

## فصل 1: مجموعه، الگو و دنباله

ردیف	نام مبحث	تعداد سؤال	پاسخ‌های صحیح بیشتر از 50%	پاسخ‌های صحیح بین 40% تا 50%	پاسخ‌های صحیح کمتر از 40%
1	مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، متمم یک مجموعه	34	20	8	6
2	الگو و دنباله	12	7	2	3
3	دنباله‌های حسابی و هندسی	14	4	5	5



ریاضی (1) دهم ریاضی و تجربی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، متمم یک مجموعه

1 مجموعه‌های اعداد طبیعی، زوج طبیعی، فرد طبیعی، حسابی و صحیح را به ترتیب با  $\mathbb{Z} \supset \mathbb{W} \supset \mathbb{O} \supset \mathbb{E} \supset \mathbb{N}$  نشان می‌دهیم. کدام مجموعه،

متناهی و ناتهی است؟

85%  
1400 مهر

- 1)  $\mathbb{W} - \mathbb{Z}$
- 2)  $\mathbb{N} - \mathbb{O}$
- 3)  $\mathbb{E} - \mathbb{N}$
- 4)  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$

2 اگر  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 \mid \frac{-12}{x} \in \mathbb{N} \right\}$  و  $B = \left\{ \frac{y}{\sqrt{2}} \mid y \in A \right\}$ ، آنگاه مجموع تمام عضوهای مجموعه  $B$  کدام است؟

46%  
1400 مهر

- 1)  $-39\sqrt{2}$
- 2)  $\frac{-15\sqrt{2}}{2}$
- 3)  $-14\sqrt{2}$
- 4)  $-16\sqrt{2}$

3 می‌دانیم اگر عدد  $a$  عضو مجموعه  $A$  باشد،  $(-a)$  هم عضو  $A$  است. مجموعه  $A$  کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

84%  
1400 آبان

- 1)  $\mathbb{R}$
- 2)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
- 3)  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}'$
- 4)  $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$

4  $n$  عددی طبیعی و بازه  $U_n = [(-1)^n, 3n+1]$  مفروض است، بازه  $(U_1 \cup U_2) \cap U_3$  کدام است؟

62%  
1399 آذر

- 1)  $[-1, 7]$
- 2)  $[-1, 4]$
- 3)  $[1, 7]$
- 4)  $[-1, 1]$

5 اگر  $A = [-4, 2]$ ،  $B = [-2, 6]$  و  $C = [-2, 1]$  باشد، بازه  $[2, 5]$  زیرمجموعه کدام مجموعه زیر است؟

82%  
1399 آبان

- 1)  $B - A$
- 2)  $A - B$
- 3)  $A \cap B$
- 4)  $B - C$

6 اگر هیچ یک از مجموعه‌های  $A \cap (-1, 2)$  و  $A - (-1, 2)$  تهی نباشد، کدام بازه به عنوان  $A$  مورد قبول است؟

75%  
1400 مرداد

- 1)  $(2, 3)$
- 2)  $(0, 2)$
- 3)  $(-1, 1)$
- 4)  $(0, 3)$

7 کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

89%  
1401 آبان

- 1) مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک، متناهی است.
- 2) مجموعه اعداد اول بین 50 تا 8000، نامتناهی است.
- 3) مجموعه قطرهای یک دایره، متناهی است.
- 4) مجموعه اعداد حقیقی بین صفر تا 10، نامتناهی است.

8 چه تعداد از مجموعه‌های زیر نامتناهی هستند؟

«مجموعه اعداد اول یک رقمی، مجموعه اعداد طبیعی فرد، مجموعه سلول‌های عصبی مغز انسان، مجموعه تمام دایره‌های به

مرکز مبدأ مختصات، مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک، بازه  $(0,1)$ »

6 (1)

5 (2)

4 (3)

3 (4)

84%

مهر 1401

9 کدام گزینه در مورد بازه  $(0,1)$  صحیح است؟

(1) این بازه یک مجموعه متناهی است.

(2) مجموعه اعداد گویای موجود در این بازه متناهی است.

(3) این مجموعه، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ندارد.

(4) مجموعه اعداد غیرگویای موجود در این بازه متناهی است.

82%

آبان 1400

10 کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای متناهی را نشان می‌دهد؟

(1)  $A = \{\frac{1}{x^2} \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 15\}$

(2)  $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}, 15 - x \leq 5\}$

(3)  $C = \{15 - x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 15\}$

(4)  $D = \{\frac{1}{2^x} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15\}$

73%

آبان 1401

11 چه تعداد از موارد زیر نادرست است؟

(الف) اجتماع دو مجموعه نامتناهی ممکن است متناهی باشد.

(ب) اشتراک دو مجموعه نامتناهی حتماً متناهی است.

(پ) اگر مجموعه‌های  $A$  و  $C$  متناهی و مجموعه  $B$  نامتناهی باشد،  $(A \cup C) - B$  حتماً متناهی است.

(ت) اگر  $A - B$  نامتناهی باشد، حتماً  $B$  متناهی است.

1 (1)

3 (3)

84%

آبان 1399

12 اگر  $A$  مجموعه‌ای متناهی،  $B$  مجموعه‌ای نامتناهی و  $C$  مجموعه‌ای دلخواه و نامشخص باشد  $(C \neq A, B)$  کدام یک از

مجموعه‌های زیر قطعاً نامتناهی است؟

(1)  $A \cup (B \cap C)$

(2)  $B \cap (C - A)$

(3)  $B - (A \cap C)$

(4)  $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

72%

شهریور 1400

13 چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(الف) تفاضل دو مجموعه نامتناهی، همواره متناهی است.

(ب) هر مجموعه نامتناهی، بیشمار زیرمجموعه نامتناهی دارد.

(ج) اگر  $B \subseteq A$  و  $A$  نامتناهی باشد، آنگاه الزاماً  $B$  هم نامتناهی است.

(د) اگر  $A \cup B$  نامتناهی باشد آنگاه  $A$  و  $B$  نامتناهی‌اند.

(ه) اگر  $A \cap B$  متناهی باشد آنگاه  $A$  و  $B$  متناهی‌اند.

73%

مهر 1400

1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

14 کدام گزینه زیر درست است؟

- (1)  $(\mathbb{R} - Q) \subseteq \mathbb{N}$
- (2)  $Q' \cap Z' = \mathbb{R} - Q$
- (3)  $Q \subseteq (\mathbb{R} \cap W)$
- (4)  $(Q \cap W) \subseteq Q'$

79%  
آبان 1399

15 اگر مجموعه  $A$  یک مجموعه نامتناهی و  $B$  یک مجموعه متناهی باشد، چه تعداد از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

$A \cup B, A \cap B, A - B, B - A, A \cap (A \cup B), B \cap B', \emptyset - B$

- (1) 4
- (2) 2
- (3) 3
- (4) 1

75%  
آبان 1400

16 اگر  $U = \{-3, -4, 3, 2, 1, 7\}$  مجموعه مرجع و  $A = \{-3, 3\}$ ،  $B = \{2, -3, 1\}$  و  $C = \{3, -3, -4, 7\}$  باشند، حاصل  $(A - B)' - C$  کدام است؟

- (1)  $\{2, 1\}$
- (2)  $\{-3\}$
- (3)  $\{3\}$
- (4)  $\emptyset$

83%  
مهر 1399

17 اگر فرض کنیم  $A$  مجموعه مضرب‌های طبیعی 5،  $B$  مجموعه مضرب‌های طبیعی 10 و مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی باشد، کدام مجموعه زیر نامتناهی نیست؟

- (1)  $A' \cap B'$
- (2)  $A' \cap B$
- (3)  $A - B$
- (4)  $A \cap B$

83%  
بهمن 1399

18 اگر مجموعه مرجع  $[-3, 10]$  باشد، آنگاه مجموعه  $\{9\} \cup [-3, 2]$  متمم کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟

- (1)  $[2, 10]$
- (2)  $[2, 9) \cup (9, 10]$
- (3)  $[2, 9) \cup (9, 10]$
- (4)  $[9, 10]$

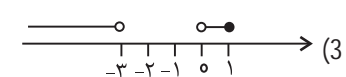
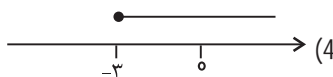
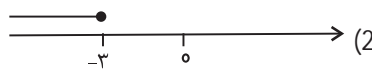
80%  
شهریور 1400

19 اگر  $A \cup B = A$  باشد، کدام گزینه نادرست است؟ ( $B \neq \emptyset$ )

- (1)  $A' \subseteq B'$
- (2)  $A' \cap B = \emptyset$
- (3)  $A - B' = \emptyset$
- (4)  $A' \cap B' = A'$

75%  
آذر 1400

20 اگر  $A = (-1, 3]$  و  $B = (1, +\infty)$  و  $C = (-3, 0)$  باشد، کدام گزینه بازه  $(A \cup B)' - C$  را به درستی روی محور مختصات نشان می‌دهد؟



74%  
مهر 1399

21) اگر  $A \subset B \subset C$  باشد، کدام گزینه درست نیست؟ (U مجموعه مرجع است)

94% 

1401 مهر 

1)  $A' \cap B' = U - B$


2)  $A \cap B \cap C = A$

3)  $C' \cap B' = U - B$

4)  $A \cup B \cup C = U - C'$

22) در یک کلاس 30 نفره، 18 نفر در مسابقات فوتبال و 10 نفر در مسابقات بسکتبال شرکت کرده‌اند. اگر بدانیم 8 نفر در هیچ یک از این دو مسابقه شرکت نکرده‌اند، تعداد کسانی که هم در فوتبال و هم در بسکتبال شرکت کرده‌اند، چند نفر هستند؟

84% 

1399 آذر 

1) 4

2) 6

3) 8

4) 10

23) از 82 نفر مسافر یک هواپیما، 25 نفر تاجرند و 14 نفر برای اولین بار، سفر هوایی دارند. اگر 9 نفر از تاجرین برای اولین بار سفر هوایی کرده باشند، چند نفر نه تاجرند و نه برای اولین بار سفر هوایی کرده‌اند؟

79% 

1401 مهر 

1) 39

2) 48

3) 45

4) 52

24) از 59 دانش‌آموز کلاس نهم، 8 نفر در دو کلاس تقویتی ریاضی و فیزیک و 33 نفر در کلاس ریاضی شرکت کرده‌اند. اگر تعداد نفراتی که فقط در کلاس فیزیک شرکت کرده‌اند برابر با 23 باشد، آن‌گاه چند نفر وجود دارند که در هیچ‌یک از این دو کلاس شرکت نکرده‌اند؟

77% 

1399 آبان 

1) 2

2) 4

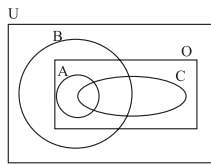
3) 3

4) 5

25) با توجه به نمودار زیر، حاصل مجموعه  $(C - A) \cup [(A - B') \cap O]$  کدام است؟

74% 

1399 آبان 



1) C

2) A

3)  $A \cap C$

4)  $A \cup C$

26) در یک کلاس 50 نفره، 16 نفر از کسانی که به ریاضی علاقه دارند، به فیزیک نیز علاقه‌مندند. اگر 12 نفر از این کلاس نه به ریاضی علاقه داشته باشند و نه به فیزیک، حداکثر چند نفر فقط به فیزیک علاقه‌مندند؟

87% 

1400 شهریور 

1) 20

2) 22

3) 26

4) 38

27) اگر  $n(A \cup B) = n(A) = 15$  و  $n(B) = 5$  باشد،  $\frac{n(A)n(A \cap B)}{n(A - B)}$  کدام است؟

68% 

1399 مهر 

1)  $4/5$

2)  $7/5$

3) 3

4) 5

28) اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  به ترتیب از راست به چپ مجموعه اعداد حسابی، صحیح و گویا باشند، کدام گزینه در خصوص مجموعه

$$[(B \cap C) \cup A] - [(B \cup C) \cap A]$$
 صحیح است؟

76%  
1399 مهر

(1) تهی است.

