

# مقدمه

به نام او که همه چیز دنیا را بر اساس حساب  
استوار کرد و بر پایه هندسه نظم بخشید.

## سلام به بچه‌های باحال ریاضی

در کتاب جیبی چکیده هندسه دهم تمام نکات و تست‌های سال‌های اخیر کنکور سراسری و هم‌چنین مطالب کتاب درسی به طور کامل پوشش داده شده است. این کتاب یک جمع‌بندی کامل از سرفصل‌های کتاب درسی، همراه با نکات و تست‌های مرتبط بوده که با نظم خاصی چیده شده‌اند. با مطالعه این کتاب می‌تونید آمادگی خود را در سطح بالایی نگه دارید و از پس امتحانات تشریحی و کنکورهای آزمایشی و سراسری بر بیاید. امید آن دارم که این کتاب در بالابردن سطح علمی دانش‌آموزان کشورم مؤثر باشد.

لازم است تأکید کنم در تألیف این کتاب، دوستان عزیز در انتشارات خیلی‌سبز من را همراهی کردند که از همه آن‌ها تشکر و قدردانی می‌کنم و هم‌چنین بی‌نهایت سپاس‌گزارم از پیگیری‌های فعالانه و دلسوزانه آقای ابراهیم‌نژاد.

به امید روزهای خوب آینده

محمد جواد نوری

شهریور ۱۴۰۲

# فهرست مطالب

## ۷ فصل اول ترسیم‌های هندسی و استدلال

- ۸ درس اول ترسیم‌های هندسی
- ۲۵ درس دوم استدلال

## ۴۸ فصل دوم قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

- ۴۹ درس اول نسبت و تناسب در هندسه
- ۵۷ درس دوم قضیهٔ تالس
- ۷۱ درس سوم تشابه مثلث‌ها
- ۸۲ درس چهارم کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها

## ۹۶ فصل سوم چندضلعی‌ها

- ۹۷ درس اول چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها
- ۱۱۴ درس دوم مساحت و کاربردهای آن

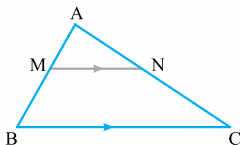
## ۱۳۹ فصل چهارم تجسم فضایی

- ۱۳۰ درس اول خط، نقطه و صفحه
- ۱۳۸ درس دوم تجسم فضایی
- ۱۴۰ درس سوم بُرش
- ۱۴۶ درس چهارم دوران

# قضیه تالس

درس ۲

در مثلث ABC، اگر MN موازی BC باشد، آن گاه:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{الف) (تالس جزء به جزء)}$$

$$\text{ب) (تالس جزء به کل)}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

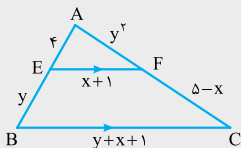
## تست

در شکل مقابل،  $EF \parallel BC$  است. مقدار

(تجربی ۱۴۰۰)

$y - 2x$  کدام است؟

- ۲ (۲)      -۴ (۱)  
۴ (۴)      ۲ (۳)



پاسخ گزینۀ «۱» ابتدا قضیه تالس جزء به کل را می نویسیم:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{y+4} = \frac{y^2}{5-x+y^2} = \frac{x+1}{y+x+1}$$

از طرفین وسطین کردن دو نسبت اولی و آخری داریم:

$$xy + y + 4x + 4 = 4y + 4x + 4 \Rightarrow xy + y = 4y$$

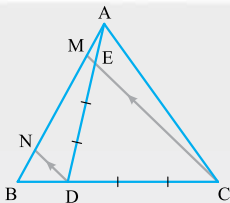
$$\Rightarrow xy = 3y \Rightarrow x = 3$$

اکنون تالس جزءه جزء می نویسیم:  $EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

$$\Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$$

پس مقدار  $y - 2x$  برابر است با:  $2 - 2(3) = 2 - 6 = -4$

### تست



در شکل مقابل،  $BD = \frac{1}{4}BC$ ،

$AE = \frac{1}{4}AD$  و  $DN \parallel CM$ . اندازه

$AB$  چند برابر  $AM$  است؟ (خارج ۹۷)

$$4 \quad (1) \quad 4/5 \quad (2)$$

$$5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۳» در مثلثهای  $MBC$  و  $ADN$ ، تالس جزءه جزء

