زرنگی: این‌جوری فرض کن: $b = 3$

$$1 - 4a^2 - b^2 - 4ab = -4a^2 - 12a - 8$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} -4(a^2 + 3a + 2) = -4(a+2)(a+1)$$

اگر $b = 3$ را در گزینه‌ها هم بگذارید، تنها گزینه‌ی «۲» عامل این عبارت می‌شود: $1 + 2a + b = 2a + 4 = 2(a+2)$

۴۴۹. گزینه ۳ با توجه به اتحادهای کمکی مکعب، داریم:

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) \xrightarrow[x-y=5\sqrt[3]{2}]{x^3-y^3=70}$$

$$70 = (5\sqrt[3]{2})^3 + 3xy(5\sqrt[3]{2}) \Rightarrow 70 = 125 \times 2 + 15\sqrt[3]{2}xy$$

$$\Rightarrow 15\sqrt[3]{2}xy = 70 - 250 = -180 \Rightarrow xy = \frac{-180}{15\sqrt[3]{2}} = \frac{-12}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow xy = \frac{-12}{\sqrt[3]{2}} \quad (*)$$

با توجه به اتحاد کمکی مربع کامل، داریم: $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - (5\sqrt[3]{2})^2 \overset{(*)}{=} 4\left(\frac{-12}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

$$(x+y)^2 - 25 \times \sqrt[3]{4} = \frac{-48}{\sqrt[3]{2}} \xrightarrow{\text{مخرج طرف راست را گویا کن}}$$

$$(x+y)^2 - 25\sqrt[3]{4} = \frac{-48\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} \Rightarrow (x+y)^2 - 25\sqrt[3]{4} = \frac{-48\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$(x+y)^2 = 25\sqrt[3]{4} - 24\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow x + y = \pm\sqrt{\sqrt[3]{4}}$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال‌های تو در تو}} x + y = \pm\sqrt[6]{2^2} = \pm\sqrt[3]{2}$$

که در بین گزینه‌ها مقدار مثبت آن آمده است.

۴۵۰. گزینه ۴ همه‌ی عبارت‌ها را در ابتدا تجزیه می‌کنیم. دلتای عبارت $x^2 - 2x + 2$ منفی است، در نتیجه تجزیه نمی‌شود؛ ولی برای سایر عبارت‌ها داریم:

۱) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$

۲) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

۳) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

اگر حاصل عبارت را با A نمایش دهیم، داریم:

$$A = \frac{(x-2)^3}{x^2 - 2x + 2} \times \left(\frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)(x-1)}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{مخرج مشترک بگیر}]{\text{بین عبارت‌های داخل پرانتز}} A = \frac{(x-2)^3}{x^2 - 2x + 2} \times \frac{x(x-1) - 1(x-2)}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \frac{(x-2)^3}{x^2 - 2x + 2} \times \frac{x^2 - x - x + 2}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \frac{(x-2)^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2 - 2x + 2}} \times \frac{\cancel{x^2 - 2x + 2}}{\cancel{(x-2)^2}(x-1)} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} A = \frac{x-2}{x-1}$$

زرنگی: فرض کن $x = -1$:

$$A = \frac{-1-6-12-8}{1+2+2} \times \left(\frac{-1}{1+4+4} - \frac{1}{1+3+2}\right)$$

$$= \frac{-27}{5} \times \left(\frac{-1}{9} - \frac{1}{6}\right) = -\frac{27}{5} \times \frac{-2-3}{18} = \left(-\frac{27}{\cancel{5}}\right)\left(-\frac{\cancel{5}}{18}\right) = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

گزینه‌های «۱» و «۳» به ازای $x = -1$ تعریف‌نشده هستند، در گزینه‌ی «۲» هم داریم: $x - 2 = (-1) - 2 = -3 \neq \frac{3}{2}$

۴۵۱. گزینه ۱

$$(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow[\text{جذر بگیر}]{\text{از دو طرف}} \begin{cases} 3t-2 = \sqrt{4} \Rightarrow 3t-2 = 2 \\ \text{یا} \\ 3t-2 = -\sqrt{4} \Rightarrow 3t-2 = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+2} \begin{cases} 3t = 4 \\ \text{یا} \\ 3t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

زرنگی:

$$(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 9t^2 - 12t = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{9} = \frac{4}{3}$$

۴۵۲. گزینه ۲ معادله‌ی $3x^2 + 7x = 0$ فاقد عدد ثابت است ($c = 0$)، بنابراین روش فاکتورگیری را به یاد می‌آوریم و...

$$3x^2 + 7x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(3x+7) = 0 \xrightarrow{\text{ویژگی حاصل‌ضرب صفر}}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ 3x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف دو ریشه} = \left|0 - \left(\frac{-7}{3}\right)\right| = \frac{7}{3}$$

زرنگی:

$$3x^2 + 7x = 0 \xrightarrow{\text{اختلاف ریشه‌ها}} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{49 - 4(3)(0)}}{3} = \frac{7}{3}$$

۴۵۳. گزینه ۳ می‌دانیم که مهم‌ترین ویژگی ریشه یا جواب یک معادله این است که در معادله صدق می‌کند؛ بنابراین اگر $x = p$ ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد، می‌توان نوشت:

$$2x^2 + 3x - 1 = 0 \xrightarrow[\text{قرار بده}]{x=p} 2p^2 + 3p - 1 = 0 \Rightarrow 2p^2 + 3p = 1 \quad (*)$$

اکنون برای محاسبه‌ی مقدار عبارت $2p^2 + 3p + 4$ کافی است به‌جای $2p^2 + 3p$ با توجه به (*)، مقدار آن را قرار دهیم: $2p^2 + 3p + 4 = 1 + 4 = 5$

۴۵۴. گزینه ۲ در عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$، اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، آن‌گاه عبارت قابل تجزیه نبوده و معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ نیز فاقد ریشه خواهد بود. در گزینه‌ی «۲» داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(4)(8) = 100 - 128 = -28 < 0$$

در نتیجه عبارت تجزیه‌ناپذیر است.

بررسی سایر گزینه‌ها و نیز حل معادله‌ی مربوطه به عهده‌ی خودتون!

۴۵۵. گزینه ۴ چون ضریب x^2 برابر یک است، کافی است به دو طرف، $\left(\frac{\text{ضریب } x}{2}\right)^2$ را اضافه کنیم؛ یعنی کافی است به دو طرف، عدد یک را اضافه کنیم:

$$\left(\frac{\text{ضریب } x}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

۴۵۶. گزینه ۱ معادله را از روش کلی حل می‌کنیم:

$$\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} \underset{(a=2,\, b=-3,\, c=-9)}{2t^2 - 3t - 9 = 0} \xrightarrow[=9+72=81]{\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9)}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} \xrightarrow{\text{دو حالت دارد}} \begin{cases} t_1 = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \text{یا} \\ t_2 = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

زرنگی:

$\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}-\frac{3}{2}=0 \xrightarrow{\times 6} 2t^2-3t-9=0$

گزینه‌ای درست است که ضرب ریشه‌هایش $-\frac{9}{2}$ و جمع آن‌ها $\frac{3}{2}$ باشد...

۴۵۷. گزینه ۳ ① $x=-1 \Rightarrow a+c=b \Rightarrow (3m+1)+(2-5m)=-5$

$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} -2m+3=-5 \xrightarrow{\text{حل کن}} -2m=-8 \Rightarrow m=4$

② $x=-1 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دیگر}} x=-\frac{c}{a}=-\frac{2-5m}{3m+1} \xrightarrow{m=4}$

$x=-\frac{2-20}{12+1}=\frac{18}{13} \Rightarrow m+\text{ریشه‌ی دیگر}=4+\frac{18}{13}=\frac{52+18}{13}=\frac{70}{13}$

۴۵۸. گزینه ۳ داشتن دو ریشه‌ی مساوی در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم به معنای داشتن ریشه‌ی تکراری یا مضاعف بوده و شرطش این است که دلتای آن معادله صفر شود.

$x(2x-5)=a \xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 2x^2-5x=a \Rightarrow 2x^2-5x-a=0$

$\Rightarrow \Delta=(-5)^2-4(2)(-a)=0 \Rightarrow 25+8a=0 \Rightarrow 8a=-25 \Rightarrow a=\frac{-25}{8}$

$\xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{در معادله}} 2x^2-5x+\frac{25}{8}=0 \xrightarrow[x=x_S=\frac{-b}{2a}]{\text{فرمول ریشه‌ی مضاعف}} x=\frac{-(-5)}{2(2)}=\frac{5}{4}$

این‌جوری هم ببین: تست فقط مقدار ریشه‌ی مضاعف رو خواسته و ما می‌دانیم که در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ مقدار ریشه‌ی مضاعف از دستور $x=x_S=\frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید:

$x(2x-5)=a \Rightarrow 2x^2-5x-a=0$

$\xrightarrow{\text{بدون توجه به مقدار a}} x=x_S=\frac{-(-5)}{2(2)}=\frac{5}{4}$ (ریشه‌ی مضاعف معادله)

۴۵۹. گزینه ۱ اگر سن برادر کوچک‌تر را x و سن برادر بزرگ‌تر را y فرض کنیم، بر اساس گفته‌های سؤال داریم:

① برادر بزرگ‌تر ۴ سال از برادر کوچک‌تر، بزرگ‌تره؛ یعنی:

$y=x+4$ یا $y-x=4$

② ۴ سال دیگر، سن برادر کوچک‌تر $x+4$ سال و سن برادر بزرگ‌تر $y+4$ سال می‌شود؛ در نتیجه:

$(x+4)(y+4)=60 \xrightarrow[\text{قرار بده } y]{\text{به‌جای } x+4} y(y+4)=60$

$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} y^2+4y-60=0$ $(a=1, b=4, c=-60)$

$\xrightarrow{\text{حل از } \Delta} \Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(1)(-60)=16+240=256$

$\Rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{256}}{2}$

$\xrightarrow[\sqrt{256}=16]{\text{دو حالت دارد}} \begin{cases} y=\frac{-4+16}{2}=\frac{12}{2}=6 \checkmark \Rightarrow y=6 \ , \ x=2 \\ \text{یا} \\ y=\frac{-4-16}{2}=\frac{-20}{2}=-10 \times \ (\text{سن منفی بی‌معناست}) \end{cases}$

بنابراین هم‌اکنون برادر بزرگ‌تر ۶ سال و برادر کوچک‌تر ۲ سال دارد.

۴۶۰. گزینه ۳ آن دو عدد طبیعی فرد متوالی را $2n-1$ و $2n+1$ در نظر می‌گیریم؛ پس: $(2n-1)^2+(2n+1)^2=290$

$\xrightarrow{\text{اتحادها رو باز کن}} (4n^2-4n+1)+(4n^2+4n+1)=290$

$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 8n^2+2=290 \xrightarrow{-2} 8n^2=288$

$\xrightarrow{\div 8} n^2=36 \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} n=\pm 6 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=6$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{عدد فرد اول} = 2(6)-1=11 \\ \text{عدد فرد بعدی} = 2(6)+1=13 \end{cases}$

$\Rightarrow$ حاصل‌ضرب این دو عدد $=11\times 13=143$

۴۶۱. گزینه ۲ معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta=b^2-4ac<0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است:

$\underset{(a=m,b=m,c=1)}{mx^2+mx+1=0} \Rightarrow \Delta=m^2-4m<0$

$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} m^2-4m=0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} m(m-4)=0$

$\xrightarrow{\text{ویژگی حاصل ضرب صفر}} \begin{cases} m=0 \\ \text{یا} \\ m-4=0 \Rightarrow m=4 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جدول}}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
m^2-4m		+	0	− ✓	0	+	

$\xrightarrow{\text{هدف اینه که } m^2-4m<0 \text{ بشه}}$ حدود m: $0<m<4$

حالا به نظر شما برای کدام مقادیر m، عبارت mx^2+mx+1 همواره مثبت می‌شه؟!

زرنگی:

$m=-1 \xrightarrow{\text{در معادله}} -x^2-x+1=0$

$\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(-1)(1)=5>0 \Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد

پس گزینه‌های «۱» و «۴» که $m=-1$ را قبول دارند غلط هستن!

$m=5 \xrightarrow{\text{در معادله}} 5x^2+5x+1=0$

$\Rightarrow \Delta=5^2-4(5)(1)=5>0 \Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد

پس گزینه‌ی «۳» هم غلطه!

۴۶۲. گزینه ۳ Δ را محاسبه کرده و بعد گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$ax^2+x+3=0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{a=a,b=1,c=3} \Delta=1^2-4(a)(3)=1-12a$

گزینه‌ی «۱»: $a=\frac{1}{8} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta=1-12(\frac{1}{8})=-\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{\Delta<0}$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. ✗

گزینه‌ی «۲»: $a=\frac{1}{12} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta=1-12(\frac{1}{12})=0$

$\xrightarrow{\Delta=0}$ ریشه‌ی مضاعف دارد. ✗

گزینه‌ی «۳»: $a=\frac{1}{6} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta=1-12(\frac{1}{6})=-1$

$\xrightarrow{\Delta<0}$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. ✓

درباره‌ی گزینه‌ی «۴»، اگر a عددی منفی باشد، $-12a$ مثبت شده و $-12a+1$ هم قطعاً مثبت خواهد بود، بنابراین همواره دو ریشه‌ی حقیقی خواهیم داشت. ✗

۴۶۳. گزینه ۲ ریشه‌ی معادله در معادله صدق می‌کند؛ پس:

$2\alpha^2-\alpha-2=0 \Rightarrow 2\alpha^2=\alpha+2$ ❋

حالا با توجه به رابطه‌ی ❋ کافی است در عبارت $\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2+\alpha+2}$ به‌جای $\alpha+2$ معادل آن $(2\alpha^2)$ را قرار دهیم:

حاصل عبارت $=\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2+(2\alpha^2)}=\frac{4\alpha^2}{4\alpha^2}=1$

۴۶۴. گزینه ۴ می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه معادله به‌صورت $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ قابل تجزیه خواهد بود به‌طوری که $\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $(\Delta=b^2-4ac)$.