(2) متناهی است.

(3) نسبت به مجموعه اعداد طبیعی مجزا است.

(4) بزرگترین عضو آن صفر است.

29) مجموعه  $A$  دارای 20 عضو و مجموعه  $B$  دارای 15 عضو و  $A \cup B$  دارای 30 عضو می‌باشد. چند عضو دقیقاً به یکی از دو

مجموعه  $A$  یا  $B$  تعلق دارد؟

73%  
1401 آذر

(1) 15

(2) 20

(3) 25

(4) 10

30) در یک جمع 12 نفر عینک می‌زنند و 26 نفر عینک نمی‌زنند. در همین جمع 30 نفر چپ دست بوده یا عینک نمی‌زنند. در این

صورت چند نفر داریم که عینک می‌زنند و راست دست هستند؟

70%  
1400 مرداد

(1) 7

(2) 11

(3) 13

(4) 8

31) مجموعه  $A$  دارای 32 عضو، مجموعه  $B$  دارای 28 عضو و اشتراک آن‌ها دارای 15 عضو است. اگر 12 عضو از مجموعه  $A$

حذف شود، آنگاه از اشتراک آن‌ها 7 عضو حذف خواهد شد. در حالت جدید تعداد عضوهای مجموعه  $A \cup B$  کدام است؟

63%  
1400 آبان

(1) 28

(2) 40

(3) 42

(4) 38

32) اگر نصف جمعیت بزرگسال یک کشوری کارمند دولت و  $\frac{3}{5}$  جمعیت بزرگسال دارای خانه باشند و  $\frac{3}{10}$  جمعیت بزرگسال نه

کارمند دولتی و نه دارای خانه باشند، آنگاه چند درصد جمعیت بزرگسال دارای خانه و کارمند دولت‌اند؟

64%  
1400 شهریور

(1) 15

(2) 20

(3) 40

(4) 25

33) تعدادی از دانش‌آموزان یک کلاس 40 نفری، خود را برای شرکت در المپیادهای ریاضی و اقتصاد آماده می‌کنند. می‌دانیم 20 نفر

از دانش‌آموزان این کلاس یا در هر دو المپیاد ثبت‌نام کرده‌اند یا در هیچ‌کدام ثبت‌نام نکرده‌اند. اگر 15 نفر فقط در المپیاد

ریاضی ثبت‌نام کرده باشند، چه تعداد از دانش‌آموزان این کلاس در المپیاد اقتصاد ثبت‌نام کرده‌اند؟

61%  
1401 آبان

(1) دقیقاً 5 نفر

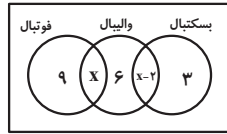
(2) دقیقاً 10 نفر

(3) از 5 تا 25 نفر

(4) از 10 تا 25 نفر

34 ده درصد از دانش آموزان یک کلاس 40 نفری، هیچ کدام از ورزش های فوتبال، والیبال و بسکتبال را دنبال نمی کنند. طبق نمودار ون زیر، چند نفر از این کلاس، ورزش بسکتبال را دنبال می کنند؟

52%  
مهرداد 1401

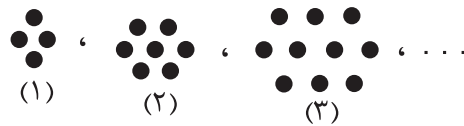


- 11 (1)
- 14 (2)
- 10 (3)
- 13 (4)

الگو و دنباله

35 با توجه به الگوی زیر، در شکل سی ام چند دایره وجود دارد؟

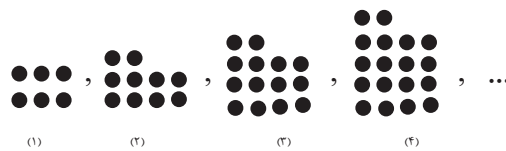
89%  
آبان 1399



- 91 (1)
- 88 (2)
- 119 (3)
- 120 (4)

36 با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره های شکل دهم، برابر با کدام گزینه است؟

84%  
بهمن 1400



- 34 (1)
- 56 (2)
- 50 (3)
- 42 (4)

37 در شکل شماره پنجم از الگوی زیر، 43 دایره وجود دارد؟

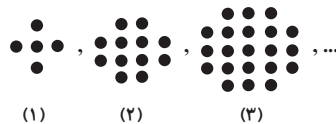
82%  
آذر 1400



- 6 (1)
- 9 (2)
- 13 (3)
- 7 (4)

38 در الگوی مقابل، اختلاف تعداد نقاط شکل هشتم و نهم کدام است؟

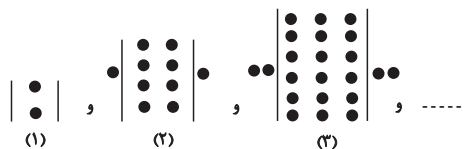
75%  
آبان 1401



- 17 (1)
- 21 (2)
- 19 (3)
- 23 (4)

39 در الگوی زیر، شکل بیستم از چند دایره توپر تشکیل شده است؟

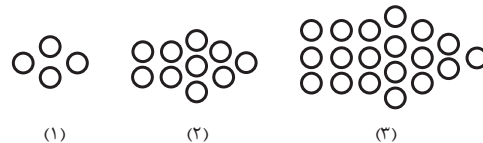
73%  
بهمن 1399



- 828 (1)
- 820 (2)
- 838 (3)
- 868 (4)

40 با توجه به الگوی زیر تعداد دایره ها در شکل (10) کدام است؟

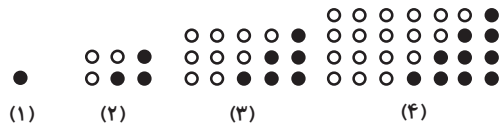
64%  
آبان 1400



- 166 (1)
- 155 (2)
- 145 (3)
- 136 (4)

41 با توجه به الگوی زیر، در شکل دهم چند دایره سفید داریم؟

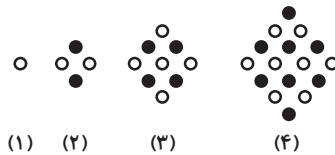
53%  
آبان 1401



- 125 (1)
- 145 (2)
- 135 (3)
- 155 (4)

42 با توجه به شکل‌های زیر، طبق الگوی داده شده در شکل هفتم چند دایره سیاه وجود دارد؟

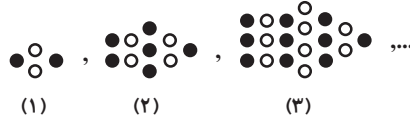
51%  
آبان 1401



- 18 (1)
- 20 (2)
- 22 (3)
- 24 (4)

43 در شماره دهم الگوی زیر، چند دایره توپر وجود دارد؟

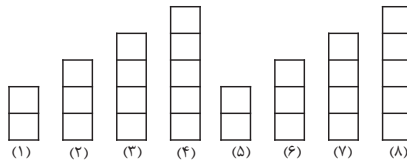
46%  
آذر 1401



- 70 (1)
- 75 (2)
- 81 (3)
- 86 (4)

44 با توجه به الگوی شکل زیر، تعداد مربع‌ها در شکل مرحله 31ام کدام است؟

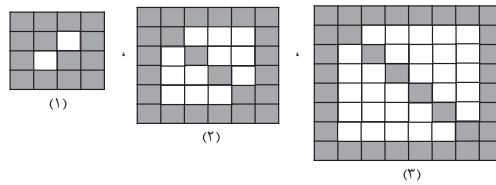
77%  
فروردین 1401



- 2 (1)
- 3 (2)
- 4 (3)
- 5 (4)

45 با توجه به الگوی زیر، در شکل دهم چند کاشی تیره به کار رفته است؟

75%  
آذر 1399



- 76 (1)
- 84 (2)
- 94 (3)
- 104 (4)

46 در دنباله درجه دوم به صورت  $17, 14, 9, \dots$  جمله ششم کدام است؟

66%  
مرداد 1400

- 17 (1)
- 18 (2)
- 19 (3)
- 20 (4)

دنباله‌های حسابی و هندسی

47 در یک دنباله حسابی مجموع جملات پنجم و یازدهم برابر 12 است. جمله هشتم دنباله کدام است؟

65%  
آبان 1399

- 7 (1)
- 8 (2)
- 5 (3)
- 6 (4)



48 اگر  $8A + 1$ ،  $7A - 3$  و  $3A + 2$ ، با همین ترتیب، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، مقدار  $A$  کدام است؟

51%   
آبان 1400 

- (1) 6
- (2) 18
- (3) 9
- (4) 3

49 اگر به قدرنسبت یک دنباله حسابی 4 واحد اضافه شود، به جمله پنجم چه مقدار اضافه خواهد شد؟

61%   
آبان 1401 

- (1) 20
- (2) 16
- (3) 30
- (4) 36

50 تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که بر 2 و 3 بخش پذیرند، کدام است؟

78%   
مهر 1400 

- (1) 148
- (2) 149
- (3) 150
- (4) 151

51 در دنباله حسابی با جمله  $n$ ام  $t_n$ ، حاصل  $\frac{5t_6 + 7t_9 - 3t_4}{3}$  کدام است؟

65%   
آذر 1401 

- (1)  $3t_{25}$
- (2)  $3t_9$
- (3)  $3t_8$
- (4)  $3t_{24}$

52 دنباله حسابی  $6, 11, 16, 21, \dots$  چند جمله سه رقمی دارد؟

60%   
آبان 1400 

- (1) 180
- (2) 181
- (3) 179
- (4) 178

53 جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب از راست به چپ 12 و 96 می باشند. جمله دوم این دنباله کدام است؟

71%   
آذر 1399 

- (1) 8
- (2) 15
- (3) 6
- (4) 9

54 حاصل ضرب 20 جمله اول دنباله هندسی  $2, 4, 8, \dots$  کدام است؟

63%   
بهمن 1400 

- (1)  $2^{210}$
- (2)  $2^{208}$
- (3)  $2^{206}$
- (4)  $2^{212}$

55 اگر  $2b - 6, a - 6, 54$  با همین ترتیب (از چپ به راست)، جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی باشند،  $a + b$  کدام است؟

53%  
فروردین 1401

- 24 (1)
- 12 (2)
- 36 (3)
- 48 (4)

56 اگر  $x + 1, x$  و  $1 - x$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند،  $x$  کدام می‌تواند باشد؟

61%  
بهمن 1400

- $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (1)
- $\frac{1}{2}$  (2)
- 2 (3)
- $2\sqrt{2}$  (4)

57 در دنباله هندسی  $1, 5, 25, \dots$  حاصل ضرب 50 جمله اول آن کدام است؟

62%  
آذر 1401

- $5^{1275}$  (1)
- $5^{1225}$  (2)
- $5^{1176}$  (3)
- $5^{1125}$  (4)

58 جمله هشتم دنباله هندسی  $t_n$ ، 8 برابر جمله پنجم آن است. اگر  $t_8 - t_5 = 84$  باشد، جمله اول این دنباله هندسی کدام است؟

50%  
بهمن 1399

- 2 (1)
- $\frac{3}{4}$  (2)
- 3 (3)
- $\frac{4}{3}$  (4)

59 اگر در یک دنباله هندسی حاصل ضرب 9 جمله اول 512 باشد، حاصل ضرب جمله سوم، پنجم و هفتم کدام است؟

45%  
آذر 1400

- 4 (1)
- 27 (2)
- 8 (3)
- 2 (4)

60 در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، بین دو عدد  $a$  و  $b$ ، 7 واسطه هندسی قرار می‌دهیم. اگر دومین واسطه هندسی 2 و ششمین واسطه هندسی 32 باشد، جمله چهارم این دنباله با جمله اول  $a$  کدام است؟

54%  
آذر 1401

- 2 (1)
- 4 (2)
- 8 (3)
- 16 (4)

فصل 1: مجموعه، الگو و دنباله

گزینه 4

$$\left. \begin{aligned} N &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ E &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ O &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ W &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ Z &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} W - Z &= \emptyset \\ N - O &= E = \{2, 4, 6, \dots\} \\ E - N &= \emptyset \\ W - N &= \{0\} \end{aligned}$$

68% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با بررسی ساده هر کدام از گزینه‌ها می‌توان به پاسخ صحیح رسید. برای حل این سؤال، آگاهی از مجموعه‌های مختلف اعداد موردنیاز است.

