

انتہرالگو

تہمام
تمرین امتحان

ریاضے دہم

علی سلامت، حامد معنوی

پاسخ‌های
تشریحی

سوالات
امتحانی

سوالات
تکمیلی

سوالات
تالیفی

درس‌نامه
سؤال محور

پیشگفتار

به نام خدا

هدف از نوشتن این کتاب آموزش دقیق و اصولی مطالب و مفاهیم کتاب درسی ریاضی پایهٔ دهم برای تسلط کامل دانش‌آموزان بر تمام موضوعات کتاب درسی و آماده‌سازی ایشان برای شرکت در امتحانات نهایی بوده است.

فصل‌ها و درس‌های این کتاب کاملاً منطبق بر کتاب درسی ریاضی (۱) هستند. در ابتدای هر درس درسنامه‌ای کامل، شامل تعاریف و مفاهیم مورد نظر، به همراه چند مثال برای درک بهتر موضوع قرار داده‌ایم. در ادامه برای پوشش کامل تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و مثال‌های حل شدهٔ کتاب درسی تعدادی مسئله با راه‌حل‌های کاملاً تشریحی آورده‌ایم و تمام قسمت‌های حل مسئله را به طور کامل شرح داده‌ایم. همچنین در پایان هر درس، متناسب با حجم موضوع و تنوع سؤال‌های آن، تعدادی تمرین تشریحی با رعایت میزان سختی در چیدمان آن‌ها به همراه پاسخ آورده شده است. این تمرین‌ها مطالب مطرح شده در درسنامه را به طور کامل پوشش می‌دهند. در پایان هر فصل نیز پنج مسئله با درجهٔ سختی بیشتر با عنوان مسائل تکمیلی برای تسلط بیشتر بر موضوعات آورده شده است و بعد از آن سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده با پاسخ را قرار داده‌ایم که شما به راحتی بتوانید تمام مطالب فصل را یک‌بار به طور کامل مرور کنید. علاوه بر این‌ها، برای آشنایی بیشتر با سؤال‌های مطرح شده در امتحان‌های نوبت اول و نوبت دوم، به ترتیب در انتهای فصل چهارم و فصل هفتم نمونه‌هایی همراه با بارم‌بندی و پاسخ آمده است.

از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر ابوالفضل علی‌بمانی و خانم عاطفه ربیعی برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی می‌کنیم.

علی سلامت - حامد معنوی

فهرست مطالب

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

- درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۲
- تمرین‌های تشریحی ۸
- درس دوم: متمم یک مجموعه ۱۰
- تمرین‌های تشریحی ۱۴
- درس سوم: الگو و دنباله ۱۵
- تمرین‌های تشریحی ۲۰
- درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی ۲۲
- تمرین‌های تشریحی ۲۸
- مسائل تکمیلی ۳۰
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۳۱

فصل دوم: مثلثات

- درس اول: نسبت‌های مثلثاتی ۳۴
- تمرین‌های تشریحی ۳۸
- درس دوم: دایره مثلثاتی ۴۱
- تمرین‌های تشریحی ۴۸
- درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۵۰
- تمرین‌های تشریحی ۵۲
- مسائل تکمیلی ۵۳
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۵۴

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- درس اول: ریشه و توان ۵۸
- تمرین‌های تشریحی ۶۱
- درس دوم: ریشه n ام ۶۳
- تمرین‌های تشریحی ۶۵
- درس سوم: توان‌های گویا ۶۶
- تمرین‌های تشریحی ۶۹
- درس چهارم: عبارت‌های جبری ۷۰
- تمرین‌های تشریحی ۷۸
- مسائل تکمیلی ۸۰
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۸۱

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

- درس اول: معادلهٔ درجهٔ دوم و روش‌های مختلف حل آن .. ۸۴
- تمرین‌های تشریحی ۹۱
- درس دوم: سهمی ۹۲
- تمرین‌های تشریحی ۹۶
- درس سوم: تعیین علامت ۹۷
- تمرین‌های تشریحی ۱۰۷
- مسائل تکمیلی ۱۰۹
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۱۱۰
- امتحان نوبت اول (۱) ۱۱۳
- امتحان نوبت اول (۲) ۱۱۵
- امتحان نوبت اول (۳) ۱۱۷

فصل پنجم: تابع

۱۸۶.....	مسائل تکمیلی
۱۸۷.....	سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده
۱۸۹.....	امتحان نوبت دوم (۱)
۱۹۱.....	امتحان نوبت دوم (۲)
۱۹۳.....	امتحان نوبت دوم (۳)

فصل هشتم: پاسخ‌های تشریحی

فصل اول

۱۹۶.....	پاسخ تمرین‌های تشریحی
۲۰۴.....	پاسخ مسائل تکمیلی
۲۰۵.....	پاسخنامه سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل دوم

۲۰۷.....	پاسخ تمرین‌های تشریحی
۲۱۴.....	پاسخ مسائل تکمیلی
۲۱۵.....	پاسخنامه سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل سوم

۲۱۸.....	پاسخ تمرین‌های تشریحی
۲۲۳.....	پاسخ مسائل تکمیلی
۲۲۴.....	پاسخنامه سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل چهارم

۲۲۶.....	پاسخ تمرین‌های تشریحی
۲۳۶.....	پاسخ مسائل تکمیلی
۲۳۷.....	پاسخنامه سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده
۲۴۲.....	پاسخنامه امتحان نوبت اول (۱)
۲۴۴.....	پاسخنامه امتحان نوبت اول (۲)
۲۴۵.....	پاسخنامه امتحان نوبت اول (۳)

۱۲۰.....	درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
۱۲۴.....	تمرین‌های تشریحی
۱۲۶.....	درس دوم: دامنه و برد توابع
۱۳۲.....	تمرین‌های تشریحی
۱۳۵.....	درس سوم: انواع تابع
۱۴۶.....	تمرین‌های تشریحی
۱۴۸.....	مسائل تکمیلی
۱۴۹.....	سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

۱۵۴.....	درس اول: شمارش
۱۵۷.....	تمرین‌های تشریحی
۱۵۹.....	درس دوم: جایگشت
۱۶۳.....	تمرین‌های تشریحی
۱۶۴.....	درس سوم: ترکیب
۱۶۸.....	تمرین‌های تشریحی
۱۷۰.....	مسائل تکمیلی
۱۷۱.....	سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل هفتم: آمار و احتمال

۱۷۴.....	درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۱۸۰.....	تمرین‌های تشریحی
۱۸۲.....	درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
۱۸۳.....	تمرین‌های تشریحی
۱۸۴.....	درس سوم: متغیر و انواع آن
۱۸۵.....	تمرین‌های تشریحی

فصل پنجم

۲۴۷..... پاسخ تمرین‌های تشریحی

۲۵۸..... پاسخ مسائل تکمیلی

۲۵۹..... پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل ششم

۲۶۲..... پاسخ تمرین‌های تشریحی

۲۶۹..... پاسخ مسائل تکمیلی

۲۷۰..... پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل هفتم

۲۷۱..... پاسخ تمرین‌های تشریحی

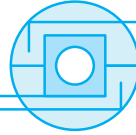
۲۷۵..... پاسخ مسائل تکمیلی

۲۷۶..... پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

۲۷۸..... پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۱)

۲۷۹..... پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۲)

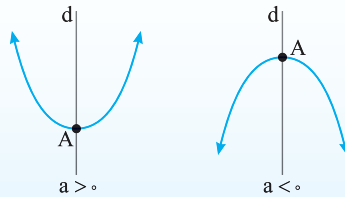
۲۸۰..... پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۳)



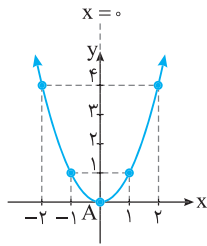
سهمی

سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ که در آن a, b و c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ سهمی می‌گویند. سهمی برحسب علامت a در معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، به یکی از دو شکل زیر است.