می نویسیم:  $\triangle MBC : DN \parallel MC \Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow BN = \frac{1}{3}MN$$

$\triangle ADN : ME \parallel DN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{DE} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3}MN$

$$\begin{cases} BN = \frac{1}{3}MN \\ AM = \frac{1}{3}MN \end{cases} \Rightarrow AM = BN$$

از طرفی طبق شکل داریم:

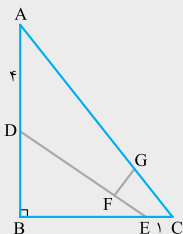
$$AB = AM + MN + BN = AM + 3AM + AM = 5AM \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 5$$



### تست

در شکل مقابل،  $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$  باشد،

اندازه  $FG$  کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۲)



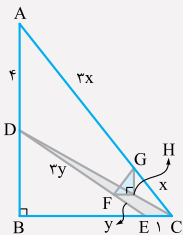
۱ (۱)

۱/۲۵ (۲)

۱/۵ (۳)

۱/۷۵ (۴)

**پاسخ** گزینه «۲» از C به D وصل می‌کنیم. از F به موازات BC و از G به موازات AB رسم می‌کنیم، حالا داریم:



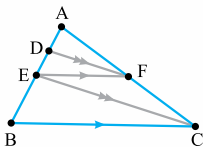
$$\triangle DEC : FH \parallel EC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{3y}{4y} = \frac{FH}{1} \Rightarrow FH = \frac{3}{4}$$

$$\triangle CDA : GH \parallel AD \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{x}{4x} = \frac{GH}{4} \Rightarrow GH = 1$$

چون  $AB \perp BC$  و  $\begin{cases} GH \parallel AB \\ FH \parallel BC \end{cases}$  است، پس  $\hat{H} = 90^\circ$ . به کمک

$$GF^2 = FH^2 + HG^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} \quad \text{فیتاغورس داریم:}$$

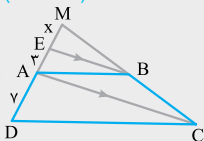
$$\Rightarrow GF = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1/25$$



$$\left\{ \begin{array}{l} EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \\ DF \parallel EC \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AC} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AE^2 = AD \times AB$$

## تست

در شکل زیر، ABCD ذوزنقه و  $BE \parallel AC$  است. اگر  $AD = 7$  و  $AE = 3$  باشد MD چند است؟ (سراسری ۹۳)



- (۱) ۱۲  
(۲) ۱۲/۲۵  
(۳) ۱۲/۵  
(۴) ۱۲/۷۵

• پاسخ گزینۀ «۲» چون ABCD ذوزنقه است، پس:  $AB \parallel CD$ .  
طبق فرض  $BE \parallel AC$ ، در نتیجه از تالس تودرتو داریم:

$$MA^2 = ME \times MD \quad (*)$$

ME = x را در رابطه (\*) قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow (x+3)^2 = x(x+10) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 10x$$

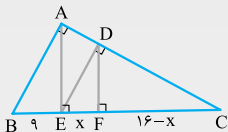
$$\Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = 2\frac{1}{4} + 3 + 7 = 12\frac{1}{4}$$



## تست

در شکل زیر، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. مقدار  $x$  کدام است؟



۴/۵۴ (۱)

۵/۳۶ (۲)

۵/۷۶ (۳)

۶/۷۵ (۴)

$$\begin{cases} DE \perp AC \\ BA \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \parallel DE$$

پاسخ گزینۀ «۳»

$$\begin{cases} AE \perp BC \\ DF \perp BC \end{cases} \Rightarrow AE \parallel DF$$

