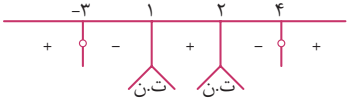
۴. گزینهٔ «۱»

قرار دهید $\frac{x^2-x-12}{x^2-3x+2}=t$. حالا داریم:

$$t+\frac{1}{t}<1\Rightarrow\frac{\overbrace{t^2+1-t}^{\Delta<0}}{t}<0\Rightarrow t<0$$

$$\Rightarrow\frac{x^2-x-12}{x^2-3x+2}<0\Rightarrow\frac{(x-4)(x+3)}{(x-2)(x-1)}<0$$

$$\Rightarrow$$



$$\Rightarrow x\in(-3,1)\cup(2,4)$$

که شامل اعداد صحیح ۳، ۰، ۱− و ۲− است. پس می‌شود ۴ عدد صحیح.

۵. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که چقدر قشنگ از اتحاد اول باید دوبار استفاده کنیم:

$$x^2+6|x+1|+2x+10=(x^2+2x+1)+6|x+1|+9$$

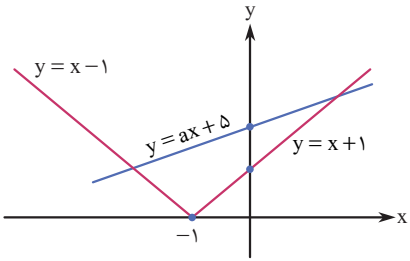
$$\Rightarrow(x+1)^2+6|x+1|+9=|x+1|^2+6|x+1|+9=(|x+1|+3)^2$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{(|x+1|+3)^2}=ax+8\Rightarrow|x+1|+3=ax+8$$

$$\Rightarrow|x+1|=ax+5$$

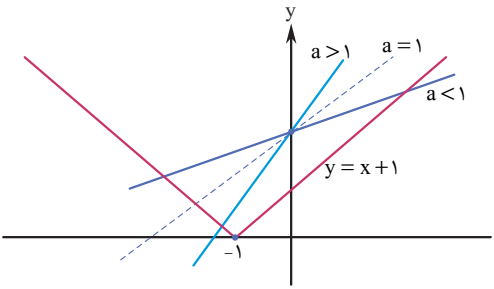
می‌خواهیم این معادلهٔ قدرمطلقی دو جواب داشته باشد. بهترین کار، رسم است. ابتدا فرض می‌کنیم $a>0$:



حـــالا دقت کنید که اگر دو تا تلاقـــی بخواهیم، اولاً باید خط $y = ax + ۵$ از بالای نقطهٔ $(-۱, ۰)$ عبور کند. یعنی:

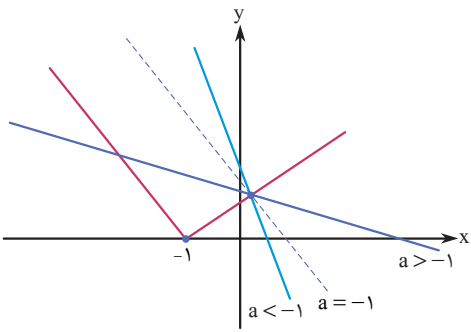
$-a + ۵ > ۰ \Rightarrow a < ۵$

ضمناً برای این‌که $y = x + ۱$ را قطع کنیم، باید شـــیب $y = ax + ۵$ کمتر از یک باشد.



لذا تا اینجا $۰ < a < ۱$ است.

حال فرض می‌کنیم $a < ۰$. اگر شـــیب منفی باشد، مشابه حالت قبل داریم: $-۱ < a < ۰$.



از طرفی $a = ۰$ هم ما را به $|x + ۱| = ۵$ می‌رساند که به وضوح دو جواب دارد.

که در نتیجه: $-۱ < a < ۱$.

۶. گزینهٔ «۱»

اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x+\frac{b}{۴})<۰$، بازهٔ $(a\,,۳)$ باشد، پس a و ۳ جواب‌های $f(x+\frac{b}{۴})=۰$ هستند. یعنی:

$$\begin{cases} f(۳+\frac{b}{۴})=۰ \\ f(a+\frac{b}{۴})=۰ \end{cases}$$

بنابراین $۳+\frac{b}{۴}$ و $a+\frac{b}{۴}$ جواب‌های $f(x)=۰$ هستند. با توجه به $f(x)=۲x^۲+bx+۳$ و قوانین ویت، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a+\frac{b}{۴}+۳+\frac{b}{۴}=-\frac{b}{۲} \\ (a+\frac{b}{۴})(۳+\frac{b}{۴})=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۳ \\ ۳a+\frac{ab}{۴}+\frac{۳b}{۴}+\frac{b^۲}{۱۶}=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{b=-۳-a} ۳a-\frac{a(۳+a)}{۴}+\frac{-۳(a+۳)}{۴}+\frac{(a+۳)^۲}{۱۶}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲a-۳a-a^۲-۳a-۹}{۴}+\frac{(a+۳)^۲}{۱۶}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۴(-a^۲+۶a-۹)+(a+۳)^۲}{۱۶}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{-۴a^۲+۲۴a-۳۶+a^۲+۶a+۹}{۸}=۳ \Rightarrow -۳a^۲+۳۰a-۲۷=۲۴$$

$$\Rightarrow -a^۲+۱۰a-۱۷=۰ \Rightarrow a^۲-۱۰a+۱۷=۰$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱۰\pm۴\sqrt{۲}}{۲}=۵\pm۲\sqrt{۲}$$

اگر $a=۵-۲\sqrt{۲}$ باشد، آن‌گاه $b=-۳-a=-۸+۲\sqrt{۲}$. در این حالت:

$$ab=(۵-۲\sqrt{۲})(-۸+۲\sqrt{۲})$$
$$=-۴۰+۱۰\sqrt{۲}+۱۶\sqrt{۲}-۸=-۴۸+۲۶\sqrt{۲}$$

اما اگر $a=۵+۲\sqrt{۲}$ باشد به مشکل می‌خوریم و نباید ادامه دهیم. اگر گفتید چرا؟ ... چون در صورت سؤال بازهٔ $(a\,,۳)$ را داریم و همین یعنی $a<۳$ است. ولی $۵+۲\sqrt{۲}$ از ۳ بیشتر است. پس این حالت منتفی است.

۷. گزینهٔ «۲»

قصدمان این است که تعیین علامت کنیم ببینیم به چه مشکلی می‌خوریم:

$$f(x)g(x) \le ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(۲x-۱)(۳x-۱)\cdots(۱۰x-۱)(۳x-۲)(۴x-۳)$$
$$\cdots(۱۲x-۱۱) \le ۰ \Rightarrow ?$$

مشکل این است که باید ریشه‌ها را به ترتیب، از کوچک به بزرگ، بنویسیم:

ریشه‌ها: $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \cdots, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \cdots, \frac{۱۱}{۱۲}$

بزرگ‌ترین این اعداد حتماً ۱ است و کوچک‌ترین $\frac{۱}{۱۰}$ است. از طرفی دقت کنید که:

$$\frac{۱}{۲} > \frac{۱}{۳} > \cdots > \frac{۱}{۱۰}$$

و: $\frac{۲}{۳} = ۱ - \frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۴}, \cdots, \frac{۱۱}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۱۲}$ پس $\frac{۲}{۳} < \frac{۳}{۴} < \cdots < \frac{۱۱}{۱۲}$

و چون $\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳}$ است، لذا کلاً ترتیب ریشه‌ها معلوم شد:

$$\frac{۱}{۱۰} < \frac{۱}{۹} < \frac{۱}{۸} < \cdots < \frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} < \frac{۳}{۴} < \cdots < \frac{۱۱}{۱۲} < ۱$$

و لذا جدول چنین است:

x		$\frac{۱}{۱۰}$		$\frac{۱}{۹}$		$\frac{۱}{۸}$		...		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۲}{۳}$		$\frac{۳}{۴}$		...		$\frac{۱۱}{۱۲}$		۱	
f(x)g(x)	+	○	−	○	+	○		...		○	−	○	+	○		...		○	−	○	+

حالا باید ببینیم بزرگ‌ترین بازهٔ منفی کدام است. اولین موضوعی که باید حل شود، طول بازه‌ها است:

$$\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۹۰} \qquad \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$$
$$\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۲۷} \quad \text{و} \quad \frac{۳}{۴} - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶} \qquad ۱ - \frac{۱۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

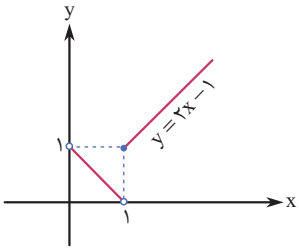
بنابراین بزرگ‌ترین طول ممکن بازه‌ها $\frac{۱}{۶}$ است. این دو بازه‌ای که طول‌شان $\frac{۱}{۶}$ است هم $(\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳})$ و $(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲})$ هستند.

اما دقت کنید $f(x)g(x)$ در بازهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ منفی اما در بازهٔ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ مثبت است.

در هر حال مجموعه جوابی که دنبالش هستیم بازهٔ $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ است که طول آن هم $\frac{1}{6}$ است.

۸. گزینهٔ «۳»

اجازه دهید قبل از هر چیز نمودار تابع f را رسم کنیم، تا به جای درگیر شدن با فرمول‌ها، ابتدا همه چیز را «ببینیم».



تابع f برای $x \geq 1$ اکیداً صعودی است و اگر $x \geq 1$ باشد، مقادیر $f(x)$ هم بزرگ‌تر یا مساوی ۱ هستند. اینجا کمی به فصل تابع نیاز داریم. اگر تابعی دامنه و برد یکسانی داشته باشد و اکیداً صعودی (یا نزولی) باشد، آن‌گاه تابع معکوس آن نیز اکیداً صعودی (یا نزولی) است. پس اگر $x \geq 1$ باشد، آن‌گاه هم $f(x)$ و هم $f^{-1}(x)$ هر دو اکیداً صعودی‌اند. بنابراین اگر $a, b \geq 1$ باشند، آن‌گاه از $f^{-1}(a) < f(b)$ به $a < f(f(b))$ می‌رسیم.

در ضمن مقادیر $f(x)$ در بازهٔ $[1, +\infty)$ بیشتر از مقادیر $f(x)$ در بازهٔ $(0, 1)$ هستند. **یعنی اگر $a \geq 1 > b > 0$ باشد، حتماً $f(a) > f(b)$ است.**

$f(x)$ از لحاظ ضابطه هم جالب است. در بازهٔ $(0, 1)$ ضابطهٔ $f(x) = 1 - x$ را داریم. به سادگی معلوم می‌شود که برای $x \in (0, 1)$، داریم $f^{-1}(x) = 1 - x$ یعنی $f(x) = f^{-1}(x)$. پس نتیجهٔ $f(a) > f(b)$ را می‌توان به این‌صورت بازنویسی کرد:

*** اگر $a \geq 1 > b > 0$ باشد، آن‌گاه $f(a) > f^{-1}(b)$.**

البته برای حل این سؤال کار ساده‌تری در پیش داریم و توضیح‌های بالا، بیشتر جنبهٔ وسواس آموزشی دارد. برویم سؤال را جواب دهیم.

می‌خواهیم $f^{-1}(x^2 + 1) < f(x + 7)$ را حل کنیم. ابتدا دقت می‌کنیم که $x^2 + 1 \geq 1$ است. لذا $f(x^2 + 1)$ با پاره‌خط سمت راست نمودار کار دارد. چون $f(x + 7)$ از آن بزرگ‌تر است، پس حتماً $f(x + 7)$ هم بخشی از

نمودار سمت راست است. این یعنی $x+7\geq 1$ است که به $x\geq -6$ می‌رسیم.

بنابراین کلاً با پاره خط سمت راست نمودار تابع کار داریم. پس مسئله به فرم $f^{-1}(a)<f(b)$ با شرط $a\,,\,b\geq 1$ است که ما را به $a<f(f(b))$ می‌رساند.

خلاصه داریم:

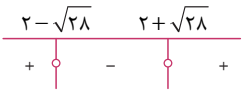
$$\begin{cases} x+7\geq 1 \\ x^2+1<f(f(x+7)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -6 \\ x^2+1<f(2(x+7)-1) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\geq -6} x^2+1<f(2x+13)$$

حالا باید دقت کنیم که $x\geq -6$ این نتیجه را می‌دهد که $2x+13\geq 1$. پس مجدداً داریم:

$$x^2+1<2(2x+13)-1=4x+25$$

$$\Rightarrow x^2-4x-24<0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow x\in(2-\sqrt{28}\,,\,2+\sqrt{28})\,,\,x\geq -6 \Rightarrow x\in(2-\sqrt{28}\,,\,2+\sqrt{28})$$

باز هم تکرار می‌کنیم که از این آزمون به خودتان استرس و ناامیدی تلقین نکنید. این آزمون خیلی خیلی دشوارتر از کنکور است و هدف از طرح آن ارزیابی نیست؛ بلکه تمرین سخت است. این تمرین‌های سخت، از شما دانش‌آموزی زبده و ورزیده می‌سازد.

۹. گزینهٔ «۲»

به ضابطهٔ $f(x)$ دقت کنید: $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & ; \ x\geq 1 \\ 3-x & ; \ -2<x<1 \end{cases}$. اگر $x\geq 1$ باشد، آن‌گاه $3x+2\geq 5$ است و اگر $-2<x<1$ باشد، آن‌گاه $2<3-x<5$ است.

به‌عبارتی:

اگر $x\geq 1$ باشد $\Leftrightarrow f(x)\geq 5$

اگر $-2<x<1$ باشد $\Leftrightarrow 2<f(x)<5$

بنابراین:

$$g(f(x))=\begin{cases} f(x)-4 & ; \ f(x)\geq 5 \\ 3-f(x) & ; \ 2<f(x)<5 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (3x+2)-4 & ; \ x\geq 1 \\ 3-(3-x) & ; \ -2<x<1 \end{cases} = \begin{cases} 3x-2 & ; \ x\geq 1 \\ x & ; \ -2<x<1 \end{cases}$$

همین داستان را برای محاسبهٔ ضابطهٔ $f(g(x))$ داریم. در اینجا باید به ضابطهٔ $g(x)$ خوب دقت کنیم:

$$g(x)=\begin{cases} x-۴ & ; \quad x\geq ۵ \\ ۳-x & ; \quad ۲<x<۵ \end{cases}$$

اگر $x\geq ۵$ باشد، آن‌گاه $x-۴\geq ۱$ است و اگر $۲<x<۵$ باشد، آن‌وقت $-۲<۳-x<۱$ است. یعنی:

اگر $x\geq ۵$ باشد $\Leftrightarrow g(x)\geq ۱$

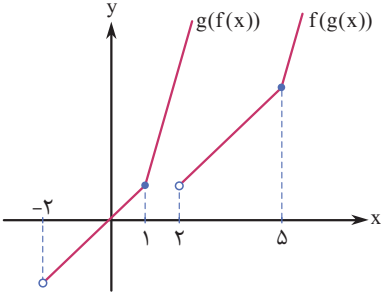
اگر $۲<x<۵ \Leftrightarrow -۲<g(x)<۱$

بنابراین در واقع داریم:

$$f(g(x))=\begin{cases} ۳g(x)+۲ & ; \quad g(x)\geq ۱ \\ ۳-g(x) & ; \quad -۲<g(x)<۱ \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ۳(x-۴)+۲ & ; \quad x\geq ۵ \\ ۳-(۳-x) & ; \quad ۲<x<۵ \end{cases}=\begin{cases} ۳x-۱۰ & ; \quad x\geq ۵ \\ x & ; \quad ۲<x<۵ \end{cases}$$

حالا دو تا تابع را مشخص کردیم. بهترین راه حل برای توابع چندضابطه‌ای رسم است:

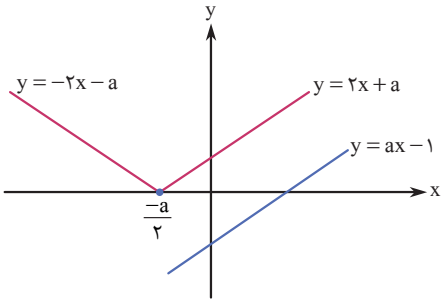


به علت برابر بودن شیب‌ها، پاره‌خط‌ها دوبه‌دو موازی‌اند و همدیگر را قطع نمی‌کنند. جواب نامعادلهٔ $f(g(x))<g(f(x))$ جایی است که نمودار $g(f(x))$ بالاتر باشد که از نمودار معلوم است بازهٔ $(۲,+\infty)$ جواب مسئله است.

۱۰. گزینهٔ «۱»

فریب ظاهر سادهٔ سؤال را نخورید. قرار است نامعادلهٔ $|۲x+a|>ax-۱$ همواره برقرار باشد. یعنی اگر آن را حل کنیم به مجموعه جواب $\mathbb{R}$ برسیم. بارها گفته‌ایم که در مسائل مربوط به قدرمطلق و توابع چندضابطه‌ایی، یکی از بهترین روش‌ها رسم است. ولی برای رسم نمودارهای این سؤال باید دو حالت در نظر بگیریم:

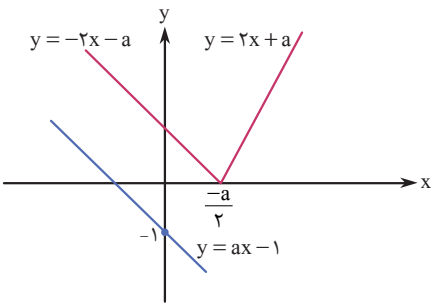
حالت اول: $a>۰$ باشد:



در این حالت $y = ax - ۱$ صعودی است و تنها خطری که نمودار $y = |۲x + a|$ را تهدید می‌کند تا $y = ax - ۱$ بتواند آن را قطع کند، شـــاخهٔ سمت راست این نمودار اســـت. ولی اگر شیب $y = ax - ۱$ از ۲ بیشتر نباشد، این دو خط نمی‌توانند همدیگر را قطع کنند. بنابراین:

$$a \le ۲ \xrightarrow{a>۰} ۰ < a \le ۲$$

حالت دوم: $a < ۰$ باشد:

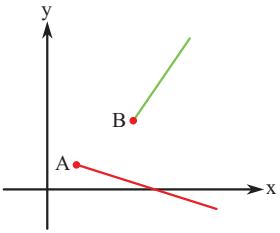


این دفعه تهدید از ســـمت چپ است و باید $a \ge -۲$ باشد. یعنی در این حالت $-۲ \le a < ۰$. بدیهی است که به‌ازای $a = ۰$، صفر به نامعادلهٔ $|۲x| > -۱$ می‌رسد که مجموعه جواب آن $\mathbb{R}$ است. لذا در کل جواب مسئله $a \in [-۲, ۲]$ است.

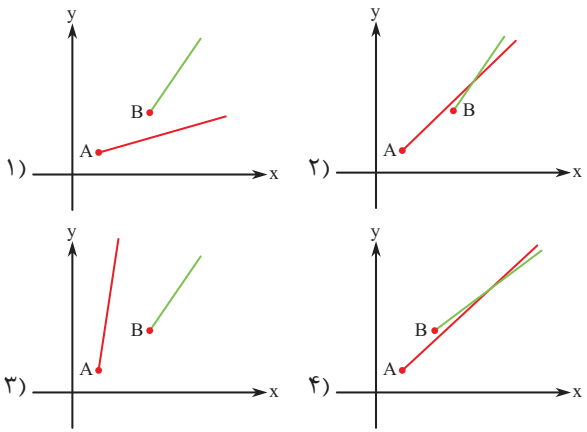
نیتروتست فصل ۴

۱. گزینهٔ «۴»

ابتدا فرض کنید $a<0$ باشد. در این صورت نمودار $y=ax+2\ ;\ x>1$ یک نیم‌خط نزولی با نقطهٔ آغازین $A(1,a+2)$ است. درحالی‌که $y=3x+a\ ;\ x>2$ یک نیم‌خط نزولی با نقطهٔ آغازین $B(2,a+2)$ است. با توجه به نمودار مقابل، معلوم می‌شود که در این حالت تلاقی‌ای وجود ندارد.



حالا فرض کنیم $a>0$ باشد. در این‌صورت $y=ax+2\ ;\ x>1$ نموداری صعودی با نقطهٔ آغازین $A(1,a+2)$ است. نمودار $y=3x+a\ ;\ x>2$ نیز صعودی با نقطهٔ آغازین $B(2,a+6)$ است. دو نمودار به یکی از حالت‌های زیر هستند.



حالت (۱) زمانی رخ می‌دهد که شیب $y=ax+2$ کمتر مساوی شیب $y=3x+a$ باشد (یعنی $a\le 3$) و در ضمن $y=ax+2$ از پایین B بگذرد.

یعنی: $2a+2<a+6 \Rightarrow a<4$

از اشتراک این دو داریم:

$$\begin{cases} a\le 3 \\ \text{و} \\ a<4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} a\le 3$$

یعنی برای $0 < a \leq 3$ هم تلاقی نداریم.

حالت (۲) برای زمانی اســـت که شیب $y = ax + 2$ کمتر از شیب $y = 3x + a$ است ولی نمودار $y = ax + 2$ از بالای B عبور کند:

$$\begin{cases} a < 3 \\ \text{و} \\ 2a + 2 > a + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 3 \\ \text{و} \\ a > 4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

این نشان می‌دهد که حالت (۲) ، عملاً هرگز اتفاق نمی‌افتد.

حالت (۳) برای زمانی اســـت که شیب $y = ax + 2$ بیشتر از شیب $y = 3x + a$ باشد و نمودار $y = ax + 2$ از بالای B بگذرد:

$$\begin{cases} a > 3 \\ \text{و} \\ 2a + 2 > a + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 3 \\ \text{و} \\ a > 4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} a > 4$$

چون در حالت (۳) تلاقی نداریم، پس برای $a > 4$ هم تلاقی نداریم.

حالت (۴) برای زمانی اســـت که شیب $y = ax + 2$ بیشتر از شیب $y = 3x + a$ باشد و نمودار $y = ax + 2$ از پایین یا روی نقطهٔ B بگذرد:

$$\begin{cases} a > 3 \\ \text{و} \\ 2a + 2 \leq a + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 3 \\ \text{و} \\ a \leq 4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 3 < a \leq 4$$

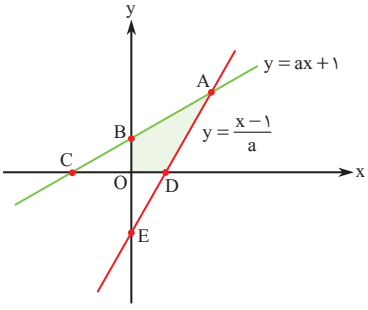
در نتیجه، اگر $a \in \mathbb{R} - [3\text{و}4]$ باشـــد، نقطهٔ تلاقی نداریـــم. حالا برای اینکه جگرتان حال بیاد، ویدیوی این سؤال را از سایت مهروماه ببینید.

۲. گزینهٔ «۳»

چون $y = ax + 1$ از ربع چهارم عبور نمی‌کند، پس شـــیب این خط مثبت یا صفر است: $a \geq 0$

چون $f^{-1}(x)$ وجود دارد، پس $a \neq 0$. با خیال راحت $a > 0$ شد.

حالا دقت کنید که $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{a}$. لذا عرض‌ازمبداء $y = f^{-1}(x)$ برابر $-\frac{1}{a}$ است که با توجه به مثبت بودن a، باید منفی باشد. نمودارها را رسم می‌کنیم:



چون دو نمودار قرار اســـت در ربع اول تقاطع داشـــته باشند، لذا باید شیب $y=\frac{x-1}{a}$ از شیب $y=ax+1$ بیشتر باشد. یعنی:

$$\frac{1}{a}>a \xrightarrow{a>0} 1>a^2 \xrightarrow{a>0} 0<a<1$$

حالا برویم سراغ نقاط تلاقی:

$$A:\frac{x-1}{a}=ax+1 \Rightarrow x-1=a^2x+a \Rightarrow x(a^2-1)=-1-a$$

$$\Rightarrow x(a-1)(a+1)=-(a+1) \xrightarrow{a>0} x=-\frac{1}{a-1}$$

$$y=ax+1=\frac{-a}{a-1}+1=\frac{-a+a-1}{a-1}=-\frac{1}{a-1} \Rightarrow A=(\frac{-1}{a-1},\frac{-1}{a-1})$$

$$B:x=0,\ y=a(0)+1=1 \Rightarrow B=(0,1)$$

$$C:y=0,\ ax+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{a} \Rightarrow C=(-\frac{1}{a},0)$$

$$D:y=0 \Rightarrow 0=\frac{x-1}{a} \Rightarrow x=1 \Rightarrow D=(1,0)$$

$$E:x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{a} \Rightarrow E=(0,-\frac{1}{a})$$

حالا داریم:

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\overset{\triangle}{ACD}}-S_{\overset{\triangle}{BOC}}=\frac{1}{2}(\frac{-1}{a-1})(1+\frac{1}{a})-\frac{1}{2}(1)(\frac{1}{a})=2$$

$$\Rightarrow (\frac{-1}{a-1})(\frac{a+1}{a})-\frac{1}{a}=4 \Rightarrow \frac{-a-1-a+1}{a(a-1)}=4$$

$$\Rightarrow \frac{-2a}{a(a-1)}=4 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \checkmark$$

۳. گزینهٔ «۱»

دقت کنید چون $a,b,c\in\mathbb{N}$ هستند و $f(10)=100a+10b+c<121$ لذا باید $a=1$ باشد. زیرا اگر $a\geq 2$ باشد، آن‌گاه $f(10)\geq 211$.

تا اینجا فهمیدیم: $f(x)=x^{۲}+bx+c$. از طرفی سؤال گفته:

$$f(۲)=۸+۴a=۸+۴=۱۲\Rightarrow ۴+۲b+c=۱۲\Rightarrow ۲b+c=۸$$

همین جا معلوم می‌شود که $b<۴$ اســـت، زیرا اگر $b\geq ۴$ باشد، آن‌گاه c یا صفر است یا منفی. (که با طبیعی بودن c جور در نمی‌آید)

دوباره از $f(۱۰)<۱۲۱$ استفاده کنیم:

$$f(۱۰)=۱۰۰+۱۰b+c<۱۲۱\Rightarrow ۱۰b+c<۲۱$$

از $۱۰b+c<۲۱$ نتیجه می‌گیریم که $b<۲$ اســـت. پس معلوم می‌شـــود که $b=۱$ است و چون $۲b+c=۸$ است، پس باید $c=۶$ باشد و در نتیجه:

$$f(x)=x^{۲}+x+۶\Rightarrow f(۱۱)=۱۲۱+۱۱+۶=۱۳۸$$

۴. گزینهٔ «۳»

مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$S=(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})=(\frac{-b}{۲},\frac{۴-b^{۲}}{۴})$$

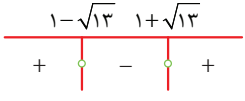
برای این‌که نقطهٔ S بین دو خط موازی $y=x-۲$ و $y=x+۴$ قرار بگیرد، باید $x_S-۲<y_S<x_S+۴$. این هم یعنی:

$$-\frac{b}{۲}-۲<\frac{۴-b^{۲}}{۴}<-\frac{b}{۲}+۴\Rightarrow\frac{-b-۴}{۲}<\frac{۴-b^{۲}}{۴}<\frac{۸-b}{۲}$$

$$\Rightarrow -۲(b+۴)<۴-b^{۲}<۲(۸-b)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۲(b+۴)<۴-b^{۲}\\ \text{و}\\ ۴-b^{۲}<۲(۸-b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲b-۸<۴-b^{۲}\\ \text{و}\\ ۴-b^{۲}<۱۶-۲b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b^{۲}-۲b-۱۲<۰\Rightarrow\\ \text{و}\\ b^{۲}-۲b+۱۲>۰\xrightarrow{\Delta<۰}\mathbb{R}\end{cases}$$



اشتراک این دو جواب می‌شود: $(۱-\sqrt{۱۳},۱+\sqrt{۱۳})$

۵. گزینهٔ «۴»

دقت بفرماییـــد که $f(x)=(x+۷)^{۲}-۷$. حـــالا خیلی راحـــت می‌توانیم $f(f(f(x)))$ را حساب کنیم:

$$f(f(f(x)))=f(f((x+۷)^{۲}-۷))=f(((x+۷)^{۲}-۷+۷)^{۲}-۷)$$

$$\Rightarrow f((x+۷)^۴-۷)=((x+۷)^۴-۷+۷)^۲-۷=(x+۷)^۸-۷$$

و حالا داریم:

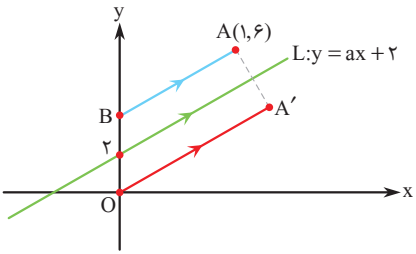
$$f(f(f(x)))=۹\Rightarrow (x+۷)^۸-۷=۹$$

$$\Rightarrow (x+۷)^۸=۱۶\Rightarrow x+۷=\pm\sqrt{۲}\Rightarrow x=-۷\pm\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}}(-۷-\sqrt{۲})(-۷+\sqrt{۲})=۴۹-۲=۴۷$$

۶. گزینهٔ «۳»

به نمودار دقت کنید:



چهارضلعی $OBAA'$ ذورنقه است پس $AB \parallel OA'$ و چون A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط L است، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد L با محور yها یعنی نقطهٔ $(۰,۲)$ وسط دو نقطهٔ O و B قرار دارد و از اینجا:

$B=(۰,۴)$

$$a_{AB}=\frac{۶-۴}{۱-۰}=۲$$

چون خط‌های AB و OA' موازی‌اند، پس:

$$a_{AB}=a_{OA'}=۲$$

لذا A' روی خط $y=۲x$ قرار دارد. پس $A'=(b\,,۲b)$. حالا چون A' قرینهٔ A نسبت به $y=ax+۲$ است، لذا AA' بر این خط عمود است و در نتیجه:

$$a_{AA'}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۲b-۶}{b-۱}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۴b-۱۲=۱-b\Rightarrow ۵b=۱۳\Rightarrow b=\frac{۱۳}{۵}$$

لذا $A'=(\frac{۱۳}{۵},\frac{۲۶}{۵})$. حالا چهار رأس را داریم و محاسبهٔ مساحت کاری ندارد:

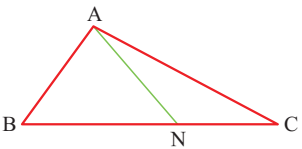
$$S_{OBAA'} = S_{\overset{\triangle}{OBA}} + S_{\overset{\triangle}{OAA'}} = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ \\ ۱ & ۶ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} + \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۶ \\ \frac{۱۳}{۵} & \frac{۲۶}{۵} \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{۱}{۲}|(۰+۰+۰)-(۰+۴+۰)| + \frac{۱}{۲}|(۰+\frac{۲۶}{۵}+۰)-(۰+\frac{۶\times ۱۳}{۵}+۰)|$$

$$= ۲+\frac{۲۶}{۵} = \frac{۳۶}{۵} = ۷/۲$$

۷. گزینهٔ «۳»

یک مثلث فرضی بکشیم:



اگر محیط $\overset{\triangle}{ABN}$ و $\overset{\triangle}{ANC}$ برابر باشد، پس باید:

$$AB+BN+AN = AN+NC+CA$$

$$\Rightarrow AB+BN = AC+NC \quad ✻$$

اما دقت کنید که در این مسئله:

$$|AB| = \sqrt{۵^۲+۱۲^۲} = ۱۳ \text{ و } |AC| = \sqrt{۱۶^۲+۱۲^۲} = ۲۰$$

$$|BC| = \sqrt{۲۱^۲+۰^۲} = ۲۱$$

بنابراین ✻ را می‌توان چنین نوشت:

$$۱۳+BN = ۲۰+NC \xrightarrow{NC=۲۱-BN} BN = ۷+(۲۱-BN)$$

$$\Rightarrow BN = ۱۴$$

پس $BN = ۱۴$ و $NC = ۷$ اســت. یعنی نقطهٔ N پاره خط BC را به نسبت ۲ به ۱ قطع کرده است. پس:

$$N = \frac{۲C+B}{۳} = (\frac{۲\times ۱۸-۳}{۳}, \frac{۲\times(-۷)-۷}{۳}) = (۱۱,-۷)$$

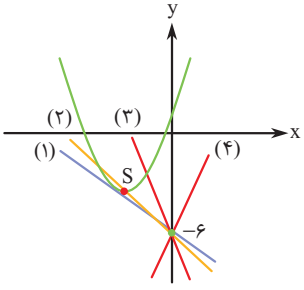
لذا شیب AN می‌شود:

$$a_{AN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-۷-۵}{۱۱-۲} = \frac{-۱۲}{۹} = \frac{-۴}{۳}$$

۸. گزینهٔ «۳»

سهمی $y = x^۲+۴x+۱$ با رأس $S = (-۲,-۳)$ و خط $y = ax-۶$ در شکل

زیر رســـم شده‌اســـت. دقت کنید که خط را در چهار حالت رسم کرده‌ایم و هدف، پیدا کردن حدود a بر اساس این چهار حالت است.