در هر دو نمودار نقطه A را رأس سهمی می‌نامند. اگر $a > 0$ ، آن گاه A پایین‌ترین نقطه سهمی است و اگر $a < 0$ ، آن گاه A بالاترین نقطه سهمی است. همچنین خط d که از رأس سهمی عبور می‌کند و موازی محور y است، محور تقارن سهمی است.



x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

سهمی به معادله $y = x^2$ را با استفاده از نقطه‌یابی به صورت مقابل رسم می‌کنیم:

توجه کنید که نقطه $A(0, 0)$ رأس سهمی و خط $x = 0$ محور تقارن سهمی است.

مثال

مختصات رأس سهمی

برای به‌دست آوردن مختصات رأس سهمی می‌توانیم از روش‌های زیر استفاده کنیم:

• در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، طول رأس سهمی از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید. برای محاسبه عرض رأس سهمی کافی است طول رأس سهمی را در معادله $y = ax^2 + bx + c$ جایگذاری کنیم یا اینکه از رابطه $y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$ استفاده کنیم.

مثال

در سهمی به معادله $y = x^2 - 6x + 11$ ، $a = 1$ و $b = -6$. بنابراین طول رأس سهمی به صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$$

همچنین عرض رأس سهمی با جایگذاری $x = 3$ در معادله $y = x^2 - 6x + 11$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y = x^2 - 6x + 11 \xrightarrow{x=3} y = (3)^2 - 6(3) + 11 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(3, 2)$ است.

• معادله هر سهمی را می‌توان به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ نیز نوشت ($a \neq 0$). در این صورت رأس سهمی نقطه $A(h, k)$ است.

مثال

در سهمی به معادله $y = -2(x-4)^2 + 1$ ، $h = 4$ و $k = 1$. بنابراین نقطه $A(4, 1)$ رأس سهمی است.

مسئله ۱۲

مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $y = -3x^2 - 12x + 4$ ب) $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x$ پ) $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 4$ ت) $y = -\frac{2}{5}(x-7)^2 - 1$

راه‌حل الف) چون طول رأس سهمی از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ محاسبه می‌شود، می‌نویسیم

$$y = -3x^2 - 12x + 4 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(-3)} = -\frac{12}{6} \Rightarrow x = -2$$

همچنین عرض رأس سهمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -3x^2 - 12x + 4 \xrightarrow{x=-2} y = -3(-2)^2 - 12(-2) + 4 \Rightarrow y = 16$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(-2, 16)$ است.

ب) توجه کنید که

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 5x \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(\frac{1}{2})} \Rightarrow x = 5$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 5x \xrightarrow{x=5} y = \frac{1}{2}(5)^2 - 5(5) \Rightarrow y = -\frac{25}{2}$$

پس رأس این سهمی نقطه $A(5, -\frac{25}{2})$ است.

پ) دقت کنید که رأس سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ ، نقطه $A(h, k)$ است. بنابراین $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 4 = \frac{1}{3}(x - (-2))^2 + 4$

واضح است که مختصات رأس این سهمی به صورت $A(-2, 4)$ است.

ت) مختصات رأس سهمی $y = -\frac{2}{5}(x-7)^2 - 1$ برابر با $A(7, -1)$ است.

مسئله ۱۳

ابتدا سهمی به معادله $y = x^2 - 10x$ را به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ بنویسید و سپس مختصات رأس آن را مشخص کنید.

راه‌حل دقت کنید که ضریب x در معادله $y = x^2 - 10x$ ، برابر با -10 است. پس برای آنکه معادله داده شده را به صورت مربع کامل بنویسیم، کافی

است عدد $\frac{(-10)^2}{4} = 25$ را در سمت راست معادله اضافه و کم کنیم:

$$y = x^2 - 10x \Rightarrow y = \underbrace{x^2 - 10x + 25}_{(x-5)^2} - 25 \Rightarrow y = (x-5)^2 - 25$$

واضح است که رأس این سهمی نقطه $A(5, -25)$ است.

رسم سهمی

برای رسم سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم.

۲) محل برخورد سهمی با محور y را مشخص می‌کنیم. برای این کار کافی است در معادله سهمی به جای x ، صفر قرار دهیم.

۳) محل برخورد سهمی با محور x را در صورت وجود مشخص می‌کنیم. برای این کار کافی است در معادله $y = ax^2 + bx + c$ به جای y ، صفر قرار

دهیم و جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را در صورت وجود به دست آوریم.

۴) به کمک نقاط به دست آمده و علامت a سهمی را رسم می‌کنیم.

مثال

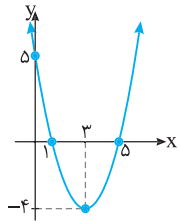
برای رسم سهمی به معادله $y = x^2 - 6x + 5$ ، ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

$$y = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3, \quad y = x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{x=3} y = (3)^2 - 6(3) + 5 = -4$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(3, -4)$ است. برای یافتن محل برخورد سهمی با محور y ، در معادله $y = x^2 - 6x + 5$ به جای x صفر قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 - 6(0) + 5 \Rightarrow y = 5$$

پس محل برخورد سهمی با محور y ، نقطه $(0, 5)$ است. همچنین برای پیدا کردن محل برخورد این سهمی با محور x در معادله سهمی به جای y صفر قرار دهیم:



$$y = x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{y=0} x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

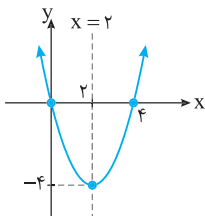
در نتیجه نقاط برخورد سهمی با محور x نقاط $(1, 0)$ و $(5, 0)$ هستند. با توجه به نقاط به دست آمده و اینکه $a = 1 > 0$ ، سهمی را به صورت مقابل رسم می‌کنیم.

مسئله ۱۴

هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید و معادله محور تقارن آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y = x^2 - 4x$

ب) $y = 2(x-1)^2 - 4$ پ) $y = -x^2 + 3$



$$y = x^2 - 4x \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 4(2) = -4$$


راه‌حل الف) توجه کنید که

رأس سهمی نقطه $(2, -4)$ است. در نتیجه محور تقارن آن خط $x = 2$ است.

$$y = x^2 - 4x \xrightarrow{x=0} y = 0^2 - 4(0) \Rightarrow y = 0$$

محل برخورد سهمی با محور y نقطه $(0, 0)$ است.

$$y = x^2 - 4x \xrightarrow{y=0} x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$


سهمی در نقاط $(0, 0)$ و $(4, 0)$ با محور x برخورد می‌کند. همچنین چون $a = 1 > 0$ ، پس سهمی به شکل  است.

ب) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 - 4$ ، نقطه $(1, -4)$ است. در نتیجه محور تقارن این سهمی خط $x = 1$ است.

$$y = 2(x-1)^2 - 4 \xrightarrow{x=0} y = 2(0-1)^2 - 4 \Rightarrow y = -2$$

بنابراین محل برخورد سهمی با محور y نقطه $(0, -2)$ است.

$$y = 2(x-1)^2 - 4 \xrightarrow{y=0} 2(x-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} \\ x-1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

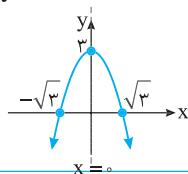
نقاط $(1 - \sqrt{2}, 0)$ و $(1 + \sqrt{2}, 0)$ محل برخورد سهمی با محور x هستند. چون $a = 2 > 0$ ، پس سهمی به شکل  است.