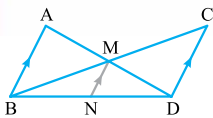
طبق تالس تودرتو در مثلث  $ABC$  داریم:

$$CE^2 = CF \times CB \Rightarrow 16^2 = (16-x)(25)$$

$$\Rightarrow 256 = 400 - 25x \Rightarrow 25x = 144$$

$$\Rightarrow x = \frac{144}{25} = \frac{576}{100} = 5/76$$

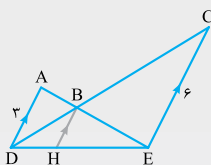
## تست



اگر یکی از دو خط موازی در دو مثلث مشترک باشد، آن گاه:

$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

### تست



در شکل مقابل،  $AD \parallel BH \parallel CE$  است. اگر  $AD = 3$  و  $CE = 6$  باشد، اندازه  $BH$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{3}$   
 (۳)  $\frac{2}{2}$       (۴)  $2$

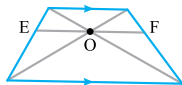
پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{1}{BH} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CE}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = 2$$

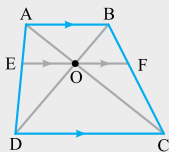
### تکلیف

اگر از نقطه  $O$  محل تقاطع قطرهای دوزنقه، خطی به موازات قاعده رسم کنیم تا ساق‌ها را در  $E$  و  $F$  قطع کند، آن گاه:



$$OE = OF$$

### تست

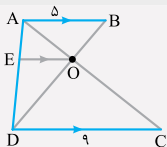


در شکل مقابل  $AB \parallel EF \parallel DC$  و  $AB = 5$  و  $DC = 9$  است. اندازه  $EF$  چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{45}{7}$       (۲)  $\frac{45}{6}$   
 (۳)  $3\sqrt{5}$       (۴)  $7$

پاسخ: گزینه «۱» در مثلث‌های  $ABD$  و  $ADC$  داریم:

$$\frac{1}{OE} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} = \frac{14}{45}$$

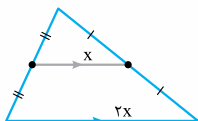




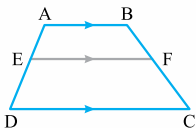


با توجه به نکته قبل، داریم:  $OE = OF = x$

$$\Rightarrow OE = \frac{45}{14} \Rightarrow EF = 2OE = 2 \times \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$$



• قضیه میان خط - پاره خطی که وسط‌های دو ضلع از مثلثی را به هم وصل کند، موازی ضلع سوم بوده و اندازه‌اش نصف اندازه ضلع سوم است.



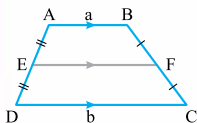
• تالس در ذوزنقه - در هر ذوزنقه، اگر خطی به موازات دو قاعده آن رسم کنیم، داریم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$



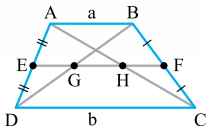
۱ اگر E وسط AD و F وسط BC (ساق‌های ذوزنقه) باشند، آن‌گاه:

$$EF = \frac{a+b}{2}$$



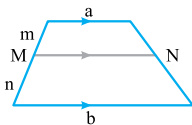
(قضیه میان خط در ذوزنقه)

۲ اگر E و F وسط ساق‌های ذوزنقه باشند، آن‌گاه داریم:



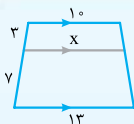
$$\begin{cases} EG = HF = \frac{a}{2} \\ EH = FG = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow GH = \frac{b-a}{2}$$

$$GH = \frac{b-a}{2}$$



۳ هر خطی مانند MN موازی قاعده‌های دوزنقه رسم کنیم، داریم:

$$MN = \frac{mb + na}{m + n}$$

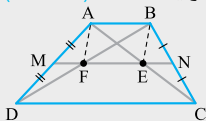


در شکل مقابل مقدار x را بیابید.

$$x = \frac{3 \times 7 + 7 \times 10}{3 + 7} = \frac{39 + 70}{10} = 10.9$$

### تست

در دوزنقه ABCD زیر، نسبت قاعده‌ها  $\frac{1}{3}$  است. با توجه به شکل، مساحت ABFE چند برابر مساحت دوزنقه اولیه است؟ (سراسری ۹۷)