برای حل این تست ابتدا ریشه‌های معادله‌ی $b^2+\sqrt{2}b-4=0$ را از روش Δ به‌دست می‌آوریم: $b^2+\sqrt{2}b-4=0$

$\xrightarrow{\Delta=(\sqrt{2})^2-4(1)(-4)=2+16=18} b=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{18}}{2} \xrightarrow{\sqrt{18}=3\sqrt{2}}$

$b=\frac{-\sqrt2\pm3\sqrt2}{2} \Rightarrow b=\frac{2\sqrt2}{2}=\sqrt2$ یا $b=\frac{-4\sqrt2}{2}=-2\sqrt2$

$\Rightarrow b^2+\sqrt2 b-4=(b-\sqrt2)(b+2\sqrt2)$

این رابطه را با تجزیه‌ی داده‌شده در صورت سؤال $((b-r)(b+s))$ مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} r=\sqrt2 \\ s=2\sqrt2\end{cases} \Rightarrow \frac rs=\frac{\sqrt2}{2\sqrt2}=\frac12$$

زرنگی: $b^2+\sqrt2b-4=(b-\sqrt2)(b+2\sqrt2)\xrightarrow{\text{مقایسه با فرض}}$

$(b-\sqrt2)(b+2\sqrt2)=(b-r)(b+s)\Rightarrow \begin{cases}r=\sqrt2\\ s=2\sqrt2\end{cases}\Rightarrow \frac rs=\frac12$

۴۶۵. (گزینه‌ی ۱)

$$S^2-3S=3 \xrightarrow{+(\frac{b}{2a})^2=(-\frac32)^2} S^2-3S+\frac94=3+\frac94\Rightarrow(S-\frac32)^2=\frac{21}{4}$$

در این مرحله باید از دو طرف جذر بگیریم، پس باید از عدد $\frac{21}{4}$ جذر گرفته شود.

۴۶۶. (گزینه‌ی ۳)

نکته: هرگاه دومعادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ و $a'x^2+b'x+c'=0$ دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، این ریشه از حذف x^2 بین دو معادله به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}x^2+6x+m=0\\x^2+2x-3m=0\end{cases}\xrightarrow[\text{تفاضل دو معادله}]{\text{حذف } x^2} 4x+4m=0\Rightarrow x=-m$$

ریشه‌ی به‌دست آمده، ریشه‌ی مشترک دو معادله است که در هر دو صدق می‌کند:

بنابراین داریم: $x^2+6x+m=0\xrightarrow{x=-m}m^2-6m+m=0$

$\Rightarrow m^2-5m=0\Rightarrow m=0,5$

طبق فرض تست $m=0$ قابل قبول نیست. با جای‌گذاری $m=5$ در دومعادله داریم:

$$\begin{cases}x^2+6x+5=0\Rightarrow(x+1)(x+5)=0\Rightarrow x=-1,-5\\ x^2+2x-15=0\Rightarrow(x-3)(x+5)=0\Rightarrow x=3,-5\end{cases}$$

اختلاف ریشه‌های غیرمشترک برابر است با: $3-(-1)=4$

۴۶۷. (گزینه‌ی ۴) شرط وجود دو ریشه‌ی حقیقی متمایز آن است که $\Delta=b^2-4ac>0$ پس:

$x^2-3x-m+9=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4(1)(-m+9)>0$

$(a=1,b=-3,c=-m+9)$

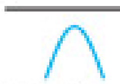
$\Rightarrow 9+4m-36>0\Rightarrow 4m>27\xrightarrow{\div4}m>\frac{27}{4}$

$\xrightarrow[=7-0/25=6/75]{\frac{27}{4}=\frac{28-1}{4}=\frac{28}{4}-\frac14} m>6/75\Rightarrow$ کوچک‌ترین عدد صحیح $m=7$

۴۶۸. (گزینه‌ی ۲)

$y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$

$\xrightarrow{\text{شکل مناسب رو رسم کن}}$ سهمی پایین محور x هاست



$x \xrightarrow{\text{شرط‌ها رو بنویس}}\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}\xrightarrow{\text{محاسبه کن}}$

$$\begin{cases}a=1-m<0\Rightarrow m>1 \quad ①\\ \Delta=(2(m-3))^2-4(1-m)(-1)<0\end{cases}$$

$\Rightarrow\Delta=4(m^2-6m+9)+4(1-m)<0\xrightarrow{\div4}$

$m^2-6m+9+1-m<0\Rightarrow m^2-7m+10<0$

$\Rightarrow(m-5)(m-2)<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}2<m<5 \quad ②$

$①\cap②\longrightarrow 2<m<5$

۴۶۹. (گزینه‌ی ۳) مقدار $\Delta=b^2-4ac$ را برای تک‌تک گزینه‌ها حساب می‌کنیم و گزینه‌ای را که در آن مقدار Δ به ازای مقادیر مختلف m مثبت می‌شود، به‌عنوان گزینه‌ی درست انتخاب می‌کنیم:

گزینه‌ی «۱»: $\Delta=(-m)^2-4(1)(1+m^2)=m^2-4-4m^2$

$=-4-3m^2<0$ ✗ (حتماً قابل تجزیه نیست!)

گزینه‌ی «۲»: $\Delta=(-1)^2-4(m^2+2)(3)=1-12m^2-24$

$=-12m^2-23<0$ ✗ (حتماً قابل تجزیه نیست!)

گزینه‌ی «۳»: $\Delta=(3)^2-4(-2)(m^2+2)=9+8m^2+16$

$=\underbrace{8m^2+25}_{\text{m هرچی باشه این عبارت مثبته}}>0$ ✓ (این عبارت حتماً قابل تجزیه است!)

گزینه‌ی «۴»: $\Delta=(-3)^2-4(m+1)(m)=9-4m^2-4m$

$=-4m^2-4m+9$ ✗

(این عبارت نیز به ازای همه‌ی مقادیر m همواره مثبت نیست!)

زرنگی: a و c مختلف‌العلامت به معنای $\Delta>0$ است $(ac<0)$: در این تست شرط $ac<0$ فقط در گزینه‌ی «۳» برقراره:

گزینه‌ی «۳»: $-2x^2+3x+m^2+2\xrightarrow[c=m^2+2]{a=-2}ac=-2\underbrace{(m^2+2)}_{\text{همواره}\oplus}<0$ ✓

۴۷۰. (گزینه‌ی ۱) در معادله‌ی داده‌شده، داریم:

$$\begin{cases}a=1\\b=-1-\sqrt3\\c=\sqrt3\end{cases}\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}x_1=1\\x_2=\sqrt3\end{cases}$$

بنابراین: مقدار موردنظر $=|\underbrace{\sqrt1-\sqrt{\sqrt3}}_{\text{منفی}}|+\sqrt1+\sqrt{\sqrt3}$

$=(\sqrt{\sqrt3}-1)+\sqrt{\sqrt3}+1=2\sqrt{\sqrt3}=2\sqrt[4]{3}$

۴۷۱. (گزینه‌ی ۳) هدف تست، حل معادله‌ی $0/006s^2-0/02s+120=124$ یا $0/006s^2-0/02s-4=0$ است. اگر طرفین را در ۱۰۰۰ ضرب کنیم، به معادله‌ی سرراست‌تر زیر می‌رسیم:

$6s^2-20s-4000=0\xrightarrow{\div2}3s^2-10s-2000=0$

$(a=3,b=-10,c=-2000)$

$\xrightarrow[\Delta=(-10)^2-4(3)(-2000)=24100]{\text{از }\Delta\text{ برو}}s=\frac{10\pm\sqrt{24100}}{6}$

$\xrightarrow{\sqrt{24100}=10\sqrt{241}\simeq10(15/5)=155}s=\frac{10\pm155}{6}$

$\Rightarrow s=\frac{165}{6}=27/5$ ✓ , $s=\frac{-145}{6}<0$ ✗

یعنی سن فرد موردنظر با فشار خون ۱۲۴ mmHg، برابر ۲۷/۵ است.

۴۷۲. (گزینه‌ی ۴)

$x^2+bx=-c\Rightarrow x^2+bx+(\frac b2)^2=(\frac b2)^2-c$

$x^2+3x-2=0\Rightarrow x^2+3x=2\Rightarrow x^2+3x+\frac94=\frac94+2$

$\Rightarrow(x+\frac32)^2=\frac94+2$

این معادله را با معادله‌ی $(x+a)^2=b+2$ مقایسه می‌کنیم:

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac32\\b=(\frac32)^2=\frac94\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac32+\frac94=\frac{6+9}{4}$$

$=\frac{15}{4}=\frac{16-1}{4}=\frac{16}{4}-\frac14=4-0/25=3/75$

زرنگی: $(x+a)^2=b+2\Rightarrow x^2+2ax+a^2-b-2=x^2+3x-2$

$\xrightarrow{\text{مقایسه}} 2a=3\Rightarrow a=\frac{3}{2}\ ,\ a^2-b-2=-2\Rightarrow b=a^2=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow a+b=\frac{3}{2}+\frac{9}{4}=\frac{15}{4}=3/75$

۴۷۳. (گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که اگر $a=0$ باشد، آن‌گاه معادله می‌شود $-3x+4=0$ که فقط یک ریشه دارد. پس $a=0$ قابل قبول نیست. اکنون فرض کنید $a\neq 0$ است.

معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta=b^2-4ac>0$، همواره دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد: $ax^2-3x+a+4=0\Rightarrow \Delta=(-3)^2-4(a)(a+4)>0$

$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 9-4a^2-16a>0 \xrightarrow[\text{جهت برمی‌گردد}]{\times(-1)} 4a^2+16a-9<0$

$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} 4a^2+16a-9=0$

$\xrightarrow{\text{بریم }\Delta} \Delta=(16)^2-4(4)(-9)=400$

$$\Rightarrow a=\frac{-16\pm\sqrt{400}}{2(4)}=\frac{-16\pm 20}{8}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\\ \text{یا}\\ a=\frac{-36}{8}=\frac{-9}{2}\end{cases}$$

سپس جدول:

a	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4a^2+16a-9$		+	0	− ✓	0	+	

$\xrightarrow[\text{منفی بشه جوابه}]{\text{جاهایی که عبارت } 4a^2+16a-9} -\frac{9}{2}<a<\frac{1}{2}$

چون $a=0$ قابل قبول نیسته، پس مجموعه‌ی مقادیر a می‌شود: $(-\frac{9}{2},\frac{1}{2})-\{0\}$

زرنگی:

$a=1\xrightarrow{\text{در معادله}} x^2-3x+5=0$

$\Rightarrow \Delta=(-3)^2-4(1)(5)=-11<0$

پس گزینه‌هایی که $a=1$ را قبول دارند غلط هستن! گزینه‌های «۳» و «۴» حذف شدن...

$a=-3\xrightarrow{\text{در معادله}} -3x^2-3x+1=0$

$\xrightarrow{ac<0}$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد $\Rightarrow$ حذف گزینه‌ی «۲»

۴۷۴. (گزینه ۲) اگر سن فعلی معلم را x سال فرض کنیم، سن او بعد از ۴ سال برابر $x+4$ و مربع سن ایشان در ۲۶ سال قبل برابر $(x-26)^2$ خواهد بود. حالا بنا به گفته‌ی معلم سعید داریم:

$(x-26)^2=x+4\xrightarrow{\text{اتحاد رو باز کن}} x^2-52x+676=x+4$

$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} x^2-53x+672=0$ $(a=1,b=-53,c=672)$

$$\xrightarrow[(\Delta=(-53)^2-4(1)(672)=121)]{\text{از }\Delta\text{ برو}} x=\frac{53\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{53\pm 11}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{53+11}{2}=\frac{64}{2}=32\ ✓\\ \text{یا}\\ x=\frac{53-11}{2}=\frac{42}{2}=21\ ✗\end{cases}$$

علت مورد قبول نبودن سن $x=21$ سال برای معلم رو حتماً می‌دونی دیگه؟!
آره دیگه. اگه معلم ۲۱ سالش باشه، اون‌وقت چطور ۲۶ سال قبل...