$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -(0)^2 + 3 \Rightarrow y = 3$$

پ) توجه کنید که در سهمی به معادله $y = -x^2 + 3$ ، $b = 0$. در نتیجه

بنابراین رأس سهمی نقطه $(0, 3)$ و محور تقارن سهمی خط $x = 0$ است. همچنین محل برخورد سهمی با محور y ، نقطه $(0, 3)$ است.

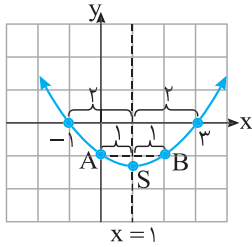
$$y = -x^2 + 3 \xrightarrow{y=0} -x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$$



سهمی در نقاط $(\sqrt{3}, 0)$ و $(-\sqrt{3}, 0)$ با محور x برخورد می‌کند. چون $a = -1 < 0$ ، پس سهمی به شکل  است.

نکته

هر دو نقطه روی نمودار سهمی که عرض‌های آن‌ها برابر هستند، از محور تقارن آن به یک فاصله‌اند. با توجه به اینکه محور تقارن سهمی از رأس آن عبور می‌کند، بنابراین طول رأس سهمی برابر با میانگین طول‌های آن دو نقطه است.



نمودار سهمی به معادله $y = x^2 - 2x - 3$ در دستگاه مختصات مقابل رسم شده است. نقاط $A(0, -1)$ و $B(2, -1)$ از محور تقارن این سهمی یعنی خط $x = 1$ به یک فاصله‌اند. دقت کنید که میانگین طول‌های دو نقطه A و B برابر با طول رأس سهمی است:

$$\begin{cases} A(0, -1) \\ B(2, -1) \end{cases} \Rightarrow \text{طول رأس سهمی} = \frac{0+2}{2} = 1$$

مثال

مسئله ۱۵

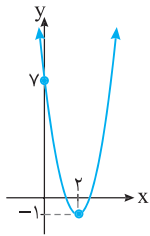
اگر $A(-4, 1)$ و $B(6, 1)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله محور تقارن این سهمی را به دست آورید.

راه‌حل

چون عرض نقاط A و B با هم برابرند، پس از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. بنابراین طول رأس سهمی برابر با میانگین طول دو نقطه A و B یعنی $\frac{6+(-4)}{2} = 1$ است. بنابراین معادله محور تقارن این سهمی خط $x = 1$ است.

مسئله ۱۶

نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.



راه‌حل

چون رأس سهمی نقطه $A(2, -1)$ است، پس معادله این سهمی به صورت $y = a(x-2)^2 - 1$ است. همچنین سهمی از نقطه $(0, 7)$ عبور کرده است، در نتیجه مختصات این نقطه در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$y = a(x-2)^2 - 1 \xrightarrow{(0,7)} 7 = a(0-2)^2 - 1 \Rightarrow 4a - 1 = 7 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله سهمی به صورت مقابل است: $y = 2x^2 - 8x + 7$ ؛ $a = 2$ ، $b = -8$ و $c = 7$ با توجه به معادله به دست آمده.

مسئله ۱۷

نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور y را در نقطه‌ای به عرض -1 و محور x را در نقاط به طول -2 و 4 قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

راه‌حل

چون سهمی محور y را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کرده است، پس مختصات نقطه $(0, -1)$ در معادله سهمی صدق می‌کنند. بنابراین $y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{(0,-1)} -1 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = -1$

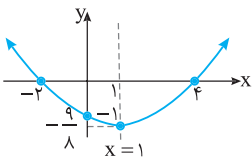
همچنین سهمی محور x را در نقاط به طول -2 و 4 قطع کرده است، پس مختصات نقاط $(-2, 0)$ و $(4, 0)$ نیز در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx - 1 \xrightarrow{(4,0)} 16a + 4b - 1 = 0 \\ y = ax^2 + bx - 1 \xrightarrow{(-2,0)} 4a - 2b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b = 1 \\ 4a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1$ است. برای رسم سهمی ابتدا مختصات رأس آن را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-\frac{1}{4})}{2(\frac{1}{8})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1 \xrightarrow{x=1} y = \frac{1}{8}(1)^2 - \frac{1}{4}(1) - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$$



بنابراین رأس سهمی نقطه $(1, -\frac{9}{8})$ است. اکنون با توجه به اطلاعات مسئله نقطه $(0, -1)$ محل برخورد سهمی با محور y و نقاط $(-2, 0)$ و $(4, 0)$ محل برخورد سهمی با محور x است. از طرف دیگر چون $a = \frac{1}{8} > 0$ ، پس سهمی به شکل است.

درس دوم

تمرین‌های تشریحی

۱۶۱] درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) طول رأس سهمی به معادله $y = -4x^2 - 4x + 1$ برابر با -1 است.

ب) رأس سهمی به معادله $y = -3(x+5)^2 + 1$ نقطه $A(5, 1)$ است.

پ) سهمی به معادله $y = x^2 + 4x$ از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

ت) خط $x = 0$ محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 + 3$ است.

۱۶۲] جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) عرض رأس سهمی به معادله $y = -2(x-3)^2 - 4$ برابر با است.

ب) سهمی به معادله $y = 5(x-3)^2 - 1$ محور y را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.

پ) سهمی به معادله $y = x^2 + 2x + 3$ از ناحیه‌های و عبور می‌کند.

۱۶۳] مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $y = -2x^2 + 8x - 1$

ب) $y = 7(x+5)^2$

۱۶۴] ابتدا سهمی به معادله $y = x^2 - 4x + 3$ را به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ بنویسید و سپس مختصات رأس آن را مشخص کنید.

۱۶۵] محل برخورد هریک از سهمی‌های زیر با محورهای مختصات را مشخص کنید.

الف) $y = -3x^2 + 8x + 11$

ب) $y = -(x+4)^2 + 1$

۱۶۶] نقاط برخورد سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + 2$ با محور x نقاط $x = -2$ و $x = 5$ هستند. مقادیر a و b را به دست آورید.

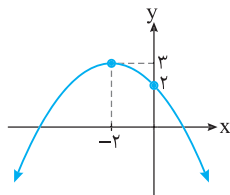
۱۶۷] هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 3x^2 - 1$

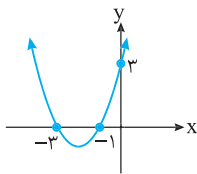
ب) $y = -2(x+3)^2 + 8$

پ) $y = x^2 - x - 1$

۱۶۸] اگر $A(m, 2)$ و $B(-4, 2)$ دو نقطه از یک سهمی باشند و طول رأس سهمی برابر با -8 باشد، مقدار m را به دست آورید.



۱۶۹] نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.



۱۷۰] اگر نمودار سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ به صورت شکل مقابل باشد، مختصات رأس سهمی را

به دست آورید.

۱۷۱] نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y را در نقطه‌ای به عرض 10 و محور x را در نقاط به طول 5 و -1 قطع می‌کند. مقادیر

a ، b و c را به دست آورید.

مسائل تکمیلی
صفحه پاسخ: ۲۳۶

۱- سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(1, -9)$ ، $(4, -12)$ و $(2, -12)$ عبور می‌کند. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.

۲- مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 8x + 7 < 0$ و نامعادله $|x - a| < b$ برابر است. مقادیر a و b را به دست آورید.