۱ : در حالت اول خط بر سهمی مماس است، پس معادلهٔ $x^۲+۴x+۱=ax-۶$ ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x^۲+۴x+۱-ax+۶=x^۲+(۴-a)x+۷=۰$$

دلتای این معادله باید برابر صفر باشد:

$$\Delta=(۴-a)^۲-۴(۷)=۰\xrightarrow{a<۰}a=۴-۲\sqrt{۷}$$

۲ : در حالـــت دوم، خط از $S(-۲,-۳)$ می‌گذرد. از آنجـــا که خط حتماً از $(۰,-۶)$ هم می‌گذرد، لذا در این حالت مقدار a برابر با $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{۳}{۲}$ است.

۳ : حالت سوم جزء حالت قابل قبول نیست؛ زیرا نقاط برخورد دو نمودار، در طرفین رأس سهمی هستند.

پـــس تا اینجا برای این‌که خط، ســـهمی را در یک طرف رأس قطع کند، لازم است $a\in(-\frac{۳}{۲},۴-۲\sqrt{۷})$ باشد.

۴ : در حالت چهارم نیز خط سهمی را در ۲ نقطه قطع می‌کند و البته در این حالت a هم مثبت است.

$$x^۲+۴x+۱=ax-۶\Rightarrow x^۲+(۴-a)x+۷=۰$$

دلتای معادلهٔ بالا باید مثبت باشد:

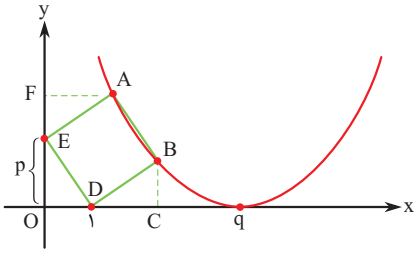
$$\Delta=(a-۴)^۲-۲۸>۰\Rightarrow(a-۴)^۲>۲۸\xrightarrow{a>۰}a>۴+۲\sqrt{۷}$$

در نتیجه حدود قابل قبول برای a، مجموعهٔ $(-\frac{۳}{۲},۴-\sqrt{۲۸})\cup(۴+\sqrt{۲۸},+\infty)$ است.

خیلی طولانی و ســـخت بود، مگه نه؟ پیشنهاد می‌کنیم همین حالا ویدیوی مربوط به این سؤال رو از سایت مهروماه ببینی.

۹. گزینهٔ «۲»

با نام‌گذاری‌های زیر، شروع می‌کنیم:



از آنجا که چهار ضلعی مربع است، پس مثلث‌های $\overset{\triangle}{AFE}$ ، $\overset{\triangle}{EOD}$ و $\overset{\triangle}{BDC}$ به حالت وتر و زاویهٔ حاده هم‌نهشت هستند. لذا:

$$EF = OD = ۱ , AF = OE = p , OE = DC = p , BC = OD = ۱$$

بنابراین:

$$A = (p , p+۱) , B = (p+۱ , ۱)$$

از آنجا که A و B روی $y = (x-q)^۲$ قرار دارند، پس باید در آن صدق کنند.

$$\begin{cases} p+۱ = (p-q)^۲ \\ ۱ = (p+۱-q)^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+۱ = p^۲ + q^۲ - ۲pq \\ ۱ = p^۲ + q^۲ + ۱ + ۲p - ۲q - ۲pq \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{منها کنید}} p = ۲q - ۲p - ۱ \Rightarrow ۲q = ۳p + ۱ \Rightarrow q = \frac{۳p+۱}{۲}$$

حالا مجدداً از رابطهٔ $۱ = (p+۱-q)^۲$ اســتفاده می‌کنیم ولی این بار به جای q می‌توانیم $\frac{۳p+۱}{۲}$ قرار دهیم:

$$۱ = (p+۱-\frac{۳p+۱}{۲})^۲ = (\frac{۱-p}{۲})^۲ \Rightarrow \frac{۱-p}{۲} = ۱ \text{ یا } -۱$$

$$\Rightarrow p = -۱ \text{ یا } p = ۳ \xrightarrow{\text{از شکل } p>۰ \text{ است}} p = ۳$$

بنابراین $q = \frac{۳p+۱}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$ و در آخر داریم:

$$pq = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

فــرض کنیــد $d : y = ax + b$ باشــد. در این‌صورت چــون d از $(۹,۱۶)$ می‌گذرد، پــس $۱۶ = ۹a + b$. از طرفی مجمــوع فواصل نقاط $B(۶,۸)$ و $C(۲,۴)$ از خط d برابر است با:

$$\frac{|8-6a-b|}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{|4-2a-b|}{\sqrt{a^2+1}}=20$$

آماده‌ایم دستگاه تشکیل دهیم:

$$\begin{cases}|6a+b-8|+|2a+b-4|=20\sqrt{a^2+1}\\ 16=9a+b\Rightarrow b=16-9a\end{cases}$$

با قرار دادن $b=16-9a$ در معادلهٔ اول داریم:

$$|6a+16-9a-8|+|2a+16-9a-4|=20\sqrt{a^2+1}$$

$$\Rightarrow|3a-8|+|7a-12|=20\sqrt{a^2+1}$$

دو طرف به توان ۲:

$$(3a-8)^2+(7a-12)^2+2|(3a-8)(7a-12)|=400(a^2+1)$$

$$\Rightarrow 2|(3a-8)(7a-12)|=342a^2+216a+192$$

$$\Rightarrow|(3a-8)(7a-12)|=171a^2+108a+96$$

$$\Rightarrow|21a^2-92a+96|=171a^2+108a+96$$

حالا یک معادلهٔ قدرمطلقی داریم که دو حالت چک کردنی دارد:

حالت اول: $21a^2-92a+96=171a^2+108a+96$

$$\Rightarrow 150a^2+200a=0\Rightarrow a=0 \text{ یا } a=-\frac{4}{3}$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند.

حالت دوم هم:

حالت دوم: $21a^2-92a+96=-171a^2-108a-96$

$$\Rightarrow 192a^2+16a+192=0\Rightarrow \Delta<0$$

در نتیجه مجموع مقادیر b برابر است با:

$$b=16-9a\Rightarrow b=16 \text{ یا } 28\Rightarrow b_1+b_2=44$$

نیتروتست فصل ۵

۱. گزینهٔ «۲»

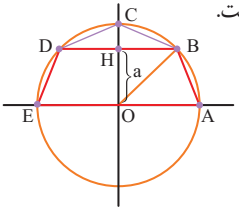
سعی کنیم معادله را حل کنیم. برای این کار ابتدا از $\sin x$ فاکتور می‌گیریم و سپس از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده می‌کنیم:

$$\sin x(\sin^{۲} x-(a+۱)\sin x+a)=۰ \Rightarrow \sin x(\sin x-a)(\sin x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \sin x=۰ \text{ یا } \sin x=a \text{ یا } \sin x=۱$$

می‌دانیم جواب‌های $\sin x=۰$ روی دایرهٔ مثلثاتی، نقاط $k\pi(k\in\mathbb{Z})$ هستند. جواب $\sin x=۱$ هم $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ است. اما برای $\sin x=a$، با توجه به مثبت بودن a، دو حالت وجود دارد:

حالت اول این‌که $a>۱$ باشد و معادلهٔ $\sin x=a$ اصلاً جواب نداشته باشد. در این‌صورت فقط همان ۳ نقطهٔ قبلی را روی دایرهٔ مثلثاتی داریم که مثلثی به مساحت $\frac{۱}{۲}\times۲\times۱=۱$ ایجاد می‌کنند. این با فرض مسئله در تناقض است. برای $a=۱$ نیز همین‌طور است و قابل قبول نیست.



پس حالت دوم یعنی $۰<a<۱$ رخ می‌دهد و $\sin x=a$ دو جواب دارد و شکل مورد نظر یک پنج‌ضلعی است. پس جواب‌ها روی دایره چنین هستند:

پنج ضلعی ABCDE از یک ذوزنقه و یک مثلث تشکیل شده است. پس:

$$\frac{۴}{۳}=\frac{۱}{۲}(BD+۲)a+\frac{۱}{۲}(۱-a)\times BD$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}=\frac{۱}{۲}(aBD+۲a+BD-aBD) \Rightarrow \frac{۸}{۳}=(۲a+BD)$$

حالا دقت کنید که $OA=۱$ و طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BH=\sqrt{OB^{۲}-OH^{۲}}=\sqrt{۱-a^{۲}} \Rightarrow BD=۲\sqrt{۱-a^{۲}}$$

بنابراین:

$$\frac{۸}{۳}=۲a+۲\sqrt{۱-a^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}=a+\sqrt{۱-a^{۲}} \Rightarrow (\frac{۴}{۳}-a)^{۲}=۱-a^{۲} \Rightarrow \frac{۱۶}{۹}-\frac{۸}{۳}a+a^{۲}=۱-a^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲a^{۲}-\frac{۸}{۳}a+\frac{۷}{۹}=۰ \Rightarrow a=\frac{\frac{۸}{۳}\pm\sqrt{\frac{۸}{۹}}}{۴}=\frac{\frac{۴}{۳}\pm\frac{\sqrt{۲}}{۳}}{۲}=\frac{۴\pm\sqrt{۲}}{۶}$$

که هر دو مقدار هم در شرط $۰<a<۱$ صدق می‌کنند.

۲. گزینهٔ «۲»

اول دقت می‌کنیم که AC فاصلهٔ دو درهٔ متوالی است. یعنی $AC = T$. پس:

$$AC = \left| \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{a-۵}} \right| = ۲|a-۵|$$

از طرفی ارتفاع وارد بر AC در مثلث ABC فاصلهٔ بین کمترین و بیشترین مقدار تابع $a\sin(\frac{\pi x}{a-۵})$ است که این مقدار هم البته $۲|a|$ است. لذا:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۲|a-۵| \times ۲|a| = ۱۲ \Rightarrow |a(a-۵)| = ۶$$

$$\Rightarrow a(a-۵) = ۶ \text{ یا } a(a-۵) = -۶$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۵a - ۶ = ۰ \text{ یا } a^۲ - ۵a + ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (a-۶)(a+۱) = ۰ \text{ یا } (a-۳)(a-۲) = ۰ \Rightarrow a = ۶ \text{ یا } -۱ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۲$$

هنوز تمام نشده است. قرار بود همیشه حواس‌مان به اطراف مبدأ باشد. اطراف مبدا نمودار سینوسی ما نزولی است و این یعنی باید:

$$a(\frac{\pi}{a-۵}) < ۰$$

با بررسی چهار مقدار به‌دست آمده برای a داریم:

$$a = ۶ \Rightarrow ۶(\frac{\pi}{۶-۵}) > ۰ \quad ✗$$

$$a = -۱ \Rightarrow (-۱)(\frac{\pi}{-۱-۵}) > ۰ \quad ✗$$

$$a = ۳ \Rightarrow ۳(\frac{\pi}{۳-۵}) < ۰ \quad ✓$$

$$a = ۲ \Rightarrow ۲(\frac{\pi}{۲-۵}) < ۰ \quad ✓$$

لذا فقط دو مقدار ۳ یا $a = ۲$ قابل قبول هستند.

۳. گزینهٔ «۴»

$$\begin{cases} (۱+\tan\alpha)(۱+\tan\beta) = ۲ \\ \cot\alpha + \cot\beta = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱ + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta = ۲ \\ \frac{۱}{\tan\alpha} + \frac{۱}{\tan\beta} = ۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta = ۱ \\ \frac{۱}{\tan\alpha} + \frac{۱}{\tan\beta} = ۵ \end{cases}$$

معادلهٔ اول را بر $\tan\alpha\tan\beta$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\alpha}+1=\frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\Rightarrow 6=\frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow \tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{6}$$

حالا از معادلهٔ دوم، مخرج مشترک می‌گیریم:

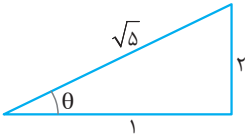
$$\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta}=5\Rightarrow\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{\frac{1}{6}}=5\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{6}$$

۴. گزینهٔ «۳»

روش اول ابتدا دقت کنید که:

$$x^2-(k+2)x+2k=(x-2)(x-k)=0\Rightarrow x=2 \text{ یا } k$$

از آنجا که $-1\le\sin 2\theta\le 1$ است، پس قاعدتاً $\tan\theta=2$ و $\sin 2\theta=k$.
مثلث کمکی را می‌کشیم و البته این خوش‌شانسی را هم داریم که $\sin 2\theta$ و $\tan\theta$ هم‌علامت هستند (زیرا یکی دو برابر ضرب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ است و دیگری تقسیم آن‌ها).



$$\Rightarrow\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

بنابراین:

$$k=2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{5}$$

روش دوم

ابتدا به دو فرمول جالب زیر توجه کنید:

$$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\ ,\ \cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

اکنون در این سؤال داریم:

$$\begin{cases}\sin 2\theta=k\\ \tan\theta=2\end{cases}\Rightarrow k=\frac{2\times 2}{1\times 2^2}=\frac{4}{5}$$

البته ما مبنا را بر این گذاشتیم که شما زیاد فرمول حفظ نکنید و به همین خاطر روش اول را ترجیح می‌دهیم، با این‌که روش دوم زیباتر و زیرکانه‌تر است.

۵. گزینهٔ «۳»

ابتدا به کمک مخرج مشترک گرفتن و اتحادهای مثلثاتی، ضابطهٔ $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}+\frac{2(\cos x+\sin x)}{1-(\sin 2x+\cos 2x)}$$

$$=\frac{2\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}+\frac{2(\cos x+\sin x)}{1-2\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}+\frac{2(\cos x+\sin x)}{2\sin^2 x-2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x(\sin x-\cos x)}$$

$$=\frac{2\sin x\cos x-(\cos x+\sin x)^2}{\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

$$=\frac{2\sin x\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x}{\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\frac{-1}{\sin x\cos 2x}$$

حالا صورت و مخرج را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{-\cos x}{\sin x\cos x\cos 2x}=\frac{-2\cos x}{\sin 2x\cos 2x}=\frac{-4\cos x}{\sin 4x}$$

و در آخر داریم:

$$f(\frac{\pi}{10})=\frac{-4\cos\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{4\pi}{10}}$$

دقت کنید که چون $\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ پس $\cos\frac{\pi}{10}=\sin\frac{4\pi}{10}$ و لذا:

$$f(\frac{\pi}{10})=-4$$

۶. گزینهٔ «۳»

از این‌که $|\sin 2x|=\sin x$ نتیجه می‌گیریم که $\sin x\geq 0$ است و لذا $|\sin x|=\sin x$:

$$|\sin 2x|=|\sin x|\Rightarrow|2\sin x\cos x|=|\sin x|$$

$$\Rightarrow|\cos x|=\frac{1}{2}\text{ یا }|\sin x|=0$$

هر کدام از این معادله‌ها در $[0,2\pi]$ دو جواب دارند. از آنجا که این معادلات جواب مشترک ندارند، نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ اصلی سوال، چهار جواب دارد.

۷. گزینهٔ «۲»

اول ساده‌سازی:

$$\frac{\tan^2 x-\sin^2 x}{\tan 2x-2\tan x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{2\sin x}{\cos x}}=\frac{\frac{\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin 2x\cos x-2\sin x\cos 2x}{\cos 2x\cos x}}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos x}}{\frac{2\sin x\cos^2 x-2\sin x\cos 2x}{\cos 2x}}=\frac{\sin^4 x\cos 2x}{2\sin x\cos x(\cos^2 x-\cos 2x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3 x\cos 2x}{2\cos x(\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x)}=\frac{\sin^3 x\cos 2x}{2\cos x\sin^2 x}=\frac{\sin x\cos 2x}{2\cos x}$$

حالا صورت و مخرج را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x\cos 2x}{2\cos^2 x}=\frac{\sin 2x\cos 2x}{4\cos^2 x}=\frac{\sin 4x}{8\cos^2 x}$$

نوبت عددگذاری است: $x=\frac{\pi}{24}$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{8\cos^2\frac{\pi}{24}}=\frac{\frac{1}{2}}{8\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}\right)}=\frac{1}{8(1+\cos\frac{\pi}{12})}=\frac{1}{8\left(1+\sqrt{\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8\left(1+\sqrt{\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)}\right)}=\frac{1}{8+8\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}=\frac{1}{8+4\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

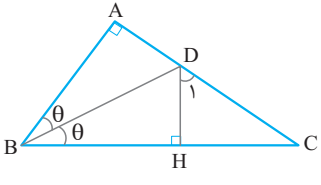
حالا باید گویا کنیم:

$$\frac{8-4\sqrt{2+\sqrt{3}}}{64-16(2+\sqrt{3})}=\frac{4(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})}{16(4-2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{8-4\sqrt{3}}$$

۸. گزینهٔ «۱»

فرض کنید $\frac{\hat{B}}{2}=\theta$ باشد:



به وضوح دو مثلث BAD و BDH هم‌نهشت هستند. لذا $DH=AD$ و $BH=AB$. طبق فرض مسئله $AB+AD=BC$. لذا باید:

$$DH+BH=BC\Rightarrow DH=BC-BH=HC$$

پس $DH=HC$. این یعنی $\hat{D}_1=\hat{C}=45^\circ$ و بنابراین $\hat{B}=45^\circ$.

از طرفی:

$$AC = BC\sin\hat{B} = BC\sin ۴۵^\circ = \frac{۶\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$$

همین سؤال را اگر می‌خواستیم با کمک مثلثات و اتحادهای مثلثاتی حل کنیم، بسیار سخت و طولانی می‌شد. به همین خاطر این سؤال را عمداً در این فصل آوردیم تا به اهمیت و کاربرد هندسه در مسائل پی ببرید.

۹. گزینهٔ «۳»

در ابتدا دقت می‌کنیم که $۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$. بنابراین $\cos^۲ x = \frac{۱}{۱+\tan^۲ x}$

و البته $\sin^۲ x = ۱-\cos^۲ x = \frac{\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$. بنابراین:

$$\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x = \frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$$

حالا در عبارت $\frac{\tan x}{\cos ۲x}$ به جای $\cos ۲x$ مقدار بالا را قرار می‌دهیم:

$$\frac{\tan x}{\cos ۲x} = \frac{\tan x}{\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}} = \frac{\tan x(۱+\tan^۲ x)}{(۱-\tan^۲ x)}$$

چون قصد ســـاده‌کردن داریم، با جمع و منها، عبارتی مانند $۱-\tan^۲ x$ را در صورت ایجاد می‌کنیم:

$$\frac{\tan x(۱+\tan^۲ x)}{۱-\tan^۲ x} = \frac{-\tan x(۱-\tan^۲ x-۲)}{۱-\tan^۲ x}$$

$$= \frac{۲\tan x - \tan x(۱-\tan^۲ x)}{۱-\tan^۲ x} = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} - \tan x$$

حالا عبارت $\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$ را هم ساده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} = \tan ۲x$$

خیلی جالب شد:

$$\frac{\tan x}{\cos ۲x} = \tan ۲x - \tan x$$

این اتحاد کلید حل این مسئله است. دقت کنید که طبق این رابطه داریم:

$$\frac{\tan ۲x}{\cos ۴x} = \tan ۴x - \tan ۲x \,,\ \frac{\tan ۴x}{\cos ۸x} = \tan ۸x - \tan ۴x$$ و

$$\frac{\tan 8x}{\cos 16x} = \tan 16x - \tan 8x$$

با قرار دادن در صورت سؤال داریم:

$$\frac{\tan x}{\cos 2x} + \frac{\tan 2x}{\cos 4x} + \frac{\tan 4x}{\cos 8x} + \frac{\tan 8x}{\cos 16x} = (\tan 2x - \tan x)$$
$$+(\tan 4x - \tan 2x) + (\tan 8x - \tan 4x) + (\tan 16x - \tan 8x)$$
$$= \tan 16x - \tan x$$

با قرار دادن $x = \frac{2\pi}{15}$ داریم:

$$\tan(\frac{32\pi}{15}) - \tan(\frac{2\pi}{15}) = \tan(2\pi + \frac{2\pi}{15}) - \tan(\frac{2\pi}{15})$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{2\pi}{15}) - \tan(\frac{2\pi}{15}) = 0$$

این همه جان کندیم و آخرش رسیدیم به صفر!

۱۰. گزینهٔ «۱»

دقت می‌کنیم که $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. بنابرایـــن می‌توانیم $f(x)$ را طوری بازنویسی کنیم که فقط شامل $\sin x$ باشد. نصف مشکل حل شد:

$$f(x) = 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}}$$

فرض کنید $2^{\sin^2 x} = t$. از آنجا که $0 \le \sin^2 x \le 1$ است. بنابراین $2^0 \le t \le 2^1$ یعنی $1 \le t \le 2$ و از طرفی داریم:

$$f(x) = 2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = t + \frac{2}{t} = (\sqrt{t} - \sqrt{\frac{2}{t}})^2 + 2\sqrt{2}$$

حـــالا دقت کنید که $(\sqrt{t} - \sqrt{\frac{2}{t}})^2 \ge 0$ اســـت. پس $f(x) \ge 0 + 2\sqrt{2}$ یعنی $f(x) \ge 2\sqrt{2}$.

برای اطمینان باید چک کنیم که $f(x) = 2\sqrt{2}$ جواب دارد. این یعنی:

$$(\sqrt{t} - \sqrt{\frac{2}{t}})^2 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{t} - \sqrt{\frac{2}{t}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{t} = \sqrt{\frac{2}{t}} \Rightarrow T = \sqrt{t}$$

که با توجه به این که $1 \le t \le 2$، قابل قبول است. در حقیقت $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$ است.

نیتروتست فصل ۶

۱. گزینهٔ «۳»

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک داریم:

$$[x]^2-3[x]+2\le 0 \Rightarrow ([x]-2)([x]-1)\le 0$$
$$\Rightarrow 1\le [x]\le 2 \Rightarrow 1\le x<3$$

۲. گزینهٔ «۴»

طبق قوانین ویت داریم:

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=5\\ \tan\alpha\tan\beta=1\end{cases}$$

چون α و β حاده هستند، پس از رابطهٔ $\tan\alpha\tan\beta=1$ نتیجه می‌گیریم که $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ بنابراین:

$$[a\sin^2\alpha]+[a\sin^2\beta]=[a\sin^2\alpha]+[a\cos^2\alpha]$$

حالا $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ را حساب می‌کنیم. دقت کنید که $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ جواب‌های معادلهٔ $x^2-5x+1=0$ هستند که به کمک روش دلتا، داریم:

$$\tan\alpha=\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \cot\alpha=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

یا

$$\tan\alpha=\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \cot\alpha=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

ابتدا حالت اول را بررسی و حل می‌کنیم.

حالت اول:

$$\cot\alpha=\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \tan\alpha=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

در این حالت داریم:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\overset{*}{=}\frac{1}{5\tan\alpha}$$

(*: در اینجا از این‌که $\tan\alpha$ جواب معادلهٔ $x^2-5x+1=0$ است، استفادهٔ زیرکانه‌ای کردیم. طبق این معادله $x^2+1=5x$، پس $\tan^2\alpha+1=5\tan\alpha$.)

راه حل را ادامه می‌دهیم:

$$\cos^{۲}\alpha=\frac{۱}{۵\tan\alpha}=\frac{۲}{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}$$

$$\sin^{۲}\alpha=\frac{۱}{۱+\cot^{۲}\alpha}=\frac{۱}{۵\cot\alpha}=\frac{۲}{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}$$

پس مسئله به معادلهٔ زیر می‌رسد:

$$[a\sin^{۲}\alpha]+[a\cos^{۲}\alpha]=۲\Rightarrow[\frac{۲a}{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}]+[\frac{۲a}{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}]=۲$$

حالا دقت کنید که اگر $a<۰$ باشد، هر دو عبارت $[\frac{۲a}{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}]$ و $[\frac{۲a}{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}]$ منفی هستند و حاصل جمع‌شان دیگر نمی‌تواند ۲+ شود. $a=۰$ هم که تعطیل است. لذا فهمیدیم که a، در صورت وجود، عددی مثبت است. حالا اگر a مثبت باشد، هر دو براکت اعدادی حسابی هستند و اگر قرار است جمع آن ۲ شود فقط دو حالت داریم:

$$\left[\frac{۲a}{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}\right]=\left[\frac{۲a}{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}\right]=۱$$

یا

$$\left[\frac{۲a}{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}\right]=۲,\left[\frac{۲a}{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}\right]=۰$$

در حالت اول داریم:

$$\begin{cases}۱\le\frac{۲a}{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}<۲\Rightarrow\frac{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}{۲}\le a<۲۵-۵\sqrt{۲۱}\\ \text{و}\\ ۱\le\frac{۲a}{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}<۲\Rightarrow\frac{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}{۲}\le a<۲۵+۵\sqrt{۲۱}\end{cases}$$

اشتراک این دو بازه تهی است. (زیرا $\frac{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}{۲}>۲۵-۵\sqrt{۲۱}$ است.)
بنابراین حالت دیگر رخ داده است. در حالت دوم داریم:

$$[\frac{۲a}{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}]=۲,[\frac{۲a}{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}]=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲\le\frac{۲a}{۲۵-۵\sqrt{۲۱}}<۳\\ \text{و}\\ ۰\le\frac{۲a}{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲۵-۵\sqrt{۲۱}\le a<\frac{۳(۲۵-۵\sqrt{۲۱})}{۲}\\ \text{و}\\ ۰\le a<\frac{۲۵+۵\sqrt{۲۱}}{۲}\end{cases}$$

از اشتراک این دو بازه داریم:

$$۲۵-۵\sqrt{۲۱} \le a < \frac{۳(۲۵-۵\sqrt{۲۱})}{۲}$$

تازه یک حالت را رفتیم، حالت بعد این است که $\tan\alpha = \frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}$ و $\cot\alpha = \frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}$. خوشبختانه این حالت نیز به همین معادلهٔ قبلی می‌رسد و نیازی به بررسی و حل مجدد ندارد. پس:

$$a \in [۲۵-۵\sqrt{۲۱}, \frac{۳(۲۵-۵\sqrt{۲۱})}{۲}) \Rightarrow a \in [۲۵-۵\sqrt{۲۱}, \frac{۷۵-۱۵\sqrt{۲۱}}{۲})$$

۳. گزینهٔ «۴»

از این‌که سمت چپ معادلهٔ $[x[x]] = ۳x$ عددی صحیح است، می‌فهمیم که سمت راست هم باید صحیح باشد و به عبارتی $۳x \in \mathbb{Z}$. فرض کنید $۳x = n$. در این‌صورت داریم:

$$x = \frac{n}{۳} ; n \in \mathbb{Z}$$

حالا می‌دانیم که هر عدد صحیح n یا به صورت $۳k$ است یا $۳k+۱$ یا $۳k+۲$.