۴۷۵. (گزینه ۱) اگر عدد ۱۵ را به‌صورت مجموع دو عدد x و $15-x$ بنویسیم، داریم:

$x(15-x)=52/25\Rightarrow 15x-x^2=52/25\xrightarrow{\text{مرتب کن}}$

$\Rightarrow x^2-15x+52/25=0\xrightarrow{\text{حل از تجزیه}}(x-9/5)(x-5/5)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-9/5=0\\ \text{یا}\\ x-5/5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9/5\\ \text{یا}\\ x=5/5\end{cases}\Rightarrow \text{اختلاف دو عدد}=9/5-5/5=4$$

۴۷۶. (گزینه ۲) در درسنامه دیدیم که برای سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ اگر نقطه‌ی S رأس آن باشد، آن‌گاه $x_S=\frac{-b}{2a}$ و $y_S=\frac{-\Delta}{4a}$؛ یعنی: $S(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$

در اینجا:

$$\underset{(a=\frac{1}{2},b=\frac{-1}{4},c=1)}{y=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+1}\Rightarrow\begin{cases}x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{\frac{1}{4}}{2(\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}\\ \text{و}\\ y_S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{-\frac{31}{16}}{4(\frac{1}{2})}=\frac{\frac{31}{16}}{2}=\frac{31}{32}\end{cases}\Rightarrow S(\frac{1}{4},\frac{31}{32})$$

$(\Delta=(\frac{-1}{4})^2-4(\frac{1}{2})(1)=\frac{1}{16}-2=\frac{-31}{16})$

۴۷۷. (گزینه ۳) ابتدا معادله‌ی سهمی را به شکل استاندارد $y=3x^2-2mx+1$ نوشته، سپس مؤلفه یا مختص طول رأس S را از دستور $x_S=\frac{-b}{2a}$ به‌دست آورده و برابر ۱- قرار می‌دهیم:

$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2m)}{2(3)}=\frac{m}{3}=-1\Rightarrow m=-3$

۴۷۸. (گزینه ۱)

$y=\underbrace{(m-2)}_{a}x^2\underbrace{-(4m-2)}_{b}x+\underbrace{30}_{c}\xrightarrow{\text{طول رأس رو پیدا کن}}$

$x=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x=-\frac{-(4m-2)}{2(m-2)}=\underbrace{\boxed{3}}_{\text{فرض تست}}$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 4m-2=6m-12\xrightarrow{\text{حل معادله}} 2m=10$

$\Rightarrow m=5\xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} y=3x^2-18x+30$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

«گزینه‌ی ۱»: $\Delta=(-18)^2-4(3)(30)=324-360=-36$

$\xrightarrow{\Delta<0}$ محور xها را قطع نمی‌کند. ✓

«گزینه‌ی ۲»: $a=3>0\Rightarrow$ دهانه‌ی سهمی رو به بالاست. ✗

«گزینه‌ی ۳»: $x=3\xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی}} y=3(3)^2-18(3)+30=3$

$\Rightarrow$ دهانه‌ی سهمی رو به بالاست. $\Rightarrow$ عرض رأس $=3$

$\Rightarrow$ کمترین مقدار سهمی ۳ است. ✗

«گزینه‌ی ۴»: $x=2\xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی}} y=3(2)^2-18(2)+30$

$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} y=6\Rightarrow$ سهمی از نقطه‌ی $(2,6)$ می‌گذرد، نه نقطه‌ی $(2,5)$ ✗

۴۷۹. (گزینه ۴)

$y=kx^2-4x-6$

$\xrightarrow{\text{طول رأس سهمی}} x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2k}=\frac{2}{k}$

$\xrightarrow{\text{عرض رأس سهمی}} y_S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(-4)^2-4k(-6)}{4k}$

$$= -\frac{16+24k}{4k} = -\frac{4+6k}{k}$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات رأس}} S\left(\frac{2}{k}, -\frac{4+6k}{k}\right)$$

طبق فرض تست نقطه‌ی S روی خط $y=-4x-4$ قرار دارد، بنابراین:

$$-\frac{4+6k}{k} = -4\times\frac{2}{k} - 4 \xrightarrow{\times(-k)} 4+6k = 8+4k \Rightarrow 2k=4 \Rightarrow k=2$$

$$\xrightarrow{*} y_S = -\frac{4+6\times 2}{2} = -8$$

۴۸۰. **گزینه ۱** در گزینه‌ی «۱» با این‌که مختصات رأس سهمی به‌درستی بیان شده، یک ایراد اساسی وجود دارد و آن این است که علی‌رغم منفی بودن ضریب x^2 در سهمی به معادله‌ی $y=-(x+1)^2-3$، دهانه‌ی سهمی رو به بالا است (درصورتی‌که باید رو به پایین باز می‌شد!). یادمان هست که در سهمی به معادله‌ی $y=a(x-h)^2+k$، مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(h,k)$ است. در سایر گزینه‌ها، هم مختصات رأس سهمی و هم دهانه‌ی سهمی (با توجه به علامت a) به‌درستی بیان و رسم شده است.

همان‌طور که می‌دانید در سهمی‌هایی به فرم کلی $y=ax^2+c$ (که فاقد x هستن) رأس سهمی به مختصات $S(0,c)$، روی محور y ها قرار دارد. (گزینه‌ی «۲» این‌گونه است!)

و در سهمی‌هایی به فرم کلی $y=ax^2+bx+c$، طول رأس S از دستور $x_S=\frac{-b}{2a}$ و عرض S با قرار دادن $x_S=\frac{-b}{2a}$ به جای x در معادله‌ی سهمی یا به‌دست آوردن $\frac{-\Delta}{4a}$ حاصل می‌شود. (گزینه‌های «۳» و «۴» از این دسته‌اند!)

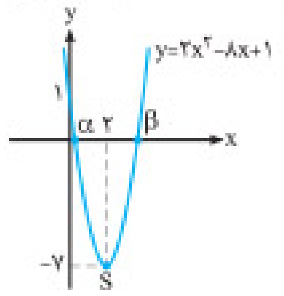
۴۸۱. **گزینه ۲** درباره‌ی سهمی به معادله‌ی $y=2x^2-8x+1$ داریم:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2(2)} = 2 \\ y_S = y(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow S(2,-7)$$

$$\begin{cases} a=2>0 \Rightarrow \text{دهانه‌ی سهمی رو به بالا باز می‌شه.} \\ y(0)=1 \Rightarrow \text{محل تلاقی نمودار با محور } y\text{ها } (0 \text{ و } 1) \end{cases}$$

با همین مشخصات روشن است که سهمی هرگز وارد ناحیه‌ی سوم نمی‌شود.

ببین:



۴۸۲. **گزینه ۳** شرط این‌که سهمی بالای محور x ها و مماس بر آن قرار گیرد، این است که: $a>0, \Delta=0$

$$\begin{cases} m-2>0 \Rightarrow m>2 \quad (1) \\ \text{و} \\ \Delta = (-3)^2 - 4(m-2)(m+2) = 0 \Rightarrow 9-4m^2+16=0 \\ \Rightarrow 4m^2=25 \Rightarrow m^2=\frac{25}{4} \\ \xrightarrow{\text{جذربگیر}} m=\pm\frac{5}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مورد قبول } m = (1)\cap(2) = \frac{5}{2}$$

۴۸۳. **گزینه ۲** از شکل پیداست که سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+8x+c$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x ها مماس است؛ بنابراین:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2a} = 2 \Rightarrow 4a=-8 \xrightarrow{\div 4} a=-2$$

$$\Delta = b^2-4ac = 0 \Rightarrow (8)^2 - 4(-2)(c) = 0 \Rightarrow 64+8c=0$$

$$\Rightarrow 8c=-64 \xrightarrow{\div 8} c=-8$$

زرنگی:

$$f(x)=ax^2+8x+c=a(x-2)^2=ax^2-4ax+4a$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه}} 8=-4a \Rightarrow a=-2 \ , \ c=4a \Rightarrow c=-8$$

۴۸۴. **گزینه ۲** این‌بار به جای این‌که مقدار تابع را به ازای $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2a}=\frac{-10}{a}$ حساب کنیم و برابر ۱۸۰ قرار دهیم، از همان ابتدا مستقیماً از رابطه‌ی $y_{max}=\frac{-\Delta}{4a}=180$ استفاده می‌کنیم (چرا؟):

$$\frac{-(400+480a)}{4a} = 180 \Rightarrow -400-480a = 720a$$

$$\Rightarrow -400 = 1200a \Rightarrow a=\frac{-1}{3}$$

۴۸۵. **گزینه ۱** سهمی دارای min است، از این رو دهانه‌ی سهمی رو به بالاست و در نتیجه $m>0$.

$$y=mx^2-12x+5m-1 \xrightarrow{\text{فرض تست}} \min = 2 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=2$$

$$\Rightarrow -\frac{(-12)^2-4\times m(5m-1)}{4m} = 2 \Rightarrow \frac{5m^2-m-36}{m}=2$$

$$\Rightarrow 5m^2-m-36=2m \Rightarrow 5m^2-3m-36=0$$

$$\xrightarrow{\times 5} (5m)^2 - 3(5m) - \underbrace{36\times 5}_{12\times 15} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (5m-15)(5m+12)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5m=15 \Rightarrow m=3 \\ 5m=-12 \Rightarrow m=-\frac{12}{5} \end{cases} \xrightarrow{m>0} m=3$$

$$\Rightarrow y=3x^2-12x+14 \xrightarrow{\text{محور تقارن سهمی}} x=-\frac{b}{2a}=\frac{12}{2\times 3}=2$$

۴۸۶. **گزینه ۱** عبارت درجه‌ی دوم ax^2+bx+c با شرط $\Delta<0$ و $a>0$ همواره مثبت و با شرط $\Delta<0$ و $a<0$ همواره منفی است. $A=x^2+3x+k$ $(a=1, b=3, c=k)$

$$\xrightarrow[(A>0)]{\text{همواره مثبت}} \begin{cases} a=1>0 \checkmark \ (\text{این شرط بدیهیه!}) \\ \text{و} \\ \Delta=(3)^2-4(1)(k)<0 \Rightarrow 9-4k<0 \\ \xrightarrow{+4k} 9<4k \xrightarrow{\div 4} k>\frac{9}{4} \checkmark \end{cases}$$

اشتراک $a=1>0$ و $k>\frac{9}{4}$، همان $k>\frac{9}{4}$ است.

زرنگی: A همواره مثبت است، پس به ازای $x=0$ هم مثبت است:
$0+0+k>0 \Rightarrow k>0$
فقط گزینه‌ی «۱» این شرط را دارد.

۴۸۷. **گزینه ۳** برای تعیین وضعیت علامت عبارت درجه‌ی دوم، علامت ضریب x^2 و دلتای $(\Delta=b^2-4ac)$ عبارت را بررسی می‌کنیم:

$$A=-3x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$$(a=-3, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-3<0 \ (\text{ضریب } x^2 \text{ منفیه}) \\ \text{و} \\ \Delta=(\sqrt{2})^2-4(-3)(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 2+12\sqrt{2}-12\sqrt{3}<0 \end{cases}$$

بنابراین در عبارت داده‌شده، $a<0$ و $\Delta<0$ بوده و در نتیجه عبارت همواره منفی است.

حالا به نظر شما، درباره‌ی وجود یا عدم وجود ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $-3x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}-\sqrt{3}=0$ چه می‌توان گفت؟!

۴۸۸. گزینه ۳ بنا به ویژگی حاصل‌ضرب صفر (اگر $AB=0$، آن‌گاه $B=0$ یا $A=0$)، معادله‌ی $y=0$ حتماً یک ریشه‌ی $x=1$ را دارد (نمودار تابع حتماً در یک نقطه به طول $x=1$ محور xها را قطع می‌کند)؛ بنابراین برای این‌که معادله ریشه‌ی دیگری نداشته باشد (و به تبع آن نمودار تابع نیز محور xها را در نقطه‌ی دیگری قطع نکند)، باید عامل درجه‌ی دوم معادله‌ی $y=0$ فاقد ریشه باشد و این هم زمانی اتفاق می‌افتد که Δِ آن منفی شود یا این‌که $x=1$ ریشه‌ی مضاعف آن باشد:

$$\Delta=(-a)^2-4(1)(a)<0 \Rightarrow a^2-4a<0$$

$$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} a^2-4a=0 \Rightarrow a(a-4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ \text{یا} \\ a-4=0 \Rightarrow a=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جدول}}$$

a	$-\infty$		0		4		$+\infty$
a^2-4a		+	0	− ✓	0	+	

(غیرممکن) $x=1 \Rightarrow 1-a+a=0$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2-ax+a=0$ است.

$\Rightarrow$ مجموعه‌ی مقادیر a $=(0,4)$

زرنگی: با تابع چاق و لاغر مواجهیم و قرار است تابع، محور xها را فقط در یک نقطه قطع کند، بنابراین باید Δِ عامل درجه‌ی دوم (چاق) را منفی کنیم:

$$\Delta=(-a)^2-4(1)(a)<0 \Rightarrow a^2-4a<0 \Rightarrow 0<a<4$$

راستی $x=1$ نمی‌تواند ریشه‌ی معادله‌ی $x^2-ax+a=0$ باشد!

۴۸۹. گزینه ۲ در این تست، نقاط $(-2,5)$ و $(0,5)$ با عرض‌های یکسان روی سهمی قرار دارند؛ پس: معادله‌ی خط تقارن سهمی: $x=\frac{0-2}{2} \Rightarrow x_S=-1$

این‌جوری هم ببین: اگه نمودار یه سهمی در نقاطی به طول α و β محور طول‌ها رو قطع کرده باشه، محور تقارن سهمی (همان خط به معادله‌ی $x=x_S=\frac{-b}{2a}$) به‌صورت $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ خواهد بود. زیرا وقتی سهمی در نقاطی به طول α و β محور xها رو قطع می‌کنه، به این معناست که دو نقطه با عرض‌های صفر به‌صورت $(\alpha,0)$ و $(\beta,0)$ روی سهمی قرار دارن. گرفتید؟!