۳- اگر جدول تعیین علامت عبارت $y = (m^2 - 1)x^2 + 3mx + n$ به صورت زیر باشد، مقادیر m و n را به دست آورید.

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
y		-	+

۴- اگر جدول تعیین علامت عبارت $y = x^2 - (m+1)x + (2m-1)$ به صورت زیر باشد، مقادیر ممکن برای a را به دست آورید.

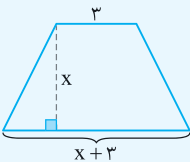
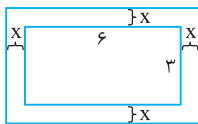
x	$-\infty$	a	$+\infty$
y		+	+

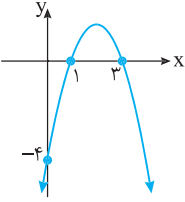
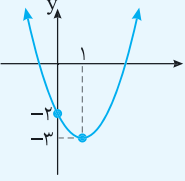
۵- اگر $x+1$ ، $x+4$ ، $5x+2$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

صفحات پاسخ: ۲۳۷ تا ۲۴۲

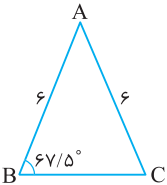
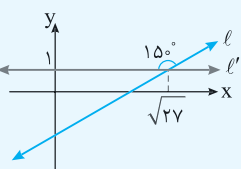
بارم	سؤالات	ردیف
۲	معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید. الف) $\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0$ ب) $x^2 - 11x + 18 = 0$	۱
۲	جواب هریک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به دست آورید. الف) $(x-7)^2 = 49$ ب) $(3x-4)^2 = 4$	۲
۱/۵	هریک از معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید. الف) $x^2 - 8x = -15$	۳
۲	جواب هریک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش Δ به دست آورید. الف) $x^2 - 4x + \frac{7}{4} = 0$ ب) $\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{5}{4} = 0$	۴
۱	به ازای چه مقادیری از a ، معادله $3x^2 - 2ax + 1 = 0$ یک جواب حقیقی دارد؟	۵
۱	به ازای چه مقادیری از m ، معادله $x^2 - 2x + m = 0$ دو جواب حقیقی دارد؟	۶
۱	به ازای چه مقادیری از m ، معادله $mx^2 + (m-2)x - m = 0$ جواب حقیقی ندارد؟	۷
۱/۵	اگر $x = -2$ یکی از جواب‌های معادله $2x^2 + ax - 2 = 0$ باشد، جواب دیگر معادله را به دست آورید.	۸
۰/۵	در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، فرض کنید $\Delta > 0$. اگر $x = -3$ یکی از جواب‌های معادله باشد، نشان دهید $9a + c = 3b$.	۹
۱	سه برابر مربع یک عدد حقیقی منفی از دو برابر آن ۲۱ واحد بیشتر است. این عدد را پیدا کنید.	۱۰
۱/۵	مطابق شکل یک عکس به ابعاد ۳ در ۶ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۴۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب را به دست آورید.	۱۱
۱/۵	مساحت ذوزنقه شکل مقابل برابر با ۲۰ سانتی‌متر مربع است. اندازه ارتفاع ذوزنقه را به دست آورید.	۱۲
۲	مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به دست آورید. الف) $y = -5x^2 + 10x - 1$ ب) $y = x^2 - 7$ پ) $y = 2x^2 - 2x + 3$ ت) $y = -\frac{1}{4}(x+5)^2 - 3$	۱۳

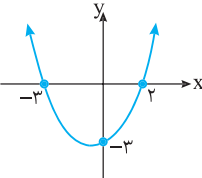


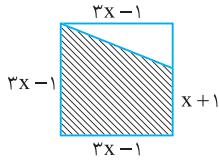
۲/۲۵	هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید و معادلهٔ محور تقارن آن‌ها را مشخص کنید.	۱۴										
	الف) $y = x^2 - 6x$ ب) $y = x^2 + x - 6$ پ) $y = 2(x-1)^2 + 3$											
۲	نمودار سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.	۱۵										
												
۱/۵	نمودار سهمی به معادلهٔ $y = a(x-h)^2 + k$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، h و k را به دست آورید.	۱۶										
												
۲	نمودار سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y را در نقطه‌ای به عرض -6 و محور x را در نقاط به طول -1 و 6 قطع می‌کند. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.	۱۷										
۲	هریک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.	۱۸										
	الف) $y = 2x - 12$ ب) $y = \frac{5x-3}{4}$ پ) $y = -\frac{4}{3}x + 8$ ت) $y = -\sqrt{6x} + \sqrt{24}$											
۱	جدول تعیین علامت عبارت $y = (2-a)x + 1$ به صورت زیر است. مقدار a را به دست آورید.	۱۹										
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-4</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-4	$+\infty$	y		-	+			
x	$-\infty$	-4	$+\infty$									
y		-	+									
۱/۵	جدول تعیین علامت عبارت $y = 3ax + a^2 - 7$ به صورت زیر است. مقدار a را به دست آورید.	۲۰										
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-2	$+\infty$	y		-	+			
x	$-\infty$	-2	$+\infty$									
y		-	+									
۲	هریک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.	۲۱										
	الف) $y = 3x^2 + 4x + 5$ ب) $y = \sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{8}$ پ) $y = 4x^2 - 10$ ت) $y = -2x^2 + x + 3$											
۱/۵	جدول تعیین علامت عبارت $y = 3x^2 + ax - b$ به صورت زیر است. مقادیر a و b را به دست آورید.	۲۲										
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-4</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	y		+	-	+	
x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$								
y		+	-	+								
۳	هریک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.	۲۳										
	الف) $y = (-x+5)(3x-1)$ ب) $y = (25x^2-1)(x^2-4x+4)$ پ) $y = \frac{x^2+x-1}{x^2-9}$ ت) $y = \frac{4x^2-25}{x^2-8x+7}$											

امتحان نوبت اول (۲)

صفحات پاسخ: ۲۴۴ تا ۲۴۵

ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اشتراک یک مجموعه نامتناهی و یک مجموعه متناهی، یک مجموعه نامتناهی است. ب) حاصل ضرب $\tan 52^\circ \times \cot 52^\circ$ برابر با یک است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) گویا شده عبارت $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ برابر با است. ب) حاصل ضرب جوابهای معادله $2x^2 - 20x + 18 = 0$ برابر با است.	۰/۵
۳	با نمایش مجموعه $A = [-3, \frac{5}{4}) \cap (-\frac{3}{4}, 3)$ روی محور اعداد، حاصل آن را به صورت یک بازه بنویسید.	۱
۴	اگر مجموعه اعداد صحیح مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{4, 5, 6, \dots\}$ را مشخص کنید.	۰/۵
۵	یک شرکت ۳۲ محصول تولید می کند به طوری که ۱۷ محصول این شرکت دارای استاندارد نوع A و ۱۳ محصول دارای استاندارد نوع B هستند. اگر ۵ محصول این شرکت هیچ کدام از استانداردهای A و B را نداشته باشند، مشخص کنید چند محصول این شرکت هر دو نوع استاندارد A و B را دارند.	۰/۷۵
۶	در یک الگوی خطی مجموع جمله های اول و دوم برابر با 3^n و جمله پنجم برابر با ۱ است. جمله عمومی این الگو را بنویسید.	۰/۷۵
۷	جمله عمومی دنباله درجه دوم $3, 5, 8, 12, \dots$ را به دست آورید.	۱
۸	در یک دنباله هندسی جمله دوم برابر با $-\frac{1}{3}$ و جمله پنجم برابر با -32 است. قدرنسبت و جمله اول این دنباله را به دست آورید.	۰/۷۵
۹	مساحت مثلث ABC در شکل مقابل را به دست آورید.	۱
		