بنابراین $\frac{۳k+۲}{۳}$ یا $\frac{۳k+۱}{۳}$ یا $x = \frac{n}{۳} = \frac{۳k}{۳}$ اگر $x = \frac{۳k}{۳} = k$ باشد، داریم:

$$[k[k]] = ۳k \Rightarrow k^۲ = ۳k \Rightarrow k = ۰ \text{ یا } ۳ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } ۳$$

اگر $x = k + \frac{۱}{۳}$ باشد، داریم:

$$[(k+\frac{۱}{۳})[k+\frac{۱}{۳}]] = ۳k+۱ \Rightarrow [(k+\frac{۱}{۳})k] = ۳k+۱$$

$$\Rightarrow [k^۲ + \frac{k}{۳}] = ۳k+۱ \xrightarrow{k^۲ \in \mathbb{Z}} k^۲ + [\frac{k}{۳}] = ۳k+۱$$

حالا توجه می‌کنیم که سمت چپ معادلهٔ $[x[x]] = ۳x$ نامنفی است، زیرا x و $[x]$ هم علامتند. پس $۳x \ge ۰$ و لذا $x \ge ۰$ است. این یعنی $k \ge -\frac{۱}{۳}$ است که چون $k \in \mathbb{Z}$ پس $k \ge ۰$. از طرفی:

$$k^۲ + [\frac{k}{۳}] = ۳k+۱ \Rightarrow [\frac{k}{۳}] = ۳k+۱-k^۲ \xrightarrow{\frac{k}{۳} \ge ۰} ۳k+۱-k^۲ \ge ۰$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = ۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۳$$

با امتحان کردن این اعداد داریم:

$k=0 \Rightarrow 0=1$ ✗

$k=1 \Rightarrow 1=4$ ✗

$k=2 \Rightarrow 4=7$ ✗

$k=3 \Rightarrow 10=10$ ✓

پس در این حالت، $x=\frac{10}{3}$ به‌دست می‌آید.

حالت آخر یعنی $x=k+\frac{2}{3}$ را بررسی می‌کنیم. مجدداً به علت مثبت بودن سمت چپ معادلهٔ $[x[x]]=3x$، باید $3x\geq 0$ باشد. لذا $k+\frac{2}{3}\geq 0$ که یعنی $k\geq -\frac{2}{3}$. با توجه به صحیح بودن k، می‌فهمیم که $k\geq 0$ است و بازنویسی معادله چنین است:

$$[(k+\frac{2}{3})[k+\frac{2}{3}]]=3k+2 \Rightarrow [(k+\frac{2}{3})k]=3k+2$$

$$\Rightarrow k^2+[\frac{2}{3}k]=3k+2 \Rightarrow [\frac{2}{3}k]=3k+2-k^2$$

دوباره چون $[\frac{2}{3}k]\geq 0$ است باید $3k+2-k^2\geq 0$ باشد:

$$3k+2-k^2\geq 0 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3$$

با امتحان کردن این مقادیر داریم:

$k=0 \Rightarrow 0=2$ ✗

$k=1 \Rightarrow 1=5$ ✗

$k=2 \Rightarrow 5=8$ ✗

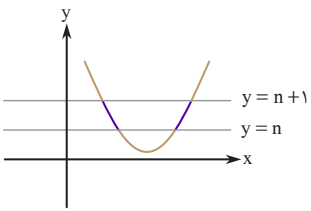
$k=3 \Rightarrow 11=11$ ✓

لذا فقط حالت $k=3$ جواب است. یعنی $x=\frac{11}{3}$.

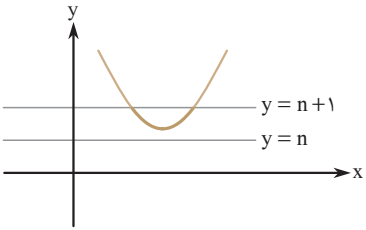
جواب‌های این معادله $x=0, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}$ هستند.

۴. گزینهٔ «۴»

$y=2x^2+bx+\frac{11}{3}$ یک سهمی است. این سهمی نسبت به خط $x=-\frac{b}{4}$ متقارن است. پس جواب معادلهٔ $[2x^2+bx+\frac{11}{3}]=n$ معمولاً باید اجتماعی از دو بازه باشد:



تنها حالتی که جواب به‌صورت یک بازه است وقتی است که n مساوی با جزء صحیح رأس سهمی باشد.



بنابراین در این مسئله، [عرض رأس سهمی] = ۳. یعنی:

$$۳=[\frac{-\Delta}{۴a}]=[\frac{-(b^۲-\frac{۸۸}{۳۳})}{۸}]=[\frac{\frac{۸۸}{۳۳}-b^۲}{۸}]\Rightarrow[\frac{\frac{۸۸}{۳}-b^۲}{۸}]=۳$$

$$\Rightarrow ۳\le\frac{\frac{۸۸}{۳}-b^۲}{۸}<۴\Rightarrow ۲۴\le\frac{۸۸}{۳}-b^۲<۳۲\Rightarrow\frac{-۱۶}{۳}\le -b^۲<\frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow -\frac{۸}{۳}<b^۲\le\frac{۱۶}{۳}\xrightarrow{b^۲\ge ۰}b^۲\le\frac{۱۶}{۳}\Rightarrow\frac{-۴\sqrt{۳}}{۳}\le b\le\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۵. گزینهٔ «۴»

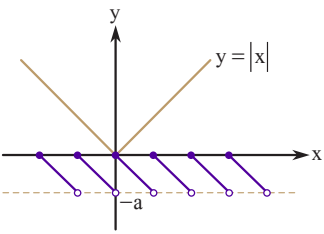
معنی صورت سؤال این است که معادلهٔ $ax+|x|=a[x]$ دارای چهار جواب است. این معادله را می‌توانیم به‌صورت $|x|=a[x]-ax$ بنویسیم.

$|x|=a([x]-x)$

دو حالت داریم. این‌که $a>۰$ یا $a<۰$ باشد:

حالت اول: $a>۰$ باشد:

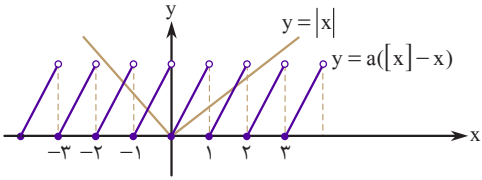
در این حالت نمودار $y=a([x]-x)$ و $y=|x|$ به‌صورت زیر است:



بدیهی است که در این حالت فقط یک نقطهٔ تلاقی وجود دارد $(x=۰)$ پس این حالت منتفی است. برویم حالت دوم.

حالت دوم: $a < ۰$ باشد:

در این‌صورت نمودارها به‌صورت زیر هستند:



می‌خواهیم چهار برخورد داشـــته باشـــیم. یک برخورد همین اول کار در مبدأ داریم. از نمودار پیدا است که برخوردهای دو نمودار در ربع دوم، یکی بیشتر از برخوردهای نمودارها در ربع اول است. پس اگر می‌خواهیم چهار برخورد داشته باشـــیم باید یکی در ربع اول، دو تا در ربع دوم و یکی هم که در مبدأ، داشـــته باشیم. این یعنی شاخهٔ سمت راست نمودار نباید پاره‌خط سوم را قطع کند. این یعنی $y = x$ باید بالاتر یا روی نقطهٔ $(۳ , -a)$ قرار بگیرد. پس: $a \geq -۳$

در سمت چپ باید $y = -x$ بالاتر یا روی $(-۲ , -a)$ قرار بگیرد. یعنی:

$$-a \leq ۲ \Rightarrow a \geq -۲$$

از طرفی نمودار سمت راست باید پاره‌خط دوم را قطع کند. یعنی $y = x$ باید پایین‌تر از نقطهٔ $(۲ , -a)$ باشد. به عبارتی:

$$-a > ۲ \Rightarrow a < -۲$$

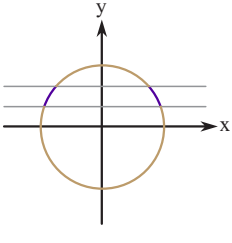
چـون دو محـدودهٔ به‌دسـت آمـده، اشـتراک ندارنـد، پس مقـداری برای a وجـود ندارد.

۶. گزینهٔ «۱»

الف) این معادله را ســـاده می‌کنیم و جواب آن را روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهیم:

$$[۱۰\sin x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq ۱۰\sin x < ۳$$

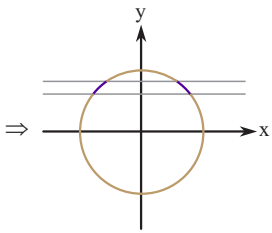
$$\Rightarrow \frac{۲}{۱۰} \leq \sin x < \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow$$



یعنی جواب دو کمان از دایره است که بین خط‌های $y = \frac{۲}{۱۰}$ و $y = \frac{۳}{۱۰}$ قرار دارند.

ب) در مورد این معادله داریم:

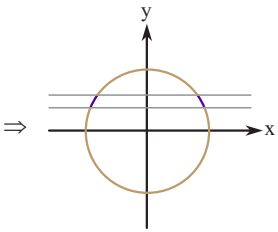
$$[۱۰\sin x]=۳ \Rightarrow ۳\le ۱۰\sin x<۴ \Rightarrow \frac{۳}{۱۰}\le \sin x<\frac{۴}{۱۰}$$



یعنی جواب دو کمان بین خط‌های $y=\frac{۳}{۱۰}$ و $y=\frac{۴}{۱۰}$ است. دقت کنید که این دو کمان از مرکز دایره دورتر هستند و نسبت به دو کمان قبلی کوچک‌تر هستند. تا اینجا حالت الف محیط بیشتری را گرفته است.

پ) مثل دوتای قبلی:

$$[۱۰\sin x]=۴ \Rightarrow ۴\le ۱۰\sin x<۵ \Rightarrow \frac{۴}{۱۰}\le \sin x<\frac{۵}{۱۰}$$



این دو کمان از حالت ب هم کوچک‌ترند. پس الف برنده است.

۷. گزینهٔ «۲»

نمودار تابع گلدانی $y=۲|x-۲|+۲|x+۱|$ و تابع خطی $y=ax+۶$ را ابتدا ۶ واحد به پایین انتقال می‌دهیم. با این‌کار، مساحت ناحیهٔ محصور بین دو نمودار هیچ تغییری نمی‌کند ولی در عوض محاسبه‌های ما ساده می‌شوند.

حالا به نمودار $y=ax$ دقت می‌کنیم. این خط محور طولی را در $(۰,۰)$ قطع می‌کند. دو حالت در نظر می‌گیریم:

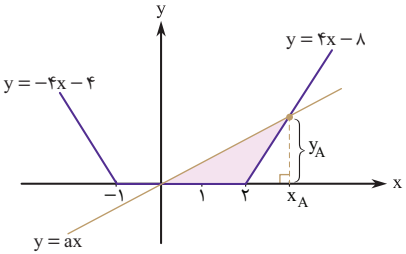
حالت اول: $a>۰$: در این حالت، مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times y_A=y_A$$

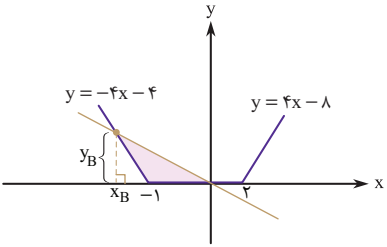
از طرفی: $ax_A=۴x_A-۸ \Rightarrow x_A=\frac{۸}{۴-a} \Rightarrow y_A=a\times\frac{۸}{۴-a}=\frac{۸a}{۴-a}$

بنابراین: $S=\frac{۸a}{۴-a}=۸ \Rightarrow ۸a=۳۲-۸a \Rightarrow a=۲$

که جوابی قابل قبول است.



حالت دوم: $a < ۰$:



در این حالت:

$$S = \frac{۱}{۲} \times (۱) \times y_B = \frac{y_B}{۲}$$

اما:

$$-۴x_B - ۴ = ax_B \Rightarrow x_B = \frac{-۴}{a+۴}$$

$$\Rightarrow y_B = ax_B = a(\frac{-۴}{a+۴}) = \frac{-۴a}{a+۴}$$

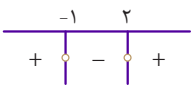
$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times \frac{-۴a}{a+۴} = \frac{-۲a}{a+۴} = ۸ \Rightarrow a = \frac{-۱۶}{۵}$$

۸. گزینهٔ «۲»

همهٔ ما می‌دانیم که $x^۲ - ۱ < [x^۲]$، بنابراین:

$$x^۲ - ۱ < [x^۲] < x + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۱ < x + ۱ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ < ۰$$

$$(x-۲)(x+۱) < ۰ \Rightarrow$$



$$\Rightarrow -۱ < x < ۲$$

کار راحت شد. الان می‌توانیم بازه‌بندی کنیم:

$$۱)\ -۱ < x < ۱ \Rightarrow [x^۲] = ۰ \Rightarrow [x^۲] < x + ۱ \Rightarrow ۰ < x + ۱ \Rightarrow -۱ < x$$

بنابراین همهٔ بازهٔ $(-۱, ۱)$ بخشی از جواب است.

$$۲)\ ۱ \le x < \sqrt{۲} \Rightarrow [x^۲] = ۱ \Rightarrow ۱ < x + ۱ \Rightarrow ۰ < x$$

این هم یعنی $[۱, \sqrt{۲})$ بخش دیگری از جواب است.

۳) $\sqrt{۲} \le x < \sqrt{۳} \Rightarrow [x^۲] = ۲ \Rightarrow ۲ < x + ۱ \Rightarrow ۱ < x$

و این هم یعنی $(\sqrt{۲}, \sqrt{۳})$ بخشی از جواب است.

۴) $\sqrt{۳} \le x < ۲ \Rightarrow [x^۲] = ۳ \Rightarrow ۳ < x + ۱ \Rightarrow ۲ < x$

اما این یعنی برای $\sqrt{۳} \le x < ۲$ به نتیجهٔ $x > ۲$ رسیدیم که تناقض است.

پس در این حالت به هیچ جوابی نرسیدیم روی هم رفته داریم:

$$(-۱, ۱) \cup [۱, \sqrt{۲}) \cup [\sqrt{۲}, \sqrt{۳}) = (-۱, \sqrt{۳})$$

۹. گزینهٔ «۲»

$[۲x], [x]$ اعدادی صحیح هستند. پس اگر $[x][۲x] = ۲۱$ باشد، نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آید.

حالت اول: $[x] = ۳, [۲x] = ۷$، یعنی:

$$[x] = ۳, [۲x] = ۷ \Rightarrow ۳ \le x < ۴, ۷ \le ۲x < ۸$$

$$\Rightarrow ۳ \le x < ۴, ۳/۵ \le x < ۴ \xrightarrow{\cap} x \in [۳/۵, ۴)$$

حالت دوم: $[x] = ۱, [۲x] = ۲۱$. در این حالت:

$$۲۱ \le ۲x < ۲۲, ۱ \le x < ۲ \Rightarrow ۱۰/۵ \le x < ۱۱, ۱ \le x < ۲ \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

حالت سوم: $[x] = -۳, [۲x] = -۷$ که یعنی:

$$-۷ \le ۲x < -۶, -۳ \le x < -۲ \Rightarrow -۳/۵ \le x < -۳$$ و

$$-۳ \le x < -۲ \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

حالت چهارم: $[x] = -۱, [۲x] = -۲۱$ است که باز هم به اشتراک تهی می‌رسد. لذا بازهٔ جواب فقط $[۳/۵, ۴)$ است. یعنی:

$$۲a + b = ۷ + ۴ = ۱۱$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

$$۲^x + [۲^x] = \frac{۵}{۲} \xrightarrow[\text{براکت قرار می‌دهیم}]{\text{دو طرف را در}} ۲[۲^x] = ۲ \Rightarrow [۲^x] = ۱$$

$$۳^y + [۳^y] = \frac{۷}{۳} \xrightarrow[\text{براکت قرار می‌دهیم}]{\text{دو طرف را در}} ۲[۳^y] = ۲ \Rightarrow [۳^y] = ۱$$

بنابراین با جایگذاری در تساوی‌های داده شده، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۲^x + ۱ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲^x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲^{x+۱} = ۳ \\ ۳^y + ۱ = \frac{۷}{۳} \Rightarrow ۳^y = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳^{y+۱} = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۳^{y+۱} = (۲^{x+۱})^{y+۱} = ۴$$

$$\Rightarrow (y+۱)(x+۱) = ۲ \Rightarrow xy + x + y + ۱ = ۲ \Rightarrow xy + x + y = ۱$$

نیتروتست فصل ۷

۱. گزینهٔ «۳»

طبق اتحاد جملهٔ مشترک داریم:

$$۹^x-(۲^{x+۱}+\frac{۸}{۲^x})۳^x+۱۶=(۳^x-۲^{x+۱})(۳^x-\frac{۸}{۲^x})=۰$$

$$\Rightarrow ۳^x=۲^{x+۱} \text{ یا } ۳^x=\frac{۸}{۲^x}\Rightarrow ۳^x=۲^x\times ۲ \text{ یا } ۶^x=۸$$

$$(\frac{۳}{۲})^x=۲ \text{ یا } ۶^x=۸\Rightarrow x=\log_{\frac{۳}{۲}}۲ \text{ یا } x=\log_۶ ۸$$

بنابراین این معادله دو جواب دارد.

۲. گزینهٔ «۱»

طبق نکتهٔ دامنهٔ تابع لگاریتمی، باید داشته باشیم:

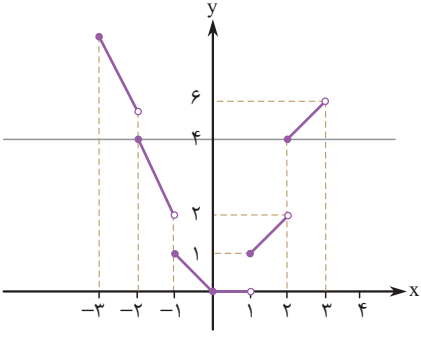
۱) $x[x]-۴>۰$

۲) $\frac{x-۱}{۲x+۱}>۰$

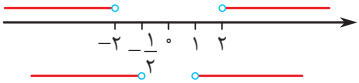
۳) $\frac{x-۱}{۲x+۱}\neq ۱$

اول $\frac{x-۱}{۲x+۱}\neq ۱$ را حل می‌کنیم و فوراً به $x\neq -۲$ می‌رسیم. بعد نامعادلهٔ $\frac{x-۱}{۲x+۱}>۰$ را حل می‌کنیم که ساده است و جواب آن $(-\infty,-\frac{۱}{۲})\cup(۱,+\infty)$ است.

حالا $x[x]-۴>۰$ را حل می‌کنیم، که البته با رسم به جواب می‌رسیم:



بـــه وضوح جواب این نامعادله $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$ اســـت. با اشـــتراک گرفتن داریم:

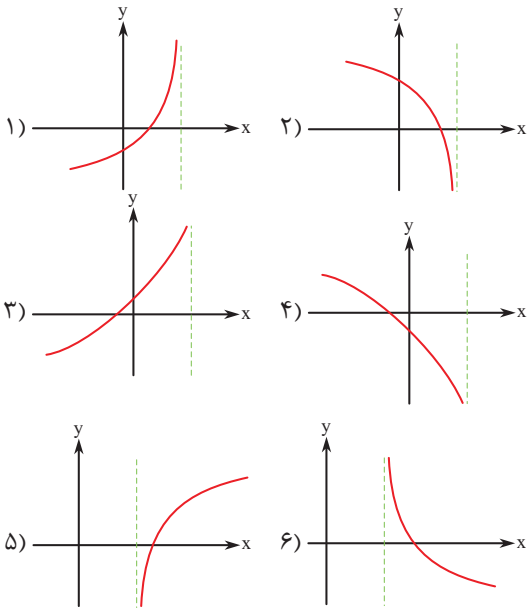


$$D_f=(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)=\{x\,|\,|x|>۲\}$$

۳. گزینهٔ «۱»

بـــرای این‌که نمودار $y=\log_{(a+۲)}(۲x+a)$ از ناحیـــهٔ دوم عبور نکند، دو حالت داریم:

حالت اول: در این حالت، مجانب قائم نمودار در سمت راست محور y ها است. این حالت، به یکی از ۶ شکل زیر است.



همان‌طور که می‌بینید شکل‌های (۱) و (۵) و (۶) از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کنند. در شکل (۱) ریشه، قبل از مجانب قائم است و تابع صعودی است.

$$\text{مجانب قائم}: ۲x+a=۰\Rightarrow x=-\frac{a}{۲}\geq ۰\Rightarrow a\leq ۰$$

$$\text{ریشه}: ۲x+a=۱\Rightarrow x=\frac{۱-a}{۲}\xrightarrow{\text{مجانب}<\text{ریشه}}\frac{۱-a}{۲}<\frac{-a}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}<۰$$

از آن‌جا که $\frac{۱}{۲}<۰$ غیرممکن است، پس در واقع اصلاً امکان ندارد که نمودار

تابع ما به‌صورت شکل (۱) در بیاید.

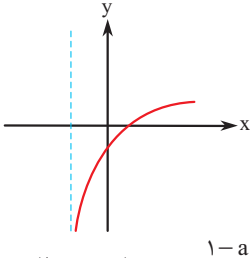
در شـــکل (۵) ریشـــه، بعد از مجانب نمودار است. یعنی $\frac{1-a}{2} > \frac{-a}{2}$ که به نتیجهٔ درست $\frac{1}{2} > 0$ می‌رسیم. پس تا اینجای کار، وجود این نمودار منطقی اســـت. از طرفی نمودار نشـــان می‌دهد که تابع باید صعودی باشد که یعنی $a+2>1$، یعنی $a \le -1$. فراموش نکنید که مجانب قائم، سمت راست نمودار قرار دارد و این یعنی $a \le 0$ است. کلاً به این نتیجه می‌رسیم که $-1 < a \le 0$.

در شکل (۶) همان شرایط شکل (۵) را داریم فقط نمودار تابع نزولی است.

$$a \le 0 , 0 < a+2 < 1 \Rightarrow -2 < a < -1$$

پس در این حالت $a \in (-2,-1)$. در تمام این بررســـی‌ها معلوم شـــد که اگر $a \in (-1,0) \cup (-2,-1)$ باشد، نمودار $y = \log_{(a+2)}(2x+a)$ از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند. اما دقت کنید که هنوز حالتی که مجانب قائم در ســـمت چپ محور y ها است را بررسی نکردیم.

حالت دوم: مجانب قائم نمودار، $x = -\frac{a}{2}$ در ســـمت چپ محور y ها باشد. یعنی $-\frac{a}{2} < 0$ یا همان $a > 0$. در این حالت لازم اســـت که هم تابع صعودی باشـــد و هم محور x ها را در نقطه‌ای به طول مثبت یا صفر قطع کند. برای صعودی بودن $a+2>1$، یعنی $a > -1$ کافی است. برای تقاطع داریم:



$$\log_{(a+2)}(2x+a) = 0 \Rightarrow 2x+a = 1 \Rightarrow x = \frac{1-a}{2} \ge 0 \Rightarrow a \le 1$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a > 0 \\ a > -1 \\ a \le 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 0 < a \le 1$$

که در نهایت:

$$a \in (-2,1] - \{-1\}$$

۴. گزینهٔ «۳»

تجزیه می‌کنیم:

$$(6^x - 3^x \times 3 - 5 \times 2^x + 15)(5^x - a) = 0$$

$$\Rightarrow ((۶^x - ۵\times ۲^x) - (۳^x \times ۳ - ۱۵))(۵^x - a) = ۰$$

$$\Rightarrow (۲^x(۳^x - ۵) - ۳(۳^x - ۵))(۵^x - a) = ۰$$

$$\Rightarrow (۳^x - ۵)(۲^x - ۳)(۵^x - a) = ۰$$

$$\Rightarrow ۳^x = ۵ \text{ یا } ۲^x = ۳ \text{ یا } ۵^x = a \Rightarrow x = \log_۳ ۵ , \log_۲ ۳ , \log_۵ a$$

ضرب این اعداد برابر ۳ شده است. یعنی:

$$\log_۳ ۵ \times \log_۲ ۳ \times \log_۵ a = ۳ \Rightarrow \log_۲ ۵ \times \log_۵ a = ۳$$

$$\Rightarrow \log_۲ a = ۳ \Rightarrow a = ۸$$

۵. گزینهٔ «۳»

با توجه به نمودار داده شده می‌فهمیم که:

$$|۲^b - a| = ۰ \Rightarrow ۲^b = a$$

از طرفی می‌دانیم مجانب افقی این تابع همان $|a|$ است. لذا $f(c) = |a|$ که یعنی:

$$|۲^c - a| = |a| \Rightarrow \begin{cases} ۲^c - a = a \\ \text{یا} \\ ۲^c - a = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲^c = ۲a \\ \text{یا} \\ ۲^c = ۰ \ \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲^c = ۲a \Rightarrow ۲^{c-۱} = a$$

از اینجا می‌فهمیم، با توجه به این‌که $۲^b = a$ است، لذا $c - ۱ = b$. سؤال گفته $bc = \frac{۳}{۴}$، پس:

$$\begin{cases} b = c - ۱ \\ bc = \frac{۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow c(c-۱) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow c^۲ - c - \frac{۳}{۴} = ۰ \Rightarrow (c - \frac{۱}{۲})^۲ - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow c - \frac{۱}{۲} = \pm ۱ \Rightarrow c = \frac{۳}{۲} \text{ یا } -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} c = \frac{۳}{۲}$$

و در آخر:

$$a = ۲^{c-۱} = ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}$$

۶. گزینهٔ «۴»

قرار دهید $x = ۳^a$. حالا داریم:

$$\log_{۳x} ۲x + \log_{۴x} ۹x = ۲ \Rightarrow \log_{۳^{a+۱}} ۲\times ۳^a + \log_{۴\times ۳^a} ۳^{a+۲} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a+۱}(a + \log_۳ ۲) + \frac{(a+۲)\log_۳ ۳}{۲\log_۳ ۲ + a} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{a + \log_۳ ۲}{a+۱} + \frac{a+۲}{a + ۲\log_۳ ۲} = ۲$$

$$\Rightarrow (a+\log_3 2)(a+2\log_3 2)+(a+2)(a+1)=2(a+1)(a+2\log_3 2)$$

$$\Rightarrow a^2+(3\log_3 2)a+2(\log_3 2)^2+a^2+3a+2$$

$$=2(a^2+(2\log_3 2+1)a+2\log_3 2)$$

$$\Rightarrow (3\log_3 2+3)a+2(\log_3 2)^2+2=(4\log_3 2+2)a+4\log_3 2$$

$$\Rightarrow a(\log_3 2-1)=2((\log_3 2)^2-2\log_3 2+1)$$

$$\Rightarrow a=\frac{2((\log_3 2)-1)^2}{(\log_3 2-1)}=2(\log_3 2-1)=2\log_3\frac{2}{3}$$

بنابراین:

$$x=3^a=3^{2\times\log_3\frac{2}{3}}=(\frac{2}{3})^{2\log_3 3}=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

۷. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که داریم:

$$\log_2(3^{\log_2 3})+\log_3(2^{\log_3 2})=\log_2 3\times\log_2 3+\log_3 2\times\log_3 2$$

$$\Rightarrow (\log_2 3)^2+(\log_3 2)^2=(\log_2 3+\log_3 2)^2-2\log_2 3\times\log_3 2$$

$$=(\log_2 3+\log_3 2)^2-2$$

از طرفی طبق فرض مسئله داریم:

$$\log_2 6+\log_3 6=a$$

$$\Rightarrow \log_2 3\times 2+\log_3 2\times 3=a\Rightarrow 1+\log_2 3+1+\log_3 2=a$$

$$\Rightarrow \log_2 3+\log_3 2=a-2$$

بنابراین جواب نهایی می‌شود:

$$(a-2)^2-2=a^2-4a+2$$

۸. گزینهٔ «۲»

در ابتدا داریم:

$$\log_{(x+1)}(2x-1)-\log_{(x+1)}(4x+1)=\log_{(x+1)}(\frac{2x-1}{4x+1})$$

بنابراین باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\log_{(x+1)}(\frac{2x-1}{4x+1})=\log_{(\frac{2x-1}{4x+1})}(x+1)$$

در اینجا با تساوی $\log_b a=\log_a b$ مواجه هستیم. از این تساوی نتیجه می‌گیریم که:

$$\log_b a=\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\Rightarrow (\log_b a)^2=1\Rightarrow \log_b a=1 \text{ یا } -1$$

$$\Rightarrow a=b \text{ یا } a=b^{-1}\Rightarrow a=b \text{ یا } ab=1$$

که در این مسئله می‌شود:

$$\frac{2x-1}{4x+1}=x+1$$

یا

$$\frac{(2x-1)(x+1)}{4x+1}=1$$

ابتدا معادلهٔ اول را حل می‌کنیم:

$$\frac{2x-1}{4x+1}=x+1\Rightarrow 2x-1=(4x+1)(x+1)=4x^2+5x+1$$

$$\Rightarrow 4x^2+3x+2=0\Rightarrow \Delta<0$$

خوشبختانه جوابی ندارد. می‌رویم سراغ معادلهٔ دوم:

$$\frac{(2x-1)(x+1)}{4x+1}=1\Rightarrow 2x^2+x-1=4x+1\Rightarrow 2x^2-3x-2=0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(x-2)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\,,\ x=2$$

اما باید این دو مقدار را در معادلهٔ اصلی قرار دهیم و چک کنیم:

$$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(-2)-\log-\log_{\frac{1}{2}}(-1)=\log_2\frac{1}{2}$$

پس $x=-\frac{1}{2}$ غیر قابل قبول است و با محدودیت دامنهٔ لگاریتم جور نیست.

$$x=2\Rightarrow \log_3 3-\log_3 9=\log_{\frac{1}{3}} 3\Rightarrow 1-2=-1$$

لذا $x=2$ قابل قبول است. یعنی تنها جواب این معادله $x=2$ است و بنابراین مجموع ریشه‌های این معادله ۲ است.