نکته

رابطه زیر مجموعه بودن بین مجموعه‌های مختلف اعداد به شکل  $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$  برقرار است. هم‌چنین مجموعه اعداد زوج و فرد طبیعی نیز زیرمجموعه مجموعه اعداد طبیعی هستند.

گزینه 3

برای به‌دست آوردن اعضای مجموعه B، ابتدا می‌بایست اعضای مجموعه A را مشخص کرد:

$$A = \{x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 \mid -\frac{12}{x} \in \mathbb{N}\} = \{-1, -2, -3, -4, -6, -12\}$$

$$B = \left\{ \frac{y}{\sqrt{2}} \mid y \in A \right\} = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-4}{\sqrt{2}}, \frac{-6}{\sqrt{2}}, \frac{-12}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$B = \text{مجموع تمام عضوهای مجموعه } B: \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{-3}{\sqrt{2}} + \frac{-4}{\sqrt{2}} + \frac{-6}{\sqrt{2}} + \frac{-12}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-28}{\sqrt{2}} = \frac{-28}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -14\sqrt{2}$$

34% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، با توجه به نکته بعد و تنها با محاسبه عضوهای دو مجموعه A و B می‌توان به پاسخ صحیح دست یافت. فقط در محاسبه عضوهای مجموعه A می‌بایست دقت کرد که xهایی انتخاب شود که حاصل  $(-\frac{12}{x})$  عضو مجموعه اعداد طبیعی شود.

نکته

برای به‌دست آوردن اعضای مجموعه A چون می‌بایست  $-\frac{12}{x}$  عضو مجموعه اعداد طبیعی باشد لذا x فقط می‌تواند اعداد صحیح منفی که عدد 12 بر آن‌ها بخش‌پذیر است، در نظر گرفته شود.

$$x \in \{-1, -2, -3, -4, -6, -12\}$$

گزینه 4

با توجه به این که هم عدد a و هم قرینه آن، عضو مجموعه A هستند می‌توان فهمید که مجموعه A باید مجموعه متقارنی باشد که هم شامل a و هم شامل -a شود. با بررسی گزینه‌های داده شده، تنها گزینه‌ای که متقارن نیست گزینه 4 است. می‌باشد و مجموعه A نمی‌تواند به صورت  $Z - W$  باشد.

$$Z - W = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1\}$$

54% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به مطالب و مفاهیم مقدماتی مبحث مجموعه‌های اعداد می‌توان به پاسخ صحیح دست یافت. آگاهی بر مجموعه‌های مختلف اعم از مجموعه اعداد صحیح، حسابی، حقیقی و گنگ برای حل سؤال موردنیاز است.

گزینه 1

با توجه به بازه  $U_n = [(-1)^n, 3n + 1]$ ، هر کدام از بازه‌های  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  را به‌دست می‌آوریم.

$$n=1 \Rightarrow U_1 = [(-1)^1, 4] = [-1, 4]$$

$$n=2 \Rightarrow U_2 = [(-1)^2, 7] = [1, 7]$$

$$n=3 \Rightarrow U_3 = [(-1)^3, 10] = [-1, 10]$$

$$\Rightarrow U_1 \cup U_2 = [-1, 7]$$

$$\Rightarrow (U_1 \cup U_2) \cap U_3 = [-1, 7] \cap [-1, 10] = [-1, 7]$$

52% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، به دلیل این که مشابه مثال و فعالیت کتاب درسی بوده و با جایگذاری ساده، جواب مسئله به‌دست می‌آید. تنها کافی است هر یک از مجموعه‌های  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  را محاسبه کرده و سپس با توجه به مفهوم اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، بازه خواسته شده را به‌دست آورد.

گزینه 5

با توجه به مجموعه‌های A، B و C به بررسی هر کدام از گزینه‌ها می‌پردازیم:



گزینه 1:  $B - A = [-2, 6] - [-4, 2] = (2, 6)$

گزینه 2:  $A - B = [-4, 2] - [-2, 6] = [-4, -2]$

گزینه 3:  $A \cap B = [-4, 2] \cap [-2, 6] = [-2, 2]$

گزینه 4:  $B - C = [-2, 6] - [-2, 1] = (1, 6)$

که با بررسی گزینه‌ها می‌توان دریافت بازه  $[2, 5]$  تنها زیرمجموعه  $B - C$  خواهد بود و پاسخ گزینه 4 است.

54% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به مثال و فعالیت کتاب درسی به راحتی می‌توان به پاسخ صحیح دست یافت و نیاز به محاسبات پیچیده و زیادی ندارد. فقط تسلط به مفهوم تفاضل و اشتراک مجموعه‌ها موردنیاز است.

نکته

رسم بازه‌ها بر روی محور اعداد می‌تواند در حل مسئله و کاهش اشتباه، کمک زیادی کند.

گزینه 6

با توجه به این که هیچ‌یک از مجموعه‌های  $A$  و  $(-1, 2)$  و  $(-1, 2) \cap A$  نباید تهی باشند، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم.

گزینه 1:  $A = (2, 3) \Rightarrow (-1, 2) \cap A = \emptyset$



9 گزینه 3

با بررسی هر کدام از گزینه‌ها خواهیم داشت:  
گزینه «1»: بازه (0,1) یک مجموعه‌ای شامل بی‌نهایت عدد بوده لذا مجموعه‌ای نامتناهی است.  
گزینه‌های «2» و «4»: از آن جایی که بازه (0,1) شامل بی‌نهایت عدد است لذا مجموعه اعداد گویا و غیر گویای آن نیز بی‌نهایت بوده و مجموعه‌ای نامتناهی است.  
گزینه «3»: در بازه‌ای که ابتدا و انتهای آن باز باشد، کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو وجود ندارد.  
(به عنوان مثال هر عددی به عنوان کوچک‌ترین عدد در نظر گرفته شود می‌توان در آن بازه عددی کوچک‌تر از آن یافت.)

52% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با تسلط بر مفاهیم و فعالیت کتاب درسی می‌توان به پاسخ صحیح رسید.

10 گزینه 4

ابتدا هر کدام از مجموعه‌های A، B، C و D را به‌دستی می‌آوریم:  
چون  $x \in \mathbb{R}$  و  $x \leq 15$  مجموعه‌ای نامتناهی است پس A نامتناهی است.

گزینه «1»:  $A = \{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{R}, x \leq 15\}$

نامتناهی  $\Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{225} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 225 \Rightarrow x \leq 15$  یا

گزینه «2»:  $B = \{3x | x \in \mathbb{N}, 15 - x \leq 5\} \Rightarrow 15 - x \leq 5 \Rightarrow x \geq 10$

نامتناهی  $\Rightarrow B = \{30, 33, 36, \dots\}$

گزینه «3»:  $C = \{15 - x | x \in \mathbb{Z}, x \leq 15\}$

نامتناهی  $\Rightarrow C = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

گزینه «4»:  $D = \{\frac{1}{2^x} | x \in \mathbb{N}, x \leq 15\} \Rightarrow x \in \{15, 14, \dots, 2, 1\}$

متناهی  $\Rightarrow D = \{\frac{1}{2^{15}}, \frac{1}{2^{14}}, \dots, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}\}$

43% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به نکته زیر و تنها با محاسبه هر کدام از مجموعه‌ها می‌توان به متناهی و یا نامتناهی بودن آن‌ها پی برد.

نکته

در محاسبه عضوهای مجموعه‌ها فقط باید به این نکته خیلی دقت کرد که در مجموعه داده شده x عضو چه مجموعه‌ای (مجموعه اعداد صحیح، حسابی، طبیعی، حقیقی و ...) می‌باشد.

11 گزینه 3

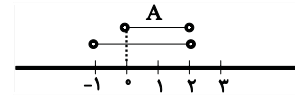
به بررسی هر کدام از موارد می‌پردازیم:  
مورد «الف»: اجتماع مجموعه نامتناهی با هر مجموعه‌ای، نامتناهی است. به

عنوان مثال:  $\begin{cases} A = (4, +\infty) \\ B = (-1, 5) \end{cases} \Rightarrow A \cup B = (-1, +\infty)$

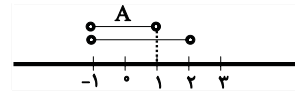
مورد «ب»: اشتراک دو مجموعه نامتناهی الزاماً متناهی نیست. به عنوان

مثال:  $\begin{cases} A = (4, +\infty) \\ B = (1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow A \cap B = (4, +\infty)$

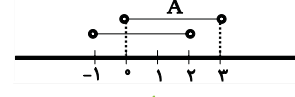
گزینه «2»:  $A = (0, 2) \Rightarrow (-1, 2) \cap A = (0, 2) \quad A - (-1, 2) = \emptyset$



گزینه «3»:  $A = (-1, 1) \Rightarrow (-1, 2) \cap A = (-1, 1) \quad A - (-1, 2) = \emptyset$



گزینه «4»:  $A = (0, 3) \Rightarrow (-1, 2) \cap A = (0, 2) \quad A - (-1, 2) = [2, 3)$



41% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به مفهوم اشتراک و تفاضل دو مجموعه، به راحتی می‌توان پاسخ صحیح را به‌دست آورد. برای حل این سؤال مجموعه A به نحوی تعیین گردید که در شرط‌های داده شده صدق کند.

نکته

باید دقت شود که مجموعه A می‌بایست با مجموعه (-1, 2) اشتراک داشته و دارای ناحیه‌ای خارج از این بازه نیز باشد تا  $A - (-1, 2)$  تهی نشود.

7 گزینه 4

به بررسی هر کدام از گزینه‌ها می‌پردازیم:  
گزینه «1»: کسرهای مثبتی که صورت آن‌ها یک می‌باشد، مخرج آن‌ها می‌تواند هر عدد حقیقی مثبتی قرار بگیرد لذا نامتناهی است.

گزینه «2»: تعداد اعداد اول بین 50 تا 8000 معین بوده لذا مجموعه‌ای متناهی است.

گزینه «3»: هر دایره بی‌نهایت قطر دارد، بنابراین مجموعه قطره‌های یک دایره متناهی نیست.

گزینه «4»: بین دو عدد صفر و 10، بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد، لذا مجموعه اعداد حقیقی بین این دو عدد مجموعه‌ای نامتناهی است.

74% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با دانستن مفاهیم مقدماتی مبحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی می‌توان به پاسخ مسأله رسید.

نکته

مجموعه‌هایی که تعداد عضوهای آن‌ها قابل شمارش باشد، مجموعه‌های متناهی تلقی می‌گردند. (یا به عبارتی بتوان تعداد عضوهای آن را با یک عدد بیان کرد.)

8 گزینه 3

از بین مجموعه‌های بیان شده، مجموعه‌های زیر متناهی بوده و مابقی نامتناهی هستند. (مجموعه اعداد اول یک رقمی - مجموعه سلول‌های عصبی مغز انسان)

39% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه کار در کلاس و فعالیت کتاب درسی است (مبحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی) و با تسلط بر تمرین‌های کتاب به راحتی می‌توان به پاسخ صحیح دست یافت.

مورد «ه»: اگر اشتراک دو مجموعه، متناهی باشد الزامی نیست که هر دو

$$\begin{cases} A = (-5, +\infty) \\ B = [0, 4] \end{cases} \Rightarrow A \cap B = [0, 4]$$

مجموعه متناهی باشند. به عنوان مثال:

37% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که با بررسی چند مثال ساده و با تسلط بر مفاهیم مبحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی و فعالیت‌های کتاب درسی می‌توان به پاسخ صحیح رسید.