۱۰	با توجه به شکل مقابل معادله خط l را بنویسید.	۱/۵
		
۱۱	با استفاده از دایره مثلثاتی، سینوس و کسینوس زاویه 31° را با هم مقایسه کنید.	۰/۷۵
۱۲	اگر $\tan \alpha = -5$ و انتهای کمان روبه رو به زاویه α در ناحیه دوم قرار داشته باشد، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	در جاهای خالی علامت $<$ یا $>$ قرار دهید. الف) $\sqrt[3]{0/03} \bigcirc \sqrt[4]{0/03}$ ب) $\sqrt[3]{-\frac{1}{15}} \bigcirc \sqrt[5]{-\frac{1}{15}}$ پ) $\sqrt[5]{-0/2} \bigcirc \sqrt[5]{-0/4}$ ت) $\sqrt[6]{43} \bigcirc \sqrt[4]{43}$	۱

۱/۷۵	<p>حاصل هریک از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.</p> <p>الف) $A = \sqrt[6]{(2\sqrt{3} - \sqrt{27})^6} - \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^3}$</p> <p>ب) $B = \sqrt{\sqrt[3]{9}} \times 3^{12}$</p>	۱۴
۰/۵	<p>حاصل عبارت زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.</p> <p>$C = (\sqrt{x^6 + 1} - x^3)(\sqrt{x^6 + 1} + x^3)$</p>	۱۵
۰/۷۵	<p>عبارت مقابل را تجزیه کنید.</p> <p>$D = x^2 y^3 - 125x^2$</p>	۱۶
۰/۷۵	<p>مخرج کسر زیر را گویا کنید.</p> <p>$\frac{2}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{5}}$</p>	۱۷
۱/۵	<p>به ازای چه مقادیری از m، معادله $x^2 - mx - m = 0$ دو جواب حقیقی دارد؟</p>	۱۸
۱/۵	<p>نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل زیر است. عرض نقطه به طول ۴ روی سهمی چقدر است؟</p> 	۱۹
۱/۷۵	<p>عبارت زیر را تعیین علامت کنید.</p> <p>$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}$</p>	۲۰
۲۰	جمع بارم	موفق و پیروز باشید



۱۶۰ شکل هاشورخورده یک ذوزنقه است که مساحت آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{ارتفاع } x \text{ (مجموع دو قاعده)} = \frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{2}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(3x-1+x+1)(3x-1)}{2} = 20 \Rightarrow \frac{4x(3x-1)}{2} = 20$$

$$x(3x-1) = 10 \Rightarrow 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(-10) = 1 + 120 = 121$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{121}}{6} = \frac{1 + 11}{6} = 2 \text{ (ق.ق.)}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{121}}{6} = \frac{1 - 11}{6} = -\frac{5}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

دقت کنید که به ازای $x = -\frac{5}{3}$ ضلع مربع برابر با یک عدد منفی است.

بنابراین فقط $x = 2$ قابل قبول است. در نتیجه طول ضلع مربع برابر است با

$$3(2) - 1 = 5 \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = 5$$

۱۶۱ الف) نادرست است. طول رأس سهمی به معادله $y = -4x^2 - 4x + 1$

برابر با $-\frac{1}{4}$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{(-4)}{2(-4)} = -\frac{1}{2}$$

ب) نادرست است. رأس سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ نقطه

$A(h, k)$ است. بنابراین رأس سهمی به معادله $y = -3(x+5)^2 + 1$ نقطه

$A(-5, 1)$ است.

پ) درست است. برای رسم سهمی به معادله $y = x^2 + 4x$ ابتدا مختصات

رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

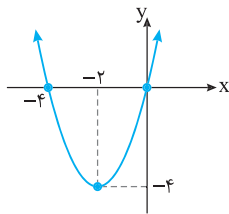
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(1)} = -2$$

$$y = x^2 + 4x \xrightarrow{x=-2} y = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(-2, -4)$ است. محل برخورد سهمی با

محور x به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = x^2 + 4x \xrightarrow{y=0} x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$



در نتیجه نقاط برخورد سهمی با محور x نقاط $(-4, 0)$ و $(0, 0)$ هستند. با توجه به نقاط به دست آمده و اینکه $a = 1 > 0$ سهمی را به صورت مقابل رسم می‌کنیم. بنابراین این سهمی از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

ت) درست است. محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 + 3$ به صورت زیر

به دست می‌آید:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} \Rightarrow x = 0 \text{ (معادله محور تقارن)}$$

۱۵۷ الف) چون $x = -1$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند.

بنابراین

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=-1} a(-1)^2 + b(-1) + c = 0$$

$$a - b + c = 0 \Rightarrow a + c = b$$

ب) برای اینکه $x = \frac{-c}{a}$ جواب دیگر این معادله باشد باید در معادله صدق کند.

یعنی مقدار $y = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = \frac{-c}{a}$ برابر با صفر شود:

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=\frac{-c}{a}}$$

$$y = a\left(\frac{-c}{a}\right)^2 + b\left(\frac{-c}{a}\right) + c = \frac{ac^2}{a^2} - \frac{bc}{a} + c = \frac{c^2}{a} - \frac{bc}{a} + c$$

$$= \frac{c^2 - bc + ac}{a} = \frac{c(c-b+a)}{a} = \frac{c(a+c-b)}{a}$$

توجه کنید که با توجه به قسمت الف)، $a+c=b$ ، بنابراین

$$y = \frac{c(a+c-b)}{a} = \frac{c(b-b)}{a} = \frac{c \cdot 0}{a} = 0$$

در نتیجه $x = \frac{-c}{a}$ ، جواب دیگر این معادله است.

۱۵۸ اگر این عدد حقیقی مثبت را x فرض کنیم، مربع آن x^2 و هفت برابر

آن $7x$ است. بنابراین

$$x^2 = 7x + 8 \Rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x-8=0 \Rightarrow x=8 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

چون x یک عدد حقیقی مثبت است، بنابراین فقط $x=8$ قابل قبول است.

۱۵۹ با توجه به شکل، طول قاب برابر با $7+2x$ و عرض آن برابر با $6+2x$ است.

بنابراین می‌نویسیم:

عرض \times طول = مساحت

$$90 = (7+2x)(6+2x) \Rightarrow 90 = 4x^2 + 26x + 42$$

$$4x^2 + 26x - 48 = 0$$

با تقسیم طرفین معادله به دست آمده بر ۲ و استفاده از روش Δ جواب‌های آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$4x^2 + 26x - 48 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 13x - 24 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (13)^2 - 4(2)(-24) = 169 + 192 = 361$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-13 + \sqrt{361}}{2(2)} = \frac{-13 + 19}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{-13 - \sqrt{361}}{2(2)} = \frac{-13 - 19}{4} = \frac{-32}{4} = -8 \end{cases}$$

با توجه به اینکه x مقداری مثبت است، بنابراین فقط $x = \frac{3}{2}$ قابل قبول است.