۹. گزینهٔ «۲»

ابتدا به خاطر جزء صحیح داریم:

$$[\log_x(2x+1)]=1\Rightarrow 1\le \log_x(2x+1)<2$$

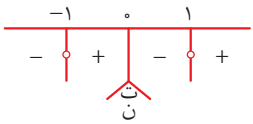
باید به دامنه دقت کنیم. محاسبهٔ دامنه واقعاً راحت است: $x\in(0,+\infty)-\{1\}$.

حالا باید نامعادله را حل کنیم. اول سمت چپ:

$$1\le \log_x(2x+1)\Rightarrow 0\le \log_x(2x+1)-1\Rightarrow 0\le \log_x\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

کلید حل این نامعادله توجه به این نکتهٔ مهم است که همواره $\log_b a$ با $(a-1)(b-1)$ هم‌علامت است. پس اگر می‌خواهیم $\log_x\left(\frac{2x+1}{x}\right)$ نامنفی باشد، کافی است نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\left(\frac{2x+1}{x}-1\right)(x-1)\ge 0\Rightarrow \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x}\right)\ge 0$$

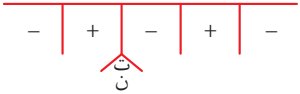
$\Rightarrow$ 

امـــا به خاطـــر دامنه $x \in (0, +\infty) - \{1\}$. تا اینجـــا جواب قابـــل قبول بازهٔ $(1, +\infty)$ است.

حالا برویم نامعادلهٔ سمت راست. روش حل همان است:

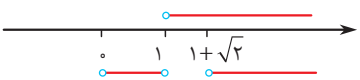
$$\log_x(2x+1) < 2 \Rightarrow \log_x(2x+1) - 2 < 0 \Rightarrow \log_x\left(\frac{2x+1}{x^2}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x+1}{x^2} - 1\right)(x-1) < 0 \Rightarrow \left(\frac{-x^2+2x+1}{x^2}\right)(x-1) < 0$$

$\Rightarrow$ 

$\xrightarrow[x>0]{\text{دامنه}} (0, 1) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$

با اشتراک گرفتن داریم:



در نتیجه داریم:

$(1+\sqrt{2}, +\infty)$

۱۰. گزینهٔ «۲»

توجه کنید که: $x^3 + x^2 - 8x = x(x^2 + x - 8)$

قرار دهید $a = 9 - x - x^2$ و $b = x + 1$. در این‌صورت می‌توانیم مسئله را به این‌صورت بازنویسی کنیم:

$$\log_b a = (b-1)(1-a) \Rightarrow \log_b a + (a-1)(b-1) = 0$$

حالا دقت کنید که $\log_b a$ و $(a-1)(b-1)$ هم‌علامت هستند. تنها حالتی که جمع دو عدد هم‌علامت صفر است، این است که هر دو صفر باشند. در این مسئله می‌شود: $\log_b a = 0 \Rightarrow a = b^0 = 1$

$$\Rightarrow 9 - x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 + x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \text{ یا } \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$$

حـــالا باید جواب‌ها را چک کنیـــم. خیلی راحت معلوم می‌شـــود که جواب $x = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$ در دامنه نیســـت ولی جواب $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ قابل قبول است. لذا این معادله تنها یک جواب حقیقی دارد.

نیتروتست فصل ۸

۱. گزینهٔ «۳»

$f+g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f+g=\{(۱,۶),(۲,a+۵),(۳,۲a+b+۶),(۴,b+۱۰)\}$$

حالا شرط خطی بودن، یعنی ثابت بودن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را عملیاتی می‌کنیم:

$$\frac{a+۵-۶}{۲-۱}=\frac{۲a+b+۶-a-۵}{۳-۲}=\frac{b+۱۰-۲a-b-۶}{۴-۳}$$

$$\Rightarrow a-۱=a+b+۱=۴-۲a$$

از معادلهٔ اول و آخر داریم:

$$a-۱=۴-۲a\Rightarrow a=\frac{۵}{۳}$$

با قرار دادن $a=\frac{۵}{۳}$ داریم:

$$\frac{۵}{۳}+b+۱=۴-\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow b=-۲$$

پس:

$$b-a=-۲-\frac{۵}{۳}=\frac{-۱۱}{۳}$$

۲. گزینهٔ «۳»

ابتدا دقت کنید که:

$$f(۳x+۲)=۲x+b\xrightarrow[x=\frac{t-۲}{۳}]{۳x+۲=t}f(t)=۲(\frac{t-۲}{۳})+b$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۳}(x-۲)+b$$

و برای تابع $g(۸-۲x)$ هم داریم:

$$g(۸-۲x)=۲x+b\xrightarrow[x=\frac{۸-t}{۲}]{۸-۲x=t}g(t)=۲(\frac{۸-t}{۲})+b=۸-t+b$$

$$\Rightarrow g(x)=-x+۸+b$$

حالا کارمان ساده‌تر شد:

$$f(ax+۱)+g(x+۲)=\frac{۲}{۳}(ax+۱-۲)+b+(-(x+۲)+۸+b)$$

$$=\frac{۲}{۳}ax-\frac{۲}{۳}+b-x+۶+b=(\frac{۲}{۳}a-۱)x+\frac{۱۶}{۳}+۲b$$

که طبق فرض مسئله با $3x+b+2$ برابر است:

$$(\frac{2}{3}a-1)x+\frac{16}{3}+2b=3x+b+2 \Rightarrow \begin{cases}\frac{2}{3}a-1=3\\ \frac{16}{3}+2b=b+2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=6\\ b=\frac{-10}{3}\end{cases} \Rightarrow a+3b=6-10=-4$$

۳. گزینهٔ «۲»

می‌دانیم اگر b و a دو عدد معکوس باشند، آن‌گاه $\frac{c}{1+a}+\frac{c}{1+b}=c$ است.

در این مسئله $\log_3 x$ و $\log_x 3$ معکوس هم هستند. البته وجود لگاریتم، خودبه‌خود دامنه را هم مطرح می‌کند: $x\in(0,+\infty)-\{1\}$.

حالا داریم:

$$f(x)=x \Rightarrow \frac{x}{1+\log_3 x}+\frac{x^2-x-1}{1+\log_x 3}=x$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-1}{1+\log_x 3}=x-\frac{x}{1+\log_3 x}=\frac{x}{1+\log_x 3} \Rightarrow x^2-x-1=x$$

$$\Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,\infty)-\{1\}} x=1+\sqrt{2}$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

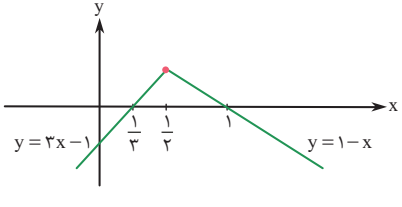
۴. گزینهٔ «۳»

دامنهٔ تابع $\sqrt{[f([x])]}$ از حل‌کردن نامعادلهٔ $[f([x])]\geq 0$ به‌دست می‌آید.

ابتدا از $[f([x])]\geq 0$ داریم $f([x])\geq 0$.

نمودار تابع $f(x)=x-|2x-1|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x-(2x-1)=1-x & ; \quad x\geq\frac{1}{2}\\ x+(2x-1)=3x-1 & ; \quad x<\frac{1}{2}\end{cases}$$



به وضوح پیدا است که جواب $f(x) \geq ۰$ بازهٔ $[\frac{۱}{۳}, ۱]$ است. بنابراین:

$$f([x]) \geq ۰ \Rightarrow [x] \in [\frac{۱}{۳}, ۱] \Rightarrow \frac{۱}{۳} \leq [x] \leq ۱$$

$$\xrightarrow{[x]\in\mathbb{Z}} [x] = ۱ \Rightarrow x \in [۱, ۲)$$

۵. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که $\sqrt{۴-x}$ تابعی اکیداً نزولی است. پس $-\sqrt{۴-x}$ اکیداً صعودی است. با توجه به اکیداً صعودی بودن $\sqrt{x}$ می‌فهمیم که $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{۴-x} + ۲$ تابعی اکیداً صعودی است.

برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $\sqrt{f(x) - f^{-۱}(x)}$ باید نامعادلهٔ $f(x) - f^{-۱}(x) \geq ۰$ را حل کنیم که می‌شود: $f(x) \geq f^{-۱}(x)$

اما در تابع اکیداً صعودی، وقتی بخواهیم معادله یا نامعادلهٔ بین f و $f^{-۱}$ را حل کنیم، می‌توانیم به جای $f^{-۱}(x)$ تابع همانی، یعنی x قرار دهیم. پس: $f(x) \geq x \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{۴-x} + ۲ \geq x$

برای حل این نامعادله، اول باید به دامنهٔ رادیکال‌ها توجه کنیم. خیلی زود حدود x مشخص می‌شود: $۰ \leq x \leq ۴$

دقت کنید که:

$$\sqrt{x} - \sqrt{۴-x} = \frac{x-(۴-x)}{\sqrt{x}+\sqrt{۴-x}} = \frac{۲x-۴}{\sqrt{x}+\sqrt{۴-x}}$$

بنابراین می‌توانیم نامعادلهٔ بالا را چنین بنویسیم:

$$\frac{۲(x-۲)}{\sqrt{x}+\sqrt{۴-x}} + (۲-x) \geq ۰ \Rightarrow (x-۲)(\frac{۲}{\sqrt{x}+\sqrt{۴-x}} - ۱) \geq ۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(\underbrace{\frac{۲-\sqrt{x}-\sqrt{۴-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{۴-x}}}_{\text{همواره مثبت}}) \geq ۰ \Rightarrow (x-۲)(۲-\sqrt{x}-\sqrt{۴-x}) \geq ۰$$

ریشهٔ $x - ۲ = ۰$ که ساده است: $x = ۲$

برای پیدا کردن ریشه $۲ - \sqrt{x} - \sqrt{۴-x} = ۰$ داریم:

$$۲ = \sqrt{x} + \sqrt{۴-x} \Rightarrow ۴ = x + ۴ - x + ۲\sqrt{x(۴-x)}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{x(۴-x)} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } ۴$$

بنابراین جدول تعیین علامت چنین است:

$$(x-۲)(۲-\sqrt{x}-\sqrt{۴-x}) \geq ۰ \Rightarrow$$

	۰		۲		۴	
	۰	+	۰	−	۰	

$$\Rightarrow x \in [۰, ۲] \cup \{۴\}$$

۶. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم اگر $f(x)=\frac{۳x+۲}{x+a}$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(x)=\frac{ax-۲}{-x+۳}$ است و چون $g(x)=\frac{۲x+a}{x+۲}$ است، پس $g^{-۱}(x)=\frac{۲x-a}{-x+۲}$ می‌باشد.

از آنجا که مســـئله فرض کرده است توابع $f(g^{-۱}(x))$ و $g^{-۱}(f(x))$ با هم مســـاوی هســـتند، پس برای هر نوع عددگذاری در دامنه‌شان هم برابرند. به‌علاوه باید دامنهٔ دو تابع هم یکی باشد:

$$D_{f(g^{-۱}(x))}=\{x\neq ۲\,,\,g^{-۱}(x)\neq -a\}=\{x\neq ۲\,,\,x\neq g(-a)\}$$

$$=\mathbb{R}-\{۲\,,\,\frac{a}{a-۲}\}$$

$$D_{g^{-۱}(f(x))}=\{x\neq -a\,,\,f(x)\neq ۲\}=\{x\neq -a\,,\,x\neq f^{-۱}(۲)\}$$

$$=\mathbb{R}-\{-a\,,\,\frac{۲a-۲}{۱}\}$$

از همین جا می‌توان کاندیدهای احتمالی a را پیدا کرد:

$$\{۲\,,\,\frac{a}{a-۲}\}=\{-a\,,\,۲a-۲\}$$

دو حالت داریم.

حالت اول:

$$\begin{cases}۲=-a\\ \frac{a}{a-۲}=۲a-۲\end{cases}$$

از معادلهٔ اول $a=-۲$ به‌دست می‌آید که در معادلهٔ دوم صدق نمی‌کند. پس این حالت منتفی است.

حالت دوم:

$$\begin{cases}۲=۲a-۲\\ \frac{a}{a-۲}=-a\end{cases}$$

از معادلهٔ اول به $a=۲$ می‌رسیم که در معادلهٔ دوم به هیچ‌وجه صدق نمی‌کند. بنابراین هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۷. گزینهٔ «۲»

این زیباترین و مفهوم‌ترین سؤال این فصل است و البته سؤال خیلی دشواری

هم نیست. ابتدا دقت کنید که اگر $f(x)=\begin{cases}۴x-۳ & ; \quad x\geq ۱\\ ۲x-۱ & ; \quad x<۱\end{cases}$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ وارون تابع $f(x)$ چنین خواهد بود:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۳}{۴} & ; \quad x\geq ۱\\ \dfrac{x+۱}{۲} & ; \quad x<۱\end{cases}$$

حالا دو طرف رابطهٔ $f(g(x))=\begin{cases}۴x-۳ & ; \quad x\geq ۲\\ ۲x-۱ & ; \quad x<۲\end{cases}$ را با $f^{-۱}$ ترکیب می‌کنیم. برای این‌که نمادها عجیب غریب نشوند، روی تابع سمت راست اسم می‌گذاریم، $h(x)=\begin{cases}۴x-۳ & ; \quad x\geq ۲\\ ۲x-۱ & ; \quad x<۲\end{cases}$. لذا داریم:

$$f(g(x))=h(x)\Rightarrow g(x)=f^{-۱}oh(x)$$

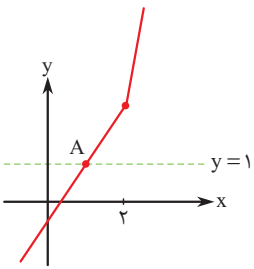
حالا باید $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۳}{۴} & ; \quad x\geq ۱\\ \dfrac{x+۱}{۲} & ; \quad x<۱\end{cases}$ را با $h(x)=\begin{cases}۴x-۳ & ; \quad x\geq ۲\\ ۲x-۱ & ; \quad x<۲\end{cases}$ ترکیب کنیم. در ابتدا داریم:

$$f^{-۱}(h(x))=\begin{cases}\dfrac{h(x)+۳}{۴} & ; \quad h(x)\geq ۱\\ \dfrac{h(x)+۱}{۲} & ; \quad h(x)<۱\end{cases}$$

پس باید بفهمیم چه موقع $h(x)\geq ۱$ است و چه موقع $h(x)<۱$.

برای این کار بهترین روش رسم $y=h(x)$ است.

$$y=h(x)=\begin{cases}۴x-۳ & ; \quad x\geq ۲\\ ۲x-۱ & ; \quad x<۲\end{cases}$$



برای یافتن مختصات A، باید $۲x-۱=۱$ را حل کنیم و به $x=۱$ می‌رسیم. پس به‌طور کلی اگر $x\geq ۱$ باشد، آن‌گاه $h(x)\geq ۱$ است و اگر $x<۱$ باشد، آن‌گاه $h(x)<۱$ است. حالا برویم به راحتی ترکیب را انجام دهیم:

حالا داریم:

$$f^{-1}(h(x))=\begin{cases}\dfrac{h(x)+3}{4} & ; \quad x\geq 1\\[2mm] \dfrac{h(x)+1}{2} & ; \quad x<1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{4x-3+3}{4} & ; \quad x\geq 2\\[2mm] \dfrac{2x-1+3}{4} & ; \quad 1\leq x<2\\[2mm] \dfrac{2x-1+1}{2} & ; \quad x<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x & ; \quad x\geq 2\\[2mm] \dfrac{x+1}{2} & ; \quad 1\leq x<2\\[2mm] x & ; \quad x<1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} & ; \quad x\in[1,2)\\[2mm] x & ; \quad x\notin[1,2)\end{cases}$$

۸. گزینهٔ «۴»

ابتدا در رابطهٔ $3f(2-x)+2g(x)=x$ به جای x قرار می‌دهیم $2-x$. داریم:

$$3f(2-(2-x))+2g(2-x)=2-x \Rightarrow 3f(x)+2g(2-x)=2-x$$

حالا $f(x)+g(2-x)$ و $3f(x)+2g(2-x)$ را داریم. دستگاه تشکیل می‌دهیم و هم $f(x)$ و هم $g(2-x)$ را به‌دست می‌آوریم. کمی دستگاه غیرعادی است:

$$f(x)+g(2-x)=\begin{cases}3x-1 & ; \quad x\geq 2\\ 7-x & ; \quad x<2\end{cases}$$

$$3f(x)+2g(2-x)=2-x$$

معادلهٔ اول را در ۲ ضرب می‌کنیم و دو معادله را از هم کم می‌کنیم:

$$2f(x)+2g(2-x)=\begin{cases}6x-2 & ; \quad x\geq 2\\ 14-2x & ; \quad x<2\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{رابطهٔ دوم}]{\text{منها کردن از}} f(x)=2-x-\begin{cases}6x-2 & ; \quad x\geq 2\\ 14-2x & ; \quad x<2\end{cases}=\begin{cases}4-7x & ; \quad x\geq 2\\ x-12 & ; \quad x<2\end{cases}$$

بنابراین $f(x)$ به‌دست آمد. حالا از $3f(x)+2g(2-x)=2-x$ تابع $g(2-x)$ را به‌دست می‌آوریم:

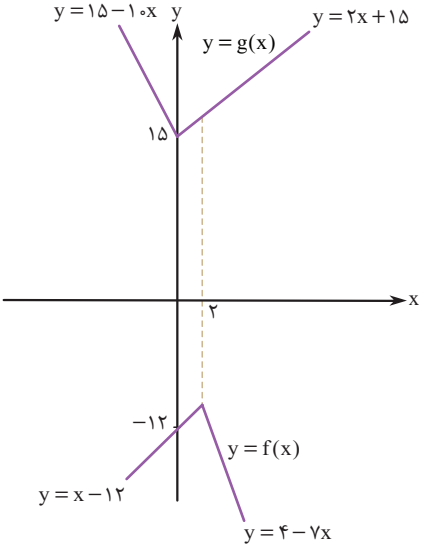
$$3\times\begin{cases}4-7x & ; \quad x\geq 2\\ x-12 & ; \quad x<2\end{cases}+2g(2-x)=2-x$$

$$\Rightarrow 2g(2-x)=2-x-\begin{cases}12-21x & ; \quad x\geq 2\\ 3x-36 & ; \quad x<2\end{cases}=\begin{cases}20x-10 & ; \quad x\geq 2\\ -4x+38 & ; \quad x<2\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(۲-x)=\begin{cases}۱۰x-۵ & ; \quad x\geq ۲\\ -۲x+۱۹ & ; \quad x<۲\end{cases}$$

در این رابطه به جای x قرار می‌دهیم $۲-x$ تا $g(x)$ به‌دست آید:

$$g(x)=\begin{cases}۱۰(۲-x)-۵ & ; \quad ۲-x\geq ۲\\ -۲(۲-x)+۱۹ & ; \quad ۲-x<۲\end{cases}=\begin{cases}۱۵-۱۰x & ; \quad x\leq ۰\\ ۲x+۱۵ & ; \quad x>۰\end{cases}$$



اکنون با توجه به شکل فوق، برای این‌که معادلهٔ $f(x)+a=g(x)$ دقیقاً دارای دو جواب باشد، باید:

$$f(۰)+a>g(۰)\Rightarrow -۱۲+a>۱۵\Rightarrow a>۲۷$$

۹. گزینهٔ «۲»

ابتدا $f^{-۱}(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}(x+۲)^۲-۴ & ; \quad x\geq ۱\\ ۲x+۳ & ; \quad x<۱\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۴}-۲ & ; \quad x\geq ۵\\ \dfrac{x-۳}{۲} & ; \quad x<۵\end{cases}$$

حالا از رابطهٔ $f(g(x))=۴x+۱$ داریم:

$$g(x)=f^{-۱}(۴x+۱)=\begin{cases}\sqrt{۴x+۵}-۲ & ; \quad ۴x+۱\geq ۵\\ \dfrac{۴x+۱-۳}{۲} & ; \quad ۴x+۱<۵\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{4x+5}-2 & ; \quad x\geq 1\\ 2x-1 & ; \quad x<1\end{cases}$$

حالا برای دامنهٔ $\sqrt{g(x)-x}$ باید $g(x)-x\geq 0$ را حل کنیم. یعنی:

$$g(x)-x=\begin{cases}\sqrt{4x+5}-x-2 & ; \quad x\geq 1\\ 2x-1-x & ; \quad x<1\end{cases}$$

از ضابطهٔ اول داریم:

$$x\geq 1;\ \sqrt{4x+5}-x-2\geq 0\Rightarrow \sqrt{4x+5}\geq x+2$$

چون $x\geq 1$ است، دو طرف مثبت هستند و توان ۲ رساندن مجاز است:

$$4x+5\geq x^2+4x+4\Rightarrow 1\geq x^2\Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

که با توجه به $x\geq 1$ فقط $x=1$ را باید بپذیریم.

از ضابطهٔ دوم داریم:

$$x<1;\ x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1$$

که شرط $x<1$ با جواب $x\geq 1$ ناسازگار است. کلاً دامنهٔ مورد نظر شد $\{1\}$.

۱۰. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که $f(x)=1+\frac{1}{x}$. بنابراین:

$$g_{1400}(x)=f(g_{1399}(x))=1+\frac{1}{g_{1399}(x)}\Rightarrow g_{1400}(x)-\frac{1}{g_{1399}(x)}=1$$

$$\Rightarrow g_{1400}(1)-\frac{1}{g_{1399}(1)}=1$$

به همین راحتی. سؤال ساده‌ای بود، فقط ویترین ترسناکی داشت.

نیتروتست فصل ۹

۱. گزینهٔ «۴»

از دو طرف رابطهٔ داده‌شده مشتق می‌گیریم. داریم:

$$f'(x+1)+f(3-x)-xf'(3-x)=4x+1$$

چون $f'(1)$ را می‌خواهیم پس $x=0$ را عددگذاری می‌کنیم:

$$f'(1)+f(3)=1$$

بنابراین به $f(3)$ نیاز داریم. در رابطهٔ اصلی به‌جای x مقدار ۲ را قرار می‌دهیم:

$$f(3)+2f(1)=10$$

حالا $x=0$ را قرار می‌دهیم: $f(1)=0$

پس $f(3)=10$ و در نتیجه $f'(1)=1-10=-9$.

۲. گزینهٔ «۳»

می‌دانیم $f'(x)=4x+a$. چون $f(x)$ و $f'(x)$ در $x=3$ مماس هستند، پس داریم:

$$(2x^2+ax+b)-(4x+a)=2(x-3)^2$$

$$2x^2+(a-4)x+(b-a)=2x^2-12x+18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-4=-12 \\ b-a=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow f(x)=2x^2-8x+10$$

$$\Rightarrow f(-1)=2+8+10=20$$

۳. گزینهٔ «۳»

از $f(x)=x^2+ax+1$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=2x+a$$

بنابراین:

$$f(f'(x))=f(2x+a)=(2x+a)^2+a(2x+a)+1$$

طبق صورت مسئله داریم:

$$(2x+a)^2+a(2x+a)+1=4x^2-18x+19$$

$$\Rightarrow 4x^2+4ax+a^2+2ax+a^2+1=4x^2-18x+19$$

$$\Rightarrow 4x^2+6ax+2a^2+1=4x^2-18x+19$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a=-18 \\ 2a^2+1=19 \end{cases} \Rightarrow a=-3$$

بنابراین $f(x)=x^{۲}-۳x+۱$ و در نتیجه:

$$(fof(x))'=f'(۱)\times f'(f(۱))=f'(۱)f'(-۱)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۲x-۳}(-۱)(-۵)=۵$$

۴. گزینهٔ «۳»

دقت کنید که $f(x)=x^{۳}-۱$ است و بنابراین:

$$g(x)=\frac{(x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)}{x^{۴}+x^{۲}+۱}=\frac{x^{۶}-۱}{x^{۴}+x^{۲}+۱}$$

حالا با توجه به اتحاد جملهٔ مشترک داریم:

$$g(x)=\frac{(x^{۲}-۱)(x^{۴}+x^{۲}+۱)}{x^{۴}+x^{۲}+۱}=x^{۲}-۱$$

و در نتیجه:

$$g'(x)=۲x\Rightarrow g'(۳)=۶$$

۵. گزینهٔ «۱»

فرض کنید $h(x)=f^{-۱}(g(x))$ باشد. در این‌صورت $f(h(x))=g(x)$ است.

ما به دنبال $h'(\frac{۵}{۴})$ هستیم. ابتدا بیایید $h(\frac{۵}{۴})$ را حساب کنیم چون به آن نیاز خواهیم داشت.

$$h(\frac{۵}{۴})=f^{-۱}(g(\frac{۵}{۴}))=f^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}-۱}})=f^{-۱}(\frac{۴}{۳})$$

فرض کنید $f^{-۱}(\frac{۴}{۳})=a$ باشد. داریم:

$$\frac{۴}{۳}=f(a)=\frac{\sqrt{a}+۱}{\sqrt{a}-۱}\Rightarrow ۴\sqrt{a}-۴=۳\sqrt{a}+۳\Rightarrow\sqrt{a}=۷\Rightarrow a=۴۹$$

لذا $f^{-۱}(\frac{۴}{۳})=۴۹$ که یعنی $h(\frac{۵}{۴})=۴۹$.

حالا از رابطهٔ $f(h(x))=g(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$h'(x)f'(h(x))=g'(x)\xrightarrow{x=\frac{۵}{۴}}h'(\frac{۵}{۴})f'(۴۹)=g'(\frac{۵}{۴})$$

$$\Rightarrow h'(\frac{۵}{۴})=\frac{g'(\frac{۵}{۴})}{f'(۴۹)}$$

بقیهٔ کار ساده است:

$$g'(x)=۲x\times\frac{۱}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}}\times\frac{-۱}{(x^{۲}-۱)}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۵}{۴})=\frac{۵}{۴}\times\frac{۴}{۳}\times(\frac{-۱۶}{۹})=\frac{-۸۰}{۲۷}$$

$$f'(x)=\frac{-۲}{(\sqrt{x}-۱)^{۲}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{-۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)^{۲}}\xrightarrow{x=۴۹}f'(۴۹)=\frac{-۱}{۷\times۳۶}$$

جواب نهایی مسئله می‌شود:

$$h'(\frac{۵}{۴})=\frac{g'(\frac{۵}{۴})}{f'(۴۹)}=\frac{\frac{-۸۰}{۲۷}}{\frac{-۱}{۷\times۳۶}}=\frac{۸۰\times۷\times۳۶}{۲۷}=\frac{۸۰\times۷\times۴}{۳}=\frac{۲۲۴۰}{۳}$$

۶. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که از رابطهٔ $f^{-۱}(x)=۳x^{۳}+۲x$ داریم:

$$x=f(۳x^{۳}+۲x) \quad ✱$$

حالا مشتق تابع $f(g(x))$ در $x=۱$ برابر است با:

$$(f(g(x)))'=g'(x)\times f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۱}(f(g(x)))'_{x=۱}=g'(۱)\times f'(g(۱))=g'(۱)f'(۵)$$

از دو طرف ✱ مشتق می‌گیریم:

$$۱=(۹x^{۲}+۲)f'(۳x^{۲}+۲x)\xrightarrow{x=۱}$$

$$۱=۱۱f'(۵)\Rightarrow f'(۵)=\frac{۱}{۱۱}$$

برای $g'(۱)$ داریم:

$$g'(x)=۲x\Rightarrow g'(۱)=۲$$

بنابراین:

$$g'(۱)f'(۵)=\frac{۲}{۱۱}$$

۷. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که از $f^{-۱}(g(x))=۴x^{۳}+\sqrt{x+۳}$، نتیجه می‌گیریم که:

$$g(x)=f(۴x^{۳}+\sqrt{x+۳})\Rightarrow x=g^{-۱}(f(۴x^{۳}+\sqrt{x+۳}))$$

بنابراین با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$۱=(۱۲x^{۲}+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}})\times f'(۴x^{۳}+\sqrt{x+۳})\times(g^{-۱})'(f(۴x^{۳}+\sqrt{x+۳}))$$

ما دنبال مشتق $g^{-۱}of(x)$ در $x=۶$ هستیم. کافی است در تساوی بالا $x=۱$ قرار دهیم تا این مشتق ظاهر شود:

$$1=(12+\frac{1}{4})f'(6)(g^{-1})'(f(6))$$

می‌دانیم که $(g^{-1}(f(x)))'_{x=6}=f'(6)(g^{-1})'(f(6))$، پس در واقع:

$$1=\frac{49}{9}\times(g^{-1}(f(x)))'_{x=6}\Rightarrow(g^{-1}(f(x)))'_{x=6}=\frac{4}{49}$$

۸. گزینهٔ «۲»

از تساوی $4f(4)=f(1)=f'(4)+f'(1)=4$ داریم:

$$f(4)=1\ ,\ f(1)=4\ ,\ f'(4)+f'(1)=4$$

حالا داریم:

$$g'(x)=f'(x)\times f'(f(x))\times f'(f(f(x))\times\cdots\times\underbrace{f'(f(f(\cdots f(x)))\cdots)}_{\text{ترکیب ۱۰ تا f و یک f'}}$$

$$\xrightarrow{x=1}g'(1)=f'(1)\times f'(f(1))\times f'(f(f(1)))\times\cdots$$
$$\times f'(f(f(\cdots(f(1)))))\cdots)=f'(1)\times f'(4)\times f'(1)\times f'(4)\times\cdots\times f'(4)$$
$$\Rightarrow(f'(1)f'(4))^5$$

فرض کنید $f'(1)=T$. طبق فرضی که داریم $f'(1)+f'(4)=4$ است، پس:

$$f'(4)=4-T$$

و لذا باید بیشترین مقدار $(T(4-T))^5$ را به‌دست آوریم که برابر است با:

$$(-T^2+4T)^5=(-(T-2)^2+4)^5$$

از آنجا که $-(T-2)^2$ عبارتی نامثبت اســـت، پس بیشترین مقدار مورد نظر برابر با 4^5 است. که همان 2^{10} است.