14 گزینه 2

به بررسی هر کدام از گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه 1:  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{N} = \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \times$

گزینه 2:  $(\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Z}') = (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z})' = \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \checkmark$

گزینه 3:  $\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R} \cap \mathbb{W}) \Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{W} \Rightarrow \times$

گزینه 4:  $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{W}) \subseteq \mathbb{Q}' \Rightarrow \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}' \Rightarrow \times$

64% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که با توجه به نکات زیر، تنها نیاز است دانش آموز تسلط کافی بر روی مجموعه‌های اعداد و متمم آن‌ها داشته باشد.

نکته

نکته 1: برای هر مجموعه  $A$  داریم:  $U = \text{مجموعه مرجع است}$   $A' = U - A$   
 نکته 2: هم‌چنین رابطه بین مجموعه‌های مختلف اعداد به صورت زیر است:  
 $(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R})$

15 گزینه 1

اگر مجموعه  $A$  نامتناهی و مجموعه  $B$  متناهی باشد، برای هر کدام از مجموعه‌های زیر خواهیم داشت:

مجموعه‌ای متناهی  $A \cap B =$  مجموعه‌ای نامتناهی  $A \cup B =$

مجموعه‌ای متناهی  $B - A =$  مجموعه‌ای نامتناهی  $A - B =$

مجموعه‌ای نامتناهی  $A \cap (A \cup B) = A =$

مجموعه‌ای متناهی  $\emptyset - B = \emptyset =$  مجموعه‌ای متناهی  $B \cap B' = \emptyset =$

51% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که با توجه به نکته زیر و با تسلط بر مفاهیم مقدماتی مبحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی و متمم مجموعه‌ها می‌توان به پاسخ صحیح رسید.

نکته

دقت شود هر مجموعه‌ای با متمم خودش، هیچ اشتراکی ندارد و تفاضل مجموعه تهی (از آن جایی که هیچ عضوی ندارد) از هر مجموعه‌ای برابر با تهی می‌باشد.

مورد «پ»: اجتماع دو مجموعه متناهی، قطعاً متناهی است و تفاضل مجموعه‌ای نامتناهی از آن حتماً متناهی است.

مورد «ت»: اگر تفاضل دو مجموعه، نامتناهی باشد مجموعه دوم می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

به عنوان مثال:  $A = (4, +\infty) \quad B = (-\infty, 2) \Rightarrow A - B = (4, +\infty)$

51% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که مشابه تمرین کتاب درسی بوده و دانش آموز تنها می‌بایست بر مفاهیم متناهی و نامتناهی بودن مجموعه‌ها تسلط کافی داشته باشد. برای این چنین سؤالات با مثال نقض می‌توان گزینه‌های نادرست را پیدا کرد.

12 گزینه 3

به بررسی هر کدام از گزینه‌ها می‌پردازیم و با مثال نقض گزینه‌های نادرست را حذف می‌کنیم:

گزینه 1: از آن جایی که مجموعه  $B$  نامتناهی است اگر مجموعه  $C$  مجموعه‌ای متناهی باشد، اشتراک این دو مجموعه، مجموعه‌ای متناهی بوده و اجتماع دو مجموعه متناهی  $(A \cup (B \cap C))$ ، مجموعه‌ای متناهی خواهد بود.

گزینه 2: اگر  $C$  مجموعه‌ای متناهی باشد،  $(C - A)$  نیز مجموعه‌ای متناهی بوده و اشتراک  $B$  (که مجموعه‌ای نامتناهی است) با آن، مجموعه‌ای متناهی خواهد بود.

گزینه 3: چون مجموعه  $A$  متناهی است بنابراین در هر صورت  $(A \cap C)$  متناهی خواهد بود و از آن جایی که مجموعه  $B$  نامتناهی است بنابراین  $B - (A \cap C)$  قطعاً نامتناهی خواهد بود.

گزینه 4: اگر مجموعه  $C$  متناهی باشد، اشتراک آن با هر مجموعه‌ای، متناهی خواهد بود و اجتماع دو مجموعه متناهی نیز متناهی می‌باشد.

50% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که با مثال زدن ساده و بر اساس مفاهیم مبحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی می‌توان به گزینه صحیح دست یافت. از آن جایی که سؤال به دنبال مجموعه‌ای قطعاً نامتناهی است، با توجه به نامشخص بودن مجموعه  $C$  در گزینه‌ها حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که امکان دارد جواب آن گزینه متناهی گردد. (با به عبارتی مثال نقض برای رد گزینه‌ها پیدا می‌کنیم.)

13 گزینه 4

با بررسی هر کدام از موارد خواهیم داشت:

(در تمام مثال‌های زیرین، فقط اعداد صحیح بازه‌ها در نظر گرفته شود.)

مورد «الف»: تفاضل هر دو مجموعه نامتناهی، همواره متناهی نخواهد بود.

به عنوان مثال:  $\begin{cases} A = (0, +\infty) \\ B = (-\infty, -5) \end{cases} \Rightarrow A - B = (0, +\infty)$

مورد «ب»: با توجه به این که هر مجموعه نامتناهی، بی‌شمار عضو دارد بنابراین بی‌شمار زیرمجموعه نیز خواهد داشت. پس این مورد صحیح است.

مورد «ج»: اگر  $B$  زیرمجموعه مجموعه‌ای نامتناهی باشد، لزوماً نباید  $B$  هم

نامتناهی باشد. به عنوان مثال:  $\begin{cases} A = (1, +\infty) \\ B = [3, 5] \end{cases} \Rightarrow B \subseteq A$

مورد «د»: اگر اجتماع دو مجموعه نامتناهی باشد الزامی نیست که هر دو مجموعه

نامتناهی باشند. به عنوان مثال:  $\begin{cases} A = (-5, +\infty) \\ B = [-7, 0] \end{cases} \Rightarrow A \cup B = [-7, +\infty)$

19 گزینه «3»

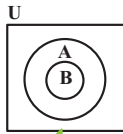
با توجه به این که  $A \cup B = A$  می‌باشد می‌توان دریافت  $B \subseteq A$ ، بنابراین خواهیم داشت:

گزینه «1»:  $A' \subseteq B'$  ✓

گزینه «2»:  $A' \cap B = B - A = \emptyset$  ✓

گزینه «3»:  $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = B$  ×

گزینه «4»:  $A' \cap B' = (A \cup B)' = A'$  ✓



49% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که بر اساس مفاهیم مبحث متمم یک مجموعه و فعالیت کتاب درسی می‌توان پاسخ صحیح مسأله را به‌دست آورد. همچنین با یک مثال ساده می‌توان مسأله را حل کرد.

نکته

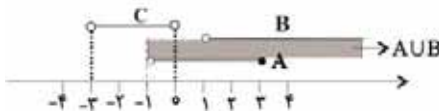
اگر  $B \subseteq A$  باشد، آن‌گاه  $A \cup B = A$

اگر  $A \subseteq B$  باشد، آن‌گاه  $A \cap B = A$

با مثال زدن دو مجموعه  $A$  و  $B$  که در شرط  $A \cup B = A$  صدق کند نیز می‌توان مسأله را حل کرد.

20 گزینه «2»

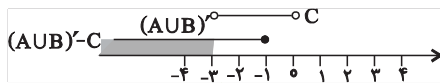
با داشتن مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  و رسم آن‌ها بر روی محور مختصات، بازه  $(A \cup B)' - C$  را به‌دست می‌آوریم:



$A \cup B = (-1, 3] \cup (1, +\infty) = (-1, +\infty)$

$(A \cup B)' = R - (A \cup B) = (-\infty, -1]$

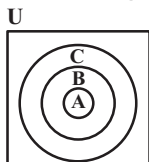
$(A \cup B)' - C = (-\infty, -1] - (-3, 0) = (-\infty, -3]$



49% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با رسم بازه‌های داده شده بر روی محور مختصات و تسلط بر مفهوم تفاضل و متمم مجموعه‌ها می‌توان پاسخ مسأله را به‌دست آورد.

21 گزینه «3»

با توجه به رابطه  $A \subseteq B \subseteq C$  و رسم نمودار ون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم: (U مجموعه مرجع است.)



16 گزینه «1»

با توجه به مجموعه‌های داده شده حاصل  $(A - B)' - C$  را به‌دست می‌آوریم:  
 $U = \{-3, -4, 3, 2, 1, 7\}$

$A = \{-3, 3\}$     $B = \{2, -3, 1\}$     $C = \{3, -3, -4, 7\}$

$A - B = \{3\} \Rightarrow (A - B)' = U - (A - B) = \{-3, -4, 2, 1, 7\}$

$\Rightarrow (A - B)' - C = \{-3, -4, 2, 1, 7\} - \{3, -3, -4, 7\} = \{2, 1\}$

62% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به مفهوم متمم مجموعه‌ها، نیاز به محاسبه مجموعه‌های خواسته‌شده می‌باشد که بسیار ساده است.

17 گزینه «2»

با نوشتن مجموعه‌های  $A$  و  $B$  و مجموعه مرجع خواهیم داشت:

$A = 5$  مجموعه مضرب‌های طبیعی  $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$

$B = 10$  مجموعه مضرب‌های طبیعی  $\{10, 20, 30, 40, \dots\}$

$U =$  مجموعه اعداد طبیعی = مجموعه مرجع  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

گزینه «1»:  $A' \cap B' = (A \cup B)' = U - A \cup B$

نامتناهی  $\{1, 2, 3, \dots\} - \{5, 10, 15, 20, \dots\}$

گزینه «2»:  $A' \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, \dots\} \cap \{10, 20, 30, 40, \dots\} = \emptyset$  متناهی

گزینه «3»:  $A - B = \{5, 10, 15, 20, \dots\} - \{10, 20, 30, \dots\} = \{5, 15, 25, \dots\}$  نامتناهی

گزینه «4»:  $A \cap B = \{5, 10, 15, 20, \dots\} \cap \{10, 20, 30, \dots\} = \{10, 20, 30, \dots\}$  نامتناهی

56% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه کار در کلاس و فعالیت کتاب درسی در مبحث متمم یک مجموعه می‌باشد و با محاسبه ساده هر کدام از مجموعه‌ها می‌توان پاسخ مسأله را به‌دست آورد.

نکته

با دقت در مجموعه‌های  $A$  و  $B$  می‌توان دریافت مجموعه  $B$  زیرمجموعه  $A$  است. بنابراین  $A'$  اشتراکی با مجموعه  $B$  نخواهد داشت و گزینه «2» پاسخ مسأله می‌باشد.

18 گزینه «3»

روش اول: با توجه به مجموعه مرجع  $U = [-3, 10]$  به بررسی هر کدام از گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «1»:  $U - [2, 10] = [-3, 10] - [2, 10] = [-3, 2) \cup \{10\}$  ×

گزینه «2»:  $U - [2, 9) \cup (9, 10] = [-3, 2) \cup \{9, 10\}$  ×

گزینه «3»:  $U - [2, 9) \cup (9, 10] = [-3, 2) \cup \{9\}$  ✓

گزینه «4»:  $U - [9, 10] = [-3, 9)$  ×

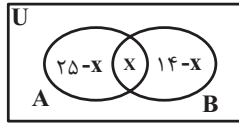
روش دوم: برای راحتی کار می‌توان متمم مجموعه  $\{9\} \cup [-3, 2)$  را به‌دست آورد تا پاسخ صحیح مشخص شود.