پس ابعاد این قاب به صورت زیر هستند:

$$\text{طول قاب} = 7 + 2x = 7 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 10$$

$$\text{عرض قاب} = 6 + 2x = 6 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 9$$

۱۶۵ الف) برای پیدا کردن محل برخورد سهمی به معادله $y = -3x^2 + 8x + 11$ با محور y در معادله سهمی به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = -3x^2 + 8x + 11 \xrightarrow{x=0} y = -3(0)^2 + 8(0) + 11 \Rightarrow y = 11$$

بنابراین محل برخورد سهمی با محور y نقطه $A(0, 11)$ است. همچنین برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادله سهمی به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = -3x^2 + 8x + 11 \xrightarrow{y=0} -3x^2 + 8x + 11 = 0$$

برای حل این معادله از روش Δ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-3)(11) = 64 + 132 \Rightarrow \Delta = 196$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{196}}{-6} \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{196}}{-6} \Rightarrow x_2 = \frac{11}{3}$$

بنابراین سهمی محور x را در نقاط $(-1, 0)$ و $(\frac{11}{3}, 0)$ قطع می‌کند.

ب) محل برخورد سهمی با محور y به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -(x+4)^2 + 1 \xrightarrow{x=0} y = -(0+4)^2 + 1 \Rightarrow y = -15$$

بنابراین سهمی در نقطه $A(0, -15)$ با محور y برخورد می‌کند. همچنین محل برخورد سهمی با محور x به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -(x+4)^2 + 1 \xrightarrow{y=0} -(x+4)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x+4)^2 = 1$$

$$\begin{cases} x+4=1 \Rightarrow x=-3 \\ x+4=-1 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

در نتیجه محل برخورد سهمی با محور x نقاط $(-3, 0)$ و $(-5, 0)$ است.

۱۶۶ با توجه به اینکه سهمی محور x را در نقاطی به طول -2 و 5 قطع می‌کند، بنابراین از نقاط $(-2, 0)$ و $(5, 0)$ عبور می‌کند. در نتیجه مختصات این نقاط باید در معادله آن صدق کنند. پس می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{(-2, 0)} 4a - 2b + 2 = 0 \\ y = ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{(5, 0)} 25a + 5b + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{2} \times \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 25a + 5b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot a - 5b = -5 \\ 25a + 5b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{5}, b = \frac{3}{5}$$

۱۶۷ الف) ابتدا مختصات رأس سهمی $y = 3x^2 - 1$ را مشخص می‌کنیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(3)} \Rightarrow x = 0$$

$$y = 3x^2 - 1 \xrightarrow{x=0} y = 3(0)^2 - 1 \Rightarrow y = -1$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(0, -1)$ است. برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادله سهمی به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 3x^2 - 1 \xrightarrow{y=0} 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

۱۶۲ الف) عرض رأس سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ برابر با k است.

بنابراین عرض رأس سهمی $y = -2(x-3)^2 - 4$ برابر با -4 است.

ب) برای پیدا کردن محل برخورد سهمی به معادله $y = 5(x-3)^2 - 1$ با محور y در معادله آن به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 5(x-3)^2 - 1 \xrightarrow{x=0} y = 5(0-3)^2 - 1 \Rightarrow y = 44$$

بنابراین سهمی به معادله $y = 5(x-3)^2 - 1$ محور y را در نقطه‌ای به عرض 44 قطع می‌کند.

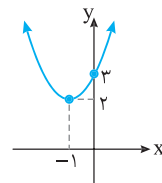
پ) برای رسم سهمی به معادله $y = x^2 + 2x + 3$ ، ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{2}{2(1)} = -1$$

$$y = x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{x=-1} y = (-1)^2 + 2(-1) + 3 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین رأس سهمی نقطه $A(-1, 2)$ است. برای به دست آوردن محل برخورد سهمی با محور y در معادله سهمی به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 + 2(0) + 3 \Rightarrow y = 3$$



بنابراین سهمی در نقطه $(0, 3)$ با محور y برخورد می‌کند. اکنون با توجه به نقاط به دست آمده و اینکه $a = 1 > 0$ ، سهمی $y = x^2 + 2x + 3$ را به صورت مقابل رسم می‌کنیم. بنابراین سهمی به معادله $y = x^2 + 2x + 3$ از ناحیه‌های اول و دوم عبور می‌کند.

۱۶۳ الف) در سهمی به معادله $y = -2x^2 + 8x - 1$ ، $a = -2$ و $b = 8$.

بنابراین طول رأس سهمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-2)} \Rightarrow x = 2$$

همچنین عرض رأس سهمی با جایگذاری $x = 2$ در معادله سهمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -2x^2 + 8x - 1 \xrightarrow{x=2} y = -2(2)^2 + 8(2) - 1 \Rightarrow y = 7$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(2, 7)$ است.

ب) رأس سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ نقطه $A(h, k)$ است.

بنابراین رأس سهمی $y = 7(x+5)^2$ نقطه $(-5, 0)$ است.

۱۶۴ دقت کنید که ضریب x در معادله $y = x^2 - 4x + 3$ برابر با -4 است.

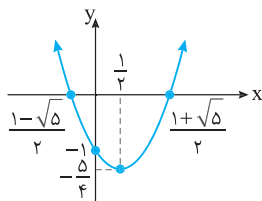
پس برای آنکه معادله داده شده را به صورت مربع کامل بنویسیم، کافی است عدد $4 = \frac{(-4)^2}{4}$ را در سمت راست معادله اضافه و کم کنیم:

$$y = x^2 - 4x + 3 = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 + 3 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1$$

واضح است که رأس این سهمی نقطه $A(2, -1)$ است.

بنابراین سهمی محور x را در نقاط $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$ و $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ قطع می‌کند.

اکنون با توجه به اینکه $a=1 > 0$ ، این سهمی را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



۱۶۸ دقت کنید که طول رأس سهمی برابر با -8 است. بنابراین معادله محور

تقارن این سهمی $x = -8$ است. از طرف دیگر چون عرض دو نقطه $A(m, 2)$ و $B(-4, 2)$ با هم برابر است، بنابراین این دو نقطه از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. در نتیجه میانگین طول‌های دو نقطه A و B برابر با -8 است. پس

$$\frac{m+(-4)}{2} = -8 \Rightarrow m-4 = -16 \Rightarrow m = -12$$

۱۶۹ چون رأس سهمی نقطه $A(-2, 3)$ است، پس معادله این سهمی به صورت

$y = a(x+2)^2 + 3$ است. همچنین سهمی از نقطه $(0, 2)$ عبور کرده است. در نتیجه مختصات این نقطه در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$y = a(x+2)^2 + 3 \xrightarrow{(0,2)} 2 = a(0+2)^2 + 3 \Rightarrow 4a + 3 = 2$$

$$4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

پس معادله سهمی به صورت زیر است:

$$y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$$

با توجه به معادله به دست آمده $a = -\frac{1}{4}$ ، $b = -1$ و $c = 2$.

۱۷۰ دقت کنید که سهمی از نقاط $(-3, 0)$ و $(-1, 0)$ عبور کرده است.

چون عرض این دو نقطه برابر است، بنابراین طول رأس سهمی برابر با میانگین طول‌های این دو نقطه است. پس

$$x = \frac{-3+(-1)}{2} = \frac{-4}{2} \Rightarrow x = -2$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = a(x+2)^2 + k$ است. اکنون با توجه به

اینکه سهمی از نقاط $(-1, 0)$ و $(0, 3)$ عبور کرده است، مقادیر a و k را به

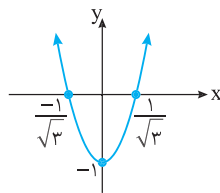
صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = a(x+2)^2 + k \xrightarrow{(-1,0)} 0 = a(-1+2)^2 + k \Rightarrow a+k=0 & (1) \\ y = a(x+2)^2 + k \xrightarrow{(0,3)} 3 = a(0+2)^2 + k \Rightarrow 4a+k=3 & (2) \end{cases}$$

با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a+k=0 \\ 4a+k=3 \end{cases} \Rightarrow a=1, k=-1$$

در نتیجه معادله سهمی به صورت $y = (x+2)^2 - 1$ و رأس سهمی نقطه $A(-2, -1)$ است.