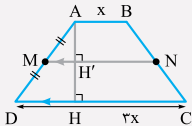
- |                   |                    |
|-------------------|--------------------|
| $\frac{1}{6}$ (۲) | $\frac{2}{9}$ (۱)  |
| $\frac{1}{4}$ (۴) | $\frac{3}{16}$ (۳) |

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} AB = x \\ CD = 3x \end{cases}$$

پاسخ گزینه «۴»

مطابق شکل، M و N وسط ساق‌های دوزنقه ABCD هستند؛ پس:

$$EF = \frac{3x - x}{2} = x = AB$$





مطابق شکل ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث ADH تالس

$$1 = \frac{AM}{MD} = \frac{AH'}{HH'} \Rightarrow AH' = HH'$$

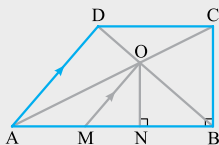
جزء به جزء برقرار است:

یعنی  $H'$  وسط  $AH$  است؛ پس  $AH = 2AH'$ .

از طرفی در چهارضلعی  $ABEF$ ،  $AB = EF$  و  $AB \parallel EF$ ؛ پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است:

$$\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}} = \frac{AH' \times EF}{\frac{(AB + CD) \times AH}{2}} = \frac{2AH' \times x}{(x + 3x) \times AH} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

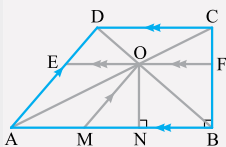
### تست



با توجه به شکل مقابل، در ذوزنقه

$ABCD$  نسبت  $\frac{AM}{BN}$  چه قدر است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲ (سراسری ۹۹)  
(۳) کمتر از ۱  
(۴) بین ۱ و ۲



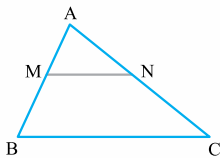
پاسخ گزینه «۱» از  $O$  خطی موازی

قاعده‌ها رسم می‌کنیم:

چهارضلعی  $OEAM$  متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع روبه‌رو، دوجه‌دو موازی‌اند. در نتیجه:  $OE = AM$

چهارضلعی  $OFBN$  مستطیل است، زیرا اضلاع روبه‌رو، دوجه‌دو موازی‌اند و  $\hat{B} = \hat{N} = 90^\circ$ ؛ پس  $OF = BN$ .

از طرفی می‌دانیم  $OF = OE$ ؛ پس:  $\frac{AM}{BN} = 1$

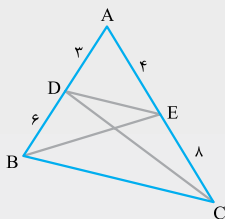


**عکس قضیه تالس** اگر خطی روی دو ضلع مثلثی پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

فرض:  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$  حکم:  $MN \parallel BC$

**تذکره** - توجه کنید اثبات عکس قضیه تالس، به روش برهان خلف انجام می‌شود.

### تست



در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲)  $\frac{2}{3}$   
 (۳)  $\frac{3}{4}$   
 (۴) ۱

**پاسخ** گزینه «۴» ابتدا شرایط عکس قضیه تالس را بررسی

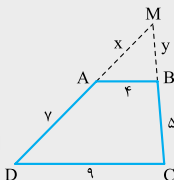
$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow DE \parallel BC$  می‌کنیم:

اکنون دو مثلث CDE و BDE در قاعده DE مشترک و ارتفاع‌های یکسان نیز دارند (فاصله دو خط موازی DE و BC اندازه ارتفاع آن‌ها است). پس هم‌مساحت‌اند. در نتیجه:

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle BDE}} = 1$$

• تست‌های مروری از بحث تالس •

تست



در دوزنقهٔ مقابل، محیط مثلث MAB چه قدر

(تجربی ۹۹)

$$۱۳/۶ (۲)$$

$$۱۴/۸ (۴)$$

است؟

$$۱۳/۲ (۱)$$

$$۱۴/۴ (۳)$$

• پاسخ • گزینهٔ «۲» در دوزنقه، قاعده‌ها موازی‌اند؛ پس  $AB \parallel CD$ .