۴۹۰. گزینه ۳ محل تلاقی سهمی با محور yها همان b است:

$$S(-1,-4) \Rightarrow \begin{cases} x_S=\frac{-b}{2a}=-1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)}=-1 \Rightarrow a=6 \\ \text{و} \\ y_S=\frac{-\Delta}{4a}=-4 \Rightarrow \frac{\Delta}{4(3)}=4 \Rightarrow \Delta=48 \\ \Rightarrow (6)^2-12b=48 \Rightarrow 36-12b=48 \\ \Rightarrow -12b=12 \Rightarrow b=-1 \ (\text{عرض از مبدأ}) \end{cases}$$

زرنگی:

$$x_S=\frac{-b}{2a}=-1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)}=-1 \Rightarrow a=6 \Rightarrow y=3x^2+6x+b$$

رأس سهمی یکی از نقاط خود سهمی بوده و مختصاتش در معادله‌ی آن صدق می‌کند: $-4=3(-1)^2+6(-1)+b \Rightarrow -4=-3+b \Rightarrow b=-1$

۴۹۱. گزینه ۲ در سهمی اول داریم:

$$y_1=-ax^2+ax+2 \xrightarrow{\text{طول رأس سهمی اول}} x=\frac{-a}{2(-a)}=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در تابع}}$$

$$y_1=-a(\tfrac{1}{2})^2+a(\tfrac{1}{2})+2=\tfrac{1}{4}a+2 \Rightarrow S_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}a+2)$$

و برای سهمی دوم:

$$y_2=2bx^2-bx-1 \xrightarrow{\text{طول رأس سهمی دوم}} x=\frac{-(-b)}{2(2b)}=\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{در تابع}}$$

$$y_2=2b(\tfrac{1}{4})^2-b(\tfrac{1}{4})-1=-\tfrac{1}{8}b-1 \Rightarrow S_2(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{8}b-1)$$

طبق فرض تست، مختصات رأس سهمی هر تابع، در تابع دیگر صدق می‌کند، پس:

$$S_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}a+2) \xrightarrow{\text{در سهمی دوم}} \tfrac{1}{4}a+2=2b(\tfrac{1}{2})^2-b(\tfrac{1}{2})-1$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{4}a+2=\cancel{\tfrac{1}{2}b}-\cancel{\tfrac{1}{2}b}-1 \Rightarrow \tfrac{1}{4}a=-3 \Rightarrow a=-12$$

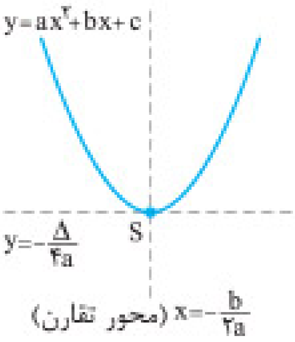
$$S_2(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{8}b-1) \xrightarrow{\text{در سهمی اول}} -\tfrac{1}{8}b-1=12(\tfrac{1}{4})^2-12(\tfrac{1}{4})+2$$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{8}b-1=\tfrac{3}{4}-3+2 \Rightarrow -\frac{b}{8}=\frac{3}{4} \Rightarrow b=-6$$

$$\Rightarrow b-a=-6-(-12)=6$$

۴۹۲. گزینه ۳ اگر نمودار تابع را که یک سهمی است با محور تقارنش در ذهنتان تجسم کنید، متوجه می‌شوید خط افقی‌ای که با محور تقارن سهمی روی نمودار تابع تلاقی می‌کند، همان خط $y=y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ است.

نگاه کن:



$$y=x^2-4x+c$$

$$\Rightarrow \Delta=(-4)^2-4c=16-4c$$

$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{4c-16}{4}=\frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 20c-80=12$$

$$\Rightarrow 20c=92 \Rightarrow c=\frac{92}{20}=4/6$$

۴۹۳. گزینه ۴ شکل داده‌شده یک سهمی با رأس $S(1,-2)$ را نشان می‌دهد که از نقطه‌ی $A(-1,0)$ نیز می‌گذرد. حالا باید ببینیم این دو ویژگی در معادله‌ی کدام سهمی صدق می‌کند:

«گزینه‌ی ۱»: $y=x^2-x-3 \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}\neq 1$ ✗

«گزینه‌ی ۲»: $y=2x^2+x-1 \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(2)}=\frac{-1}{4}\neq 1$ ✗

«گزینه‌ی ۳»: $y=\frac{-1}{2}x^2+x+\frac{3}{2} \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(\frac{-1}{2})}=1$

$$\Rightarrow y_S=\frac{-1}{2}(1)^2+1+\frac{3}{2}=2\neq -2 \ ✗$$

پس حتماً گزینه‌ی «۴» موردنظر است. **نگاه کن:**

«گزینه‌ی ۴»: $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2} \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2(\frac{1}{2})}=1$

$$\Rightarrow y_S=\frac{1}{2}(1)^2-1-\frac{3}{2}=-2 \ ✓$$

$$A(-1,0): 0=\frac{1}{2}(-1)^2-(-1)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+1-\frac{3}{2}=0 \ ✓$$

۴۹۴. گزینه ۲ شکل به ما می‌گوید که نمودار تابع (سهمی) از مبدأ عبور می‌کند. پس باید مختصات $O(0,0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق کند:

$$0=0+0+a^2-2 \Rightarrow a^2=2 \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} a=\pm\sqrt{2}$$

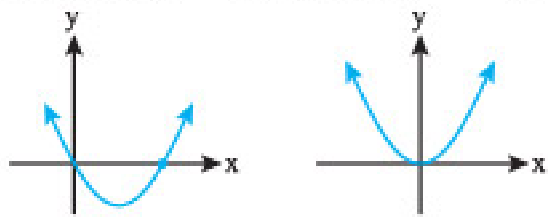
$$\xrightarrow{\text{ضریب } x^2 \text{ نیز } a \text{ بوده و دهانه‌ی سهمی رو به بالا است.}} a=\sqrt{2}$$

حالا به نظر شما سهمی علاوه بر مبدأ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع کرده است؟!

۴۹۵. گزینه ۱ سهمی داده‌شده، از مبدأ مختصات می‌گذرد، **ببین:**

$$y=ax^2+(3+2a)x=x(ax+3+2a)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{3+2a}{a} \end{cases}$$

برای این‌که، سهمی داده‌شده از ربع سوم عبور نکند، باید به یکی از دو حالت زیر باشد:



با توجه به شکل‌های رسم‌شده، ضریب x^2 باید مثبت و ریشه‌ی دوم معادله‌ی $y=0$ باید نامنفی باشد؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a>0 & \boxed{1} \\ -\frac{3+2a}{a}>0 \xrightarrow{\boxed{1}} 3+2a<0 \Rightarrow a<-\frac{3}{2} & \boxed{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{1}\cap\boxed{2}=\varnothing$$

پس به ازای هیچ مقداری از a، نمودار سهمی داده‌شده نمی‌تواند از ربع سوم عبور نکند.

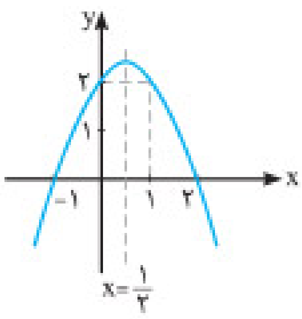
۴۹۶. (گزینه ۴) • روش اول چون سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱- و ۲ قطع کرده‌است، پس می‌توان معادله‌ی آن را به‌صورت $y=a(x+1)(x-2)$ درنظر گرفت. از طرف دیگر نقطه‌ی $(0,2)$ روی سهمی است؛ پس:

$$2=a(0+1)(0-2)\Rightarrow a=-1$$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y=-(x+1)(x-2)$ است و ...

از بین گزینه‌ها فقط نقطه‌ی $(1,2)$ روی آن قرار دارد. (سایر گزینه‌ها رو خودتون چک کنید!)

: روش دوم نقطه‌های $(-1,0)$ و $(2,0)$ روی سهمی هستند؛ پس معادله‌ی محور تقارن آن $x=\frac{1}{2}$ است.



$$y(0)=2\Rightarrow y(1)=2$$

۴۹۷. (گزینه ۱)

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$\Rightarrow\begin{cases} A(-2,5)\in f\Rightarrow a(-2)^2+b(-2)+c=5 \\ B(0,5)\in f\Rightarrow a\times 0+b\times 0+c=5\Rightarrow c=5 \\ C(1,11)\in f\Rightarrow a+b+c=11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 4a-2b+5=5 \\ a+b+5=11 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=2a \\ a+b=6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=2x^2+4x+5\Rightarrow f(-1)=2-4+5=3$$

پس این سهمی از نقطه‌ی $(-1,3)$ می‌گذرد.

۴۹۸. (گزینه ۱) ابتدا ضابطه‌ی تابع داده‌شده را با بازکردن اتحادها ساده می‌کنیم تا به فرمی شناخته‌شده برسیم:

$$f(x)=x^2-(x-1)^2+(x+2)^2+m$$

$$=x^2-(x^2-2x+1)+(x^2+4x+4)+m$$

$$=x^2-x^2+2x-1+x^2+4x+4+m\Rightarrow f(x)=x^2+6x+3+m$$

حال به‌خوبی می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y=x^2+6x+3+m$ به دلیل $a=1>0$ دارای کمترین مقدار بوده و این کمترین مقدار به ازای $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2}=-3$ رخ می‌دهد:

$$y_{min}=y(-3)=(-3)^2+6(-3)+3+m=9-18+3+m$$

$$=-6+m=7\Rightarrow m=13$$

(البته از دستور $y_{min}=y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ هم می‌تونستیم بریم که احتمالاً طولانی‌تر بود!)

۴۹۹. (گزینه ۲) همواره بالای محور xها بودن نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ به معنای همواره مثبت بودن عبارت درجه‌ی دوم بوده و شرطش این است که $a>0$ و $\Delta<0$ باشد؛ پس:

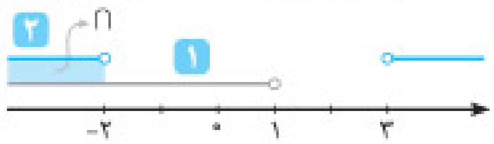
$$\begin{cases} 1-a>0 \xrightarrow{+a} a<1 \quad \boxed{1} \\ \text{و} \\ \Delta<0\Rightarrow (2\sqrt{6})^2-4(1-a)(-a)<0 \\ \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 24+4a-4a^2<0 \xrightarrow{\div 4} 6+a-a^2<0 \\ \xrightarrow{\text{همه رو ببر سمت راست}} a^2-a-6>0 \\ \xrightarrow{\text{حل معادله}} a^2-a-6=0 \\ \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (a-3)(a+2)=0\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ \text{یا} \\ a=-2 \end{cases} \end{cases}$$

جدول ←

a	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
a^2-a-6		+	0	−	0	+	

$$\xrightarrow[a^2-a-6>0]{\text{ما می‌خواهیم که}} a<-2 \text{ یا } a>3 \quad \boxed{2}$$

$$\xrightarrow{\text{درنهایت}} \text{مقادیر قابل قبول } a = \boxed{1}\cap\boxed{2}=a<-2$$



زرنگی: باید $1-a>0$ باشد؛ پس $a<1$ و بنابراین گزینه‌ی «۳» حذف می‌شود. از طرفی به ازای $a=0$ ضابطه‌ی تابع برابر است با: $y=x^2+2\sqrt{6}x$ که نمودار تابع در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند؛ بنابراین گزینه‌های «۱» و «۴» حذف می‌شوند.

۵۰۰. (گزینه ۴) حل تست را با باز کردن اتحادها (به منظور تبدیل معادله‌ی سهمی به فرم شناخته‌شده‌ی $y=ax^2+bx+c$) آغاز می‌کنیم:

$$y=(x+2)^2+(x-4)^2-18=x^2+4x+4+x^2-8x+16-18$$

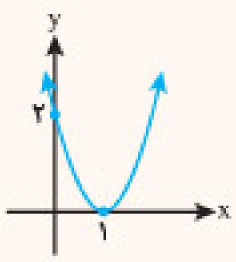
$$\Rightarrow y=2x^2-4x+2$$

$$\xrightarrow{\text{حالا مختصات رأس رو حساب کن}}\begin{cases} x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2(2)}=1 \\ y_S=y(1)=2(1)^2-4(1)+2=0 \end{cases}$$

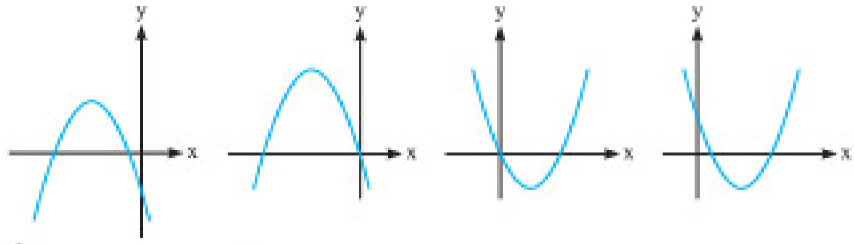
$\Rightarrow S(1,0)\Rightarrow$ نقطه‌ای روی قسمت مثبت محور xهاست.

سهمی به معادله‌ی $y=2x^2-4x+2$ به دلیل مثبت بودن ضریب x^2 $(a=2>0)$ رو به بالا باز شده؛ بنابراین نقطه‌ی $S(1,0)$ به منزله‌ی پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی (یا همان مینیمم سهمی) خواهد بود.