پس این سهمی در نقاط $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ و

$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ با محور x برخورد می‌کند.

اکنون با توجه به اینکه $a=3 > 0$ ، سهمی

به شکل  است.

(ب) رأس سهمی $y = -2(x+3)^2 + 8$ نقطه

$A(-3, 8)$ است. همچنین محل برخورد

سهمی با محور y به صورت زیر به دست می‌آید:

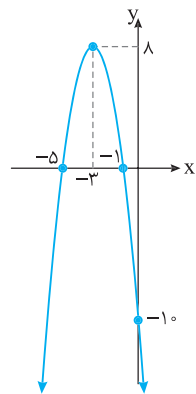
$$y = -2(x+3)^2 + 8 \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -2(0+3)^2 + 8 \Rightarrow y = -10$$

بنابراین نقطه برخورد سهمی با محور y نقطه

$(0, -10)$ است. دقت کنید که محل برخورد

سهمی با محور x به صورت زیر به دست می‌آید:



$$y = -2(x+3)^2 + 8 \xrightarrow{y=0} -2(x+3)^2 + 8 = 0 \Rightarrow 2(x+3)^2 = 8$$

$$(x+3)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+3=2 \Rightarrow x=-1 \\ x+3=-2 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

بنابراین سهمی در نقاط $(-5, 0)$ و $(-1, 0)$ با محور x برخورد می‌کند.

دقت کنید که $a = -2 < 0$ ، بنابراین سهمی به شکل  است.

(پ) ابتدا رأس سهمی $y = x^2 - x - 1$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2 - x - 1 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}}$$

$$y = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ است. برای پیدا کردن محل

برخورد سهمی با محور y در معادله سهمی به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 - x - 1 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 - 0 - 1 \Rightarrow y = -1$$

بنابراین سهمی در نقطه $A(0, -1)$ با محور y برخورد می‌کند. همچنین برای پیدا

کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادله سهمی به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 - x - 1 \xrightarrow{y=0} x^2 - x - 1 = 0$$

برای حل این معادله از روش Δ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) \Rightarrow \Delta = 5$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

پاسخ مسائل تکمیلی

۱ ابتدا توجه کنید که نقاط $(4, -12)$ و $(2, -12)$ دارای عرض‌های برابرند. بنابراین از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. در نتیجه طول رأس این سهمی برابر با میانگین طول‌های این دو نقطه است:

$$x = \frac{2+4}{2} = 3$$

دقت کنید که چون طول رأس سهمی برابر با ۳ است، پس می‌توان معادله آن را به صورت $y = a(x-3)^2 + h$ نوشت و مقادیر a و h را به صورت زیر حساب کرد:

$$y = a(x-3)^2 + h \xrightarrow{(4, -12)} a(4-3)^2 + h = -12 \Rightarrow a+h = -12$$

$$y = a(x-3)^2 + h \xrightarrow{(2, -9)} a(2-3)^2 + h = -9 \Rightarrow a+h = -9$$

$$\begin{cases} a+h = -12 \\ 4a+h = -9 \end{cases} \Rightarrow a=1, h=-13$$

با توجه به مقادیر a و h معادله این سهمی به صورت زیر خواهد بود:

$$y = 1(x-3)^2 - 13 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 9 - 13 \Rightarrow y = x^2 - 6x - 4$$

بنابراین $a=1$ ، $b=-6$ و $c=-4$.

۲ ابتدا برای مشخص کردن مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 8x + 7 < 0$

عبارت $y = x^2 - 8x + 7$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Rightarrow x=1 \\ x-7 = 0 \Rightarrow x=7 \end{cases}$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر واضح است که مجموعه جواب‌های نامعادله بازه $(1, 7)$ است.

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$x^2 - 8x + 7$		+	-	+

اکنون باید نامعادله‌ای به صورت $|x-a| < b$ بنویسیم که مجموعه جواب‌های آن بازه $(1, 7)$ باشد. توجه کنید که مجموعه جواب‌های نامعادله $|x-a| < b$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|x-a| < b \Rightarrow -b < x-a < b \Rightarrow a-b < x < a+b$$

با توجه به اینکه $1 < x < 7$ ، مقادیر a و b به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$$

۳ با توجه به جدول تعیین علامت واضح است که عبارت

$$y = (m^2-1)x^2 + 3mx + n$$

عبارت فقط به ازای $x=2$ برابر با صفر است و در دو طرف $x=2$ علامت این عبارت یکسان نیست. بنابراین با توجه به اینکه چندجمله‌ای

$$(m^2-1)x^2 + 3mx + n$$

$$m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای m عبارت داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$y = (m^2-1)x^2 + 3mx + n \xrightarrow{m=1} y = 3x + n \quad (\text{ق.ق.})$$

$$y = (m^2-1)x^2 + 3mx + n \xrightarrow{m=-1} y = -3x + n \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

با توجه به اینکه در جدول تعیین علامت برای $x > 2$ علامت عبارت مثبت است، پس باید ضریب x مثبت باشد. بنابراین فقط $y = 3x + n$ قابل قبول است. از طرف دیگر چون مقدار y به ازای $x=2$ برابر صفر است، می‌نویسیم:

$$y = 3x + n \xrightarrow{\substack{x=2 \\ y=0}} 0 = 3(2) + n \Rightarrow n = -6 \Rightarrow y = 3x - 6$$

۴ با توجه به جدول تعیین علامت واضح است که معادله

$$(m+1)x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0$$

است. بنابراین باید Δ برابر با صفر باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(1)(2m-1) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$$

$$(m-1)(m-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=5 \end{cases}$$

دقت کنید که $x=a$ جواب معادله $x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0$ است.

بنابراین برای پیدا کردن مقدار a کافی است مقادیر به دست آمده برای m را در معادله جایگذاری کنیم و جواب معادله را به دست آوریم.

$$x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0 \xrightarrow{m=1} x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$x=1 \Rightarrow a=1$$

$$x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0 \xrightarrow{m=5} x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$$

$$x=3 \Rightarrow a=3$$

۵ اگر a, b, c به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه

بین آن‌ها رابطه $b^2 = ac$ برقرار است. بنابراین اگر $x+1, x+4, 5x+2$

جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه

$$(x+4)^2 = (x+1)(5x+2) \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 5x^2 + 2x + 5x + 2$$

$$4x^2 - x - 14 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(4)(-14) = 225$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{225}}{8} = \frac{1+15}{8} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{225}}{8} = \frac{1-15}{8} = -\frac{7}{4}$$

دقت کنید که به ازای $x=2$ دنباله هندسی $x+1, x+4, 5x+2$ به صورت $3, 6, 12$ خواهد بود که قدرنسبت آن برابر با ۲ است. همچنین به ازای

$$x = -\frac{7}{4} \text{ دنباله هندسی } x+1, x+4, 5x+2 \text{ به صورت } -\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{4}$$

خواهد بود که قدرنسبت آن برابر با -3 است.