۹. گزینهٔ «۲»

طبق اتحاد $a^{b\log_c d}=d^{b\log_c a}$، داریم:

$$f(x)=x^{\log_{\frac{1}{2}}2}+x^{\log_{\frac{1}{3}}9}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

از طرفی:

$$(f(f(x)))'=f'(x)\times f'(f(x))\overset{x=1}{=\!=}f'(1)\times f'(f(1))$$

اکنون با توجه به ضابطهٔ $f(x)$، داریم:

$$f(۱)=۱+۱=۲\,,\,f'(x)=\frac{-۱}{x^۲}+\frac{-۲}{x^۳}\Rightarrow f'(۱)=-۳$$

$$\Rightarrow (f(f(۱)))'=-۳\times f'(۲)=-۳\times(\frac{-۱}{۴}+\frac{-۱}{۴})=-۳\times(\frac{-۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

این‌که $(fog(x))'=a$ اســـت، یعنی $fog(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و حتی خطی اســـت. در هر حال، چه به این نکته واقف باشـــیم و چه نباشـــیم، بهتر است $fog(x)$ را به‌صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم:

$$f(x)=۳x+k\,|\,x\,|\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(۳+k)x & ; \quad x\geq ۰\\(۳-k)x & ; \quad x<۰\end{cases}$$

بنابراین:

$$fog(x)=\begin{cases}(۳+k)g(x) & ; \quad g(x)\geq ۰\\(۳-k)g(x) & ; \quad g(x)<۰\end{cases}$$

حالا به $g(x)$ دقت کنیم:

$$g(x)=\begin{cases}(k+۳)x & ; \quad x\geq ۰\\(k+۱)x & ; \quad x<۰\end{cases}$$

حالت اول: اگر $k\leq -۳$ باشد، آن‌گاه:

$$g(x)=\begin{cases}(k+۳)x\leq ۰ & ; \quad x\geq ۰\\(k+۱)x>۰ & ; \quad x<۰\end{cases}$$

پس در این حالت:

$$f(g(x))=\begin{cases}(۳+k)(k+۱)x & ; \quad x<۰\\(۳-k)(k+۳)x & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$$

باید مشتق هر دو ضابطه مساوی a باشد. این یعنی باید:

$$(k+۳)(k+۱)=۹-k^۲=a\Rightarrow k^۲+۴k+۳=۹-k^۲$$

$$\Rightarrow ۲k^۲+۴k-۶=۰\Rightarrow k^۲+۲k-۳=۰\Rightarrow (k+۳)(k-۱)=۰$$

$$\Rightarrow k=-۳ \text{ یا } k=۱$$

$k=۱$ با شرط $k\leq -۳$ جور نیست. اگر $k=-۳$ قرار دهیم، داریم:

$$f(g(x))=۰\Rightarrow (f(g(x)))'=۰$$

لـــذا تا اینجـــا $k=-۳$ و $a=۰$ یک جواب مســـئله اســـت و در این حالت $a+k=-۳$.

حالت دوم: $-۳<k<-۱$. در این حالت:

$$g(x)=\begin{cases}(k+۳)x\geq ۰ & ; \quad x\geq ۰\\(k+۱)x\geq ۰ & ; \quad x<۰\end{cases}$$

به عبارتی برای هر مقدار حقیقی x داریم $g(x) \geq ۰$. لذا:

$$f(g(x)) = (۳+k)g(x) = \begin{cases} (k+۳)^۲ x & ; \quad x \geq ۰ \\ (k+۱)(۳+k)x & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

مجدداً باید:

$$(k+۳)^۲ = (k+۱)(۳+k) = a$$

$$\Rightarrow k^۲ + ۶k + ۹ = k^۲ + ۴k + ۳ \Rightarrow ۲k = -۶ \Rightarrow k = -۳ \quad \times$$

حالت سوم: $k \geq -۱$ در این حالت:

$$g(x) = \begin{cases} (k+۳)x \geq ۰ & ; \quad x \geq ۰ \\ (k+۱)x < ۰ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

لذا:

$$f(g(x)) = \begin{cases} (k+۳)^۲ x & ; \quad x \geq ۰ \\ (۳-k)(k+۱)x & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

و مجدداً:

$$(k+۳)^۲ = (۳-k)(k+۱) \Rightarrow k^۲ + ۶k + ۹ = ۳k + ۳ - k^۲ - k$$

$$\Rightarrow ۲k^۲ + ۴k + ۶ = ۰ \Rightarrow k^۲ + ۲k + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰$$

لذا تنها مقدار قابل قبول همان $k = -۳$ و $a = ۰$ است که به $a + k = -۳$ می‌رسد.

نیتروتست فصل ۱۰

۱. گزینهٔ «۴»

اولاً می‌دانیم $x > ۰$، پس $\frac{x}{۲} < \frac{۲}{۳}x$. بنابراین:

$$[\frac{x}{۲}] \le [\frac{۲}{۳}x] \Rightarrow [\frac{x}{۲}] - [\frac{۲}{۳}x] \le ۰$$

ولی دامنهٔ $f(x)$ می‌گوید که $[\frac{x}{۲}] - [\frac{۲}{۳}x] \ge ۰$ باشد. از این مطلب‌ها می‌فهمیم که در واقع $[\frac{x}{۲}] = [\frac{۲}{۳}x]$ است.

همین‌جا معلوم می‌شـــود که $f(x) = ۰$ است، اما باید $[\frac{x}{۲}] = [\frac{۲}{۳}x]$ را هم حل کنیم تا دامنهٔ $f(x)$ مشخص شود.

فرض کنید $[\frac{x}{۲}] = [\frac{۲}{۳}x] = n$ باشد. این یعنی:

$$\begin{cases} n \le \frac{x}{۲} < n+۱ \\ \text{و} \\ n \le \frac{۲x}{۳} < n+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲n \le x < ۲n+۲ \\ \frac{۳}{۲}n \le x \le \frac{۳}{۲}n + \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲n \le x < \frac{۳}{۲}n + \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲n < \frac{۳}{۲}n + \frac{۳}{۲} \Rightarrow n < ۳$$

از آنجا که $x > ۰$ است، لذا $n \ge ۰$ است در نتیجه:

$n = ۰$ یا ۱ یا ۲

اکنون حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۱)\ [\frac{x}{۲}] = [\frac{۲x}{۳}] = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۰ \le x < ۲ \\ ۰ \le x < \frac{۳}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۰ \le x < \frac{۳}{۲}$$

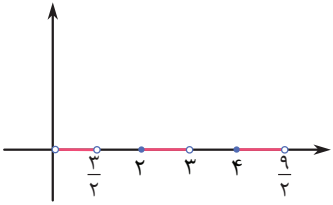
$$۲)\ [\frac{x}{۲}] = [\frac{۲x}{۳}] = ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲ \le x < ۴ \\ \frac{۳}{۲} \le x < ۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۲ \le x < ۳$$

$$۳)\ [\frac{x}{۲}] = [\frac{۲x}{۳}] = ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۴ \le x < ۶ \\ ۳ \le x < \frac{۹}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۴ \le x < \frac{۹}{۲}$$

بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$D_f=[0,\frac{3}{2})\cup[2,3)\cup[4,\frac{9}{2})$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است:



واضح است که تابع f فقط در $x=1$ از دامنه پیوسته است.

۲. گزینهٔ «۴»

می‌توانیم ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا کنیم، امّا عملاً کاری طولانی است. به‌جای آن، مقدار $f(2)$ را پیدا می‌کنیم و امیدواریم مسئله به $\frac{0}{0}$ برسد تا هوپیتال بگیریم:

$$f(2): x=-1 \Rightarrow f(2)+f(2)=3-1=2 \Rightarrow f(2)=1$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x\,f(x))-1}{f(x)-1}=\frac{0}{0}$$

چه موقعیت خوبی! از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)+xf'(x))f'(x\,f(x))}{f'(x)}=\frac{(f(2)+2f'(2))f'(2)}{f'(2)}$$

$$=\frac{(1+2f'(2))f'(2)}{f'(2)}=1+2f'(2)$$

لذا کافی است $f'(2)$ را به‌دست آوریم. از رابطهٔ اصلی سؤال مشتق می‌گیریم. داریم:

$$f'(x+3)+2xf(1-x)+x^2(-1)f'(1-x)=6x+1$$

$$\xrightarrow{x=-1} f'(2)-2f(2)-f'(2)=-5 \Rightarrow -2f(2)=-5 \Rightarrow f(2)=\frac{5}{2}$$

چقدر عجیب است! $f'(2)$ را که عملاً از دست دادیم. این نتیجهٔ جدید که $f(2)=\frac{5}{2}$ هم با $f(2)=1$ در تناقض است. کجای کار می‌لنگد؟ این‌که اصلا $f'(2)$ وجود ندارد.

۳. گزینهٔ «۱»

تنها عدد مشکوک در این مسئله $x=a$ است. در بقیهٔ اعداد حقیقی، $f(x)$ و در نتیجه $fof(x)$ پیوسته هستند. (البته به شرطی که $f(x)\neq a$ باشد که

خوشبختانه از معضلات این سؤال نیست ← ویدیو را ببین)

اما برای بررسی پیوستگی $fof(x)$ در $x=a$، داریم:

۱ $f(f(a))=f(a+1)$

در این‌جا دقت کنید که $a+1>a$ است و لذا:

در نتیجه:

$f(a+1)=2(a+1)=2a+2$

$f(f(a))=2a+2$

برای حد چپ داریم:

۲ $\lim\limits_{x\to a^-} f(f(x))=\lim\limits_{x\to a^-} f(x+1)=\lim\limits_{x\to a^-} 2(x+1)=2a+2$

اما برای حد راست کمی مشکل خواهیم داشت. زیرا:

۳ $\lim\limits_{x\to a^+} f(f(x))=\lim\limits_{x\to a^+} f(2x)$

حالا این سؤال مطرح می‌شود که $2a$ بزرگ‌تر از a است یا نه. همین موضوع نیاز به حالت‌بندی دارد.

حالت اول: $2a>a$، یعنی $a>0$ باشد. در این‌صورت:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(2x)=\lim\limits_{x\to a^+} 2(2x)=4a$

برای پیوسته بودن، در این حالت، داریم:

$2a+2=4a \Rightarrow a=1$

حالت دوم: $2a=a$، یعنی $a=0$. در این‌صورت:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(2x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(2x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2(2x)=0$

که البته با $2a+2$ در این حالت برابر نیست. پس این حالت هیچ نتیجه‌ای ندارد.

حالت سوم: $2a<a$، یعنی $a<0$ باشد. در این‌صورت:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(2x)=\lim\limits_{x\to a^+} (2x+1)=2a+1$

اما $2a+1=2a+2$ هم جواب ندارد.

تنها جواب مسئله همان $a=1$ است. برای تسلط بیشتر به این مسئلهٔ مهم، ویدیوی مربوط به آن را در سایت مهروماه مشاهده کنید.

۴. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که $f(x)=3x+\dfrac{2(x-1)}{|x-1|}=\begin{cases}3x+2 & x>1\\ 3x-2 & x<1\end{cases}$ و بنابراین:

۱ $\lim\limits_{x\to 1^+} (f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} (3x+2)(x^2+ax)=5(1+a)$

۲ $\lim\limits_{x\to 1^-} (f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} (3x-2)(9x+a)=9+a$

در نتیجه باید:

$$5+5a=9+a \Rightarrow a=1$$

۵. گزینهٔ «۱»

اول سعی می‌کنیم $f'(x)$ را حساب کنیم. تنها نقطهٔ مشکوک $x=1$ است. در بقیهٔ نقاط داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}6x+1 & x>1\\ 7 & x<1\end{cases}$$

اما در $x=1$ تابع به‌وضوح پیوسته است و $f'_-(1)=f'_+(1)=7$ است. لذا $f'(1)=7$ و تابع $f(x)$ در همهٔ نقاط مشتق‌پذیر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f'(x)=\begin{cases}6x+1 & x>1\\ 7 & x\le 1\end{cases}$$

حالا برای بررسی تابع $g(x)=\begin{cases}f(x) & x\ge a\\ f'(x) & x<a\end{cases}$ باید دو حالت در نظر بگیریم:

حالت اول: اگر $a>1$ باشد. آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=3a^2+a,\quad \lim_{x\to a^-} f'(x)=6a+1$$

که یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=3a^2+a,\quad \lim_{x\to a^-} g(x)=6a+1$$

بنابراین برای پیوستگی باید:

$$3a^2+a=6a+1 \Rightarrow 3a^2-5a-1=0 \Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{37}}{6}$$

$$\xrightarrow{a>1} a=\frac{5+\sqrt{37}}{6}$$

حالت دوم: $a\le 1$. در این‌صورت:

$$g(x)=\begin{cases}3x^2+x & x\ge 1\\ 7x-3 & a\le x\le 1\\ 7 & x<a\end{cases}$$

حالا در $x=a$ داریم:

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=\lim_{x\to a^-} g(x) \Rightarrow 7a-3=7 \Rightarrow a=\frac{10}{7}$$

ولی $\frac{10}{7}$ با شرط $a\le 1$ سازگار نیست.

۶. گزینهٔ «۲»

از آن‌جا که b و a صحیح هســـتند، پس داخل جزءصحیح به عددی صحیح میل می‌کند. برای وجود حد دوطرفه باید:

$$\lim_{x\to ۳}[ax^۲+bx]=۱۷ \Rightarrow \lim_{x\to ۳}(ax^۲+bx)=۱۷^+ \text{یا} ۱۸^-$$

این دو حالت را داریم:

$$ax^۲+bx=a(x-۳)^۲+۱۷ \;;\; a>۰$$

یا

$$ax^۲+bx=a(x-۳)^۲+۱۸ \;;\; a<۰$$

در حالت اول داریم:

$$ax^۲+bx=ax^۲-۶ax+۹a+۱۷$$

$$\Rightarrow ۹a+۱۷=۰ , -۶a=b \Rightarrow a=-\frac{۱۷}{۹} , b=\frac{۳۴}{۳}$$

که با $a>۰$ سازگار نیست.

در حالت دوم داریم:

$$ax^۲+bx=a(x-۳)^۲+۱۸=ax^۲-۶ax+۹a+۱۸$$

$$\Rightarrow ۹a+۱۸=۰ , -۶a=b \Rightarrow a=-۲ , b=۱۲$$

که با $a<۰$ هم سازگار است. لذا $a+b=۱۰$.

۷. گزینهٔ «۳»

از $f^۵(x)+f(x)=x$ نتیجه می‌گیریم که ترکیب توابع زیر همانی است:

$$(x^۵+x)o\, f(x)=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۵+x$$

بنابراین صورت مسئله می‌شود:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^{-۱}(x)-x-۱}{f^۵(x)+f(x)-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۵+x-x-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۵-۱}{x-۱}\overset{H}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۵x^۴}{۱}=۵$$

۸. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم که $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\frac{a}{۲}$ است. لذا اگر $\frac{a}{۲}\notin\mathbb{Z}$ ، داریم:

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x)]=[\frac{a}{۲}]\Rightarrow[\frac{a}{۲}]=۳$$

$$\Rightarrow ۳\le\frac{a}{۲}<۴ \xrightarrow{\frac{a}{۲}\notin\mathbb{Z}} ۳<\frac{a}{۲}<۴ \Rightarrow ۶<a<۸$$

اما اگر $\frac{a}{۲} \in \mathbb{Z}$، در دو حالت ممکن است حد برابر ۳ شود: $[۳^+] = [۴^-] = ۳$.

دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $\frac{a}{۲} = ۳$. در این حالت $a = ۶$. پس:

$$f(x) = \frac{۶x+۳}{۲x+۱} = \frac{۳(۲x+۱)}{۲x+۱} = ۳$$

یعنی $f(x)$ تابع ثابت $f(x) = ۳$ است و لذا:

$$\lim_{x\to(+\infty)} [f(x)] = [۳] = ۳$$

حالت دوم: $\frac{a}{۲} = ۴$. در این حالت $a = ۸$ و در نتیجه:

$$f(x) = \frac{۸x+۳}{۲x+۱} = ۴ - \frac{۱}{۲x+۱}$$

در این‌صورت:

$$\lim_{x\to(+\infty)} [f(x)] = \lim_{x\to(+\infty)} [۴ - \frac{۱}{۲x+۱}] = [۴^-] = ۳$$

پس $a = ۸$ هم قبول است. بنابراین جواب نهایی این مسئلهٔ زیبا $۶ \le a \le ۸$ است.

۹. گزینهٔ «۱»

در همسایگی راست $x = ۳$، عبارت $x^۲ - ۳x$ مثبت است. این حقیقت از جدول تعیین علامت $y = x^۲ - ۳x$ مشخص است:

x		۰		۳	
$x^۲ - ۳x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

بنابراین اینجا که مشتق راست می‌خواهیم، داریم: $g(x) = x^۲ - ۳x$ و بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{f(g(x) - f(g(۳))}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{f(x^۲ - ۳x) - f(۰)}{x-۳}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{۲(x^۲ - ۳x)[\frac{۳(x^۲ - ۳x)+۱}{x^۲ - ۳x + ۱}] + ۳ - ۳}{x-۳}$$

دقت کنید که $x^۲ - ۳x$ دارد از راست به صفر میل می‌کند. این یعنی:

$$\lim_{x\to ۳^+} [\frac{۳(x^۲ - ۳x)+۱}{(x^۲ - ۳x)+۱}] = \lim_{x\to ۰^+} [\frac{۳x+۱}{x+۱}]$$

$$\lim_{x\to ۰^+} [۳ - \frac{۲}{x+۱}] = [۱^+] = ۱$$

و بنابراین:

$$(fog(x))'_{x=3^+} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2(x^2-3x)(1)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 2x = 6$$

خودت می‌دونی که همیشه می‌تونی ویدیو رو هم ببینی.

۱۰. گزینهٔ «۴»

حاصل حد $\lim_{t\to x} \frac{\sqrt[3]{t+x}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{t+x}-\sqrt{2t}}$ را به کمک هوپیتال حساب می‌کنیم و ضابطهٔ $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم. فقط دقت کنید که در این حد x ثابت و t متغیر است. یعنی موقع مشتق‌گرفتن، با x شبیه به اعداد رفتار می‌کنیم:

$$f(x) = \lim_{t\to x} \frac{\sqrt[3]{t+x}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{t+x}-\sqrt{2t}} = \lim_{t\to x} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(t+x)^2}}-0}{\frac{1}{2\sqrt{t+x}}-\frac{1}{\sqrt{2t}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{4x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{2x}}} = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{4x^2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{2x}}} = \frac{-2}{3}\times\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}$$

$$= \frac{-2}{3}\sqrt[6]{\frac{8x^3}{16x^4}} = \frac{-2}{3}\sqrt[6]{\frac{1}{2x}}$$

حالا فهمیدیم که $f(x) = \frac{-2}{3}\sqrt[6]{\frac{1}{2x}}$. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(3x)-f(x+2)}{f(x)-f(1)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3f'(3x)-f'(x+2)}{f'(x)}$$

$$= \frac{3f'(3)-f'(3)}{f'(1)} = \frac{2f'(3)}{f'(1)}$$

با توجه به ضابطهٔ $f(x)$ محاسبهٔ مشتق آن ساده است:

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{1}{2x}} = \frac{2}{3}(2x)^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}((-\frac{1}{6})(2x)^{-\frac{7}{6}}(2)$$

$$= -\frac{2}{9}(2x)^{-\frac{7}{6}} \Rightarrow \frac{2f'(3)}{f'(1)} = \frac{2(-\frac{2}{9}(6)^{-\frac{7}{6}})}{-\frac{2}{9}(2)^{-\frac{7}{6}}} = \frac{2\times 2^{\frac{7}{6}}}{6^{\frac{7}{6}}} = \frac{2}{3^{\frac{7}{6}}} = \frac{2}{3\sqrt[6]{3}}$$

نیتروتست فصل ۱۱

۱. گزینهٔ «۲»

طبق درســـنامهٔ همین فصل، طول نقطه‌های تماس این خط‌ها از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{f(x)-۲}{x-۱}=f'(x)\Rightarrow\frac{x^۲+x-۱}{x-۱}=۲x+۱$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۱=۲x^۲-x-۱\Rightarrow x=۰,۲$$

بنابراین $x_B=۰$ و $x_C=۲$ در نتیجه:

$$y_B=x_B^۲+x_B+۱=۱$$

$$y_C=x_C^۲+x_C+۱=۷$$

در نتیجه: $A=(۱,۲),B=(۰,۱),C=(۲,۷)$

بنابراین به کمک فرمول بند کفشی از فصل ۴ داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۱&۲\\۰&۱\\۲&۷\\۱&۲\end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|(۱+۰+۴)-(۰-۲-۷)|=۲$$

۲. گزینهٔ «۳»

اول $f''(x)$ را حساب کنیم: $f''(x)=۶x+۲a$

پس سؤال می‌گوید خط $y=۶x+۲a$ بر نمودار $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۲$ در $x=۱$ مماس است. این یعنی:

$$\begin{cases}f'(۱)=۶\\۶+۲a=۱+a+b+۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(۳x^۲+۲ax+b)_{x=۱}=۶\\-a+b=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳+۲a+b=۶\\b-a=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+b=۳\\b-a=۳\end{cases}\Rightarrow a=۰,b=۳$$

۳. گزینهٔ «۳»

آهنگ متوســـط تغییر تابع $f(x)$ در بـــازهٔ $[۱,۴]$ یعنی $\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}$. برای به‌دست آوردن $f(۴)$، در ضابطهٔ $f(۴-x)$ به‌جای x باید ۰ بگذاریم.

$$x=۰:f(۴-۰)=۰^۳+۰+۱=۱\Rightarrow f(۴)=۱$$

$$x=۳:f(۴-۳)=۹+۶=۱۵\Rightarrow f(۱)=۱۵$$

و جواب مسئله می‌شود:

$$\frac{۱۵-۱}{۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

۴. گزینهٔ «۴»

اول مختصات نقطهٔ تماس را به‌دست می‌آوریم. طول نقطهٔ تماس $x=5$ است، پس عرض آن $y=f^{-1}(5)+5$ است. برای محاسبهٔ $f^{-1}(5)$، در رابطهٔ $f(x+1)=x^3+2\sqrt{x+3}$ مقدار $x=1$ را قرار دهید:

$$f(2)=1+2\sqrt{4}=5 \Rightarrow f(2)=5 \Rightarrow f^{-1}(5)=2$$

پس عرض نقطهٔ تماس $y=2+5=7$ است. در نتیجه مختصات نقطهٔ تماس $(5,7)$ است.

حالا برای شیب باید مشتق بگیریم. مشتق ما می‌شود: $y'=(f^{-1}(x))'_{x=5}+1$

اما محاسبهٔ $(f^{-1}(x))'_{x=5}$ را به‌طور مستقیم بلد نیستیم.

دو طرف $f(x+1)=x^3+2\sqrt{x+3}$ را با $f^{-1}(x)$ ترکیب می‌کنیم:

$$x+1=f^{-1}(x^3+2\sqrt{x+3})$$

حالا مشتق می‌گیریم:

$$1=(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x+3}})(f^{-1})'(x^3+2\sqrt{x+3})$$

$$\xrightarrow{x=1} 1=(3+\frac{1}{2})(f^{-1})'(5) \Rightarrow (f^{-1})'(5)=\frac{2}{7}$$

بنابراین شیب خط برابر است با $m=\frac{2}{7}+1=\frac{9}{7}$. پس معادلهٔ خط مماس می‌شود:

$$y-7=\frac{9}{7}(x-5) \Rightarrow y=\frac{9}{7}x-\frac{45}{7}+7 \Rightarrow y=\frac{9}{7}x+\frac{4}{7}$$

۵. گزینهٔ «۱»

معادلهٔ خط مماس بر $y=f(x)$ در نقطهٔ $(x_1, f(x_1))$ برابر است با:

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)=(3x_1^2-6)(x-x_1)$$

$$y-x_1^3+6x_1=(3x_1^2-6)(x-x_1)$$

$$\Rightarrow y=(3x_1^2-6)x-x_1(3x_1^2-6)+x_1^3-6x_1$$

$$\Rightarrow y=(3x_1^2-6)x-2x_1^3$$

حالا معادلهٔ $f(x)=(3x_1^2-6)x-2x_1^3$ حتماً در $x=x_1$ ریشهٔ مضاعف دارد (زیرا خط بر $f(x)$ مماس است). لذا:

$$x^3-6x-(3x_1^2-6)x+2x_1^3=(x-x_1)^2(x-n)$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسهٔ اعداد ثابت}} x_1^2(-n)=2x_1^3 \Rightarrow n=-2x_1$$

بنابراین طول نقطهٔ تقاطع همان $-2x_1$ است و در نتیجه:

$$g(x_1)=f(-2x_1) \Rightarrow g(x)=f(-2x)=-8x^3+12x$$

این سؤال ویدیوی جالبی دارد.

۶. گزینهٔ «۳»

یعنی معادله‌های $x^۲ + ax + ۴ = mx$ و $۲x^۲ + (۲a+۱)x + ۳ = mx$ ریشهٔ مضاعف دارند.

$$x^۲ + (a-m)x + ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = (a-m)^۲ - ۱۶ = ۰$$

$$۳x^۲ + (۲a+۱-m)x + ۳ = ۰ \Rightarrow (۲a+۱-m)^۲ - ۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a-m| = ۴ \\ |۲a+۱-m| = ۶ \end{cases}$$

پس چهار حالت داریم:

$$۱)\ \begin{cases} a-m = ۴ \\ ۲a+۱-m = ۶ \end{cases} \Rightarrow a = ۱,\ m = -۳ \Rightarrow a+m = -۲$$

$$۲)\ \begin{cases} a-m = -۴ \\ ۲a+۱-m = ۶ \end{cases} \Rightarrow a = ۹,\ m = ۱۳ \Rightarrow a+m = ۲۲$$

$$۳)\ \begin{cases} a-m = ۴ \\ ۲a+۱-m = -۶ \end{cases} \Rightarrow a = -۱۱,\ m = -۱۵ \Rightarrow a+m = -۲۶$$

$$۴)\ \begin{cases} a-m = -۴ \\ ۲a+۱-m = -۶ \end{cases} \Rightarrow a = -۳,\ m = ۱ \Rightarrow a+m = -۴$$

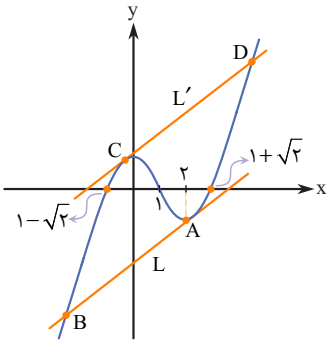
پس بیشترین مقدار $a+m$ برابر ۲۲ است. ویدیو را هم ببینید.