زرنگی: $y=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2$ که نمودارش را بلدیم:



۵۰۱. (گزینه ۲) مطابق شکل‌های زیر برای این‌که نمودار تابع درجه‌ی دوم، دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، باید دو ریشه‌ی هم‌علامت داشته باشد یا یکی از ریشه‌های آن برابر صفر باشد؛ بنابراین باید ضرب ریشه‌های آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



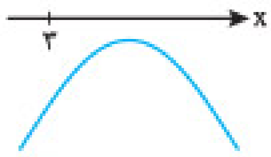
$$\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow (m+4)^2-4m(2-m)>0\\ \quad\Rightarrow m^2+8m+16-8m+4m^2>0\\ \quad\Rightarrow 5m^2+16>0 \text{ همواره درست است}\\ P\geq 0\Rightarrow \dfrac{2-m}{m}\geq 0\Rightarrow 0<m\leq 2\end{cases}$$

۵۰۲. گزینه ۳

۱ $\dfrac{b^2}{4}<ac\Rightarrow b^2<4ac\Rightarrow b^2-4ac<0\Rightarrow \Delta<0$

۲ $b+\dfrac{c}{3}<-3a\Rightarrow 3b+c<-9a\Rightarrow \underbrace{9a+3b+c}_{f(3)}<0\Rightarrow f(3)<0$

با توجه به ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع f باید زیر محور xها باشد، به این‌صورت:



۳ $\Rightarrow a<0$

بنابراین:

۴ $f(0)<0\Rightarrow c<0$

$\xrightarrow{\text{۳ و ۴}} ac>0$

زرنگی: $\underbrace{b=0}_{\text{فرض کن}}\xrightarrow{\text{در شرط‌ها}} 0<ac\,,\ \dfrac{c}{3}<-3a$

در این دو فرض $c=-3$ و $a=-1$ صدق می‌کند، **ببین:**

$ac=(-1)(-3)>0\ ,\ \dfrac{c}{3}<-3a\Rightarrow \dfrac{-3}{3}<-3(-1)\Rightarrow -1<3$ ✓

با توجه به این اعداد فقط **گزینه‌ی «۲»** با عددهای $b=0$ ، $a=-1$ و $c=-3$ هماهنگه...!

۵۰۳. گزینه ۴ وقتی خطی یک سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی محور تقارن آن است: $y=(m-2)x^2-3x+m^2+1$

$\xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x=x_S=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{3}{2(m-2)}=\dfrac{2}{3}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$

$4(m-2)=9\xrightarrow{\div 4} m-2=\dfrac{9}{4}\xrightarrow{+2} m=\dfrac{9}{4}+2=\dfrac{17}{4}$

از معادله‌ی سهمی $y=(m-2)x^2-3x+m^2+1$ پیداست که محل تلاقی سهمی با محور yها $c=m^2+1$ است: $c=m^2+1=(\dfrac{17}{4})^2+1=\dfrac{289}{16}+1=\dfrac{305}{16}$

۵۰۴. گزینه ۲ مختصات رأس سهمی را به‌دست آورده و در معادله‌ی خط $y=-x$ صدق می‌دهیم:

$y=-2x^2+bx-3\xrightarrow{\text{طول } S} x_S=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-b}{2(-2)}=\dfrac{b}{4}$

$\xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی قرار بده}} y_S=y(\dfrac{b}{4})=-2(\dfrac{b}{4})^2+b(\dfrac{b}{4})-3$

$=-2\times\dfrac{b^2}{16}+\dfrac{b^2}{4}-3=-\dfrac{b^2}{8}+\dfrac{b^2}{4}-3=\dfrac{b^2}{8}-3$

حالا باید رابطه‌ی $y=-x$ یا $y+x=0$ را با مختصات $S(\dfrac{b}{4},\dfrac{b^2}{8}-3)$ برقرار کنیم:

$\dfrac{b^2}{8}-3+\dfrac{b}{4}=0\xrightarrow{\times 8} b^2+2b-24=0$

$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (b+6)(b-4)=0\Rightarrow b+6=0$ یا $b-4=0$

$$\Rightarrow\begin{cases} b=-6\xrightarrow{\text{در این‌صورت}} S(\dfrac{b}{4},\dfrac{b^2}{8}-3)=(\dfrac{-6}{4},\dfrac{36}{8}-3)=(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})\ ✓\\ \text{یا}\\ b=4\xrightarrow{\text{در این‌صورت}} S(\dfrac{b}{4},\dfrac{b^2}{8}-3)=(\dfrac{4}{4},\dfrac{16}{8}-3)=\underbrace{(1,-1)}_{\text{ناحیه‌ی ۴}}\ ✗\end{cases}$$

نقاط روی خط $y=-x$ اگر در ناحیه‌ی دوم باشند، دارای طول منفی و عرض مثبت‌اند.

زرنگی: رأس سهمی در ناحیه‌ی دوم است پس طول منفی دارد:

$y=-2x^2+bx-3\xrightarrow{\text{طول رأس}} -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-b}{-4}<0$

یعنی b منفی است! هر گزینه‌ای که $b>0$ دارد حذف می‌شود: یعنی همه به‌جز **گزینه‌ی «۲»**!

۵۰۵. گزینه ۳ می‌دانیم شرط آن‌که خطی بر نمودار تابعی مماس باشد آن است که معادله‌ی تلاقی آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، پس:

$$\begin{cases} y=3x^2+(2m-1)x+m+\dfrac{4}{3}\xrightarrow{\text{تلاقی}}\\ y=-x\ (\text{نیمساز ربع دوم})\end{cases}$$

$3x^2+(2m-1)x+m+\dfrac{4}{3}=-x\xrightarrow{\text{ساده کن}}$

$3x^2+2mx+m+\dfrac{4}{3}=0\xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}}\Delta=0$

$\Rightarrow 4m^2-4\times 3(m+\dfrac{4}{3})=0\xrightarrow{\div 4} m^2-3m-4=0$

$\Rightarrow (m-4)(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=4\\ m=-1\end{cases}$

چون در ربع دوم هستیم، ریشه باید منفی باشد؛ پس $x=\dfrac{-b}{2a}<0$ است؛ در نتیجه:

$x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-2m}{6}\xrightarrow{m>0} m=4$

$y=3x^2+(2m-1)x+m+\dfrac{4}{3}\xrightarrow{m=4} y=3x^2+7x+16$

$x_S=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-7}{2\times 3}=\dfrac{-7}{6}$

۵۰۶. گزینه ۴

راهبرد: در سهمی‌هایی به معادله‌ی $y=a(x-h)^2+k$، ریشه‌ی پرانتز (یعنی $x=h$) همان محور تقارن سهمی است و سهمی در نقطه‌ای به عرض $y=ah^2+k$ محور yها را قطع می‌کند.

در این سؤال با توجه به سهمی، خط $x=2$ محور تقارن آن بوده و $y(0)=-1$ است، بنابراین: $y=-2(x+3m-5)^2+m+2n$

$$\begin{cases}\text{ریشه‌ی پرانتز}=x+3m-5=0\Rightarrow x=-3m+5=2\Rightarrow m=1\\ y(0)=-2(-2)^2+1+2n=-1\Rightarrow -8+1+2n=-1\\ \quad\Rightarrow 2n=6\Rightarrow n=3\end{cases}$$

حال با توجه به مقادیر m و n داریم:

$y=mx^2+nx+1=x^2+3x+1$

$$\begin{cases}x_S=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-3}{2(1)}=\dfrac{-3}{2}\\ y_S=y(\dfrac{-3}{2})=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}+1=\dfrac{-9}{4}+1=\dfrac{-5}{4}\end{cases}\Rightarrow S(\dfrac{-3}{2},\dfrac{-5}{4})$$

۵۰۷. گزینه ۴ خط موردنظر را به‌صورت $y=mx+h$ در نظر می‌گیریم. با توجه به فرضیات تست داریم:

$h=-1\Rightarrow y=mx-1\xrightarrow{(1,0)\in\text{خط}} 0=m\times 1-1\Rightarrow m=1$

$\Rightarrow y=x-۱ \xrightarrow{\text{تلاقی با سهمی}} x-۱=-x^۲+۲x+۱$

$\Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow x=-۱ \text{ و } ۲ \xrightarrow{\text{در خط}} \begin{cases}A(-۱,-۲)\\B(۲,۱)\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{M وسط پاره‌خط AB}} M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$

$y=-x^۲+۲x+۱ \Rightarrow x_S=\frac{-۲}{۲(-۱)}=۱ \Rightarrow y_S=-۱+۲+۱=۲ \Rightarrow S(۱,۲)$

$\Rightarrow MS=\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۲+\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۴}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۶}$

۵۰۸. (گزینه ۳) معادله‌ی محور تقارن هر سهمی، خط $x=-\frac{b}{۲a}$ است؛ پس:

$$\begin{cases}y=x^۲+ax-۲ \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x=\frac{-a}{۲\times۱}=-\frac{a}{۲}\\ y=-x^۲-۲x+b \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x=\frac{-(-۲)}{۲(-۱)}=-۱\end{cases}$$

طبق فرض تست، معادله‌ی این دو خط یکسان است، بنابراین داریم:

$-\frac{a}{۲}=-۱ \Rightarrow a=۲$

از طرفی از فرض دوم سؤال متوجه می‌شویم که این دو سهمی در دو نقطه، مشترک هستند که عرض این دو نقطه برابر و برابر ۱ است، پس برای سهمی اول داریم:

$\longrightarrow y=x^۲+۲x-۲ \xrightarrow{\text{تلاقی با } y=۱} x^۲+۲x-۲=۱ \Rightarrow x^۲+۲x-۳=۰$

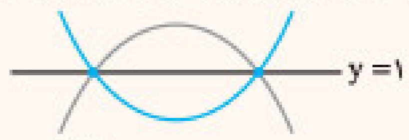
$\Rightarrow (x-۱)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\x=-۳\end{cases} \xrightarrow{\text{نقاط تلاقی}} \begin{cases}A(۱,۱)\\B(-۳,۱)\end{cases}$

این دو نقطه باید در معادله‌ی سهمی دوم هم صدق کنند، بنابراین داریم:

$y=-x^۲-۲x+b \xrightarrow{A(۱,۱)} ۱=-۱-۲+b \Rightarrow b=۴$

$\Rightarrow a\times b=(۲)(۴)=۸$

زرنگی: یکی از سهمی‌ها رو به بالا و دیگری رو به پایین است:



$x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-a}{۲}=\frac{-(-۲)}{۲(-۱)} \Rightarrow a=۲$

$y=۱$ در هر دو سهمی صدق می‌کند:

$\xrightarrow{a=۲} \begin{cases}y=x^۲+۲x-۲=۱\\y=-x^۲-۲x+b=۱\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کن}} b-۲=۲ \Rightarrow b=۴$

$\Rightarrow a\times b=۸$

۵۰۹. (گزینه ۳) می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+bx+c$ با شرط $\Delta=۰$ و $x_S=\frac{-b}{۲a}>۰$ در نقطه‌ای به طول مثبت و با شرط $\Delta=۰$ و $x_S=\frac{-b}{۲a}<۰$ در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

همچنین این سهمی با شرط $\Delta<۰$ و $a<۰$ همواره پایین‌تر از محور طول‌ها و با شرط $\Delta<۰$ و $a>۰$ همواره بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد. (شاید دیگه نیازی به گفتن نباشه که با شرط $\Delta>۰$ سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کرده و از اون عبور می‌کنه.) حال باید ببینیم سهمی داده‌شده کدام شرط را دارد:

$\Delta=b^۲-۴ac=(-(۲m^۲+۱))^۲-۴(۱)(m^۴+m^۲+\frac{۱}{۴})$

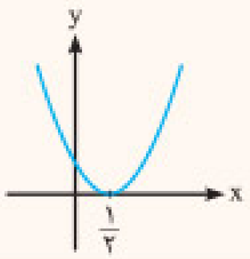
$=۴m^۴+۴m^۲+۱-۴m^۴-۴m^۲-۱=۰$

$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۲m^۲+۱}{۲}>۰$

می‌بینیم که شرط $\Delta=۰$ و $x_S>۰$ برقرار بوده و گزینه‌ی «۳» درست است.

زرنگی: این‌جوری فرض کن: $m=۰$

$y=x^۲-x+\frac{۱}{۴}=(x-\frac{۱}{۲})^۲ \xrightarrow{\text{شکل}}$



۵۱۰. (گزینه ۲) ضابطه‌ی سهمی با رأس (m,h) عبارت است از:

$y=a(x-m)^۲+h$

در نتیجه ضابطه‌ی سهمی مورد سؤال $y=a(x+۱)^۲+۹$ است.

چون سهمی از نقطه‌ی $(۳,۱)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند، پس داریم:

$۱=a(۳+۱)^۲+۹ \Rightarrow -۸=۱۶a \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

ضابطه‌ی سهمی $y=-\frac{۱}{۲}(x+۱)^۲+۹$ و نقطه‌ی $(۵,-۹)$ در آن صدق می‌کند.