53% از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که برای به‌دست آوردن پاسخ صحیح نیاز به محاسبه متمم مجموعه داده شده می‌باشد. یا به دلیل این که به مفهوم متمم مجموعه‌ها در کتاب درسی و نحوه به‌دست آوردن آن دقت کرده‌اند.

$$\begin{aligned} n(A' \cap B') &= \text{تعداد مسافرانی که نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر هوایی دارند} \\ &= n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 82 - n(A \cup B) \\ &= 82 - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) = 82 - (25 + 14 - 9) = 52 \end{aligned}$$

روش دوم: با استفاده از نمودار ون خواهیم داشت:

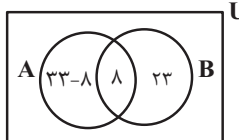


$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= 9 = x \\ n(A' \cap B') &= n(U) - n(A \cup B) = 82 - (16 + 9 + 5) = 52 \end{aligned}$$

65% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مفهوم اجتماع و متمم مجموعه‌ها و تمرین‌های کتاب درسی در این رابطه دقت کرده‌اند.

24 گزینه 3

با استفاده از نمودار ون خواهیم داشت:



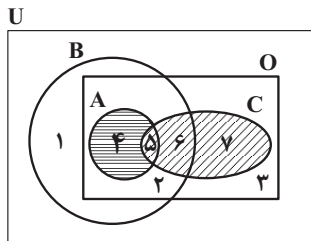
$$\begin{aligned} n(U) &= 59 = \text{تعداد دانش آموزان کلاس نهم} \\ n(A) &= 33 = \text{تعداد دانش آموزان شرکت کننده در کلاس ریاضی} \\ n(B) &= \text{تعداد دانش آموزان شرکت کننده در کلاس فیزیک} \\ n(A \cap B) &= 8 = \text{تعداد دانش آموزان شرکت کننده در هر دو کلاس} \\ n(B - A) &= n(B \cap A') = \text{تعداد دانش آموزانی که فقط در کلاس فیزیک شرکت کرده‌اند} \\ n(A' \cap B') &= \text{تعداد دانش آموزانی که در هیچ کلاسی شرکت نکرده‌اند} \\ &= n(U) - n(A \cup B) = 59 - (33 - 8 + 8 + 23) = 3 \end{aligned}$$

63% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مفاهیم و روابط اجتماع مجموعه‌ها و هم‌چنین نحوه استفاده از نمودار ون تسلط کافی داشته‌اند.

25 گزینه 4

با توجه به نمودار داده شده و نام‌گذاری هر کدام از نواحی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (C - A) &= C - (A \cap C) = 6 + 7 \\ (A - B') &= A \cap (B')' = A \cap B = A = 4 + 5 \\ (A - B') \cap O &= (4 + 5) \cap O = 4 + 5 \\ (C - A) \cup [(A - B') \cap O] &= (6 + 7) \cup (4 + 5) = A \cup C \end{aligned}$$



58% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به نکته زیر با نام‌گذاری هر یک از نواحی در محاسبه مجموعه خواسته‌شده، دچار سردرگمی نشده‌اند.

- 1 گزینه:  $A' \cap B' = (A \cup B)' = U - A \cup B = U - B$  ✓
- 2 گزینه:  $A \cap B \cap C = A$  ✓
- 3 گزینه:  $C' \cap B' = (C \cup B)' = U - C \cup B = U - C$  ×
- 4 گزینه:  $A \cup B \cup C = C = U - C'$  ✓

39% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نکات زیر در رابطه با متمم مجموعه‌ها و کار در کلاس کتاب درسی که مشابه همین سؤال می‌باشد، توجه کرده‌اند.

نکته

در رابطه با متمم مجموعه‌ها دانستن نکات زیر بسیار مهم است.  
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$     $(A \cup B)' = U - A \cup B$     $B' = U - B$   
 $(B')' = B$   
 اگر  $A \subset B \subset C$  باشد همواره داریم:

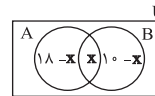
$$A \cup B \cup C = C, \quad A \cap B \cap C = A$$

22 گزینه 2

روش اول: مجموعه شامل تمام دانش آموزان کلاس را با  $U$ ، مجموعه دانش آموزان شرکت کننده در مسابقات فوتبال را با  $A$ ، مجموعه دانش آموزان شرکت کننده در مسابقات بسکتبال را با  $B$  نشان می‌دهیم.

$$\begin{aligned} n(U) &= 30, \quad n(A) = 18, \quad n(B) = 10 \\ n(A' \cap B') &= \text{تعداد دانش آموزانی که در هیچ یک از دو مسابقه شرکت نکرده‌اند} \\ &= n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 8 \\ n(U) - n(A \cup B) &= 30 - n(A \cup B) = 8 \\ \Rightarrow n(A \cup B) &= 22 = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 6 \\ n(A \cap B) &= \text{تعداد دانش آموزانی که در هر دو مسابقه شرکت کرده‌اند.} \end{aligned}$$

روش دوم: با رسم نمودار ون به صورت زیر خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} \Rightarrow n(A' \cap B') &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 30 - (18 - x + 10 - x + x) = 2 + x \\ \Rightarrow 8 &= 2 + x \Rightarrow x = 6 = n(A \cap B) \end{aligned}$$

71% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مفهوم اجتماع و متمم دو مجموعه و نکات ارائه شده در ادامه سؤال، دقت کرده‌اند. مشابه همین سؤال به عنوان کار در کلاس و تمرین در کتاب درسی آورده شده است.

نکته

دانستن نکات زیر در رابطه با اجتماع و متمم مجموعه‌ها ضروری است.  
 $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$   
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

23 گزینه 4

روش اول:

$$\begin{aligned} n(U) &= 82 = \text{تعداد مسافران هواپیما} \\ n(A) &= 25 = \text{تعداد مسافرانی که تاجر هستند} \\ n(B) &= 14 = \text{تعداد مسافرانی که برای اولین بار سفر هوایی دارند} \\ n(A \cap B) &= 9 = \text{تاجرینی که برای اولین بار سفر هوایی دارند} \end{aligned}$$

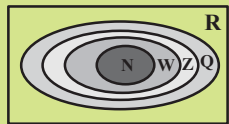
پاسخ تشریحی

مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه فوق هیچ عضو مشترک ندارند بنابراین نسبت به هم مجزا هستند.

55% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نکته زیر و هم چنین اجتماع و اشتراک مجموعه‌های حسابی، صحیح و گویا دقت کرده‌اند. دانش آموز می‌بایست شناخت کامل نسبت به اعضای مجموعه‌های داده شده داشته باشد.

نکته

رابطه زیر مجموعه بودن بین مجموعه‌ها به شکل  $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$  برقرار است.

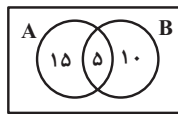


گزینه 29 «3»

روش اول: طبق اطلاعات داده شده، در نمودار ون داریم:

$$n((A - B) \cup (B - A)) = \text{تعداد اعضای که دقیقاً به یکی از دو مجموعه تعلق دارند}$$

$$n((A - B) \cup (B - A)) = 15 + 10 = 25$$



روش دوم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 20 + 15 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 5$$

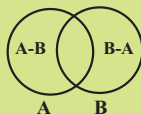
$$\Rightarrow n((A - B) \cup (B - A)) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = 25$$

54% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نکته پایین و مفهوم عضوهای دقیقاً متعلق به یکی از دو مجموعه A یا B دقت کرده‌اند. ضمناً مشابه همین سؤال در آخرین تمرین کتاب درسی (مبحث تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه) آمده است.

نکته

هنگامی که دو مجموعه A و B داشته باشیم تعداد عضوهایی که دقیقاً به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارند به صورت زیر به دست می‌آید:



تعداد عضوهایی که دقیقاً به یکی از دو مجموعه تعلق دارند یعنی یا فقط عضو A هستند و یا فقط عضو B. بنابراین داریم:

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

نکته

در مواردی هم چون سؤال فوق که تعداد مجموعه‌ها بیش از 2 می‌باشد، نام‌گذاری هر یک از نواحی می‌تواند در سرعت روند حل و کاهش خطا بسیار تأثیرگذار باشد.

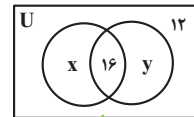
گزینه 26 «2»

با رسم نمودار ون خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = k^0 n_{1j} \text{ } \dots \text{ } \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cap \bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{A}^c \cap \bar{B}^c \cap \bar{C}^c \cap \bar{D}^c \cap \bar{E}^c \cap \bar{F}^c \\ y = k^0 n_{1j} \text{ } \dots \text{ } \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cap \bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{A}^c \cap \bar{B}^c \cap \bar{C}^c \cap \bar{D}^c \cap \bar{E}^c \cap \bar{F}^c \end{cases}$$

$$n(U) = 12 + x + y + 16 = 28 + x + y = 50$$

$$x + y = 22 \Rightarrow y_{\max} = 22$$



58% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نحوه استفاده از نمودار ون برای محاسبه خواسته مسئله تسلط کافی داشته‌اند. با توجه به رابطه به دست آمده، دانش آموز می‌بایست تشخیص دهد که حداکثر مقدار خواسته شده چه مقداری خواهد بود.

گزینه 27 «2»

با توجه به روابط داده شده، خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 15 = 15 + 5 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 5 = n(B) \Rightarrow \frac{n(A) \times n(A \cap B)}{n(A - B)} = \frac{15 \times 5}{15 - 5}$$

$$= \frac{15 \times 5}{15 - 5} = \frac{15 \times 5}{10} = 7/5$$

55% از دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نکات زیر توجه کرده‌اند و مشابه همین سؤال در تمرین کتاب درسی (مبحث اجتماع دو مجموعه) آمده است.

نکته

نکته (1): هنگامی که  $n(A \cap B) = n(B)$  می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت که  $A \subseteq B$ . بنابراین:  $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A) - n(B)$

نکته (2):  $n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$

گزینه 28 «3»

$$A = W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$C = Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

$$\Rightarrow (B \cap C) = (Z \cap Q) = Z \Rightarrow (B \cap C) \cup A = Z \cup W = Z$$

$$\Rightarrow (B \cup C) = (Z \cup Q) = Q \Rightarrow (B \cup C) \cap A = Q \cap W = W$$

$$\Rightarrow Z - W = \{\dots, -2, -1\}$$

با توجه به مجموعه به دست آمده، مشخص است که مجموعه فوق

مجموعه‌ای غیر تهی و نامتناهی می‌باشد و بزرگ‌ترین عضو آن (-1) است.



30 گزینه 4

در این سؤال افراد به دو دسته (عینک زدن و نزدن) و (چپ دست و راست دست) تقسیم شده‌اند.

$$\begin{aligned} n(A) &= \text{افرادی که عینک نمی‌زنند} = n(A') \\ n(B) &= \text{افرادی که راست‌دست هستند} = n(B') \\ n(A) &= 12 \quad n(A') = n(U) - n(A) = 26 \Rightarrow n(U) = 26 + 12 = 38 \\ n(B \cup A') &= n(B) + n(A') - n(B \cap A') \\ &= n(B) + n(A') - (n(B) - n(B \cap A)) = 26 + n(A \cap B) = 30 \\ \Rightarrow n(A \cap B) &= 4 \\ \Rightarrow n(A \cap B') &= \text{تعداد افرادی که عینک می‌زنند و راست دست هستند} \\ &= n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 12 - 4 = 8 \end{aligned}$$

45٪ از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به سه نکته زیر برای حل سؤال دقت کرده‌اند، هم‌چنین بر روابط اجتماع بین دو مجموعه تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

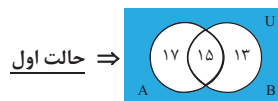
1) هنگامی که بین دو مجموعه از لفظ «و» استفاده می‌شود مفهوم اشتراک و هنگامی که از لفظ «یا» استفاده می‌شود مفهوم اجتماع دو مجموعه را بیان می‌کند.