۷. گزینهٔ «۳»

در شروع کار نمودارها را رسم می‌کنیم. دقت کنید که:

$$x^۳ - ۳x^۲ + x + ۱ = (x-۱)(x^۲ - ۲x - ۱)$$

بنابراین $f(x)$ دارای سه ریشه به طول‌های $x = ۱$ و $x = ۱ + \sqrt{۲}$ و $x = ۱ - \sqrt{۲}$ است. پس نمودار $y = f(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود:



مختصات هر چهار نقطه را پیدا می‌کنیم. مختصات نقطهٔ A را سؤال داده است: $A=(۲,f(۲))=(۲,-۱)$. خط L در A بر $f(x)$ مماس است. بنابراین شیب آن با $f'(۲)$ برابر است. یعنی:

$$a_L=f'(۲)=(۳x^۲-۶x+۱)_{x=۲}=۱$$

و بنابراین:

$$L: y+۱=۱(x-۲)\Rightarrow y=x-۳$$

برای یافتن مختصات B، کافی است تلاقی دوم خط L و تابع $f(x)$ را بیابیم. یعنی معادلهٔ $f(x)=x-۳$ را حل کنیم. دقت کنید، از آن‌جا که $y=x-۳$ در نقطهٔ $x=۲$ بر $y=f(x)$ مماس است، پس معادلهٔ بالا دارای ریشهٔ مضاعف $x=۲$ است.

$$f(x)-x+۳=(x-۲)^۲(x-x_B)$$

$$\Rightarrow x^۳-۳x^۲+۴=(x-۲)^۲(x-x_B)$$

با مقایسهٔ ضرایب ثابت دو طرف تساوی اخیر، معلوم می‌شود که:

$$-۴x_B=۴\Rightarrow x_B=-۱$$

البته بهتر است دانش‌آموز عزیز همهٔ ضرایب دو طرف را با هم مساوی قرار دهد تا این عملیات مهم را بهتر درک کند. حالا هر کاری هم که بکنیم، آخرش به همین $x_B=-۱$ می‌رسیم که عملاً مختصات نقطهٔ B را می‌دهد:

$$B=(-۱,f(-۱))=(-۱,-۴)$$

برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ C، ابتدا باید معادلهٔ L' را به‌دست آوریم. این‌جا از موازی بودن L و L' می‌فهمیم که شیب L' برابر ۱ است. لذا طول نقطهٔ C، یعنی x_C، در معادلهٔ $f'(x)=۱$ صدق می‌کند. همین خیلی خوب است.

$$f'(x)=۱\Rightarrow ۳x^۲-۶x+۱=۱\Rightarrow ۳x(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۲$$

$$\xrightarrow{x_A=۲} x_A=۲,\ x_C=۰$$

پس مختصات C هم به‌دست آمد: $C=(x_C\,,f(x_C))=(۰\,,f(۰))=(۰\,,۱)$.
خط L' هم که دارای شیب ۱ و گذرنده از $C=(۰\,,۱)$ است. این یعنی:
$L':y=x+۱$
برای به‌دست آوردن مختصات نقطهٔ D، کافی است دقت کنیم که طول نقطهٔ D همان تلاقی دوم $f(x)$ و خط L' است.

$$x^۳-۳x^۲+x+۱=x+۱\Rightarrow x^۳-۳x^۲=۰$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow\\ \text{انتظارش را داشتیم}}}{x^۲}(x-۳)=۰\Rightarrow x_D=۳$$

در نتیجه:

$$y_D=f(x_D)=f(۳)=۲۷-۲۷+۳+۱=۴$$

حالا داریم:

$$A=(۲\,,-۱)\,,B=(-۱\,,-۴)\,,C=(۰\,,۱)\,,D=(۳\,,۴)$$

برای محاسبهٔ مساحت چهارضلعی ABCD مطمئن‌ترین روش این است که آن را به دو مثلث تقسیم کنیم:

$$S_{ABCD}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{ACD}}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۲&-۱\\-۱&-۴\\۰&۱\\۲&-۱\end{vmatrix}+\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۲&-۱\\۰&۱\\۳&۴\\۲&-۱\end{vmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۲}|(-۸-۱-۱-۲)|+\frac{۱}{۲}|(۲-۳-۳-۸)|=\frac{۱}{۲}|۱۲|+\frac{۱}{۲}|۱۲|$$
$$=۶+۶=۱۲$$

تبصره: در واقع ABCD یک متواضی‌الاضلاع است.

۸. گزینهٔ «۴»

بیایید $g(x)$ را بهتر بشناسیم. از لحاظ ضابطه‌ای $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f^۲(x)}$ است. اما این ضابطه خودش چیست؟ این ضابطه خیلی شبیه به مشتق تابع $\dfrac{۱}{f(x)}$ است، اما دقیقاً آن نیست. زیرا:

$$(\frac{۱}{f(x)})'=\frac{-f'(x)}{f^۲(x)}=-g(x)$$

از این‌جا می‌فهمیم که در واقع:

$$g(x)=(-\frac{۱}{f(x)})'$$

حالا معلوم شد که باید از $\frac{1}{f(x)}$ مشتق بگیریم (و در آخر قرینه کنیم):

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{x^4+x-2}{x-1}=\frac{(x^4-1)+(x-1)}{(x-1)}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)+(x-1)}{(x-1)}$$

$$=\frac{(x-1)((x+1)(x^2+1)+1)}{(x-1)}=x^3+x^2+x+2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=3x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow g(x)=-\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-(3x^2+2x+1)$$

بحث ســـاده‌تر شد. سؤال می‌گوید عرض‌ازمبدأ خطی که در $x=k$ بر نمودار $y=g(x)$ مماس می‌شود، برابر ۳ است. یعنی:

شیب خط: $g'(k)=-(6k-2)=-2-6k$

معادلهٔ خط: $y-g(k)=(-2-6k)(x-k)\Rightarrow y+3k^2+2k+1$

$$=x(-2-6k)+k(6k+2)\Rightarrow y=(-2-6k)\ x+\underbrace{3k^2-1}_{\text{عرض‌ازمبدأ}}$$

$$\Rightarrow 3k^2-1=3\Rightarrow k=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

و در نتیجه:

$$\text{شیب خط}=-2-6k=-2\mp\frac{12}{\sqrt{3}}$$

۹. گزینهٔ «۳»

نقطـــهٔ $M(x,y)$ روی نمودار $f^{-1}(x)$ قـــرار دارد. پس $y=f^{-1}(x)$. یعنی $M=(x,f^{-1}(x))$. از طرفی فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات هم برابر است با: $g(x)=\sqrt{x^2+(f^{-1}(x))^2}$. تابعی که باید از آن مشـــتق بگیریم و آهنگ لحظه‌ای تغییر را حساب کنیم، پیدا شد! حالا داریم:

$$g'(x)=\frac{2x+2(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))'}{2\sqrt{x^2+(f^{-1}(x))^2}}\Rightarrow g'(1)=\frac{2+2f^{-1}(1)(f^{-1}(x))'_{x=1}}{2\sqrt{1+f^{-1}(1)}}$$

امّا $f(x)=\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ است. بنابراین:

$$f^{-1}(1)=a\Rightarrow 1=f(a)=\frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}\Rightarrow\sqrt{a}+2=2a+\sqrt{a}\Rightarrow a=1$$

حالا برویم سراغ مشتق $f^{-1}(x)$ در نقطهٔ $x=1$. دقت کنید که:

$$f(x)=\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\Rightarrow f^{-1}(\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2})=x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق بگیرید.}}\frac{(2+\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2)-(\frac{1}{2\sqrt{x}})(2x+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

$$\times(f^{-1}(\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}))'=1\xrightarrow{x=1}\frac{\frac{5}{2}(3)-\frac{1}{2}(3)}{9}\times(f^{-1}(1))'=1$$

$$\Rightarrow(f^{-1}(1))'=\frac{9}{\frac{15}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

لذا داریم:

$$g'(1)=\frac{2+2\times1\times(\frac{3}{2})}{2\sqrt{1+1}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

در ابتدا دقت داریم که $\alpha+\beta=1$ و $\alpha\beta=-1$ است، زیرا α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ هستند. بنابراین:

$$\alpha x^2+x+\beta=\alpha x^2+x+(1-\alpha)=(\alpha x+1-\alpha)(x+1)$$
$$=(\alpha x+\beta)(x+1)$$

و:

$$\beta x^2+x+\alpha=\beta x^2+x+1-\beta=(\beta x+1-\beta)(x+1)$$
$$=(\beta x+\alpha)(x+1)$$

بنابراین:

$$f(x)=|(\alpha x+\beta)(x+1)|(\beta x+\alpha)(x+1)$$

کاندیداهای مشتق‌ناپذیری، جواب‌های $|(\alpha x+\beta)(x+1)|=0$ هستند. یعنی $x=-1$ و $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.

تابع $f(x)$ در $x=-1$ مشتق دارد، زیرا $x=-1$ ریشهٔ مضاعف $(\alpha x+\beta)(\beta x+\alpha)(x+1)^2$ است.

اما $f(x)$ در $x=-\frac{\beta}{\alpha}$ مشتق ندارد، زیرا این ریشه با دو ریشهٔ دیگر تفاوت دارد. زیرا:

$$1)\ -\frac{\beta}{\alpha}\neq-1\Leftrightarrow\beta\neq\alpha$$

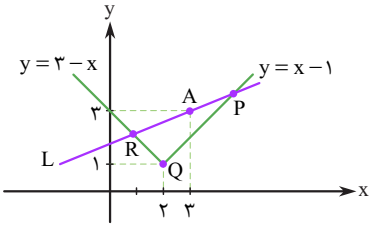
$$۲)\ -\frac{\beta}{\alpha} \neq -\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \alpha^{۲} \neq \beta^{۲}$$

بنابراین $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است.

نیتروتست فصل ۱۲

۱. گزینهٔ «۲»

نموداری را رسم می‌کنیم تا به محاسبات ما جهت بدهد.



از آن‌جا که شیب $y = x - ۱$ برابر ۱ و شیب $y = ۳ - x$ برابر ۱− است، نتیجه می‌گیریم که $P\hat{Q}R = ۹۰^\circ$. لذا مثلث PQR قائم‌الزاویه است و این یعنی:

$$S_{\overset{\triangle}{PQR}} = \frac{۱}{۲}|PQ| \times |RQ|$$

مختصات $Q = (۲, ۱)$ معلوم است، کافی است مختصات P و R را پیدا کنیم.
از آن‌جا که: $L: y - ۳ = a(x - ۳) \Rightarrow y = ax - ۳a + ۳$ است، P و Q را می‌توانیم از تلاقی L با خط‌های $y = x - ۱$ و $y = ۳ - x$ به‌دست آوریم:

$$P: x - ۱ = ax - ۳a + ۳ \Rightarrow x(a - ۱) = ۳a - ۴ \Rightarrow x_P = \frac{۳a - ۴}{a - ۱}$$

$$\Rightarrow P = (x_P, x_P - ۱) = (\frac{۳a - ۴}{a - ۱}, \frac{۳a - ۴}{a - ۱} - ۱) = (\frac{۳a - ۴}{a - ۱}, \frac{۲a - ۳}{a - ۱})$$

$$R: ۳ - x = ax - ۳a + ۳ \Rightarrow x_R = \frac{۳a}{a + ۱}$$

$$R = (x_R, ۳ - x_R) = (\frac{۳a}{a + ۱}, ۳ - \frac{۳a}{a + ۱}) = (\frac{۳a}{a + ۱}, \frac{۳}{a + ۱})$$

بنابراین:

$$|PQ| = \sqrt{(\Delta x)^۲ + (\Delta y)^۲} = \sqrt{(\frac{۳a - ۴}{a - ۱} - ۲)^۲ + (\frac{۲a - ۳}{a - ۱} - ۱)^۲}$$

$$= \sqrt{(\frac{a - ۲}{a - ۱})^۲ + (\frac{a - ۲}{a - ۱})^۲} = \sqrt{۲}\,|\frac{a - ۲}{a - ۱}|$$

$$|RQ| = \sqrt{(\Delta x)^۲ + (\Delta y)^۲} = \sqrt{(\frac{۳a}{a + ۱} - ۲)^۲ + (\frac{۳}{a + ۱} - ۱)^۲} = \sqrt{۲}\,|\frac{a - ۲}{a + ۱}|$$

بنابراین تابعی که می‌خواهیم، مینیمم آن را به‌دست آوریم، چنین است:

$$S=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\,|\frac{a-2}{a-1}|\times\sqrt{2}\,|\frac{a-2}{a+1}|)=\frac{(a-2)^2}{|a^2-1|}$$

بدیهی است که $-1<a<1$ است، زیرا قرار است خط‌ها تلاقی داشته باشند. پس:

$$S=\frac{(a-2)^2}{1-a^2}$$

در نتیجه $-1<x<1$ ؛ $f(x)=\frac{(x-2)^2}{1-x^2}$. حالا باید $\min f(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(1-x^2)+2x(x-2)^2}{(1-x^2)^2}=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(2-2x^2+2x(x-2))=(x-2)(2-4x)=0$$

$$\Rightarrow x=2 \text{ یا } x=\frac{1}{2}\xrightarrow{-1<x<1}x=\frac{1}{2}$$

و در آخر داریم:

$$\min f(x)=f(\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2}-2)^2}{1-(\frac{1}{2})^2}=3$$

۲. گزینهٔ «۳»

قدرمطلق‌ها را در کاربرد مشتق، همیشه چندضابطه‌ای کنید و اگر توانستید رسم کنید. هیچ‌وقت مستقیماً با خود قدرمطلق سؤال را حل نکنید.

$$f(x)=ax+|x^2-1|=\begin{cases}ax+x^2-1 & x\geq 1\\ ax-x^2+1 & -1<x<1\\ ax+x^2-1 & x\leq -1\end{cases}$$

اول نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم و بعد سراغ ضابطه‌ها می‌رویم. دقت کنید که تابع $f(x)$ پیوسته است. پس در نقاط مرزی جهشی ندارد و اتفاق خاصی از لحاظ مینیمم یا ماکزیمم نسبی رخ نمی‌دهد. اما برای ضابطه‌ها داریم:

$x\geq 1\Rightarrow f'(x)=2x+a\Rightarrow$

x		$-\frac{a}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

یعنی در $x=-\frac{a}{۲}$ می‌نیمم نسبی داریم. ولی این موضوع نیازمند این است که $\frac{-a}{۲}>۱$ یعنی $a<-۲$ باشد. خلاصه این‌که اگر $a<-۲$ باشد، $f(x)$ در همان ضابطهٔ اول یک مینیمم نسبی دارد.

در ضابطهٔ دوم داریم:

$-۱<x<۱ \Rightarrow f'(x)=a-۲x \Rightarrow$

x		$\frac{a}{۲}$	
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

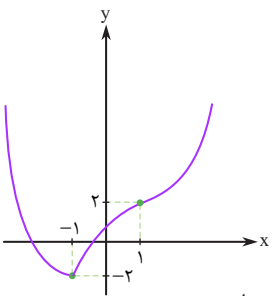
این یعنی $f(x)$ در $x=\frac{a}{۲}$ ماکزیمم نسبی دارد. ما می‌خواهیم $f(x)$، ماکزیمم نسبی نداشته باشد. پس باید کاری کنیم که $\frac{a}{۲}\notin(-۱,۱)$. این یعنی $a\notin(-۲,۲)$. در ضابطهٔ سوم داریم:

$x<-۱ \Rightarrow f'(x)=۲x-a \Rightarrow$

x		$\frac{a}{۲}$	
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

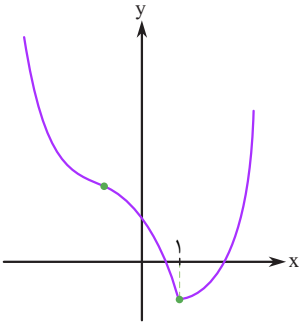
که باز هم یعنی $f(x)$ در $x=\frac{a}{۲}$ مینیمم نسبی دارد. شرط هم این است که $\frac{-a}{۲}<-۱$، یعنی $a>۲$. نتیجه این‌که a باید عضو $(-۲,۲)$ نباشد و این‌که $a>۲$ یا $a<-۲$. به زبان ساده‌تر، کافی است $|a|>۲$ باشد. ولی حالت $a=۲$ و $a=-۲$ را هم باید بررسی کنیم که کاری بسیار ساده است.

$$a=۲ \Rightarrow f(x)=۲x+|x^۲-۱|=\begin{cases} x^۲+۲x-۱ & x\geq ۱ \\ -x^۲+۲x+۱ & -۱<x<۱ \\ x^۲+۲x-۱ & x\leq -۱ \end{cases}$$



مینیمم دارد، ماکزیمم ندارد.

$$a=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲x+|x^۲-۱|=\begin{cases} x^۲-۲x-۱ & x\geq ۱ \\ -x^۲-۲x+۱ & -۱<x<۱ \\ x^۲-۲x-۱ & x\leq -۱ \end{cases}$$



مینیمم دارد، ماکزیمم ندارد.

در نتیجه جواب نهایی مسئله $|a|\geq ۲$ است.

۳. گزینهٔ «۲»

از این‌که $A=(a\,,a+۱)$ اکسترمم نسبی این تابع است نتیجه می‌گیریم که $f(a)=a+۱$ و $f'(a)=۰$ است یعنی:

$$\begin{cases} f(a)=a+۱ \\ f'(a)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^۳-(a+۲)a+b=a+۱ \\ ۳a^۲-(a+۲)=۰ \end{cases}$$

از معادلهٔ $۳a^۲-a-۲=۰$ به‌راحتی $a=۱$ یا $-\frac{۲}{۳}$ به‌دست می‌آید. فعلاً b را حساب نکنیم، چون قرار است یکی از این دو مقدار a پذیرفته نشود. اگر $a=۱$ باشد، داریم:

$$f(x)=x^۳-۳x+b$$
$$\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳ \Rightarrow$$

x		-۱		۱	
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

در این حالت تابع در $x=۱$ مینیمم نسبی دارد. یعنی در $x=a$ واقعاً مینیمم نسبی داریم و لذا تا این‌جا فهمیدیم که $a=۱$ شرایط مسئله را برقرار می‌کند.

ولی $a=-\frac{۲}{۳}$ قابل قبول نیست، زیرا با قراردادن $a=-\frac{۲}{۳}$ می‌بینیم با این‌که

$(-\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}) = (a, a+۱)$ یک اکسترمم نسبی است ولی از نوع ماکزیمم نسبی است نه مینیمم نسبی:

$$a = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow f(x) = x^۳ - \frac{۴}{۳}x + b$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - \frac{۴}{۳}$$

x		$-\frac{۲}{۳}$		$\frac{۲}{۳}$	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+
$f(x)$	↗		↘		↗

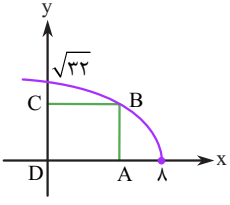
پس در این مســـئله فقط $a = ۱$ قابل قبول است. با قرار دادن $a = ۱$ در $f(x)$ و در $f(a) = a + ۱$ داریم:

$$f(x) = x^۳ - ۳x + b \xrightarrow{f(۱)=۲} ۱ - ۳ + b = ۲ \Rightarrow b = ۴$$

حالا از جدول تعیین علامت حالت اول معلوم است که ماکزیمم نسبی $f(x)$ همان $f(-۱) = ۶$ است.

۴. گزینهٔ «۳»

منحنی $y = \sqrt{۳۲ - ۴x}$ به سادگی رسم می‌شود:



مختصات نقاط ساده است.

$$A(x, ۰), B = (x, \sqrt{۳۲ - ۴x}), C = (۰, \sqrt{۳۲ - ۴x}), D = (۰, ۰)$$

بنابراین محیط ABCD می‌شود: $P = ۲(AD + AB) = ۲(x + \sqrt{۳۲ - ۴x})$

پس دنبال ماکزیمم تابع $f(x) = ۲(x + \sqrt{۳۲ - ۴x})$ هستیم:

$$f'(x) = ۲(۱ - \frac{۴}{۲\sqrt{۳۲ - ۴x}}) = ۰ \Rightarrow \sqrt{۳۲ - ۴x} = ۲$$

$$\Rightarrow ۳۲ - ۴x = ۴ \Rightarrow x = ۷$$

در نتیجه:

$$\max P = \max f(x) = f(۷) = ۲(۷ + \sqrt{۳۲ - ۲۸}) = ۱۸$$

۵. گزینهٔ «۱»

به کمک ریشه‌های تابع (که همان ۳−، ۳، ۲−، ۲، ۱−، ۱ = x هستند) و اکسترمم‌هایش، نمودار تابع را رسم می‌کنیم. پس ابتدا اکسترمم‌های تابع را به کمک مشتق پیدا می‌کنیم:

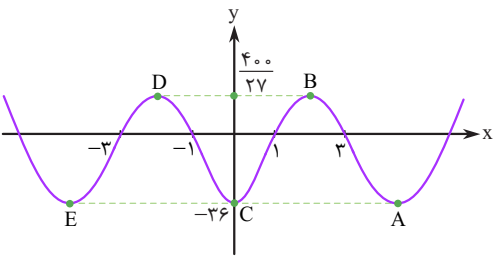
$$f(x) = (x^۲ - ۱)(x^۲ - ۴)(x^۲ - ۹) \Rightarrow f(x) = (x^۴ - ۵x^۲ + ۴)(x^۲ - ۹)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{۶} - ۱۴x^{۴} + ۴۹x^{۲} - ۳۶$$
$$\Rightarrow f'(x) = ۶x^{۵} - ۵۶x^{۳} + ۹۸x = ۲x(۳x^{۴} - ۲۸x^{۲} + ۴۹)$$
$$= ۲x(۳x^{۲} - ۷)(x^{۲} - ۷)$$
$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x = ۰ , \pm\sqrt{\frac{۷}{۳}} , \pm\sqrt{۷}$$

x		$-\sqrt{۷}$		$-\sqrt{\frac{۷}{۳}}$		۰		$\sqrt{\frac{۷}{۳}}$		$\sqrt{۷}$	
$f'(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗		↘		↗

بنابراین تابع در $A(\sqrt{۷} , f\sqrt{۷}))$ و $C(۰ , f(۰)) , E(-\sqrt{۷} , f(-\sqrt{۷}))$ مینیمم نسبی دارد. همچنین تابع در $B(\sqrt{\frac{۷}{۳}} , f(\sqrt{\frac{۷}{۳}})) , D(-\sqrt{\frac{۷}{۳}} , f(-\sqrt{\frac{۷}{۳}}))$ ماکزیمم نسبی دارد. با یک عددگذاری ساده مشخص می‌شود که $A(\sqrt{۷} , -۳۶)$ و $C(۰ , -۳۶)$ و $E(-\sqrt{۷} , -۳۶)$ و در ضمن $B(\sqrt{\frac{۷}{۳}} , \frac{۴۰۰}{۲۷})$ و $D(-\sqrt{\frac{۷}{۳}} , \frac{۴۰۰}{۲۷})$ هستند.

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر می‌شود:



با توجه به این که خط $y = k$ موازی محور x است، متوجه می‌شویم:

- به‌ازای $k < -۳۶$ تلاقی ندارند.
- به‌ازای $k = -۳۶$ در ۳ نقطه تلاقی دارند.
- به‌ازای $-۳۶ < k < \frac{۴۰۰}{۲۷}$ در ۶ نقطه تلاقی دارند.
- به‌ازای $k = \frac{۴۰۰}{۲۷}$ در ۴ نقطه تلاقی دارند.

ـ به ازای $k > \frac{۴۰۰}{۲۷}$ در ۲ نقطه تلاقی دارند.

پس فقط به‌ازای $k = -۳$ این دو نمودار ۳ نقطهٔ تلاقی دارند.

۶. گزینهٔ «۱»

تابع در $x = ۲$ اکسترمم نسبی دارد یعنی $f'(۲) = ۰$.

$$f(x) = \frac{۴x + a}{x^۲ + ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴(x^۲ + ۱) - ۲x(۴x + a)}{(x^۲ + ۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=۰} \frac{-۴(۲^۲) - ۲a(۲) + ۴}{(۲^۲ + ۱)^۲} = \frac{-۴a - ۱۲}{۵^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow a = -۳ \Rightarrow f'(x) = \frac{-۴x^۲ + ۶x + ۴}{(x^۲ + ۱)^۲}$$

اکنون مشتق تابع را مساوی با صفر قرار می‌دهیم:

$$-۴x^۲ + ۶x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲, \frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=۲} f(۲) = ۱ \Rightarrow A(۲, ۱) \\ \xrightarrow{x=\frac{-۱}{۲}} f(\frac{-۱}{۲}) = -۴ \Rightarrow B(\frac{-۱}{۲}, -۴) \end{cases}$$

معادلهٔ خط گذرنده از A و B به صورت $y = ۲x - ۳$ است.

۷. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم که صعودی یا نزولی بودن تابع، با انتقال دادن آن تابع هیچ تغییری نمی‌کند. ما تابع $f(x+a)$ را در نظر می‌گیریم که محاسبات بسیار ساده‌تری دارد.

$$g(x) = f(x + a) = (x + a - ۱)^۲ + \sqrt{x} - ۱ \quad ; \quad x \geq ۰$$

حالا می‌خواهیم برای $x \geq ۰$ داشته باشیم $g'(x) \geq ۰$. می‌شود:

$$g'(x) = ۲(x + a - ۱) + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = ۲x + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + ۲(a - ۱) \geq ۰$$

برای این‌که $g'(x) \geq ۰$ برای هر $x > ۰$ برقرار باشد، کافی است که $\min g'(x) \geq ۰$ باشد. پس:

$$\min g'(x) : g''(x) = ۰ \Rightarrow ۲ - \frac{۱}{۴x\sqrt{x}} = ۰ \Rightarrow x\sqrt{x} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$$

لذا:

$$\min g'(x) = g'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} + 1 + 2(a-1) \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

۸. گزینهٔ «۲»

فرض کنید $y = f(x)$ باشد. ما رابطهٔ $\sqrt{x+f(x)} + \sqrt{xf(x)} = \sqrt{2}+1$ را داریم و می‌خواهیم مینیمم تابع $g(x) = x + f(x)$ را به‌دست آوریم. پس در شروع باید $g'(x) = 0$ را حل کنیم: $g'(x) = 1 + f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -1$

لذا $\min g(x)$ برای مقداری از x رخ می‌دهد که $f'(x) = -1$ است. فرض کنیم این مقدار x_0 باشد. پس $f'(x_0) = -1$. با مشتق‌گرفتن از دو طرف رابطهٔ $\sqrt{x+f(x)} + \sqrt{xf(x)} = \sqrt{2}+1$، داریم:

$$\frac{1+f'(x)}{2\sqrt{x+f(x)}} + \frac{f(x)+xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}} = 0$$

$$\xrightarrow{x=x_0} \frac{1+f'(x_0)}{2\sqrt{x_0+f(x_0)}} + \frac{f(x_0)+x_0f'(x_0)}{2\sqrt{x_0f(x_0)}} = 0$$

$$\xrightarrow{f'(x_0)=-1} 0 + \frac{f(x_0)-x_0}{2\sqrt{x_0f(x_0)}} = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$$

پس x_0 عددی است که برای آن تساوی $f(x_0) = x_0$ را داریم. این یعنی:

$$\sqrt{x+f(x)} + \sqrt{xf(x)} = \sqrt{2}+1$$

$$\xrightarrow{x=x_0} \sqrt{x_0+f(x_0)} + \sqrt{x_0f(x_0)} = \sqrt{2}+1$$

$$\xrightarrow{f(x_0)=x_0} \sqrt{2x_0} + \sqrt{x_0^2} = \sqrt{2}+1 \xrightarrow[x_0 \geq 0]{2x_0 \geq 0} \sqrt{2x_0} + x_0 = \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x_0} = (\sqrt{2}+1-x_0) \Rightarrow 2x_0 = 3+2\sqrt{2}+x_0^2 - 2(\sqrt{2}+1)x_0$$

$$\Rightarrow x_0^2 - 2(\sqrt{2}+2)x_0 + 3 + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow (x_0-1)(x_0-3-2\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ یا } x_0 = 3+2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادلهٔ رادیکالی}]{\text{چک کردن}} x_0 = 1$$

لذا $x_0 = 1$ پس $f(x_0) = x_0 = 1$ و در نتیجه:

$$\min g(x) = g(x_0) = g(1) = 2$$

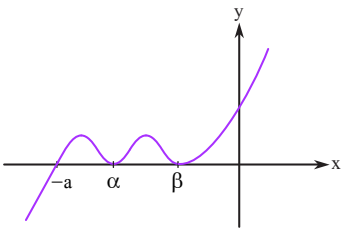
۹. گزینهٔ «۴»

سؤال پردردسر ولی مهمی است. اول راه‌حل باید دقت کنیم که ریشهٔ عبارت $(x+a)$ برابر $x=-a$ است و تحت هیچ شرایطی $x=-a$ ریشهٔ x^2+ax+1 نیست. زیرا $a^2-a^2+1=1\neq 0$. حواس خود را روی ریشه‌های x^2+ax+1 متمرکز می‌کنیم.

حالت اول: x^2+ax+1 دارای دو ریشه باشد. این یعنی:

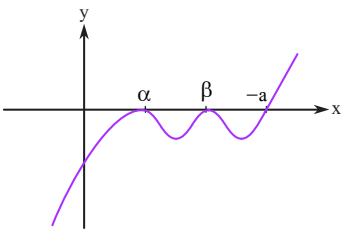
$$\Delta=a^2-4>0\Rightarrow a>2\cup a<-2$$

اول $a>2$ را بررسی می‌کنیم. در این حالت ریشهٔ $(x+a)$ برابر $-a$ است و $-a<-2$. از طرفی x^2+ax+1 دارای دو ریشهٔ منفی α و β است که معکوس هم هستند و هر دو از $-a$ بیشترند. این یعنی نمودار $y=f(x)$، در این حالت، به‌صورت زیر است:



همان‌طور که می‌بینید، در این حالت چهار نقطهٔ بحرانی داریم.