۴ الف

$$x^2 - 4x + \frac{y}{f} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)\left(\frac{y}{f}\right) = 16 - 4\frac{y}{f} = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{9}}{2} = \frac{y}{2} \quad (o/v\Delta)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{9}}{2} = \frac{1}{2} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$-2x^2 - 10x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(-2)(5) = 100 + 40 = 140$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{140}}{-4} = \frac{10 + 2\sqrt{35}}{-4} = \frac{-5 - \sqrt{35}}{2} \quad (o/v\Delta)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{140}}{-4} = \frac{10 - 2\sqrt{35}}{-4} = \frac{-5 + \sqrt{35}}{2} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$\frac{1}{\Delta} x^2 - x + \frac{\Delta}{f} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{\Delta}\right)\left(\frac{\Delta}{f}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2\left(\frac{1}{\Delta}\right)} = \frac{1}{2} = \frac{\Delta}{2} \quad (o/v\Delta)$$

ت

$$x^2 - 2x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(7) = 4 - 28 = -24 < 0$$

(معادله جواب ندارد) (o/v\Delta)

$$3x^2 - 2a + 1 = 0$$

۵

(o/v\Delta)

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (-2a)^2 - 4(3)(1) = 0 \Rightarrow 4a^2 - 12 = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \quad (o/v\Delta)$$

$$4a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \quad (o/v\Delta)$$

۶

$$x^2 - 2x + m = 0$$

(o/v\Delta)

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(m) > 0 \Rightarrow 4 - 4m > 0 \Rightarrow -4m > -4 \Rightarrow m < 1 \quad (o/v\Delta)$$

$$4 - 4m > 0 \Rightarrow -4m > -4 \Rightarrow m < 1 \quad (o/v\Delta)$$

۷

$$mx^2 + (m-2)x - m = 0$$

(o/v\Delta)

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (m-2)^2 - 4(m)(-m) < 0$$

$$m^2 - 4m + 4 + 4m^2 < 0 \Rightarrow 5m^2 - 4m + 4 < 0 \quad (o/v\Delta)$$

برای حل نامعادله فوق جدول تعیین علامت عبارت را تشکیل می‌دهیم:

$$5m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(5)(4) = 16 - 80 = -64 < 0$$

(معادله جواب ندارد)

m	-∞	+∞
5m ² - 4m + 4	+	+

با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $5m^2 - 4m + 4$ واضح است که

مجموعه جواب‌های نامعادله $5m^2 - 4m + 4 < 0$ تهی است. بنابراین هیچ

مقداری برای m وجود ندارد که به ازای آن معادله $mx^2 + (m-2)x - m = 0$

جواب حقیقی نداشته باشد. (o/v\Delta)

پاسخنامه سؤالات امتحانی بarmبندی شده

۱ الف

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x - 4\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ت

$$2x^2 + 2x - 84 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + x - 42) = 0 \Rightarrow (x+7)(x-6) = 0$$

$$\begin{cases} x+7=0 \Rightarrow x=-7 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

$$(x-7)^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} x-7=7 \Rightarrow x=14 \\ x-7=-7 \Rightarrow x=0 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

۲ الف

$$(2x-5)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (2x-5)^2 = -1 \quad (o/v\Delta) \text{ (معادله جواب ندارد)}$$

ب

ب

$$(3x-4)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 3x-4=2 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \\ 3x-4=-2 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ت

$$(4x-1)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=\sqrt{5} \Rightarrow 4x=1+\sqrt{5} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ 4x-1=-\sqrt{5} \Rightarrow 4x=1-\sqrt{5} \Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

$$x^2 - 8x = -15 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = -15 + 16 = 1$$

۳ الف

$$(x-4)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-4=1 \Rightarrow x=5 \\ x-4=-1 \Rightarrow x=3 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$3x^2 - 9x - 1 = 0 \xrightarrow{+1} x^2 - 3x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{31}{12} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{31}{12}} \\ x - \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{31}{12}} \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{31}{12}}, \quad x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{31}{12}} \quad (o/v\Delta)$$

الف $y = -5x^2 + 10x - 1$ (الف ۱۳)

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2(-5)} = \frac{-10}{-10} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -5(1)^2 + 10(1) - 1 \Rightarrow y = 4$$

رأس سهمی نقطه $A(1, 4)$ است. (۵/۵)

ب $y = x^2 - 7$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 - 7 = -7$$

رأس سهمی نقطه $A(0, -7)$ است. (۵/۵)

ب $y = 2x^2 - 2x + 3$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

رأس سهمی نقطه $A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ است. (۵/۵)

ت $y = -\frac{1}{2}(x+5)^2 - 3$

رأس سهمی نقطه $A(-5, -3)$ است. (۵/۵)

الف $y = x^2 - 6x$ (الف ۱۴)

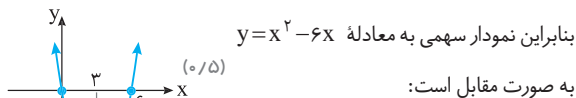
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = (3)^2 - 6(3) \Rightarrow y = -9$$

رأس سهمی: $A(3, -9)$

معادله محور تقارن: $x = 3$ (۵/۲۵)

$$y = x^2 - 6x \xrightarrow{y=0} x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$$

نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات $(0, 0)$ ، $(6, 0)$



ب $y = x^2 + x - 6$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(1)} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \Rightarrow y = -\frac{25}{4}$$

رأس سهمی: $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

معادله محور تقارن: $x = -\frac{1}{2}$ (۵/۲۵)

$$y = x^2 + x - 6 \xrightarrow{y=0} x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط برخورد سهمی با محور } x: (-3, 0), (2, 0) \text{ (۵/۲۵)}$$

$$y = x^2 + x - 6 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 + 0 - 6 \Rightarrow y = -6$$

نقطه برخورد سهمی با محور $y: (0, -6)$

۸ $2x^2 + ax - 2 = 0 \xrightarrow{x=-2} 2(-2)^2 + a(-2) - 2 = 0$

$$8 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \text{ (۵/۵)}$$

$$2x^2 + ax - 2 = 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 \text{ (۵/۵)}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \text{ (۵/۵)}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

۹ $ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=3} a(-3)^2 + b(-3) + c = 0 \text{ (۵/۲۵)}$

$$9a - 3b + c = 0 \Rightarrow 9a + c = 3b \text{ (۵/۲۵)}$$

$$3x^2 = 2x + 21 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 21 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-21) = 4 + 252 = 256 \text{ (۵/۲۵)}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{256}}{6} = \frac{2 + 16}{6} = 3 \text{ (غ.ق.ق. (۵/۲۵))}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{256}}{6} = \frac{2 - 16}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3} \text{ (ق.ق. (۵/۵))}$$

با توجه به اینکه که x یک عدد حقیقی منفی است، پس فقط $x = -\frac{7}{3}$ قابل قبول است.

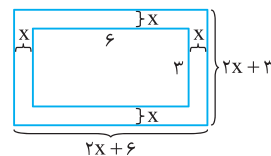
۱۱ $(2x+6)(2x+3) = 40 \xrightarrow{\div 2} (x+3)(2x+3) = 20$

$$2x^2 + 9x - 11 = 0 \text{ (۵/۵)}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(2)(-11) = 81 + 88 = 169 \text{ (۵/۲۵)}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{169}}{4} = \frac{-9 + 13}{4} = 1 \text{ (ق.ق. (۵/۵))}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{169}}{4} = \frac{-22}{4} = -\frac{11}{2} \text{ (غ.ق.ق. (۵/۲۵))}$$



ارتفاع \times (مجموع دو قاعده) = مساحت دوزنقه

$$\frac{(x+3+3)(x)}{2} = 20 \Rightarrow \frac{x(x+6)}{2} = 20 \Rightarrow x^2 + 6x = 40$$

$$x^2 + 6x - 40 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+10=0 \Rightarrow x=-10 \end{cases}$$

چون x یک عدد حقیقی مثبت است، پس فقط $x = 4$ قابل قبول است. (۵/۵)