2) در این گونه سؤالات که اطلاعات مسأله زیاد می‌باشد برای جلوگیری از سردرگمی، می‌بایست به دنبال دو مجموعه A و B بوده و مابقی را برحسب این دو مجموعه بیان کنیم.

$$\begin{aligned} n(U) - n(A) &= n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \\ n(B \cup A') &= n(B) + n(A') - n(B \cap A') \end{aligned} \quad (3)$$

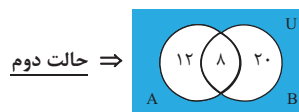
31 گزینه 2

با رسم نمودار ون برای هر دو حالت خواهیم داشت:



حالت اول

$$\Rightarrow n(A_1) = 32, \quad n(A_1 \cap B_1) = 15, \quad n(B_1) = 28$$



حالت دوم

$$\Rightarrow n(A_2) = 20, \quad n(A_2 \cap B_2) = 8, \quad n(B_2) = 28$$

$$\Rightarrow n(A_2 \cup B_2) = 12 + 8 + 20 = 40$$

42٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به توانایی تشخیص این که تغییر اعضای مجموعه‌ها چه تأثیری بر روی سایر قسمت‌ها خواهد داشت را داشته‌اند.

نکته

می‌بایست دقت شود که تعداد اعضای مجموعه B تغییر نخواهد کرد.

32 گزینه 3

اگر جمعیت بزرگسال کشور را x در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n(A) &= \text{تعداد بزرگسالی که کارمند دولت می‌باشند} = \frac{1}{2}x \\ n(B) &= \text{تعداد بزرگسالی که دارای خانه می‌باشند} = \frac{3}{5}x \\ n(A' \cap B') &= n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = \frac{3}{10}x \\ \Rightarrow x - n(A \cup B) &= \frac{3}{10}x \Rightarrow n(A \cup B) = x - \frac{3}{10}x = \frac{7}{10}x \\ \Rightarrow n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow \frac{7}{10}x &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{4}{10}x \Rightarrow n(A \cap B) = 40 \end{aligned}$$

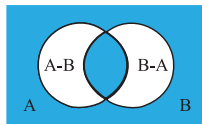
41٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مفهوم و روابط مرتبط با اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

برای راحتی محاسبه، می‌توان جمعیت بزرگسال کشور را عددی به دلخواه فرض کرد و بر اساس آن محاسبات را انجام داد.

33 گزینه 3

$$\begin{aligned} n(U) &= 40 = \text{تعداد دانش‌آموزان کلاس} \\ n(A) &= \text{تعداد دانش‌آموزانی که در المپیاد ریاضی ثبت‌نام کرده‌اند} \\ n(B) &= \text{تعداد دانش‌آموزانی که در المپیاد اقتصاد ثبت‌نام کرده‌اند} \\ n(A - B) &= \text{تعداد دانش‌آموزانی که فقط در المپیاد ریاضی ثبت‌نام کرده‌اند} \\ &= 15 = n(A) - n(A \cap B) \\ n((A \cap B) \cup (A' \cap B')) &= 20 = \text{نحیه رنگی در شکل زیر} \\ &= n(A \cup B) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow 40 - n((A - B) \cup (B - A)) \\ &= 40 - (n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)) = 40 - (15 + n(B) - n(A \cap B)) = 20 \\ \Rightarrow n(B) - n(A \cap B) &= 5 = n(B - A) \\ n(B) &= n(B - A) \cup n(A \cap B) = n(B - A) + n(A \cap B) \\ &= 5 + n(A \cap B) \end{aligned}$$

36٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که قدرت تجزیه و تحلیل بالایی در مورد روابط بین مجموعه‌ها و اطلاعات داده‌شده در سؤال داشته‌اند.

نکته

چون دو مجموعه  $A \cap B$  و  $A' \cap B'$  هیچ اشتراکی ندارند بنابراین داریم:

$$n((A \cap B) \cup (A' \cap B')) = n(A \cap B) + n(A' \cap B') = n(A \cap B) + n(A \cup B)'$$

34 گزینه 1

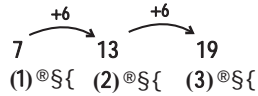
A = فوتبال      B = والیبال      C = بسکتبال  
تعداد دانش‌آموزانی که هیچ رشته ورزشی را دنبال نمی‌کنند:

**نکته**

با توجه به تعداد دایره‌ها در هر شکل می‌توان دریافت اختلاف هر دو جمله متوالی برابر با 4 می‌باشد بنابراین داریم:  
 $6, 10, 14, 18, \dots \Rightarrow a_n = 4n + b$   
 $\xrightarrow{a_1=6} (4 \times 1) + b = 6 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a_n = 4n + 2 \Rightarrow a_{10} = 42$

**37 گزینه 4**

با نوشتن تعداد دایره‌های موجود در شکل می‌توان جمله عمومی الگو را به‌دست آورد.

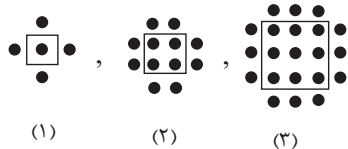


چون اختلاف هر دو جمله متوالی برابر با 6 می‌باشد بنابراین داریم:  
 $a_n = 6n + b \xrightarrow{a_1=7} (6 \times 1) + b = 7$   
 $\Rightarrow b = 1 \Rightarrow a_n = 6n + 1$   
 $a_n = 43 = 6n + 1 \Rightarrow 6n = 42 \Rightarrow n = 7$

72% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با بدست آوردن جمله عمومی الگو و حل یک معادله ساده خطی می‌توان مقدار n را بدست آورد.

**38 گزینه 2**

با توجه به رابطه بین شماره شکل‌ها و تعداد دایره‌ها می‌توان جمله عمومی الگو را به‌دست آورد.



با توجه به شکل‌های داده‌شده می‌توان دریافت جمله عمومی الگو، از درجه 2 می‌باشد.

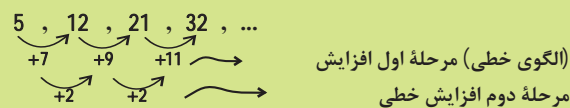
شماره شکل n:	1	2	3	...	n
تعداد دایره $a_n$ :	5	12	21	...	$a_n$
رابطه بین $a_n, n$ :	$a_1 = (1)^2 + 4(1)$	$a_2 = (2)^2 + 4(2)$	$a_3 = (3)^2 + 4(3)$	...	$a_n = n^2 + 4(n)$

$a_n = n^2 + 4n \Rightarrow a_9 - a_8 = (9^2 + 4 \times 9) - (8^2 + 4 \times 8) = 21$

60% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نکته زیر در به‌دست آوردن جمله عمومی یک الگوی درجه 2 توجه کرده‌اند. مشابه همین سؤال دقیقاً در فعالیت کتاب درسی (مبحث الگوهای غیرخطی) آمده است.

**نکته**

اگر جملات الگو به اندازه‌ای افزایش (یا کاهش) یابد که خود این افزایش (یا کاهش)ها تشکیل الگوی خطی بدهند می‌توان دریافت جمله عمومی الگو یا دنباله از درجه 2 می‌باشد. بر اساس سؤال فوق داریم:



$n(A' \cap B' \cap C') = \frac{10}{100} \times 40 = 4$   
 $\Rightarrow n(A' \cap B' \cap C') = n(A \cup B \cup C)' = n(U) - n(A \cup B \cup C)$   
 $= 40 - n(A \cup B \cup C) = 4 \Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 36$   
 $\Rightarrow 9 + x + 6 + x - 2 + 3 = 36 \Rightarrow 2x + 16 = 36 \Rightarrow x = 10$   
 تعداد دانش‌آموزانی که بسکتبال را دنبال می‌کنند  $n(C) =$   
 $= x - 2 + 3 = 11$

34% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نکته زیر و روابط مربوط به متمم مجموعه‌ها و نمودار ون آگاهی کامل داشته‌اند.

**نکته**

برای 3 مجموعه A, B, C داریم:  
 $n(A' \cap B' \cap C') = n(A \cup B \cup C)' = n(U) - n(A \cup B \cup C)$

**35 گزینه 1**

با توجه به تعداد دایره‌ها در هر شکل، می‌توان به الگوی بین آن‌ها پی برد.

شماره شکل n:	1	2	3	...	n
تعداد دایره $a_n$ :	4	7	10	...	$a_n$
رابطه بین $a_n, n$ :	$a_1 = 3 \times 1 + 1$	$a_2 = 3 \times 2 + 1$	$a_3 = 3 \times 3 + 1$	...	$a_n = 3 \times n + 1$

$\Rightarrow a_n = 3n + 1 \quad a_{30} = (3 \times 30) + 1 = 91$

83% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به شماره شکل‌ها و تعداد دایره‌ها، جمله عمومی الگو را به‌دست آورده‌اند. زیرا در اختیار داشتن جمله عمومی الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است. مشابه همین سؤال به عنوان مثال و فعالیت در کتاب درسی (مبحث الگو و دنباله) آورده شده است.

**نکته**

هنگامی که جملات یک الگو، دقیقاً با مقدار ثابتی افزایش یا کاهش می‌یابند یا به عبارتی اختلاف هر دو جمله متوالی، عددی ثابت باشد، الگو را الگوی خطی می‌نامند، که از رابطه  $t_n = an + b$  پیروی می‌کند که عدد a در واقع همان اختلاف بین جملات متوالی الگو می‌باشد و عدد b نیز با جایگزینی یکی از جملات الگو در جمله عمومی به‌دست خواهد بود. به عنوان مثال برای سؤال فوق داریم:

$a = 3 \Rightarrow t_n = 3n + b \xrightarrow{t_1=4} t_1 = (3 \times 1) + b$   
 $= 4 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow t_n = 3n + 1$

**36 گزینه 4**

با توجه به شماره شکل و تعداد دایره‌ها، الگوی حاکم بر آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

شماره شکل n:	1	2	3	4	...	n
تعداد دایره $a_n$ :	6	10	14	18	...	$a_n$
رابطه بین $a_n, n$ :	$a_1 = 4 \times 1 + 2$	$a_2 = 4 \times 2 + 2$	$a_3 = 4 \times 3 + 2$	$a_4 = 4 \times 4 + 2$	...	$a_n = (4 \times n) + 2$

$a_n = 4n + 2 \Rightarrow a_{10} = (4 \times 10) + 2 = 42$

76% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نکته زیر و مفاهیم مقدماتی مربوط به مبحث الگوها و نحوه به‌دست آوردن جمله عمومی یک الگو تسلط کافی داشته‌اند.

گزینه 3» 39

با توجه به تعداد دایره‌ها در هر شکل می‌توان جمله عمومی الگو را به‌دست آورد. تعداد دایره‌ها داخل  $||$  دو برابر مربع شماره شکل و همچنین تعداد دایره‌های در دو طرف  $||$  به صورت  $2n - 2$  است. بنابراین داریم:

شماره شکل n	1	2	3	...	n
تعداد دایره $a_n$	2	10	22	...	$a_n$
رابطه بین $a_n$ و $n$	$a_1 = 2 \times (1)^2 + 2 \times (1) - 2$	$a_2 = 2 \times (2)^2 + 2 \times (2) - 2$	$a_3 = 2 \times (3)^2 + 2 \times (3) - 2$	...	$a_n = 2n^2 + 2n - 2$

جمله عمومی الگو:  $a_n = 2n^2 + 2n - 2$

$\Rightarrow$  تعداد دایره‌های شکل بیستم  $a_{20} = 2(20)^2 + 2 \times (20) - 2 = 838$

58% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه

به نکته زیر، جمله عمومی الگو را به‌دست آورده‌اند. مشابه همین سؤال در تمرین کتاب درسی (مبحث الگوهای غیر خطی و دنباله) آمده است.