حالا $a<-2$ را بررسی می‌کنیم، دقیقاً مانند حالت قبل. نمودار به‌صورت زیر است:



در این حالت هم چهار نقطهٔ بحرانی داریم.

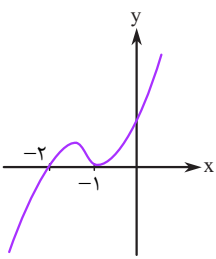
حالت دوم: x^2+ax+1 دارای ریشهٔ مضاعف باشد. یعنی:

$$\Delta=a^2-4=0\Rightarrow a=2 \text{ یا } -2$$

اگر $a=2$ باشد، آن‌گاه:

$$f(x)=(x+2)|(x+1)^2|=(x+2)(x+1)^2$$

در این حالت دو نقطهٔ بحرانی داریم. به نحو کاملاً مشابه برای $a=-2$ هم دو نقطهٔ بحرانی داریم.



حالت سوم: x^2+ax+1 ریشه نداشته باشد. یعنی $\Delta<0$:

$$a^2-4<0 \Rightarrow a^2<4 \Rightarrow -2<a<2$$

در این حالت عبارت x^2+ax+1 همواره مثبت است و لذا $|x^2+ax+1|=x^2+ax+1$. حالا داریم:

$$f(x)=(x+a)(x^2+ax+1)$$

در این حالت مشتق می‌گیریم:

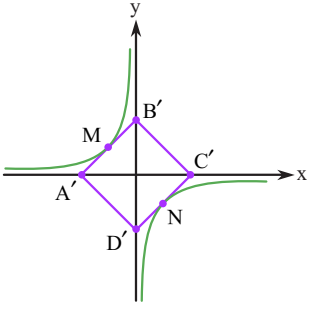
$$f'(x)=1(x^2+ax+1)+(x+a)(2x+a)$$

$$=3x^2+4ax+a^2+1$$

معادلهٔ درجهٔ ۲ هم که حداکثر دو جواب دارد. پس کلاً، تحت هیچ شرایطی سه نقطهٔ بحرانی نداریم.

۱۰. گزینهٔ «۲»

همه می‌دانیم که انتقال اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد. در این مسئله تابع ما $f(x)=\frac{2x-8}{x-3}=2-\frac{2}{x-3}$ است. با انتقالِ $g(x)=f(x+3)-2$، به ضابطهٔ $\frac{-2}{x}$ می‌رسیم. پس در واقع مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ را می‌خواهیم:



فرض کنید شیب خط‌های $A'B'$ و $D'C'$ برابر k باشد. این یعنی:

$$f'(x_M)=f'(x_N)=k \Rightarrow \frac{2}{x_M^2}=\frac{2}{x_N^2}=k$$

$$\Rightarrow x_M=-\sqrt{\frac{2}{k}}\,,\ x_N=\sqrt{\frac{2}{k}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M=(x_M\,,\dfrac{-۲}{x_M}) \Rightarrow M=(-\sqrt{\dfrac{۲}{k}}\,,\sqrt{۲k}) \\ \text{و} \\ N=(x_N\,,\dfrac{-۲}{x_N}) \Rightarrow N=(\sqrt{\dfrac{۲}{k}}\,,-\sqrt{۲k}) \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ خط‌های گذرنده از B' و A' و C' و D' چنین است:

$$A'B': y-\sqrt{۲k}=k(x+\sqrt{\frac{۲}{k}})$$

$$C'D': y+\sqrt{۲k}=k(x-\sqrt{\frac{۲}{k}})$$

و حالا پیدا کردن مختصات A'، B'، C' و D' ساده است. ابتدا به کمک معادلهٔ خط $A'B'$ داریم:

$$B': x=۰\,,\, y-\sqrt{۲k}=k\sqrt{\frac{۲}{k}}=\sqrt{۲k} \Rightarrow B'=(۰\,,۲\sqrt{۲k})$$

$$A': y=۰ \Rightarrow ۰-\sqrt{۲k}=k(x+\sqrt{\frac{۲}{k}}) \Rightarrow -\sqrt{\frac{۸}{k}}=x$$

$$\Rightarrow A'=(-\sqrt{\frac{۸}{k}}\,,۰)$$

حالا به کمک خط $C'D'$ داریم:

$$C': y=۰ \Rightarrow \sqrt{۲k}=k(x-\sqrt{\frac{۲}{k}}) \Rightarrow \sqrt{\frac{۸}{k}}=x$$

$$\Rightarrow C'=(\sqrt{\frac{۸}{k}}\,,۰)$$

$$D': x=۰ \Rightarrow y+\sqrt{۲k}=k(۰-\sqrt{\frac{۲}{k}})=-\sqrt{۲k}$$

$$\Rightarrow y=-\sqrt{۲k}-\sqrt{۲k} \Rightarrow D'=(۰\,,-۲\sqrt{۲k})$$

از آن‌جا که دو قطر چهارضلعی بر هم عمود هستند، پس مساحت آن نصف حاصل‌ضرب دو قطر است.

$$S=\frac{۱}{۲}A'C'\times B'D'=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{\frac{۸}{k}})(۴\sqrt{۲k})=۱۶$$

نیتروتست فصل ۱۳

۱. گزینهٔ «۲»

اولاً برای این‌که بازه‌های $(\frac{2}{a}, a+1)$ و $(a-2, 2a)$ با معنی باشند، لازم است که:

$$\begin{cases} \frac{2}{a} < a+1 \\ a-2 < 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} - a - 1 < 0 \\ -2 < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2-a^2-a}{a} < 0 \\ -2 < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{(a+2)(a-1)}{a} < 0 \\ -2 < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$$

در ادامه برای این‌که $(\frac{2}{a}, a+1) \subseteq (a-2, 2a)$ باشد، لازم است که:

$$\begin{cases} \frac{2}{a} \geq a-2 \\ a+1 \leq 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2-a^2+2a}{a} \geq 0 \\ 1 < a \end{cases}$$

دقت کنید که از $a \geq 1$ می‌فهمیم a مثبت است. لذا نامعادلهٔ $\frac{2-a^2+2a}{a} \geq 0$ معادل است با $2-a^2+2a \geq 0$. با مربع کامل کردن یا دلتا داریم:

$$2-a^2+2a = 3-(a-1)^2 > 0 \Rightarrow 3 > (a-1)^2 \Rightarrow \sqrt{3} > |a-1|$$

ولی $a > 1$ است، سپس $|a-1| = a-1$ است. در نتیجه:

$$\sqrt{3} > a-1 \Rightarrow \sqrt{3}+1 > a$$

با اشتراک گرفتن داریم:

$$a \in [1, \sqrt{3}+1]$$

۲. گزینهٔ «۲»

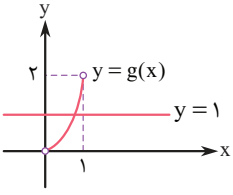
چون α حاده است، پس $\tan\alpha$ و $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ همگی مثبت هستند. شرط دنبالهٔ هندسی را اعمال می‌کنیم:

$$\sin\alpha\tan\alpha = \cos^2\alpha \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \cos^3\alpha$$

$$\Rightarrow 1-\cos^2\alpha = \cos^3\alpha \Rightarrow 1 = \cos^3\alpha + \cos^2\alpha$$

$$\xrightarrow[0<t<1]{\cos\alpha = t} 1 = t^3 + t^2$$

بنابراین باید بفهمیم معادلهٔ $t^3+t^2=1$ با شرط $0<t<1$ چند جواب دارد. برای این‌کار به تابع $g(x)=x^3+x^2\ ;\ x\in(0,1)$ توجه می‌کنیم. دقت کنید که: $g'(x)=3x^2+2x\ ;\ x\in(0,1)\Rightarrow g'(x)>0$ پس $g(x)$ اکیداً صعودی است. این یعنی نمودار $g(x)$ به‌صورت زیر است:



همان‌طور که می‌بینید، این نمودار و خط $y=1$ فقط یک نقطهٔ تلاقی دارند. پس فقط یک زاویهٔ α با ویژگی های موردنظر وجود دارد.

۳. گزینهٔ «۳»

چون $(\tan\alpha\ ,\ 2\ ,\ \cot\alpha)$ و $(\tan 2\alpha\ ,\ k\ ,\ \cot 2\alpha)$ دنباله‌های حسابی‌اند، پس:

$$\begin{cases}\tan\alpha+\cot\alpha=4\\ \tan 2\alpha+\cot 2\alpha=2k\end{cases}$$

از $\tan\alpha+\cot\alpha=4$ داریم:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=4\xrightarrow[\tan\alpha=t]{\text{وجود دو عبارت معکوس}}t+\frac{1}{t}=4$$

$$\Rightarrow t^2-4t+1=0\Rightarrow t=2+\sqrt{3}\ \text{یا}\ t=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=2+\sqrt{3}\ \text{یا}\ 2-\sqrt{3}\Rightarrow \alpha=75^\circ\ \text{یا}\ 15^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha=150^\circ\ \text{یا}\ 30^\circ\Rightarrow \tan 2\alpha+\cot 2\alpha=\tan 150^\circ+\cot 150^\circ\ \text{یا}\ \tan 30^\circ+\cot 30^\circ$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم که:

$$2k=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\ \text{یا}\ \frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\Rightarrow k=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \text{یا}\ \frac{-2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow k=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

۴. گزینهٔ «۴»

۶۰ درصد جامعه زن هستند. پس ۴۰ درصد آن مرد هستند. از طرفی ۲۰ درصد جامعه کارمند هستند. از طرف دیگر ۱۶ درصد کارمندان، مرد هستند. یعنی ۱۶ درصد از ۲۰ درصد جامعه که کارمندند، مرد هستند. لذا ۸۴ درصد کارمندان، زن هستند. (نه ۴ درصد!) حالا باید ببینیم این ۸۴ درصد کارمندان، چند درصد زنان را تشکیل می‌دهند:

$$84\ \text{درصد کارمندان}=\frac{84}{100}\times\frac{20}{100}=16/8\%$$

$$۱۶/۸٪ = x \times ۶۰٪ \Rightarrow x = \frac{۱۶/۸}{۶۰} = ۰/۲۸$$

۵. گزینهٔ «۲»

سه جملهٔ اول این دنباله را $a, at, at^۲$ می‌گیریم. داریم:

$$a + at + at^۲ = ۲۶$$

دنبالهٔ جدیدی که صورت سوال دارد می‌سازد $a+۳, at+۴, at^۲+۲$ است. برای این‌که این دنباله هم هندسی باشد، لازم است که:

$$(a+۳)(at^۲+۲) = (at+۴)^۲$$

$$\Rightarrow a^۲t^۲ + ۲a + ۳at^۲ + ۶ = a^۲t^۲ + ۸at + ۱۶$$

$$\Rightarrow ۳at^۲ - ۸at + ۲a - ۱۰ = ۰$$

پس یک دستگاه داریم:

$$\begin{cases} at^۲ + at + a = ۲۶ \\ ۲at^۲ - ۸at + ۲a = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳at^۲ + ۳at + ۳a = ۷۸ \\ ۳at^۲ - ۸at + ۲a = ۱۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{منها کنید}} ۱۱at + a = ۶۸ \Rightarrow a = \frac{۶۸}{۱۱t+۱}$$

با قرار دادن $a = \frac{۶۸}{۱۱t+۱}$ در معادلهٔ $a + at + at^۲ = ۲۶$ داریم:

$$\frac{۶۸}{۱۱t+۱} + \frac{۶۸t}{۱۱t+۱} + \frac{۶۸t^۲}{۱۱t+۱} = ۲۶ \Rightarrow \frac{۶۸(t^۲+t+۱)}{۱۱t+۱} = ۲۶$$

$$۳۴(t^۲+t+۱) = ۱۳(۱۱t+۱)$$

$$\Rightarrow ۳۴t^۲ - ۱۰۹t + ۲۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (۳۴t-۷)(t-۳) = ۰ \Rightarrow t = ۳ \text{ یا } \frac{۷}{۳۴}$$

چون دنبالهٔ ما صعودی است، پس $t > ۱$. لذا $t = ۳$. در نتیجه:

$$a = \frac{۶۸}{۱۱t+۲} \Rightarrow a = ۲$$

دنبالهٔ قدیم $(۲, ۶, ۱۸)$ است. پس دنبالهٔ جدید $(۵, ۱۰, ۲۰)$ است که مجموع جملات دنبالهٔ جدید برابر ۳۵ است و قدرنسبت آن هم ۲ است.

۶. گزینهٔ «۳»

می‌دانیم ریشهٔ مثبت $x^۲ - x - n = ۰$ برابر با $\frac{۱+\sqrt{۱+۴n}}{۲}$ است. لذا $a_n = \frac{۱+\sqrt{۱+۴n}}{۲}$. حالا می‌خواهیم (a_p , a_q , a_r) تشکیل دنبالهٔ حسابی اکیداً صعودی بدهند، لذا $a_p < a_q < a_r$. چند جملهٔ اول a_n را می‌نویسیم تا به دید بهتری از سؤال برسیم:

$$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, ۲, \frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲}, ۳, \frac{۱+\sqrt{۲۹}}{۲}$$

$$, \frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۳۷}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۴۱}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۴۱}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۴۵}}{۲}, ۴, \ldots$$

دقت کنید که $(۲,۳,۴)$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. از طرفی هیچ سه جملهٔ دیگری از جملات بالا تشکیل دنبالهٔ حسابی نمی‌دهند، زیرا اگر دنبالهٔ حسابی وجود داشته باشد، لازم است که:

$$(\frac{۱+\sqrt{a}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{b}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{c}}{۲}) \Rightarrow ۱+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{۲} = ۱+\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{c} = ۲\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow a+c+۲\sqrt{ac} = ۴b \Rightarrow \sqrt{ac} = \frac{۴b-a-c}{۲}$$

لازمهٔ این تساوی این است که $\sqrt{ac}$ عددی گویا باشد که این یعنی ac مربع کامل باشد، هیچ دوتایی از $۵,۱۳,۱۷,۲۱,۲۹,۳۳,۳۷,۴۱,۴۵$ مربع کامل نیست، به‌جز $۴۵,۵$. پس باید $a=۵$ و $c=۴۵$ باشد. اما در این حالت نیز داریم:

$$(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{b}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۴۵}}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۱+\sqrt{۵}+۱+۳\sqrt{۵}}{۲} = ۱+\sqrt{b} \Rightarrow ۱+۲\sqrt{۵} = ۱+\sqrt{b} \Rightarrow b = ۲۰$$

ولی در اعداد بالا $\frac{۱+\sqrt{۲۰}}{۲}$ نداریم!

بنابراین کوچک‌ترین جواب ممکن همان $(۲,۳,۴)$ است و کمترین مقدار a_r برابر ۴ است. که این یعنی:

$$a_r = ۴ \Rightarrow \frac{۱+\sqrt{۱+۴r}}{۲} = ۴ \Rightarrow ۱+۴r = ۴۹ \Rightarrow r = ۱۲$$

یعنی کمترین مقدار r برابر ۱۲ است.

۷. گزینهٔ «۱»

از آن‌جا که a عددی طبیعی است و شرط بازه بودن $(۵-a\,,\,۲a)$ داریم:

$$۵-a<۲a \Rightarrow \frac{۵}{۳}<a \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} ۲\le a$$

حالا اگر a عددی زوج باشد، آن‌گاه $۵-a$ فرد است. پس اعداد فرد موجود در بازهٔ $(۵-a\,,\,۲a)$ عبارت‌اند از $۷-a$ و $۹-a$. این یعنی باید:

$$۹-a<۲a<۱۱-a \xrightarrow{+a} ۹<۳a<۱۱ \Rightarrow ۳<a<\frac{۱۱}{۳}$$

ولی بازهٔ $(۳\,,\,\frac{۱۱}{۳})$ فاقد عدد طبیعی است. پس در این حالت به جوابی نمی‌رسیم.

اگر a عددی فرد باشد، اعداد فرد موجود در بازهٔ $(۵-a\,,\,۲a)$ عبارتند از: $۶-a$ و $۸-a$. لذا باید:

$$۸-a<۲a<۱۰-a \xrightarrow{+a} ۸<۳a<۱۰ \Rightarrow \frac{۸}{۳}<a<\frac{۱۰}{۳} \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} a=۳$$

با قرار دادن $a=۳$ به بازهٔ $(۲,۶)$ می‌رسیم که شامل دو عدد فرد ۳ و ۵ هستند.

۸. گزینهٔ «۱»

ابتدا دنباله را برای n های زوج $(n=۲k)$ و n های فرد $(n=۲k+۱)$ به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$a_n = \begin{cases} n^۲+۲n = n(n+۲) & ;n=۲k \\ n^۲-۲n = n(n-۲) & ;n=۲k+۱ \end{cases}$$

اکنون برای n های زوج داریم:

$$\frac{۱}{a_۲} = \frac{۱}{۲\times۴} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴})$$

$$\frac{۱}{a_۴} = \frac{۱}{۴\times۶} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶})$$

$$\frac{1}{a_6}=\frac{1}{6\times 8}=\frac{1}{2}(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})$$

$$\frac{1}{a_8}=\frac{1}{8\times 10}=\frac{1}{2}(\frac{1}{8}-\frac{1}{10})$$

به سادگی مشخص است که:

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_8}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{10})=\frac{1}{5}$$

همچنین برای x های فرد داریم:

$$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{3\times 1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})$$

$$\frac{1}{a_5}=\frac{1}{5\times 3}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$$

$$a_7=\frac{1}{7\times 5}=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})$$

$$a_9=\frac{1}{9\times 7}=\frac{1}{2}(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})$$

باز هم به سادگی مشخص است که:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_7}+\frac{1}{a_9}=-1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{9})=-\frac{5}{9}$$

بنابراین پاسخ برابر است با:

$$\frac{1}{5}+\frac{-5}{9}=\frac{-16}{45}$$

۹. گزینهٔ «۱»

دقت کنید که:

$$C_5=\{3x\,|\,2x\in A_5\}=\{3x\,|\,2x\in(\frac{1}{5},6)\}$$

$$=\{3x\,|\,x\in(\frac{1}{10},3)\}=(\frac{3}{10},9)$$

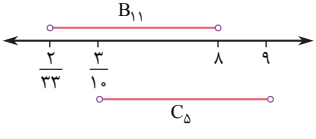
و از طرفی:

$$B_{11}:\{2x\,|\,3x\in A_{11}\}=\{2x\,|\,3x\in(\frac{1}{11},12)\}$$

$$=\{2x\,|\,x\in(\frac{1}{33},4)\}=(\frac{2}{33},8)$$

حال با رسم محور داریم:

بنابراین:



$$C_{۵} - B_{۱۱} = [۸ , ۹)$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

چون $f(x)$ تابعی خطی است، پس فرض کنید $f(x) = ax + b$. در این‌صورت $f^{-۱}(x) = \frac{x-b}{a}$ است. حالا داریم:

$$\begin{cases} f^{-۱}(a_{۵}) + f^{-۱}(a_{۷}) = ۲f^{-۱}(۱۰) \\ f(۱۰) + ۲f(a_{۱۸}) = ۳f(۲۰) \end{cases}$$

که با جای‌گذاری در $f(x)$ و $f^{-۱}(x)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{a_{۵} - b}{a} + \frac{a_{۷} - b}{a} = ۲(\frac{۱۰ - b}{a}) \\ ۱۰a + b + (۲a)a_{۱۸} + ۲b = ۳a(۲۰) + ۳b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{۵} + a_{۷} - ۲b = ۲۰ - ۲b \\ a(۱۰ + ۲a_{۱۸}) = ۶۰a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{۵} + a_{۷} = ۲۰ \\ ۱۰ + ۲a_{۱۸} = ۶۰ \end{cases}$$

اما می‌دانیم که در دنباله‌های حسابی، $a_{۵} + a_{۷} = ۲a_{۶}$ است. لذا داریم:

$$\begin{cases} ۲a_{۶} = ۲۰ \\ ۲(۵ + a_{۱۸}) = ۶۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{۶} = ۱۰ \\ ۵ + a_{۱۸} = ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{۶} = ۱۰ \\ a_{۱۸} = ۲۵ \end{cases}$$

حالا فرض می‌کنیم که قدرنسبت دنبالهٔ حسابی d باشد. در این‌صورت $a_{۱۸} = a_{۶} + ۱۲d$ و در نتیجه داریم:

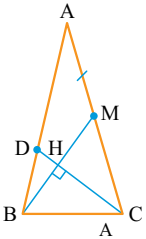
$$۲۵ = ۱۰ + ۱۲d \Rightarrow d = \frac{۱۵}{۱۲} = \frac{۵}{۴}$$

در انتها داریم:

$$a_{۱۶} = a_{۱۸} - ۲d = ۲۵ - \frac{۵}{۲} = ۲۲/۵$$

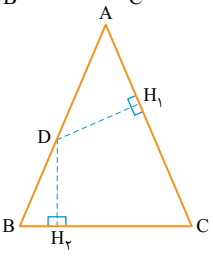
نیتروتست فصل ۱۴

۱. گزینهٔ «۴»



شکل مناسبی رسم می‌کنیم:

دو مثلث CHM و CHB به حالت یک ضلع و یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه هم‌نهشت هستند. لذا $BC = MC$. این یعنی $BC = \frac{AC}{۲}$. حالا BM را فراموش کنیم و به CD دقت کنیم:

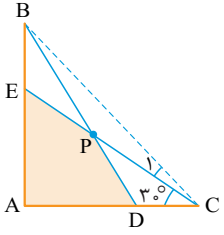


چون CD نیمساز C است، پس فاصلهٔ D از AC و AB مساوی است. یعنی $DH_۱ = DH_۲$. بنابراین:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH_۱ \times AC}{\frac{۱}{۲}DH_۲ \times BC} = \frac{AC}{BC} = ۲$$

کار تمام است.

۲. گزینهٔ «۱»



از B به C وصل می‌کنیم و اسم تقاطع AD و CE را هم P بگذاریم:

دقت کنید که $AD = AE = ۳$ و $AB = AC = ۳\sqrt{۳}$ است. بنابراین $\triangle BAC$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. این یعنی $\hat{C}_۱ = ۴۵^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵^\circ$. حالا داریم:

$$\frac{BP}{PD} = \frac{S_{\triangle CPB}}{S_{\triangle CDP}} = \frac{\frac{۱}{۲}BC \times CP \times \sin ۱۵^\circ}{\frac{۱}{۲} \times PC \times DC \times \sin ۳۰^\circ} = \frac{۲BC \sin ۱۵^\circ}{DC}$$

از طرفی $BC = (۳\sqrt{۳})\sqrt{۲} = ۳\sqrt{۶}$ و $DC = ۳\sqrt{۳} - ۳$. پس:

$$\frac{BP}{AD} = \frac{۲(۳\sqrt{۶})\sin ۱۵^\circ}{۳(\sqrt{۳} - ۱)} = \frac{۲\sqrt{۶}\sqrt{\frac{۱ - \cos ۳۰^\circ}{۲}}}{\sqrt{۳} - ۱}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۳}\sqrt{\frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲}}}{\sqrt{۳} - ۱} = \frac{\sqrt{۶(۲ - \sqrt{۳})}}{\sqrt{۳} - ۱} = \frac{\sqrt{۱۲ - ۶\sqrt{۳}}}{\sqrt{۳} - ۱} \overset{\text{روش ۲ab}}{=\!=\!=}$$

$$\frac{\sqrt{(۳-\sqrt{۳})^۲}}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۳-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}-۱}=\sqrt{۳}$$

بنابراین $BP=\sqrt{۳}x$ و $PD=x$ و داریم:

$$BD=(\sqrt{۳}+۱)x=۶\Rightarrow x=\frac{۶}{\sqrt{۳}+۱}\Rightarrow BP=\frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}$$

و در نهایت داریم:

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\overset{\triangle}{BAD}}-S_{\overset{\triangle}{BEP}}$$

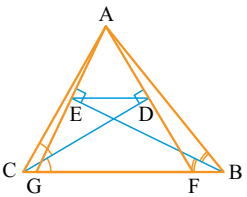
$$=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳\sqrt{۳}-\frac{۱}{۲}\times(۳\sqrt{۳}-۳)\times(\frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱})\sin ۳۰^\circ$$

$$=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۳(\sqrt{۳}-۱)\times ۶\sqrt{۳}}{۴(\sqrt{۳}+۱)}$$

$$=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۳(\sqrt{۳}-۱)^۲\times ۶\sqrt{۳}}{۸}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۳(۲-\sqrt{۳})۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$=\frac{۹\sqrt{۳}-۹\sqrt{۳}(۲-\sqrt{۳})}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}-۱۸\sqrt{۳}+۲۷}{۲}=\frac{۲۷-۹\sqrt{۳}}{۲}$$

۳. گزینهٔ «۳»



خطوط AD و AE را امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را به‌ترتیب در F و G قطع کنند. دو مثلث ACD و FCD درحالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت هستند، پس:

$CF=AC=۷$

همچنین دو مثلث ABE و GBE در حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت هستند، پس:

$BG=AB=۹$

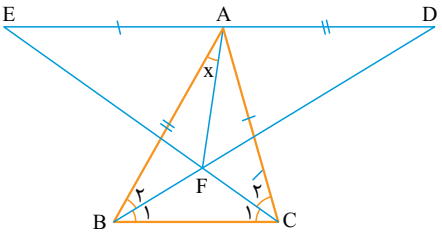
بنابراین:

$GF=BG+CF-BC=۹+۷-۱۰=۶$

اکنون در مثلث AGF توجه کنید که نقاط D و E وسط اضلاع AF و AG هستند. طبق قضیهٔ تالس در این مثلث داریم:

$$\frac{DE}{GF}=\frac{AE}{AG}\Rightarrow\frac{DE}{۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow DE=۳$$

۴. گزینهٔ «۳»



از خطوط موازی و مورب کمک می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D} \\ AB = AD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30^\circ$$

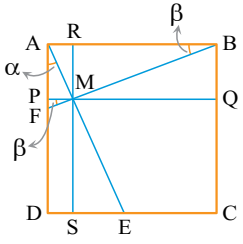
$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BC \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} \\ AC = AE \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{E} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 40^\circ$$

بنابراین در مثلث ABC، خطوط BF و CF نیمسازهای دو زاویهٔ B و C هستند. از طرفی چون در هر مثلثی، نیمسازها همرس هستند، نتیجه می‌گیریم AF نیمساز است.

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ \\ A\hat{C}B = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{A}C = 40^\circ$$

$$x = \frac{B\hat{A}C}{2} = 20^\circ$$

۵. گزینهٔ «۳»



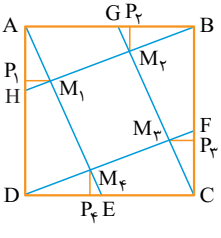
ابتدا به این شکل دقت کنید. می‌خواهیم کلی هندسه یاد بگیریم:

فرض کنید $DE = b$ و $AF = a$ و ضلع مربع هم ۸ باشد. در این‌صورت $\tan\beta = \frac{a}{8}$ و $\tan\alpha = \frac{b}{8}$. لذا در مثلث قائم‌الزاویهٔ MPF داریم:

$$\frac{PF}{MP} = \frac{a}{8}, \frac{MP}{AP} = \frac{b}{8}$$

حالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AP + PF = a \\ PF = \frac{a}{8}(MP) \\ AP = \frac{8}{b}(MP) \end{array}\right\} \Rightarrow (\frac{a}{8} + \frac{8}{b})MP = a \Rightarrow MP = \frac{a}{\frac{a}{8} + \frac{8}{b}}$$



در شکل موردنظر این مسئله باید چهار پاره‌خط شبیه به MP را به‌دست بیاوریم:

اندازه‌ها را هم که داریم بنابراین:

$$M_1P_1 = \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{8}{3}} = \frac{24}{67}, M_2P_2 = \frac{4}{\frac{4}{8} + \frac{8}{1}} = \frac{8}{17}$$

حالا می‌فهمیم که:

$$M_3P_3 = \frac{2}{\frac{2}{8}+\frac{8}{4}} = \frac{8}{9}, M_4P_4 = \frac{3}{\frac{3}{8}+\frac{8}{2}} = \frac{24}{35}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AM_1H}} = \frac{1}{2}\times M_1P_1 \times AH = \frac{12}{67}$$

$$S_{\overset{\triangle}{BM_2G}} = \frac{1}{2}\times M_2P_2 \times BG = \frac{1}{2}\times\frac{8}{17}\times 4 = \frac{16}{17}$$

$$S_{\overset{\triangle}{CM_3F}} = \frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times 2 = \frac{8}{3}$$

$$S_{\overset{\triangle}{DM_4E}} = \frac{1}{2}\times\frac{24}{35}\times 3 = \frac{36}{35}$$

مساحت ABCD هم که ۶۴ و مساحت مثلث‌های ADE و DFC و CGB و BHA هم خیلی ساده به‌دست می‌آید. پس:

$$S_{\text{رنگی}} = 64 - (S_{\overset{\triangle}{ADE}} + S_{\overset{\triangle}{DFC}} + S_{\overset{\triangle}{CBG}} + S_{\overset{\triangle}{BHA}}) +$$

$$(S_{\overset{\triangle}{AM_1H}} + S_{\overset{\triangle}{BM_2G}} + S_{\overset{\triangle}{CM_3F}} + S_{\overset{\triangle}{CM_4E}})$$

$$= 64 - (\frac{1}{2}\times 8\times 3 + \frac{1}{2}\times 8\times 2 + \frac{1}{2}\times 8\times 4 + \frac{1}{2}\times 8\times 1)$$

$$+(\frac{12}{67} + \frac{16}{17} + \frac{8}{9} + \frac{36}{35})$$

$$= 64 - (12+8+16+4) + (4 + \frac{13541}{358785}) \simeq 28/03$$

۶. گزینهٔ «۴»

همین اول کار باید $3|x| > 0$ ، $2[x] > 0$. که یعنی $x \geq 1$ است. لذا $3|x| = 3x$. در ضمن $3x \geq 3[x] > 2[x]$. بنابراین $2[x]$ نمی‌تواند بزرگترین ضلع مثلث باشد. پس فقط دو حالت داریم:

حالت اول: بزرگترین ضلع مثلث ۶ باشد. در این‌صورت نامساوی مثلث می‌گوید:

$$3x + 2[x] > 6$$

از طرفی این‌که ۶ بزرگترین ضلع است، یعنی:

$$3x \leq 6 \Rightarrow x \leq 2$$

پس $1 \leq x \leq 2$. اگر $1 \leq x < 2$ باشد، $[x] = 1$ است و داریم:

$$3x + 2 > 6 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

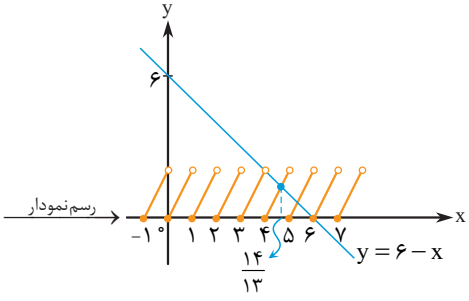
پس در این حالت $\frac{4}{3} < x < 2$ به‌دست می‌آید. اما اگر $x = 2$ باشد، اضلاع

مثلث ۶، ۴ و ۶ هستند که می‌دانیم یک مثلث متساوی‌الساقین است. لذا تا اینجای کار بازهٔ $x \in (\frac{۴}{۳}, ۲]$ را به‌دست آوردیم.