۵۱۱. (گزینه ۱) رأس سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+bx+c$ زمانی روی محور yها واقع می‌شود که $b=۰$ باشد (زیرا وقتی $x_S=\frac{-b}{۲a}=۰$ می‌شود که $b=۰$ شده باشد)؛ پس:

$y=-۳x^۲+(۲m-۱)x+۵ \xrightarrow{b=۰} ۲m-۱=۰ \Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow y=-۳x^۲+۵$

حالا باید سهمی به معادله‌ی $y=-۳x^۲+۵$ را با خط به معادله‌ی $y-۲=۰$ یا همان $y=۲$ تلاقی دهیم:

$\begin{cases}y=-۳x^۲+۵\\y=۲\end{cases} \Rightarrow -۳x^۲+۵=۲ \Rightarrow -۳x^۲=-۳$

$\xrightarrow{\div(-۳)} x^۲=۱ \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} x=\pm۱$

۵۱۲. (گزینه ۴) برای محاسبه‌ی مساحت مثلث موردنظر، ابتدا باید قاعده و سپس ارتفاع آن را به‌دست آوریم. قاعده همان فاصله‌ی بین دو ریشه و ارتفاع هم قدرمطلق عرض رأس سهمی است. مجموع ضرایب معادله‌ی $۲x^۲-mx+m-۲=۰$ برابر صفر است، پس ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$\begin{cases}x_۱=۱\\x_۲=\frac{c}{a}=\frac{m-۲}{۲}\end{cases} \Rightarrow \text{قاعده‌ی مثلث}=|x_۲-x_۱|=|\frac{m-۴}{۲}|$

$\text{عرض رأس سهمی}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(-m)^۲-۴\times۲(m-۲)}{۴\times۲}$

$=-\frac{m^۲-۸m+۱۶}{۸}=\frac{(m-۴)^۲}{-۸}$

$\text{ارتفاع}=|\frac{(m-۴)^۲}{-۸}|=\frac{(m-۴)^۲}{۸}$

$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\times\frac{(m-۴)^۲}{۸}\times\frac{|m-۴|}{۲}=\frac{|m-۴|^۳}{۳۲}=۲ \Rightarrow |m-۴|^۳=۶۴$

$\Rightarrow |m-۴|=۴ \Rightarrow m-۴=\pm۴ \Rightarrow \begin{cases}m=۰\\m=۸\end{cases} \xrightarrow{m>۰} m=۸$

۵۱۳. (گزینه ۴) تست تلاش می‌کند بگوید تابع درجه‌ی دوم $y=ax^۲-x+\frac{۲}{۳}$ حداقل مقداری برابر $y_{min}=\frac{۱}{۲}$ دارد؛ زیرا $y\ge\frac{۱}{۲}$ به معنای $y_{min}=\frac{۱}{۲}$ است.

بنابراین اولاً باید $a>۰$ باشد تا تابع بتواند دارای حداقل مقدار شود (حذف گزینه‌های «۱» و «۲»)، ثانیاً باید این مقدار حداقل (یعنی $\frac{۱}{۲}$) برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ باشد:

$\Delta=(-۱)^۲-۴(a)(\frac{۲}{۳})=۱-\frac{۸}{۳}a$

$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\frac{8}{3}a-1}{4a}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}}\frac{16}{3}a-2=4a$$

$$\Rightarrow\frac{16}{3}a-4a=2\Rightarrow\frac{4}{3}a=2\xrightarrow{\times\frac{3}{4}}a=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

۵۱۴. گزینه ۴ نقطه‌ی مشترک نداشتن بین سهمی و خط به معنای عدم وجود ریشه در معادله‌ی تلاقی آن دو است:

$$\begin{cases}y=(2x+1)(x+8)\\ y=mx\end{cases}\xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}}(2x+1)(x+8)=mx$$

$$\xrightarrow[\text{مرتب کن}]{\text{ساده و}}2x^2+17x+8-mx=0\Rightarrow 2x^2+(17-m)x+8=0$$

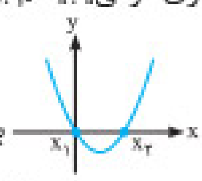
$$\xrightarrow[\text{معادله رو منفی کنیم}]{\text{حالا باید }\Delta\text{ این}}\Delta=(17-m)^2-4(2)(8)<0$$

$$\Rightarrow(17-m)^2-64<0\xrightarrow{\text{حل نامعادله}}(17-m)^2<64$$

$$\xrightarrow{\text{جذر بگیر}}|17-m|<8\Rightarrow-8<17-m<8$$

$$\xrightarrow{-17}-25<-m<-9\xrightarrow{\times(-1)}9<m<25$$

۵۱۵. گزینه ۲ معادله‌ی $ax^2-(a+2)x=0$ دو ریشه به‌صورت $x_1=0$ و $x_2=\frac{a+2}{a}$ دارد. حال با اندکی تجسم نموداری درمی‌یابیم برای این‌که سهمی نتواند وارد ناحیه‌ی سوم شود، باید به شکل



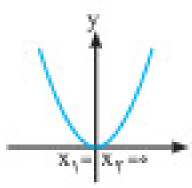
باشد. یعنی

اولاً دهانه‌ی سهمی باید رو به بالا باشد $(a>0)$، ثانیاً ریشه‌ی $x_2=\frac{a+2}{a}$ معادله‌ی مربوطه مثبت باشد:

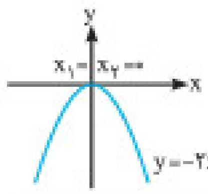
$$x_2=\frac{a+2}{a}>0\xrightarrow[\text{است } a>0]{\text{با توجه به این‌که}}a+2>0\Rightarrow a>-2$$

$$\xrightarrow[a>0]{\text{با اعمال شرط}}\text{حدود } a:\ a>0$$

کمی اضافه‌تر: اگر می‌خواهید بدانید چرا حالت

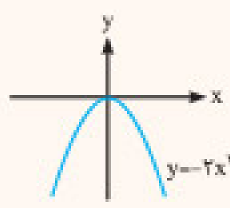


را که در آن نیز سهمی وارد ناحیه‌ی سوم نشده است، در نظر نگرفتیم، باید بگوییم که این حالت برای سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-(a+2)x$ غیرممکن است: زیرا این حالت زمانی رخ می‌دهد که $x_2=\frac{a+2}{2}=0$ شود و آن نیز به معنای $a=-2$ بوده و در این‌حالت ضریب x^2 منفی شده و سهمی به شکل



تبدیل می‌شود.

زرنگی: این‌جوری فرض کن: $a=-2$



پس گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» حذف می‌شود.

۵۱۶. گزینه ۴ مختصات رأس نمودار تابع در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند؛ بنابراین:

$$f(x)=x^2+2x-c\xrightarrow{f(-1)=3}3=(-1)^2+2(-1)-c$$

$$\Rightarrow 3=-1-c\Rightarrow c=-4$$

حالا باید با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x)=x^2+2x+4$، ضابطه‌ی تابع $y=f(2x-1)$ را (با جایگزین کردن $(2x-1)$ به جای x ها) به‌دست آورده و بعد مختصات رأس نمودار آن را به‌دست آوریم:

$$y=f(2x-1)=(2x-1)^2+2(2x-1)+4$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}}4x^2-4x+1+4x-2+4\Rightarrow y=4x^2+3$$

$$\Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2(4)}=0,\ y_S=y(0)=4(0)^2+3=3\Rightarrow S(0,3)$$

زرنگی:

$$S(-1,3)\xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x\to(x-1)}S_1(0,3)\xrightarrow[\text{طول‌ها بر ۲ تقسیم می‌شوند}]{x\to 2x}S_2(0,3)$$

پس مختصات رأس سهمی تابع $f(2x-1)$ به‌صورت $(0,3)$ خواهد بود.

۵۱۷. گزینه ۲ همه‌ی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

با کمی دقت به شکل متوجه می‌شویم که:

الف) سهمی رو به بالاست، پس $a>0$ است.

ب) سهمی محور y ها را زیر محور x ها قطع کرده است، پس $c<0$ است.

پ) طول رأس سهمی منفی است، پس: $\frac{-b}{2a}<0\xrightarrow{a>0}b>0$

در نتیجه داریم:

$a>0, b>0, c<0\Rightarrow abc<0\Rightarrow$ گزینه‌ی «۱» حذف می‌شود.

از روی نمودار تابع، کاملاً مشخص است که تابع f دارای دو صفر مختلف‌العلامت است که قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است؛ پس:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta<0\\ P=\alpha\beta<0\end{cases}\Rightarrow\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS<0$$

$\Rightarrow$ گزینه‌ی «۲» درست است.

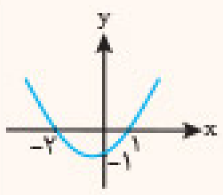
تابع f دارای دو صفر است. $\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow b^2-4ac>0\Rightarrow b^2>4ac$

$\Rightarrow\frac{b^2}{4}>ac\Rightarrow$ گزینه‌ی «۳» حذف می‌شود.

می‌دانیم که رأس سهمی، در وسط صفرهای تابع قرار دارد؛ بنابراین:

$$\begin{cases}x_s=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ y_s=\frac{-\Delta}{4a}\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{-\Delta}{4a}\Rightarrow$$ گزینه‌ی «۴» حذف می‌شود.

زرنگی: این‌جوری فرض کن:



$\alpha=1,\ \beta=-2\Rightarrow\alpha^3+\beta^3=1-8=-7<0$ ✓

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}}y=a(x-1)(x+2)$$

$$\xrightarrow[\text{صدق}]{(0,-1)}y=\frac{1}{2}(x-1)(x+2)\Rightarrow a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2},c=-1$$

این هم برای بررسی بقیه‌ی گزینه‌ها!!

۵۱۸. گزینه ۲

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}\ \ *$$

برای معادله‌ی $2x^2-9x-1=0$ داریم:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{9}{2}\\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{در }*}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{\frac{9}{2}}{-\frac{1}{2}}=-9$$

۵۱۹. گزینه ۴ در معادله‌ی داده‌شده داریم:

$$3x^2-4x-2=0\xrightarrow[c=-2]{a=3,b=-4}\begin{cases}S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{4}{3}\\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته‌ی تست}} x_1^2+x_2^2=S^2-2P=\frac{16}{9}-2(-\frac{2}{3})$$

$$=\frac{16}{9}+\frac{4}{3}=\frac{16+12}{9}=\frac{28}{9}$$

۵۲۰. گزینه ۲ در اینجا ابتدا معادله‌ی داده‌شده را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$(3m-1)x^2-2x+(1-m^2)=0$$

بنابراین:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{2}{3m-1}=\frac{1}{4}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}3m-1=8$$

$$\Rightarrow m=3\xrightarrow{\text{در معادله بذار}}8x^2-2x-8=0$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=P=\frac{c}{a}=\frac{-8}{8}=-1$$

۵۲۱. گزینه ۴ اولاً برای این‌که معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، باید $\Delta>0$؛ یعنی:

$$\Delta=(\frac{-1}{4})^2-4(\frac{1}{2})(m)>0\Rightarrow\frac{1}{16}-2m>0\xrightarrow{+2m}2m<\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow m<\frac{1}{32}$$

ثانیاً برای این‌که حاصل‌ضرب این دو ریشه برابر ۴ باشد، باید:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m}{\frac{1}{2}}=4\Rightarrow 2m=4\Rightarrow m=2$$

اما می‌بینیم که این جواب در شرط $m<\frac{1}{32}$ صدق نمی‌کند؛ پس هیچ مقداری برای m نداریم.

زرنگی:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m}{\frac{1}{2}}=4\Rightarrow 2m=4\Rightarrow m=2\xrightarrow{\text{در معادله}}$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+2=0\Rightarrow\Delta=\frac{1}{16}-4<0\xrightarrow{\text{ریشه ندارد}}m=2\ \times$$

۵۲۲. گزینه ۲ طبق مطالب گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(-4)^2-4\times1\times1}}{|1|}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$$

زرنگی: معادله را حل کنید:

$$x^2-4x+1=0\xrightarrow{\Delta=12}x=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

$$|x'-x''|=2\sqrt{3}$$

۵۲۳. گزینه ۳ شکی نیست که جواب معادله در معادله صدق می‌کند. از اینجا مقدار m به‌دست می‌آید:

$$-3x^2+(m+1)x+m=0\xrightarrow{x=1}-3+m+1+m=0$$

$$\Rightarrow 2m=2\Rightarrow m=1\xrightarrow{\text{در معادله بذار}}-3x^2+2x+1=0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}}\alpha=1 \quad \text{و} \quad \beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{-3}$$

زرنگی:

$$\xrightarrow{\alpha=1}\text{مجموع ضرایب}=0\Rightarrow-3+m+1+m=0\Rightarrow 2m=2$$

$$\Rightarrow m=1\Rightarrow\text{ریشه‌ی دیگر}=\frac{c}{a}=\frac{m}{-3}=\frac{1}{-3}$$

۵۲۴. گزینه ۱ از ویژگی «حاصل‌ضرب صفر» ($AB=0\Rightarrow A=0$ یا $B=0$) استفاده کرده و داریم:

$$(2x+1)(3x^2-7x+1)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\quad(\text{یک ریشه})$$

یا

$$3x^2-7x+1=0\xrightarrow{\text{بدون حل}}P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$$

$$(\Delta=49-12>0\Rightarrow\text{تضمین وجود دو ریشه})$$

$$\Rightarrow\text{حاصل‌ضرب سه ریشه}=(\frac{-1}{2})(\frac{1}{3})=\frac{-1}{6}$$

به نظر شما مجموع ریشه‌های معادله چقدر است؟

۵۲۵. گزینه ۴ با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌های α و β، داریم:

$$x^2+2(a+1)x+2a-1=0\xrightarrow{\text{رابطه‌ی ریشه‌ها}}\begin{cases}S=\alpha+\beta=-2(a+1)\\P=\alpha\beta=2a-1\end{cases}$$

$$\alpha,a,\beta\xrightarrow{\text{شرط تشکیل دنباله‌ی هندسی}}a^2=\alpha\beta\Rightarrow a^2=2a-1$$

$$\Rightarrow a^2-2a+1=0\Rightarrow(a-1)^2=0\Rightarrow a=1$$

۵۲۶. گزینه ۴ هدف سؤال، محاسبه‌ی مقدار $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ است.

$$2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{m+1}{2}\\P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{16}\end{cases}$$

حالا: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

$$=\sqrt{\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}}=2\xrightarrow{\text{به توان ۲ برسون}}\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}=4$$

$$\Rightarrow\frac{m+1}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow m+1=7\Rightarrow m=6$$

۵۲۷. گزینه ۲

راهبرد: هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی دو، دلتای معادله، مربع کامل باشد یا به عبارتی دارای جذر کامل باشد، لازم نیست از رابطه‌ی بین ریشه‌ها استفاده شود. در این حالت ریشه‌های معادله را حساب کرده، سپس خواسته‌ی سؤال را محاسبه کنید.