نکته

پس از تشخیص اینکه جمله عمومی الگو از درجه 2 است می‌توان با جایگذاری 3 جمله این الگو در رابطه  $a_n = an^2 + bn + c$  و با محاسبه ضرایب  $a, b, c$  جمله عمومی را به‌دست آورد. برای سؤال فوق داریم:

$t_1 = 2 \Rightarrow 2 = a(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow a + b + c = 2$

$t_2 = 10 \Rightarrow 10 = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 10$

$t_3 = 22 \Rightarrow 22 = a(3)^2 + b(3) + c \Rightarrow 9a + 3b + c = 22$

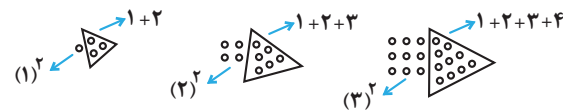
$a = 2$

$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow t_n = 2n^2 + 2n - 2$

$c = -2$

گزینه 1» 40

با توجه به رابطه بین شماره شکل‌ها و تعداد دایره‌ها جمله عمومی الگو را به‌دست می‌آوریم:



جمله عمومی الگو:

$a_n = n^2 + (1+2+3+\dots+n+n+1) = n^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

10 شکل در  $a_{10} = (10)^2 + \frac{11 \times 12}{2} = 100 + 66 = 166$

50% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه

به نکته زیر و رابطه بین شکل‌ها و دایره‌ها، توانستند جمله عمومی الگو را به‌دست آورند. تقسیم‌بندی شکل داده‌شده به دو قسمت (شامل یک مربع و یک مثلث) می‌تواند در تشخیص جمله عمومی الگو کمک بسیار کند.

نکته

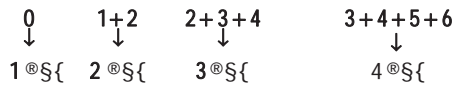
مجموع  $n$  عدد طبیعی متوالی که از یک شروع می‌شود برابر است با:

$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

بنابراین در سؤال فوق داریم:  $1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

گزینه 3» 41

با بررسی تعداد دایره‌های سفید در هر شکل خواهیم داشت:



تعداد دایره‌های سفید شکل دهم  $\Rightarrow$

$= 9+10+11+\dots+18 = (1+2+\dots+18) - (1+2+\dots+8)$

$= \frac{18 \times 19}{2} - \frac{8 \times 9}{2} = 171 - 36 = 135$

39% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با دانستن

مجموع  $n$  عدد طبیعی متوالی به راحتی می‌توان جواب مسأله را به‌دست آورد. دانش آموز می‌بایست برای به‌دست آوردن تعداد دایره‌های سفید شکل دهم، رابطه بین دایره‌های سفید و شماره شکل‌ها را به‌دست آورد.

گزینه 4» 42

روش اول: با توجه به اینکه تعداد دایره‌های سیاه موجود در شکل هفتم را می‌خواهیم، به بررسی دایره‌های سیاه و سفید موجود در شکل‌های با شماره فرد می‌پردازیم. همان‌طوری که از شکل‌ها مشخص است بر روی خط (افقی) وسط تعداد دایره‌های سفید با شماره برابر است بنابراین در شکل هفتم، 7 دایره سفید در خط وسط قرار دارد و تعداد دایره‌های سیاه به صورت زیر در شکل هفتم قرار می‌گیرند:

تعداد دایره‌های سیاه شکل هفتم  $= 2 \times (6 + 4 + 2) = 24$

روش دوم: اگر شماره شکل زوج باشد، تعداد دایره‌های سیاه و سفید با هم برابر و مساوی  $\frac{1}{2}n^2$  است. اگر شماره شکل فرد باشد، تعداد دایره‌های سیاه و سفید برابر می‌شود با:

تعداد دایره‌های سیاه  $= \frac{n^2 - 1}{2} \xrightarrow{n=7} \frac{49 - 1}{2} = 24$

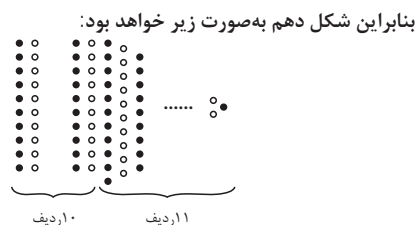
تعداد دایره‌های سفید  $= \frac{n^2 + 1}{2}$

36% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که رابطه

بین دایره‌های سفید و سیاه موجود در شکل را با شماره شکل به‌دست آورده و الگوی بین آن‌ها را تشخیص داده‌اند. دانش آموز می‌تواند شکل را به دو مثلث بالایی و پایینی تقسیم کند و تعداد دایره‌های سیاه موجود در مثلث بالایی را به‌دست آورده و سپس 2 برابر کند.

گزینه 4» 43

با توجه به شکل داده‌شده، می‌توان شکل را به دو قسمت (مربع و مثلث) تقسیم کرد.



46 گزینه 2

روش اول:

با بررسی روند تغییرات هر جمله نسبت به جمله قبلی و دانستن این نکته که افزایش جملات در دنباله درجه 2، خود به میزان ثابتی افزایش یافته و تشکیل دنباله خطی می‌دهند، خواهیم داشت:

$$17, 14, 9, 2, -7, -18 \Rightarrow t_6 = -18$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ -3 & -5 & -7 & -9 & -11 & & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & & \\ & -2 & -2 & -2 & -2 & & \end{array}$$

روش دوم: جمله عمومی دنباله درجه 2 به صورت  $t_n = an^2 + bn + c$  خواهد بود، بنابراین با جایگذاری 3 جمله از این دنباله در جمله عمومی، می‌توان ضرایب  $a, b, c$  را به دست آورد:

$$\begin{cases} t_1 = 17 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 17 \\ t_2 = 14 \Rightarrow a(2)^2 + b(2) + c = 14 \\ t_3 = 9 \Rightarrow a(3)^2 + b(3) + c = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 17 & a = -1 \\ 4a + 2b + c = 14 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow t_n = -n^2 + 18 \\ 9a + 3b + c = 9 & c = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_6 = -36 + 18 = -18$$

48% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به این نکته که افزایش جملات در دنباله درجه دوم، دنباله خطی می‌سازند دقت کرده‌اند و با ادامه این روند و محاسبات ساده به پاسخ صحیح دست یافته‌اند.

47 گزینه 4

راه اول:

با توجه به جمله عمومی یک دنباله حسابی  $(t_n = t_1 + (n-1)d)$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} t_5 = t_1 + 4d \\ t_{11} = t_1 + 10d \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_5 + t_{11} = t_1 + 4d + t_1 + 10d = 2t_1 + 14d = 2(t_1 + 7d) = 12$$

$$\Rightarrow t_1 + 7d = 6 = t_8$$

راه دوم:

اگر  $a, b, c$ ، 3 جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

که  $b$  را واسطه حسابی بین دو عدد  $a, c$  می‌نامند. از آن جایی که جمله هشتم، دقیقاً وسط جملات پنجم و یازدهم است بنابراین می‌توان گفت مقدار جمله هشتم با میانگین جملات پنجم و یازدهم برابر است:

(جمله هشتم واسطه حسابی بین دو جمله پنجم و یازدهم است.)

$$\Rightarrow t_8 = \frac{t_5 + t_{11}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

54% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با استفاده از جمله عمومی دنباله و حل یک معادله ساده، پاسخ مسأله را به دست آورده‌اند.

تعداد دایره‌های توپر شکل دهم:

$$\frac{(10)^2}{2} + (11+9+\dots+3+1) = 50 + 36 = 86$$

30% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تسلط کافی را در رابطه با به دست آوردن الگوی بین دایره‌های توپر و شماره شکل داشته‌اند. همچنین از نکته پایین به منظور محاسبه سریع تر تعداد دایره‌های توپر استفاده کرده‌اند. پیدا کردن نحوه تغییرات دایره‌های توپر، و توخالی در هر شکل و تقسیم‌بندی شکل داده شده به چند شکل، در روند حل می‌تواند بسیار تأثیرگذار باشد.

نکته

مجموع  $n$  عدد فرد طبیعی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

در سؤال فوق مجموع  $1 + 3 + \dots + 9 + 11$  طبق فرمول بالا برابر است با:

$$2n-1=11 \Rightarrow n=6$$

تعداد اعداد فرد طبیعی:

$$\Rightarrow (1+3+\dots+9+11) = (6)^2 = 36$$

44 گزینه 3

روش اول: با توجه به تعداد مربع‌ها در هر شکل می‌توان فهمید که شکل‌ها، 4 تا 4 دارای تعداد مربع یکسانی هستند. (به عنوان مثال شکل 1 با شکل 5 دارای تعدادی مساوی مربع است.) با تقسیم 131 بر 4، باقیمانده برابر با 3 می‌شود:  $(131 = 4 \times 32 + 3)$  که بیانگر این است تعداد مربع‌های شکل 131م با تعداد مربع‌های شکل سوم (یعنی 4 مربع) یکسان است.

روش دوم: با بررسی تعداد مربع‌ها در هر شکل، می‌توان به الگوی زیر رسید:

$$a_n = \begin{cases} 2 & n = 4k + 1 \\ 3 & n = 4k + 2 \\ 4 & n = 4k + 3 \\ 5 & n = 4k + 4 \end{cases} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\Rightarrow 131 = 4 \times 32 + 3 \Rightarrow a_{131} = a_3 = 4$$

59% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به این نکته توجه کرده‌اند که الگوی شکل داده شده هر 4 شکل یکبار تکرار می‌شود.

45 گزینه 4

تعداد کاشی‌های تیره در شکل اول برابر با 14، در شکل دوم برابر با 24 و در شکل سوم برابر با 34 می‌باشد. پس از بررسی روند تغییرات کاشی‌های تیره در شکل‌های مختلف می‌توان فهمید اختلاف هر دو جمله متوالی برابر با تعداد ثابتی است. بنابراین اعداد حاصل با عدد قبلی خود 10 عدد اختلاف دارند.

$$14, 24, 34, \dots$$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \nearrow \\ & +10 & +10 \\ & \searrow & \searrow \end{array}$$

$$t_{10} = (10 \times 10) + 4 = 104$$

66% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نکات زیر و نحوه به دست آوردن جمله عمومی یک دنباله حسابی دقت کرده‌اند. داشتن جمله اول و قدرنسبت طبق رابطه  $t_n = t_1 + (n-1)d$  جمله عمومی دنباله حسابی را به دست آورده‌اند. با داشتن جمله عمومی دنباله، به راحتی با جایگذاری  $n$  می‌توان هر جمله‌ای از دنباله را محاسبه کرد.

## نکته

نکته 1: جمله عمومی دنباله اعداد طبیعی بخش پذیر بر  $k$  به صورت زیر بدست می آید:

$$k, 2k, 3k, \dots \Rightarrow \text{جملات دنباله}$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d = k + (n-1)k = kn$$

نکته 2: اعدادی بر 2, 3 بخش پذیر هستند که بر 6 بخش پذیر باشند.

## 51 گزینه 2

با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{5t_6 + 7t_9 - 3t_4}{3} &= \frac{5(t_1 + 5d) + 7(t_1 + 8d) - 3(t_1 + 3d)}{3} \\ &= \frac{5t_1 + 25d + 7t_1 + 56d - 3t_1 - 9d}{3} = \frac{9t_1 + 72d}{3} \\ &= 3t_1 + 24d = 3(t_1 + 8d) = 3t_9 \end{aligned}$$

29% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند. تنها کافی است جمله عمومی دنباله حسابی در رابطه داده شده جایگذاری شود، تا پاسخ مسأله به دست آید.

## 52 گزینه 1

برای به دست آوردن تعداد جملات 3 رقمی دنباله داده شده، ابتدا می بایست جمله عمومی دنباله حسابی را به دست آوریم:

$$t_1 = 6, \quad d = 5 \Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = 6 + (n-1)5 = 5n + 1$$

$$\Rightarrow 100 \leq 5n + 1 < 1000 \Rightarrow 99 \leq 5n < 999 \Rightarrow \frac{99}{5} \leq n < \frac{999}{5}$$

$$\Rightarrow 19/8 \leq n < 199/8 \Rightarrow n = 20, 21, 22, \dots, 199$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جملات} = 199 - 20 + 1 = 180$$

26% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند. چرا که با نوشتن جمله عمومی دنباله حسابی و حل یک نامعادله ساده، مجموعه جواب  $n$  را به دست آورده و از آن جایی که  $n \in \mathbb{N}$  می باشد به راحتی تعداد جملات 3 رقمی را محاسبه کرده اند.