حالت دوم: $۳x$ بزرگ‌ترین ضلع باشد.

در این حالت اولاً $۳x \geq ۶$ که یعنی $x \geq ۲$ است. ضمناً $x = ۲$ را قبلاً بررسی کردیم و تکلیفش روشن شد. پس می‌ماند $x > ۲$. نامساوی مثلث کار را تمام می‌کند:

$$۲[x] + ۶ > ۳x \Rightarrow ۶ - x > ۲(x - [x])$$



کافی است نقاط تلاقی را به‌دست آوریم. بدیهی است که این تقاطع در بازهٔ $(۴, ۵)$ قرار دارد:

$$۶ - x = ۲(x - [x]) \xrightarrow{x \in (۵, ۶)} ۶ - x = ۲(x - ۴)$$

$$\Rightarrow ۶ - x = ۲x - ۱۰ \Rightarrow x = \frac{۱۴}{۳}$$

به وضوح در بازهٔ $(-\infty, \frac{۱۴}{۳})$ تابع $y = ۲(x - [x])$ کوچک‌تر یا مساوی با $y = ۶ - x$ است.

پس جواب این حالت هم می‌شود:

$$x \in (۲, \frac{۱۴}{۳})$$

مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن می‌شود:

$$x \in (\frac{۴}{۳}, \frac{۱۴}{۳})$$

۷. گزینهٔ «۳»

ابتدا دقت می‌کنیم که با $a_{۱۰۰}$، $a_۲$ و $a_۱$ باید بتوان مثلث ساخت. این یعنی $a_{۱۰۰} < a_۱ + a_۲$ است. از طرفی با توجه به طبیعی بودن اعداد و این واقعیت که $۱ \leq a_۱ < a_۲ < \cdots < a_{۱۰۰}$ می‌فهمیم که $a_{۱۰۰} \geq ۱۰۰$. ولی برای این که $a_{۱۰۰} = ۱۰۰$ باشد، لازم است که $a_۱ = ۱$، $a_۲ = ۲$، $a_۳ = ۳$، ... و $a_{۹۹} = ۹۹$ باشد. ولی در این حالت نمی‌توان با $a_۱, a_۲, a_۳$ مثلث ساخت. به‌طور

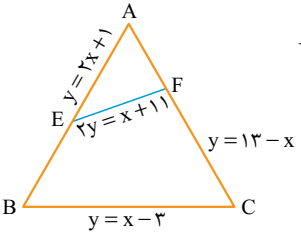
دقیق، اگر $a_1 = 1$ باشد، آن‌گاه $a_3 \geq a_2 + 1 \geq a_2 + a_1$ است و نمی‌توان با a_1 , a_2 , a_3 مثلثی ساخت. اگر $a_1 = 2$ باشد هم نمی‌توان مثلث ساخت، زیرا $a_4 \geq a_3 + 1 \geq a_2 + 2 = a_2 + a_1$ که یعنی با a_4 , a_2 , a_1 نمی‌توان مثلث ساخت. این روند تا $a_1 = 98$ به همین مشکل می‌خورد. اگر $a_1 = 98$ باشد، آن‌گاه $a_{100} \geq a_{99} + 1 \geq \cdots \geq a_2 + 98 = a_2 + a_1$ که یعنی با a_1 , a_2 , a_{100} نمی‌توان مثلث ساخت. پس کمترین مقدار ممکن برای $a_1 = 99$ است. حالا اگر $a_1 = 99$ باشد و $a_2 = 100$، $a_3 = 101$، ... و $a_{100} = 198$، آن‌گاه با هر سه عدد از این دنباله می‌توان مثلث ساخت، زیرا بدترین حالت ممکن این است که دو ضلع را تا حد ممکن کوچک و ضلع سوم را تا می‌توانیم بزرگ کنیم که همان حالت $a_1 , a_2 a_{100}$ است که دیدیم یک مثلث درست می‌کنند.

$(99 , 100 , 198)$

پس حداقل مقدار a_{100} برابر ۱۹۸ است.

۸. گزینهٔ «۳»

مختصات نقاط از حل دستگاه‌های زیر به‌دست می‌آیند.



با کمی دقت و محاسبه داریم:

$$A : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 13 - x \end{cases} \Rightarrow A = (4 , 9)$$

$$E : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2y = x + 11 \end{cases} \Rightarrow E = (3 , 7)$$

$$F : \begin{cases} y = 13 - x \\ 2y = x + 11 \end{cases} \Rightarrow F = (5 , 8)$$

$$B : \begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow B = (-4 , -7)$$

$$C : \begin{cases} y = x - 3 \\ y = 13 - x \end{cases} \Rightarrow C = (8 , 5)$$

می‌دانیم که:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{AE}{AB} \times \frac{AF}{AC}$$

محاسبهٔ پاره‌خط هم که کاری ندارد:

$$AE=\sqrt{(۴-۳)^۲+(۹-۷)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$AF=\sqrt{(۴-۵)^۲+(۹-۸)^۲}=\sqrt{۲}$$

$$AB=\sqrt{(۴+۴)^۲+(۹+۷)^۲}=\sqrt{۸^۲+۱۶^۲}=۸\sqrt{۵}$$

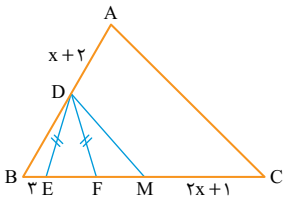
$$AC=\sqrt{(۴-۸)^۲+(۹-۵)^۲}=\sqrt{۴^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۲}$$

در نتیجه:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\sqrt{۵}}{۸\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۳۲}$$

۹. گزینهٔ «۳»

از D به موازات AC خط DM را رسم می‌کنیم. حالا $\overset{\triangle}{BMD}$ متساوی‌الاضلاع است و بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{DFM}$ و $\overset{\triangle}{DEB}$ به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین، هم‌نهشت هستند. بنابراین $FM=۳$ است.



حالا دقت کنید که بنابر تالس: $\frac{BD}{x+۲}=\frac{BM}{۲x+۱-۳}$. اینک در مثلث متساوی‌الاضلاع BDM داریم: $BD=BM$. لذا:

$$\frac{BD}{x+۲}=\frac{BM}{۲x-۲}\xrightarrow{BD=BM}x+۲=۲x-۲\Rightarrow x=۴$$

و کار تمام است.

۱۰. گزینهٔ «۴»

دقت کنید که: $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}=\frac{۲}{۳}$.

بنابراین $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ACD}$ به حالت تناسب دو ضلع و زاویه بین، مشابه هستند.

در نتیجه:

$$A\hat{C}B=C\hat{D}A\ ,\ A\hat{B}C=A\hat{C}D$$

$$B\hat{C}D=A\hat{C}B+A\hat{C}D=A\hat{C}B+A\hat{B}C=۱۶۰^\circ$$

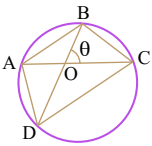
نیتروتست فصل ۱۵

۱. گزینهٔ «۲»

ابتدا شعاع و مرکز دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+y^2-4x-8y+19=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=1$$

اکنون نشان می‌دهیم حداکثر مساحت یک چهارضلعی که رأس‌هایش روی یک دایره با شعاع ۱ باشد، ۲ است:



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD}=\dfrac{AC\times BD\times \sin\theta}{2} \\ AC\,,\,BD\le 2 \\ 0<\sin\theta\le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD}\le \frac{2\times 2\times 1}{2}=2$$

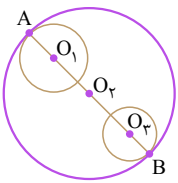
مساحت ABCD هنگامی برابر با ۲ می‌شود که AC و BD قطر دایره و برهم عمود باشند. خط $y=ax+2$ باید از مرکز دایره یعنی $(2,4)$ بگذرد:

$$y=ax+2 \xrightarrow{(2,4)} 4=2a+2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y=x+2$$

همچنین خط $y=bx+c$ باید در نقطهٔ $(2,4)$ بر $y=x+2$ عمود باشد:

$$b=\frac{-1}{a}=\frac{-1}{1}=-1 \Rightarrow y=-x+c \xrightarrow{(2,4)} 4=-2+c \Rightarrow c=6$$

۲. گزینهٔ «۳»



کوچکترین شعاع را هنگامی داریم که نقاط مماس‌شدن دایره‌ها و خط‌المرکزین دو دایره (یعنی O_1O_2) در یک راستا باشند. اکنون شعاع و مرکز دو دایرهٔ کوچک را پیدا می‌کنیم.

$$x^2+y^2-2x-6y+8=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=2 \Rightarrow \begin{cases} O_1(1,3) \\ O_1A=\sqrt{2} \end{cases}$$

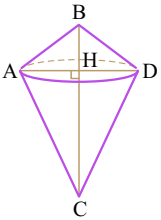
$$x^2+y^2-10x+2y+24=0 \Rightarrow (x-5)^2+(y+1)^2=2 \Rightarrow \begin{cases} O_2(5,-1) \\ O_2B=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$O_1O_2=\sqrt{(5-1)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$$

$$AB=O_1A+O_1O_2+O_2B=\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

$$O_2A=\frac{AB}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

۳. گزینهٔ «۲»



حجم حاصل برابر $\frac{\pi.AH^{۲}\cdot BC}{۳}$ است. ابتدا طول پاره‌خط BC را پیدا می‌کنیم:

$$BC=\sqrt{(۳-۱)^{۲}+(-۱-۳)^{۲}}=\sqrt{۴+۱۶}=۲\sqrt{۵}$$

سپس معادلهٔ خط BC و فاصلهٔ A از BC را پیدا می‌کنیم که ارتفاع AH را پیدا کنیم:

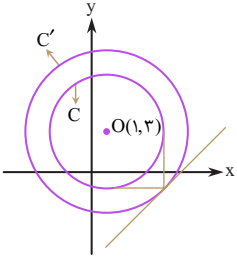
$$BC: y=-۲x+۵\Rightarrow BC: ۲x+y-۵=۰$$

$$AH=\frac{|۲(۱)+(۱)-۵|}{\sqrt{۲^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

حجم حاصل برابر است با:

$$\frac{\pi\cdot AH^{۲}\cdot BC}{۳}=\frac{\pi\cdot(\frac{۲}{\sqrt{۵}})^{۲}\times ۲\sqrt{۵}}{۳}=\frac{۸\pi\sqrt{۵}}{۱۵}$$

۴. گزینهٔ «۴»



ابتدا مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم.

$$C: x^{۲}+y^{۲}-۲x-۶y-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۵^{۲}$$

نقطهٔ $O(۱,۳)$ مرکز و شعاع ۵ است. نقاطی را در نظر می‌گیریم که دو مماس رسم‌شده از آن‌ها بر دایرهٔ C بر هم عمود باشند. این نقاط روی دایره‌ای هم‌مرکز با دایرهٔ C و با شعاعی $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایرهٔ C قرار دارند (ویدئو را ببینید). این دایره را C' می‌نامیم. برای این‌که دقیقاً یک نقطه روی خط $x-y+k=۰$ با آن شرایط وجود داشته باشد، باید این خط بر C' مماس باشد. پس فاصلهٔ خط از مرکز دایره باید $۵\sqrt{۲}$ باشد:

$$۵\sqrt{۲}=\frac{|۱-۳+k|}{\sqrt{۱^{۲}+(-۱)^{۲}}}\Rightarrow ۵\sqrt{۲}=\frac{|۲-k|}{\sqrt{۲}}\Rightarrow ۱۰=|۲-k|$$

$$\Rightarrow ۲-k=۱۰ \text{ یا } -۱۰\Rightarrow k=-۸ \text{ یا } ۱۲\xrightarrow{k<۰}k=-۸$$

۵. گزینهٔ «۳»

با توجه به این‌که ۲ و ۳، ریشه‌های معادله هستند، داریم:

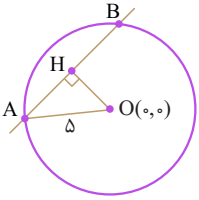
$$\begin{cases}۲+۳=\frac{-(-b)}{e}\Rightarrow ۵=\frac{b}{e}\\ ۲\times ۳=\frac{a}{e}\Rightarrow ۶=\frac{a}{e}\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{۵}{۶}$$

از طرفی داریم:

$$\frac{c^۲}{a^۲}=\frac{a^۲-b^۲}{a^۲}=۱-\frac{b^۲}{a^۲}=۱-\frac{۲۵}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۱۱}}{۶}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{۱۱}}{۶}$$

$$\begin{cases}\frac{b}{e}=۵\\ \frac{a}{e}=۶\end{cases}\xrightarrow{e=\frac{\sqrt{۱۱}}{۶}}\begin{cases}b=\frac{۵\sqrt{۱۱}}{۶}\\ a=\sqrt{۱۱}\end{cases}\Rightarrow ab=\frac{۵۵}{۶}$$

۶. گزینهٔ «۴»



شعاع دایره ۵ و مرکزش نقطهٔ $(۰,۰)$ است.

$$AB=۸\Rightarrow AH=۴$$

$$OH^۲=OA^۲-AH^۲=۵^۲-۴^۲=۹\Rightarrow OH=۳$$

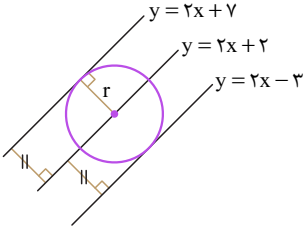
بنابراین فاصلهٔ مبدأ از خط $y=ax+۵$ برابر با ۳ است.

$$y=ax+۵\Rightarrow ax-y+۵=۰$$

$$۳=\frac{|a(۰)-(۰)+۵|}{\sqrt{a^۲+(-۱)^۲}}\Rightarrow ۳=\frac{۵}{\sqrt{a^۲+۱}}\Rightarrow a^۲+۱=\frac{۲۵}{۹}$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow |a|=\frac{۴}{۳}$$

۷. گزینهٔ «۱»



ابتدا توجه کنید که دو خط $۲x-y-۳=۰$ و $۲x-y+۷=۰$ باهم موازی‌اند. همچنین خط $d:۲x-y+\frac{۷-۳}{۲}=۰$ شامل تمام نقاطی است که از آن دو خط به یک فاصله‌اند. در ضمن فاصلهٔ این دو خط موازی برابر با قطر دایره است.

$$۲r=\frac{|-۳-۷|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow r=\sqrt{۵}$$

همچنین مرکز دایره روی خط d قرار دارد. دقت کنید که با ساده‌کردن معادلهٔ خط d داریم: $d:y=۲x+۲$. بنابراین مختصات مرکز را $(t,۲t+۲)$ فرض می‌کنیم.

با توجه به این‌که خط $۲x+y-۱=۰$ هم بر دایره مماس است، نتیجه می‌گیریم که فاصلهٔ مرکز از خط $۲x+y-۱=۰$ هم برابر $\sqrt{۵}$ است:

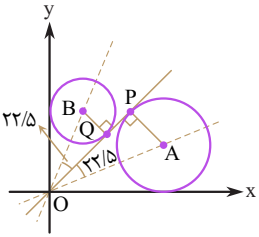
$$\frac{|۲t+۲t+۲-۱|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\sqrt{۵}\Rightarrow |۴t+۱|=۵\Rightarrow t=۱ \text{ یا } -\frac{۳}{۲}\xrightarrow[\text{ربع اول}]{t>۰}t=۱$$

پس مرکز دایره $(۱,۴)$ و شعاع آن $\sqrt{۵}$ است:

$$(x-۱)^۲+(y-۴)^۲=\sqrt{۵}^۲$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۸y+۱۲=۰$$

۸. گزینهٔ «۱»

ابتدا دقت کنید که:



$$AP=۳\,,\,BQ=۲$$

می‌دانیم $\cot ۲۲/۵^\circ=\sqrt{۲}+۱$. پس:

$$\frac{OP}{AP}=\sqrt{۲}+۱\Rightarrow\frac{OP}{۳}=\sqrt{۲}+۱$$
$$\Rightarrow OP=۳(\sqrt{۲}+۱)$$
$$\frac{OQ}{BQ}=\sqrt{۲}+۱\Rightarrow\frac{OQ}{۲}=\sqrt{۲}+۱\Rightarrow OQ=۲(\sqrt{۲}+۱)$$
$$PQ=OP-OQ=\sqrt{۲}+۱$$

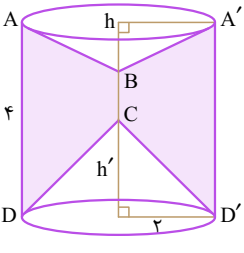
۹. گزینهٔ «۲»

می‌دانیم $b^۲=a^۲-c^۲$ اکنون دلتا را در معادله می‌نویسیم.

$$\Delta=(kb)^۲-۴(a+c)(a-c)=k^۲b^۲-۴(a^۲-c^۲)$$
$$=k^۲b^۲-۴b^۲=b^۲(k^۲-۴)\xrightarrow[b^۲\geq۰]{\Delta\geq۰}k^۲-۴\geq۰$$

مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $k^۲-۴\geq۰$، برابر با $\mathbb{R}-(-۲,۲)$ است.

۱۰. گزینهٔ «۳»



حجم حاصل برابر است با:

(حجم مخروط پایین + حجم مخروط بالا)

− حجم استوانه

حجم استوانه برابر است با: $۴\times۲^۲\times\pi=۱۶\pi$.

مجموع حجم دو مخروط را پیدا می‌کنیم:

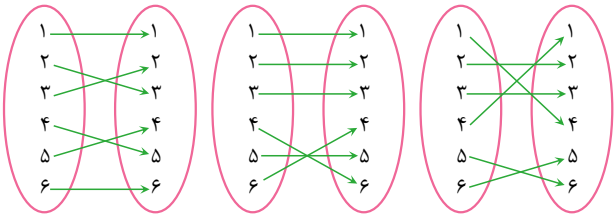
$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم مخروط بالا}=\dfrac{۴h\pi}{۳}\\[2ex]\text{حجم مخروط پایین}=\dfrac{۴h'\pi}{۳}\\[2ex]h+h'=AD-BC=۳\end{array}\right\}\Rightarrow ۴h\pi+۴h'\pi=۴\pi$$

بنابراین پاسخ مسئله $۱۶\pi-۴\pi=۱۲\pi$ است.

نیتروتست فصل ۱۶

۱. گزینهٔ «۲»

اگر $f(a)=b$ و $a \neq b$، آن‌گاه باید $f(b)=a$ شود. به‌عبارت دیگر، توابع زیر قابل قبول‌اند:



یعنی عضوها به‌صورت ضربدری یا مســـتقیم با پیکان به هم وصل می‌شوند.

برحسب تعداد ضربدری‌ها می‌شماریم:

$$\text{۰ ضربدری} \Rightarrow \binom{۶}{۰}=۱$$

$$\text{۱ ضربدری} \Rightarrow \binom{۶}{۲}=۱۵$$

$$\text{۲ ضربدری} \Rightarrow \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}}{۲!}=\frac{۱۵\times ۶}{۲}=۴۵$$

$$\text{۳ ضربدری} \Rightarrow \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۳!}=\frac{۱۵\times ۶\times ۱}{۶}=۱۵$$

پاسخ، مجموع این اعداد، یعنی $۱+۱۵+۱۵+۴۵=۷۶$ است.

۲. گزینهٔ «۳»

ابتدا ۲ کشور را انتخاب می‌کنیم $\Leftarrow \binom{۵}{۲}$

سپس از ۸ نفر این دو کشور، ۴ نفر را انتخاب می‌کنیم $\Leftarrow \binom{۸}{۴}$

ولی از $\binom{۸}{۴}$ عدد ۲ را کم می‌کنیم، زیرا در ۲ حالت، افراد از فقط یک کشور انتخاب شده‌اند، درحالی که می‌خواهیم از ۲ کشور باشند:

$$\binom{۵}{۲}\left(\binom{۸}{۴}-۲\right)=۱۰\times(۷۰-۲)=۶۸۰$$

۳. گزینهٔ «۱»

مسیر از x تا یا و $۸-x$ تا تشکیل شده است. از طرفی طول مسیر ۱۱ است:

$$x\times ۲+(۸-x)\times ۱=۱۱ \Rightarrow x=۳$$

پس ۳ بار از یا استفاده کرده‌ایم و ۵ بار از . پاسخ می‌شود:

$$\binom{۸}{۳}\times ۲^۳=\binom{۸}{۵}\times ۲^۳$$

۴. گزینهٔ «۱»

ابتدا جایگشتی از n کتاب ریاضی تشکیل می‌دهیم ← $n!$

سپس $n+۱$ جای خالی را در نظر می‌گیریم. در n تا از این جاهای خالی، کتاب‌های فیزیک را قرار می‌دهیم ⇐ $\binom{n+۱}{n}$

بنابراین:

$$n!\times\binom{n+۱}{n}=n!\times\binom{n+۱}{۱}=n!\times(n+۱)=(n+۱)!=۷۲۰$$

$$\Rightarrow (n+۱)!=۶!\Rightarrow n=۵$$

۵. گزینهٔ «۲»

اولاً $n(S)=۸!$. همچنین:

$$\begin{pmatrix}\text{تعداد کلماتی که}\\ \text{D, A مجاوراند.}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{تعداد کلماتی که}\\ \text{D, A مجاوراند.}\end{pmatrix}$$

↓ x تا

$$-\begin{pmatrix}\text{تعداد کلماتی که D, A}\\ \text{و همچنین N , L مجاوراند.}\end{pmatrix}$$

↓ y تا

برای x، دو حرف A و D را در یک بسته قرار می‌دهیم. پس $x=۷!\times ۲!$

برای y، دو حرف A و D را در یک بسته و همچنین N و L را در یک بستهٔ دیگر قرار می‌دهیم. پس $y=۶!\times ۲!\times ۲!$.

بنابراین: $n(A)=x-y=۷!\times ۲-۶!\times ۴=۶!(۷\times ۲-۴)=۶!\times ۱۰$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶!\times ۱۰}{۶!\times ۷\times ۸}=\frac{۱۰}{۷\times ۸}=\frac{۵}{۲۸}$$

۶. گزینهٔ «۲»

تعداد پسرها را با b و تعداد دخترها را با g نمایش می‌دهیم. در ۴ حالت، b بر g بخش‌پذیر است:

$$\left.\begin{matrix}b=۰\\ g=۶\end{matrix}\right\}\Rightarrow\binom{۶}{۰}=۱$$

$$\left.\begin{matrix}b=۳\\ g=۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow\binom{۶}{۳}=۲۰$$

$$\left.\begin{matrix} b=۴ \\ g=۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \binom{۶}{۴}=۱۵$$

$$\left.\begin{matrix} b=۵ \\ g=۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \binom{۶}{۵}=۶$$

احتمال را حساب می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{۱+۲۰+۱۵+۶}{۲^۶}=\frac{۴۲}{۶۴}=\frac{۲۱}{۳۲}$$

۷. گزینهٔ «۳»

توجه کنید که $a>۰$. مختصات رأس سهمی را می‌نویسیم:

$$\left(-\frac{b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a}\right) \xrightarrow{\text{ناحیهٔ سوم}} \begin{cases} \frac{-b}{a}<۰ \\ \frac{-\Delta}{۴a}>۰ \end{cases} \xrightarrow{a>۰} \begin{cases} b>۰ \\ \Delta>۰ \end{cases}$$

با توجه به $b\in\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، خیالمان از بابت $b>۰$ هم راحت است. پس باید فقط تعداد حالاتی که $\Delta>۰$ را پیدا کنیم:

$$b=۳ \Rightarrow \begin{cases} a=۱, c=۲ \\ a=۲, c=۱ \end{cases}$$

$$b=۴ \begin{cases} a=۱, c=۲ \\ a=۱, c=۳ \\ a=۲, c=۱ \\ a=۳, c=۱ \end{cases}$$

$$b=۵ \Rightarrow \begin{cases} a=۱, c=۲ \\ a=۱, c=۳ \\ a=۱, c=۴ \\ a=۲, c=۱ \\ a=۲, c=۳ \\ a=۳, c=۱ \\ a=۳, c=۲ \\ a=۴, c=۱ \end{cases}$$

بنابراین در ۱۴ حالت، $\Delta>۰$ می‌شود.

$$P(A)=\frac{۱۴}{۵\times۴\times۳}=\frac{۱۴}{۶۰}=\frac{۷}{۳۰}$$

۸. گزینهٔ «۱»

$$P(A'\cup B')=\frac{۷}{۸} \Rightarrow P((A'\cup B')')=۱-\frac{۷}{۸}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۸} \xrightarrow{A,B \text{ مستقل‌اند}} P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۸}$$

$$P(A')=\frac{۳}{۴} \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۴} \longrightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}=\frac{۵}{۸}$$

$$P((A\cup B)')=۱-\frac{۵}{۸}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(A'\cap B')=\frac{۳}{۸}$$

اکنون احتمال شرطی را می‌نویسیم:

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

۹. گزینهٔ «۱»

ابتدا $n(S)$ را پیدا می‌کنیم. با فرض $a\neq b$ داریم:

$(a,a,b)\rightarrow$ حالت ۶×۵ $\qquad$ $(a,b,a)\rightarrow$ حالت ۶×۵

$(b,a,a)\rightarrow$ حالت ۶×۵ $\qquad$ $(a,a,a)\rightarrow$ حالت ۶

بنابراین $n(S)=۹۶$. اکنون برای این‌که حداقل دوبار فرد داشته باشیم، باید a فرد باشد، ولی b می‌تواند فرد یا زوج باشد:

$(a,a,b)\rightarrow$ حالت ۳×۵ $\quad$ $(a,b,a)\rightarrow$ حالت ۳×۵

$(b,a,a)\rightarrow$ حالت ۳×۵ $\quad$ $(a,a,a)\rightarrow$ حالت ۳

پس $n(A)=۴۸$. احتمال را حساب می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{۴۸}{۹۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

داده‌های اولیه را a، b، c، d و e فرض می‌کنیم. میانگین ۵ دادهٔ اولیه با میانگین ۷ داده برابر است:

$$\frac{a+b+c+d+e}{۵}=\frac{a+b+c+d+e+(x-۱)+(x+۱)}{۷}$$

$$\Rightarrow a+b+c+d+e=۵x\Rightarrow\frac{a+b+c+d+e}{۵}=x$$

بنابراین میانگین x و واریانس $\frac{x+۲}{۵}$ است. اکنون واریانس ۵ داده را می‌نویسیم:

$$\frac{(a-x^۲)+(b-x)^۲+(c-x)^۲+(d-x)^۲+(e-x)^۲}{۵}=\frac{x+۲}{۵}$$

$$\Rightarrow(a-x)^۲+\cdots+(e-x)^۲=x+۲$$

همچنین واریانس ۷ داده را می‌نویسیم:

$$\frac{(a-x)^۲+\cdots+(e-x)^۲+(x-۱-x)^۲+(x+۱-x)^۲}{۷}=\frac{x+۲}{۵}-\frac{۶}{۳۵}$$

$$\Rightarrow\frac{x+۲+۱+۱}{۷}=\frac{۷x+۸}{۳۵}\Rightarrow x+۴=\frac{۷x+۸}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵x+۲۰=۷x+۸\Rightarrow x=۶$$