الان در چنین وضعی هستیم:

$$x^2-x-2=0\xrightarrow[\text{با شرط }\alpha<\beta]{a+c=b}\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=\frac{-c}{a}=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2+7\beta^2=5(-1)^2+7(2)^2=5+28=33$$

۵۲۸. گزینه ۳ ریشه‌های معادله را α و β می‌نامیم و داریم:

$$\alpha=\beta+2\xrightarrow{\beta\text{ رو به طرفین اضافه کن}}\alpha+\beta=2\beta+2$$

$$\xrightarrow[\alpha+\beta=\frac{8}{2}=4]{\text{از روی ضرایب معادله}}4=2\beta+2\Rightarrow 2\beta=2\Rightarrow\beta=1$$

$$\xrightarrow{x=1\text{ در معادله قرار بده}}2(1)^2-8(1)+m=0\Rightarrow m=6$$

زرنگی:

$$|x_1-x_2|=2\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\Delta=4a^2$$

$$\Rightarrow 64-8m=16\Rightarrow 8m=48\Rightarrow m=6$$

۵۲۹. گزینه ۱ در این مسئله دلتای معادله جذر کامل دارد و ریشه‌ها به‌راحتی قابل محاسبه‌اند. **نگاه کنید:**

$$x^2-20x+64=0\xrightarrow{\text{تجزیه کن}}(x-16)(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=16\\x_2=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{16}+\sqrt{4}=4+2=6$$

۵۲۰. گزینه ۴ اگر ریشه‌ها را α و β بنامیم، آن‌گاه:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}$$ = مجموع معکوس ریشه‌ها

$$=\frac{-(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{-(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{6}+2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+1$$

۵۲۱. گزینه ۱ معکوس بودن ریشه‌های معادله، یعنی $\alpha=\frac{1}{\beta}$ یا $\alpha\beta=1$ است؛ پس:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3-a}{a-1}=1 \xrightarrow[(a\neq 1)]{\text{طرفین وسطین}} 3-a=a-1$$

$$\Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$$

به دلیل وجود گزینه‌ی «۴»، حالا باید ببینیم که به ازای $a=2$ معادله جواب حقیقی دارد یا خیر:

$$(a-1)x^2+2ax+3-a=0 \xrightarrow{a=2} x^2+4x+1=0$$

$$\Rightarrow \Delta=16-4=12>0 \checkmark$$

پس معادله دارای ریشه‌ی حقیقی بوده و $a=2$ قابل قبول است.

۵۲۲. گزینه ۳ همان‌طور که در درسنامه گفته شد، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر یکی از ریشه‌ها λ برابر ریشه‌ی دیگر باشد، آن‌گاه رابطه‌ی $\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}=\frac{b^2}{ac}$ بین ضرایب معادله و عدد λ برقرار است.

بنابراین با توجه به رابطه‌ی بالا برای $\lambda=3$ داریم:

$$\frac{(-4)^2}{k(k+2)}=\frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{16}{k^2+2k}=\frac{16}{3} \Rightarrow k^2+2k=3$$

$$\Rightarrow k^2+2k-3=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} k=1 \text{ یا } k=\frac{c}{a}=-3$$

۵۲۳. گزینه ۴ معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، دو ریشه‌ی مثبت دارد، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow m^2-4(2)(m+6)>0 \Rightarrow m^2-8m-48>0 \\ \quad\Rightarrow (m-12)(m+4)>0 \Rightarrow m<-4 \text{ یا } m>12 \quad (1)\\ S>0 \Rightarrow -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{m}{2}>0 \Rightarrow m<0 \quad (2)\\ P>0 \Rightarrow \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m+6}{2}>0 \Rightarrow m>-6 \quad (3)\end{cases}$$

اشتراک سه مجموعه جواب به‌دست آمده بازه‌ی $(-6,-4)$ است.

زرنگی: این‌جوری فرض کن:

$$m=-1 \xrightarrow{\text{در معادله}} 2x^2-x+5=0$$

$\Rightarrow \Delta=1-40<0 \Rightarrow$ حذف گزینه‌های «۱» و «۳»

$$m=-3 \xrightarrow{\text{در معادله}} 2x^2-3x+3=0$$

$\Rightarrow \Delta=9-24<0 \Rightarrow$ حذف گزینه‌ی «۲»

۵۲۴. گزینه ۳ با توجه به ضرایب معادله، حاصل‌ضرب دو ریشه قابل محاسبه بوده و در نتیجه...

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-a}{3a}=\frac{-1}{3} \Rightarrow \alpha\beta=\frac{-1}{3}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{2}{3}} \frac{2}{3}\times\beta=\frac{-1}{3} \xrightarrow{\times\frac{3}{2}} \beta=\frac{-1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{-1}{2}$$

۵۲۵. گزینه ۳ عبارت داده‌شده برحسب ریشه‌های معادله همان اتحاد مکعب دوجمله‌ای است:

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3=S^3=\left(\frac{-b}{a}\right)^3$$

$$=(-3)^3=-27$$

۵۲۶. گزینه ۴ با توجه به ضرایب معادله، حاصل جمع ریشه‌ها قابل محاسبه است؛ کار را با همین شروع می‌کنیم:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-2}{1} \Rightarrow \alpha+\beta=-2 \Rightarrow \alpha=-\beta-2 \quad (*)$$

حالا در رابطه‌ی داده‌شده به جای α قرار می‌دهیم $\alpha=-\beta-2$:

$$\alpha^2+3\beta^2+4\alpha\beta+4=0 \Rightarrow (-\beta-2)^2+3\beta^2+4(-\beta-2)\beta+4=0$$

$$\Rightarrow \beta^2+4\beta+4+3\beta^2-4\beta^2-8\beta+4=0 \Rightarrow -4\beta+8=0$$

$$\Rightarrow 4\beta=8 \Rightarrow \beta=2 \xrightarrow{(*)} \alpha=-2-2=-4 \Rightarrow \alpha\beta=-8$$

۵۲۷. گزینه ۳ برای ریشه‌های α و β، جذر معکوس ریشه‌ها، یعنی $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ و $\sqrt{\frac{1}{\beta}}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$؛ پس:

$$A=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}$$ = مجموع جذر ریشه‌ها

$$=\frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} \xrightarrow[S=4,\,P=2]{\text{با توجه به ضرایب معادله}} A=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{4}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

(روابط $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$ و $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$ را بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم به خاطر بسپارید!)

۵۲۸. گزینه ۲ با کمی توجه به رابطه‌ی داده‌شده و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی درجه‌ی دوم درمی‌یابیم که برقراری رابطه‌ی $c+2b+4a=0$ بین ضرایب معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ به معنای این است که $x=2$ یکی از ریشه‌های آن است؛ زیرا با جایگزین کردن $x=2$ در معادله دقیقاً به رابطه‌ی $4a+2b+c=0$ می‌رسیم. حال اگر ریشه‌ی دیگر معادله را β بنامیم و از رابطه‌ی حاصل‌ضرب ریشه‌ها $(P=\alpha\beta=\frac{c}{a})$ استفاده کنیم، داریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \xrightarrow[\beta=?]{\alpha=2} 2\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow \beta=\frac{c}{2a}$$

زرنگی:

$$c+2b+4a=0 \xrightarrow{\text{عددهای اختیاری}} c=-2, b=-1, a=1$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} x^2-x-2=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \boxed{-1}, 2$$

گزینه‌ها با اعداد انتخابی ما به‌ترتیب می‌شوند: $-\frac{1}{4}$، $\boxed{-1}$، $\frac{1}{4}$ و 1

۵۲۹. گزینه ۱

$$3x^2+(2m-1)x+2-m=0$$

طبق فرض سؤال $\Rightarrow x_1+x_2=\frac{1}{x_1x_2} \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{c}{a}}$

$$\Rightarrow -\frac{2m-1}{3}=\frac{3}{2-m} \Rightarrow (2m-1)(m-2)=9$$

$$\Rightarrow 2m^2-5m+2=9 \Rightarrow 2m^2-5m-7=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-1 \\ m=\frac{7}{2}\end{cases}$$

حالا Δ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta=(2m-1)^2-4\times3(2-m) \xrightarrow{m=-1} \Delta=9-36<0$$

پس $m=\frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۵۴۰. گزینه ۱ در معادله‌ی درجه‌ی دوم داده‌شده ضرایب a و b معلوم بوده و با توجه به رابطه‌ی حاصل جمع ریشه‌ها داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=5 \xrightarrow{\alpha=2} 2+\beta=5 \Rightarrow \beta=3$$

بنابراین $\alpha=2$ و $\beta=3$ ریشه‌های این معادله بوده و...

$$\alpha^3+\beta^3=(2)^3+(3)^3=8+27=35$$

همان‌طور که می‌بینید بدون توجه به مقدار m توانستیم سؤال رو حل کنیم!

۵۴۱. (گزینه ۳) اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه طبق فرض تست $\alpha=\beta^2$ بوده و با توجه به ضرایب معادله، $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=6$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=m+5$ است. ابتدا تلاش می‌کنیم به کمک روابط $\alpha+\beta=6$ و $\alpha=\beta^2$، مقدار ریشه‌ها را یافته، سپس به کمک رابطه‌ی $\alpha\beta=m+5$ مقدار m را پیدا کنیم. **نگاه کن:**

$$\begin{cases}\alpha=\beta^2\\ \alpha+\beta=6\end{cases}\Rightarrow \beta^2+\beta-6=0\xrightarrow{\text{تجزیه}}(\beta+3)(\beta-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta+3=0\Rightarrow\beta=-3\\ \text{یا}\\ \beta-2=0\Rightarrow\beta=2\end{cases}\xrightarrow{\alpha=\beta^2}\begin{cases}\alpha=9\\ \text{یا}\\ \alpha=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\beta=-27\\ \text{یا}\\ \alpha\beta=8\end{cases}\xrightarrow{\alpha\beta=m+5}\begin{cases}m+5=-27\Rightarrow m=-32\\ \text{یا}\\ m+5=8\Rightarrow m=3\end{cases}$$

که فقط $m=-32$ در گزینه‌ها دیده می‌شود!

۵۴۲. (گزینه ۳) α و β ریشه‌های معادله، هستند.

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\alpha=3\beta \quad (1)$$

با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌ها در معادله‌ی $3x^2-ax+4=0$، داریم: (2)

$$\begin{cases}P=\alpha\beta\xrightarrow{(1)}\frac{4}{3}=(3\beta)\beta\Rightarrow\beta^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\beta=\pm\frac{2}{3}\\ S=\alpha+\beta\xrightarrow{(1)}\frac{a}{3}=4\beta\xrightarrow{(2)}\begin{cases}\frac{a}{3}=4(\frac{2}{3})\\ \frac{a}{3}=4(-\frac{2}{3})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\ a=-8\end{cases}\end{cases}$$

اختلاف دو مقدار به‌دست آمده برای a برابر است با: $8-(-8)=16$

۵۴۳. (گزینه ۱) فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله باشند.

با توجه به اتحاد $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$، ضریب x^2 را ساده می‌کنیم و در معادله‌ی مرتب‌شده مقدار S را پیدا می‌کنیم...

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\underbrace{\sqrt{3}-1}_{\text{مثبت}}|=\sqrt{3}-1$$

$$\Rightarrow(\sqrt{3}-1)x^2+(1-\sqrt{3})x-17=0$$

$$\Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(1-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}=1$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta=1\Rightarrow\alpha=-\beta+1 \quad (*)$$

با توجه به رابطه‌ی * یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگه، ۱ واحد بیشتره!

۵۴۴. (گزینه ۱) باید معادله‌ی $f(x)=0$ دو ریشه‌ی منفی داشته باشد. این زمانی محقق می‌شود که به‌طور همزمان داشته باشیم:

$\Delta>0, P>0, S<0$

(1) $\Delta>0\Rightarrow(a+3)^2-4a(-1)>0\Rightarrow a^2+6a+9+4a>0$

$$\Rightarrow\underbrace{a^2+10a+9}_{P_1}>0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت }P_1}P_1=a^2+10a+9=(a+1)(a+9)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+1=0\Rightarrow a=-1\\ a+9=0\Rightarrow a=-9\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{جدول}}$

a	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
P_1		+		−		+	

$\xrightarrow[P_1>0]{\text{می‌خواهیم}}$ $a<-9$ یا $a>-1$

(2) $P=\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{-1}{a}>0\xrightarrow[\text{برای مثبت شدن کسر}]{\text{صورت کسر منفیه}}$ باید: $a<0$

(3) $S=\frac{-b}{a}<0\Rightarrow\frac{-(a+3)}{a}<0\xrightarrow{\text{قرینه کن}}\underbrace{\frac{a+3}{a}}_{P_3}>0$

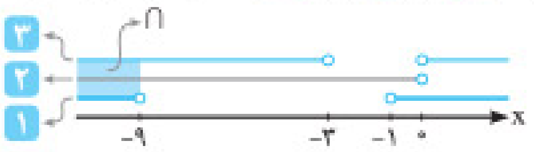
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت }P_3}\begin{cases}a+3=0\Rightarrow a=-3\\ a=0\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$

a	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
P_3		+		−	ت‌ن	+	

$\xrightarrow[P_3>0]{\text{می‌خواهیم}}$ $a>0$ یا $a<-3$

$\xrightarrow{\text{درنهایت}}$ مجموعه‌ی مقادیر a = $1\cap 2\cap 3=\{a\,|\,a<-9\}$



زرنگی:

$a=-4\xrightarrow{\text{در تابع}}f(x)=-4x^2-x-1$

$\xrightarrow{\text{وجود ریشه!}}\Delta=(-1)^2-4(-4)(-1)=-15<0\Rightarrow$ ریشه ندارد

$\Rightarrow$ حذف گزینه‌ی «۲»

$a=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{در تابع}}f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-1\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{جمع}}S=-\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5>0$

این یعنی هر دو ریشه منفی نبوده‌اند! گزینه‌هایی که $-\frac{1}{2}$ را قبول دارند غلط هستن! یعنی گزینه‌های «۳» و «۴» ...