## 53 گزینه 3

جمله  $n$ ام (جمله عمومی) دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است که در آن  $t_1$  جمله اول و  $r$  قدرنسبت می باشد.

$$t_3 = t_1 r^2 = 12, \quad t_6 = t_1 r^5 = 96$$

با تقسیم جمله ششم بر جمله سوم دنباله، خواهیم داشت:

$$\frac{t_6}{t_3} = \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

با جایگذاری  $r = 2$  در یکی از جملات داده شده، می توان  $t_1$  را محاسبه کرد:

$$\Rightarrow t_3 = t_1 r^2 = 12 \Rightarrow t_1 (2)^2 = 12 \Rightarrow t_1 = 3$$

$$\text{جمله دوم دنباله: } t_2 = t_1 r = 3 \times 2 = 6$$

## نکته

نکته 1: دنباله ای که در آن هر جمله (به غیر از جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید، یک دنباله حسابی نامیده می شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می گویند.

نکته 2: با بررسی جمله عمومی دنباله حسابی می توان دریافت که ضریب  $n$  در این رابطه، همان  $d$  یا قدرنسبت دنباله می باشد.

$$t_n = t_1 + (n-1)d = t_1 + nd - d = nd + (t_1 - d)$$

## 48 گزینه 4

اگر  $a, b, c, 3$  جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$2b = a + c$$

$$\Rightarrow 2(7A - 3) = 3A + 2 + 8A + 1$$

$$\Rightarrow 14A - 6 = 11A + 3 \Rightarrow 3A = 9 \Rightarrow A = 3$$

40% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند. چرا که تنها با دانستن رابطه واسطه حسابی و این که تفاضل هر دو جمله متوالی در دنباله حسابی برابر با مقدار ثابتی است، پاسخ مسأله را به دست می آید.

## 49 گزینه 2

اگر جمله اول دنباله حسابی را  $t_1$  و قدرنسبت آن را  $d$  فرض کنیم، داریم:

$$t_5 = \text{جمله پنجم دنباله اولیه}$$

$$t_5' = \text{جمله پنجم دنباله جدید}$$

$$d' = \text{قدرنسبت دنباله جدید}$$

$$\Rightarrow d' = d + 4 \Rightarrow t_5' = t_1 + 4d' = t_1 + 4(d + 4) = \underbrace{t_1 + 4d}_{t_5} + 16$$

44% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند. چرا که با حل یک معادله ساده و محاسبات کم، پاسخ صحیح را به دست آورده اند. تنها کافی است جمله پنجم دنباله جدید بر حسب قدرنسبت دنباله اولیه نوشته شود.

## 50 گزینه 3

اعدادی بر 2, 3 بخش پذیر هستند که بر 6 بخش پذیر باشد، اولین عدد 3 رقمی که بر 6 بخش پذیر است عدد 102 می باشد. این اعداد تشکیل دنباله حسابی با جمله اول 102 و قدرنسبت  $d = 6$  می دهند.

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 102 + (n-1)6 = 6n + 96$$

برای پیدا کردن تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که بر 6 بخش پذیر هستند می بایست  $t_n = 6n + 96 < 1000$  باشد.

$$\Rightarrow 6n + 96 < 1000 \Rightarrow 6n < 904$$

$$\Rightarrow n < \frac{904}{6} \Rightarrow n < 150/67 \Rightarrow n = 150$$

58% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند. چرا که به نکات زیر دقت کرده و با تعیین اولین عدد سه رقمی بخش پذیر بر 6، جمله عمومی دنباله را به دست آورده و سپس با حل یک نامعادله ساده، تعداد اعداد طبیعی بخش پذیر بر 2 و 3 را محاسبه کرده اند.

55 گزینه «3»

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4$$

$$54, a-6, b-6, 2$$

$$\Rightarrow t_4 = t_1 r^3 \Rightarrow 2 = 54r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{2}{54} = \frac{1}{27} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

با به دست آوردن قدرنسبت دنباله، مابقی جملات نیز مشخص می‌شوند:

$$\begin{matrix} 54, 18, 6, 2 \\ \times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a-6=18 \Rightarrow a=24 \\ b-6=6 \Rightarrow b=12 \end{cases} \Rightarrow a+b=36$$

42% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که با داشتن دو جمله از دنباله هندسی، قدرنسبت و مابقی جملات دنباله را به دست آورده‌اند. با داشتن قدرنسبت و جمله اول دنباله، به راحتی می‌توان تمام جملات دنباله را محاسبه کرد.

56 گزینه «1»

روش اول:

اگر  $a, b, c$  3 جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، داریم:

$$b^2 = ac \Rightarrow \text{که } b \text{ را واسطه هندسی بین دو جمله } a, c \text{ می‌نامند.}$$

$$\Rightarrow (x)^2 = (1-x)(x+1) \Rightarrow x^2 = 1-x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم:

می‌دانیم نسبت هر دو جمله متوالی در دنباله هندسی، مقدار ثابتی است که

همان قدرنسبت می‌باشد:

$$\Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{x} \xrightarrow{\text{«} \text{Öv} \text{»} \text{ } \text{Äl} \text{ö} \text{ö}} x^2 = (x+1)(1-x)$$

$$\Rightarrow x^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

42% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به مفهوم واسطه هندسی و نحوه به دست آوردن آن تسلط کافی داشته‌اند.

62% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نکات زیر و نحوه محاسبه جمله اول دنباله ( $t_1$ ) و قدرنسبت ( $r$ ) با داشتن دو جمله از دنباله تسلط کافی داشته‌اند. هنگامی که دو جمله از دنباله هندسی را داریم برای به دست آوردن  $t_1$  « $r$ » می‌بایست آن دو جمله را بر هم تقسیم کنیم. با داشتن جمله عمومی دنباله، به راحتی می‌توان هر جمله از دنباله را محاسبه کرد.

نکته

نکته 1: دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. (جمله اول هم باید غیر صفر باشد).

نکته 2: جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$  به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  می‌باشد.

نکته 3: جمله دوم را به شکل زیر نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{t_1 r^2}{t_1 r} \Rightarrow \frac{12}{2} = r = 2 \Rightarrow t_2 = 6$$

نکته 4: قدرنسبت یک دنباله هندسی با مشخص بودن  $t_n$  و  $t_m$  برابر

$$\frac{t_m}{t_n} = \frac{t_1 r^{m-1}}{t_1 r^{n-1}} = r^{m-n} \quad \text{است با:}$$

54 گزینه «1»

با توجه به دنباله هندسی داده شده می‌توان دریافت قدرنسبت دنباله  $r = 2$  می‌باشد.

$$\Rightarrow P = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \dots \times t_{20} = t_1 \times t_1 r \times t_1 r^2 \times \dots \times t_1 r^{19}$$

$$= (t_1)^{20} \times (r)^{1+2+\dots+19}$$

$$\Rightarrow P = (t_1)^{20} \times (r)^{\frac{19 \times 20}{2}} = (t_1)^{20} \times (r)^{190} = 2^{20} \times 2^{190} = 2^{210}$$

53% دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نکته فوق توجه کرده‌اند و تنها با نوشتن حاصلضرب جملات و جایگذاری در جمله عمومی دنباله، پاسخ مسأله را به دست آورده‌اند.

نکته

در دنباله هندسی با جمله عمومی  $t_n$ ، حاصلضرب  $n$  جمله اول دنباله هندسی از رابطه  $P_n = (t_1 \times t_n)^{\frac{n}{2}}$  به دست می‌آید. بنابراین خواهیم داشت:

$$P_{20} = (t_1 \times t_{19})^{10} = t_1^{20} \times r^{190} \xrightarrow{\frac{t_1=2}{r=2}} P_{20} = 2^{20} \times 2^{190} = 2^{210}$$

گزینه «2» 57

جمله اول دنباله هندسی برابر با 1 و قدرنسبت دنباله برابر با 5 می باشد،

بنابراین:

حاصل ضرب 50 جمله اول:

$$t_1 \times t_2 \times \dots \times t_{50} = t_1 \times t_1 r \times \dots \times t_1 r^{49} = t_1^{50} \times r^{1+2+\dots+49}$$

$$= t_1^{50} \times r^{\frac{49 \times 50}{2}} = t_1^{50} \times r^{1225}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} t_1 = 1 \\ r = 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{حاصل ضرب 50 جمله اول} = t_1^{50} \times 5^{1225} = 5^{1225}$$

گزینه «3» 59

با نوشتن رابطه حاصل ضرب 9 جمله اول دنباله هندسی خواهیم داشت:

$$\Rightarrow t_1 \times t_2 \times \dots \times t_9 = t_1 \times t_1 r \times \dots \times t_1 r^8$$

$$= t_1^9 \times r^{1+2+\dots+8} = t_1^9 \times r^{\frac{8 \times 9}{2}} = t_1^9 r^{36}$$

$$\Rightarrow t_1^9 r^{36} = (t_1 r^4)^9 = 512 = 2^9 \Rightarrow t_1 r^4 = 2$$

$$t_3 \times t_5 \times t_7 = (t_1 r^2) \times (t_1 r^4) \times (t_1 r^6)$$

$$= t_1^3 r^{12} = (t_1 r^4)^3 = (2)^3 = 8$$

32% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که تنها کافی است با نوشتن رابطه حاصل ضرب جملات دنباله هندسی و ساده سازی آن به پاسخ مسأله برسند. با توجه به اطلاعات سؤال، نمی توان  $t_1, r$  را به دست آورد، اما خواسته مسأله با رابطه ای که از حاصل ضرب جملات دنباله به دست می آید، ارتباط خواهد داشت.

41% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که با نوشتن رابطه حاصل ضرب جملات دنباله و ساده سازی آن، به راحتی می توان پاسخ مسأله را به دست آورد.

گزینه «2» 58

با در نظر گرفتن جمله عمومی دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  و با

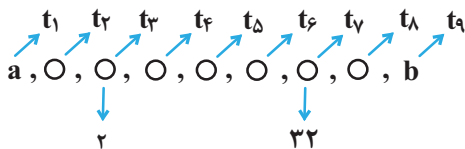
استفاده از رابطه داده شده در صورت سؤال، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow t_8 = 8t_5 \Rightarrow \frac{t_8}{t_5} = 8 \Rightarrow \frac{t_1 r^7}{t_1 r^4} = r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow t_8 - t_5 = 84 \Rightarrow t_1 r^7 - t_1 r^4 = t_1 r^4 (r^3 - 1) = 84$$

$$\Rightarrow (2)^4 \times t_1 (8 - 1) = 84 \Rightarrow t_1 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

گزینه «2» 60



$$\left. \begin{matrix} t_7 = 32 = t_1 r^6 \\ t_3 = 2 = t_1 r^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{t_7}{t_3} = \frac{t_1 r^6}{t_1 r^2} = r^4 = \frac{32}{2} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

از آن جایی که جملات دنباله، مثبت هستند بنابراین  $r = 2$  قابل قبول است.

$$\Rightarrow t_4 = t_3 r = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{یا } t_3 = t_1 r^2 = 2 \Rightarrow t_1 (2)^2 = 2 \Rightarrow t_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_4 = t_1 r^3 = \left(\frac{1}{2}\right)(2)^3 = 4$$

27% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که با توجه به جملات سوم و هفتم دنباله هندسی و تقسیم آن ها بر هم، قدرنسبت دنباله را به دست آورده اند و سپس با کمک قدرنسبت، تمام جملات دنباله را محاسبه کرده اند.

39% دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی و جایگذاری در دو رابطه داده شده، به راحتی قدرنسبت و جمله اول دنباله را به دست آورده اند.

نکته

با داشتن 2 جمله از دنباله هندسی و تقسیم آن ها بر هم می توان قدرنسبت دنباله را به دست آورد.

$$\frac{t_m}{t_n} = \frac{t_1 r^{m-1}}{t_1 r^{n-1}} = r^{m-n}$$