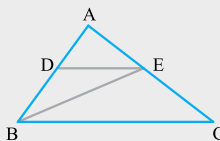
$$\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل در } \triangle MDC} \frac{x}{y+x} = \frac{y}{5+y} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x = 28 + 4x \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ 9y = 20 + 4y \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} \end{cases}$$

$$\triangle AMB \text{ محیط} = x + y + 4 = \frac{28}{5} + \frac{20}{5} + 4$$

$$= \frac{68}{5} = \frac{136}{10} = 13/6$$

تست



در مثلث ABC مقابل،  $DE \parallel BC$  و

$$\frac{AD}{DB} = \frac{4}{5} \text{ است. مساحت مثلث EBC}$$

چند برابر مساحت مثلث EBD است؟

(سراسری ۹۳)

$$۲/۷۵ (۴)$$

$$۲/۵ (۳)$$

$$۲/۲۵ (۲)$$

$$۲ (۱)$$

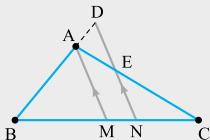
• پاسخ | گزینه «۲» دو مثلث EBC و EBD هم‌ارتفاع هستند، پس نسبت مساحت‌هایشان برابر است با نسبت قاعده‌هایشان:

$$\frac{S_{\Delta EBC}}{S_{\Delta EBD}} = \frac{BC}{DE}$$

از طرفی طبق تالس جزءبه‌کل در مثلث ABC داریم:  $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$  و طبق فرض  $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$ ؛ پس  $AD = 4x$  و  $DB = 5x$ .

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD + DB} = \frac{4x}{9x} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{9}{4} = 2/25$$

### تست



در مثلث ABC،  $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ ، اگر  $\frac{AD}{AE}$  موازی میانه AM باشد، نسبت  $\frac{AD}{AE}$  کدام است؟

$\frac{4}{5}$  (۴)       $\frac{2}{3}$  (۳)       $\frac{5}{9}$  (۲)       $\frac{4}{9}$  (۱)

• پاسخ | گزینه «۳» AM میانه است؛ پس:  $BM = MC$

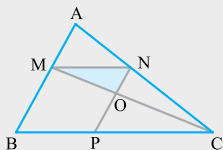
$$\Delta CAM : EN \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \quad (1)$$

$$\Delta BDN : AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AD}{AE}$$



### تست



در شکل مقابل،  $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$  است. مساحت

مثلث MNO چند درصد متوازی الاضلاع MNPB است؟

(خارج ۹۰)

۲۴ (۲)      ۲۰ (۱)

۳۰ (۴)      ۲۵ (۳)

**پاسخ** گزینه «۱» طبق فرض، چهارضلعی MNPB متوازی الاضلاع است. پس:

$MN \parallel BP$ ,  $NP \parallel MB$

$$\triangle ABC : MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{MN}{BC}$$

$$\triangle ACM : ON \parallel AM \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{ON}{AM}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AM + MB}{MB} = \frac{5}{3} \quad \text{از طرفی}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{AC}{NC} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{ON}{AM} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{ON}{\frac{2}{3}MB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{ON}{MB} = \frac{\frac{2}{3} \times 3}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{بنابراین:}$$

$$S_{\triangle ONM} = \frac{ON \times MN \times \sin \hat{N}}{2}$$

$$S_{MNPB} = \frac{NP \times MN \times \sin \hat{N}}{2}$$

$$= \frac{ON}{2} = \frac{ON}{2NP} = \frac{ON}{2MB} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100}$$

پس مساحت مثلث ONM، ۲۰ درصد مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB است.

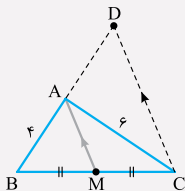
### تست

در مثلث ABC، اضلاع  $AB = 4$ ،  $AC = 6$  و  $BC = 7$  است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD کدام است؟

(تجربی خارج ۹۸)

- ۹ (۴)      ۸ / ۵ (۳)      ۸ (۲)      ۷ / ۵ (۱)

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا شکل مناسب رسم می‌کنیم:



$$\triangle BDC : AM \parallel CD$$

$$\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BD = 2BA = 2(4) = 8$$