۵۴۵. (گزینه ۱) با در نظر گرفتن شرط دو ریشه‌ی حقیقی و مثبت متمایز، داریم:

$\xrightarrow{\text{شرط‌ها}}$ (1) $\Delta>0$ (2) $P>0$ (3) $S>0$

$x^2+(m-2)x+m+1=0$

(1) $\Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4\times1\times(m+1)>0$

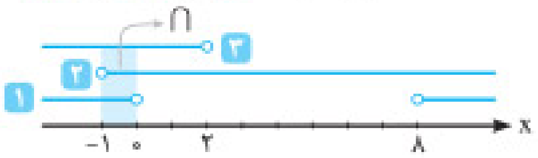
$\xrightarrow{\text{اتحاد رو باز کن}}m^2-4m+4-4m-4>0\Rightarrow m^2-8m>0$

$\Rightarrow m<0$ یا $m>8$ [1]

(2) $P=\frac{c}{a}=m+1>0\Rightarrow m>-1$ [2]

(3) $S=-\frac{b}{a}=-(m-2)>0\Rightarrow -m+2>0\Rightarrow m<2$ [3]

جواب نهایی = $1\cap 2\cap 3=(-1,0)$



زرنگی: با گذاشتن $m=9$، $m=7$ و $m=-2$ می‌توانید Δ را بررسی و گزینه‌های غلط را حذف کنید ...

۵۴۶. (گزینه ۳) در گزینه‌ها موقعیت نمودار تابع که یک سهمی است، نسبت به محور xها بررسی شده و می‌دانیم آنچه در این مورد اهمیت دارد، علامت Δ و علامت صفرهای تابع (نقاط تلاقی با محور طول‌ها) است؛ بنابراین:

$\Delta=b^2-4ac=(-3m)^2-4(m^2)(-1)$

$=9m^2+4m^2=13m^2\xrightarrow{m\neq0}\Delta>0\Rightarrow$ دو نقطه‌ی تلاقی دارد.

حاصل‌ضرب صفرهای تابع $=P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{m^2}<0$

آن دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند، پس نمودار تابع در دو طرف مبدأ، محور طول‌ها را قطع می‌کند.

زرنگی:
$m=1 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x)=x^2-3x-1 \Rightarrow \frac{c}{a}=-1<0$
یعنی معادله دو ریشه‌ی حقیقی با علامت‌های مختلف دارد یا تابع محور x ها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند...!

۵۴۷. (گزینه ۱) اگر α و β را صفرهای تابع بنامیم، آن‌گاه با کم کردن نیم واحد از آن‌ها به اعداد $\alpha-\frac{1}{2}$ و $\beta-\frac{1}{2}$ می‌رسیم و برای حاصل‌ضرب‌شان داریم:

$$(\alpha-\frac12)(\beta-\frac12)=\alpha\beta-\frac12\alpha-\frac12\beta+\frac14=\alpha\beta-\frac12(\alpha+\beta)+\frac14$$

$$\xrightarrow[(\alpha+\beta=-3)]{x^2+3x-c=0\ \text{در معادله‌ی}} \alpha\beta-\frac12(-3)+\frac14=\alpha\beta+\frac32+\frac14=\alpha\beta+\frac74$$

یعنی به حاصل‌ضرب صفرهای تابع $\frac74$ اضافه می‌شود.

زرنگی:
$c=-2 \Rightarrow f(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
صفرهای تابع $=-1\ ,\ -2 \Rightarrow$ حاصل‌ضرب $=2 \xrightarrow{-0/5}$
$-\frac32\ ,\ -\frac52 \Rightarrow$ حاصل‌ضرب $=\frac{15}{4} \xrightarrow{\text{اختلاف}} \frac{15}{4}-2=\frac74$

۵۴۸. (گزینه ۴) با توجه به فرض تست، ریشه‌های معادله را $(\alpha-1)^2$ و $(\alpha+1)^2$ در نظر بگیریم. با توجه به جمع ریشه‌ها داریم:

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-290}{1}=290 \Rightarrow (\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2=290$$

$$\Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1+\alpha^2+2\alpha+1=290 \Rightarrow 2\alpha^2+2=290 \Rightarrow \alpha^2=144$$

$$\xrightarrow{\alpha\in\mathbb{N}} \alpha=12$$

پس ریشه‌های معادله 11^2 و 13^2 هستند. با توجه به ضریب ریشه‌ها داریم:

$$p=\frac{c}{a}\Rightarrow m^2=11^2\times13^2 \Rightarrow m=11\times13=143$$

۵۴۹. (گزینه ۱) با توجه به ضرایب معادله‌ی $x^2+bx+b=0$ داریم:

$$S=\frac{-b}{a}=-b\ ,\ P=\frac{c}{a}=b$$

حالا سعی می‌کنیم رابطه‌ی داده‌شده را برحسب S و P بنویسیم و...

$$\frac2\alpha+\frac3\beta=1 \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک‌بگیر}} \frac{2\beta+3\alpha}{\alpha\beta}=1 \xrightarrow[\text{S رو بساز}]{\text{درصورت کسر}}$$

$$\frac{(2\beta+2\alpha)+\alpha}{\alpha\beta}=1\Rightarrow \frac{2(\alpha+\beta)+\alpha}{\alpha\beta}=1 \xrightarrow[\alpha\beta=P=b]{\alpha+\beta=S=-b} \frac{-2b+\alpha}{b}=1$$

$$\xrightarrow[(b\neq0)]{\times b} -2b+\alpha=b \xrightarrow{+2b} \alpha=3b \quad \text{(یک ریشه‌ی معادله)}$$

$$\xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{در معادله}} (3b)^2+b(3b)+b=0 \Rightarrow 9b^2+3b^2+b=0$$

$$\Rightarrow 12b^2+b=0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} b(12b+1)=0$$

$\Rightarrow b=0$ ✗ (چرا؟) یا $12b+1=0 \Rightarrow b=\frac{-1}{12}$ ✓

۵۵۰. (گزینه ۴) برای حل این تست، به جای این‌که حاصل $(\sqrt\alpha+\sqrt\beta)$ و $|\sqrt\alpha-\sqrt\beta|$ را به‌طور جداگانه از روابط $\sqrt\alpha+\sqrt\beta=\sqrt{S+2\sqrt P}$ و $|\sqrt\alpha-\sqrt\beta|=\sqrt{S-2\sqrt P}$ محاسبه کرده و جمع کنیم، فرض می‌کنیم α ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $2x^2-(\sqrt5+2)x+\sqrt5=0$ باشد ($\alpha>\beta$ و در نتیجه $\sqrt\alpha>\sqrt\beta$) و داریم:

$$A=\sqrt\alpha+\sqrt\beta+|\underbrace{\sqrt\alpha-\sqrt\beta}_{\oplus}|=\sqrt\alpha+\sqrt\beta+\sqrt\alpha-\sqrt\beta=2\sqrt\alpha$$

یعنی حاصل، دو برابر جذر ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله است. حالا کافی است معادله را حل کرده و ریشه‌ی بزرگ‌تر آن را به‌دست آوریم:

$$\underbrace{2}_{a}x^2\underbrace{-(\sqrt5+2)}_{b}x\underbrace{+\sqrt5}_{c}=0 \xrightarrow[\alpha>\beta]{a+b+c=0} \begin{cases}\beta=1\\ \alpha=\frac ca=\frac{\sqrt5}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\alpha>\beta} A=2\sqrt\alpha=2\sqrt{\frac{\sqrt5}{2}}=(\sqrt2)^2\times\frac{\sqrt{\sqrt5}}{\sqrt2}$$

$$=\sqrt2\times\sqrt[4]5=\sqrt[4]{2^2}\times\sqrt[4]5=\sqrt[4]{20}$$

۵۵۱. (گزینه ۲) ابتدا مقدار $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ را به کمک ضرایب معادله به‌دست آورده، سپس شرط تشکیل دنباله‌ی حسابی را اعمال می‌کنیم:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=m\ ,\ P=x_1x_2=\frac ca=2$$

دنباله‌ی حسابی: $4,m,2 \Rightarrow 2m=4+2=6\Rightarrow m=3$

یادآوری: اگر a,b,c جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه رابطه‌ی $2b=a+c$ بین آن‌ها برقرار است.

۵۵۲. (گزینه ۲) اگر ریشه‌ها را α و β بگیریم، بر اساس آنچه سؤال بیان می‌کند، داریم:

$$2\alpha=\frac\beta2+1 \xrightarrow{\times2} 4\alpha=\beta+2 \xrightarrow{+\alpha} 5\alpha=(\alpha+\beta)+2$$

$$\xrightarrow[\alpha+\beta=-\frac ba=\frac{10}{4}=\frac52]{\text{از ضرایب معادله}} 5\alpha=\frac52+2=\frac92$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{9}{10} \quad \text{(یکی از ریشه‌های معادله)}$$

ریشه‌ی معادله در آن صدق می‌کند، پس:

$$4\alpha^2-10\alpha+2m=0 \xrightarrow{\alpha=\frac{9}{10}} 4(\frac{9}{10})^2-10(\frac9{10})+2m=0\Rightarrow\frac{81}{25}-9+2m=0$$

$$\Rightarrow 2m=9-\frac{81}{25}=\frac{144}{25}\xrightarrow{\div2} m=\frac{144}{50}\times\frac22=\frac{288}{100}=2/88$$

۵۵۳. (گزینه ۳) در چنین سؤال‌هایی با قرار دادن α و β در معادله (به‌عنوان ریشه‌های معادله) روابط را به گونه‌ای می‌سازیم که ما را به سمت جواب هدایت کند. در اینجا داریم:

$$x^2-5x+2=0\Rightarrow \begin{cases}\alpha^2-5\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha^2+2=5\alpha\\ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در A}} \frac{\alpha}{\alpha^2+2}=\frac{\alpha}{5\alpha}=\frac15\\ \beta^2-5\beta+2=0 \xrightarrow[\text{رو اضافه کن}]{-\beta+5}\beta^2-6\beta+7=-\beta+5\\ \xrightarrow[\text{در A}]{\text{جای‌گذاری}}\frac{\beta-5}{\beta^2-6\beta+7}=\frac{\beta-5}{-\beta+5}=\frac{(\beta-5)}{-(\beta-5)}=-1\end{cases}$$

بنابراین:

$$A=\frac15-(-1)=\frac15+1=\frac65$$

۵۵۴. (گزینه ۲) با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌های α و β، داریم:

$$ax^2-8x+4=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac8a\\P=\alpha\beta=\frac4a\end{cases} \quad ❄$$

در معادله‌ی درجه دومی با ریشه‌های $x_1=\alpha\beta^2$ و $x_2=\alpha^2\beta$، طبق فرض، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها با هم برابر است؛ بنابراین داریم:

$$x_1+x_2=x_1x_2\Rightarrow\alpha\beta^2+\alpha^2\beta=(\alpha\beta^2)(\alpha^2\beta)$$

$$\Rightarrow\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^3\beta^3\xrightarrow{\div\alpha\beta}\alpha+\beta=(\alpha\beta)^2$$

$$\xrightarrow{❄}\frac8a=(\frac4a)^2\Rightarrow\frac8a=\frac{16}{a^2}\xrightarrow{a\neq0}1=\frac2a\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow\log_{\sqrt2}a=\log_{\sqrt2}2=\log_{2^{\frac12}}2=\frac{1}{\frac12}\log_2 2=2$$

۵۵۵. گزینه ۴ اگر رابطه‌ی داده‌شده را به‌صورت $2a+b+12=0$ بنویسیم و با معادله‌ی داده‌شده مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که یکی از ریشه‌ها $x_1=-2$ است: **ببینید**

$$3(-2)^2-a(-2)+b=0\Rightarrow 12+2a+b=0$$

بنابراین داریم:

$$3x^2-ax+b=0\Rightarrow P=x_1x_2=\frac{b}{3}\xrightarrow{x_1=-2}-2x_2=\frac{b}{3}\Rightarrow x_2=-\frac{b}{6}$$

زرنگی: $2a+b=-12\xrightarrow{\text{عددهای اختیاری}}a=0, b=-12\xrightarrow{\text{در معادله}}3x^2-12=0\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}-2, 2$

$b=-12$ در گزینه‌ها به‌ترتیب می‌دهد: ۱۲، ۶، ۴ و ۲

۵۵۶. گزینه ۲ معادله‌ی داده‌شده در صورت تست را در نظر می‌گیریم:

$$x^2-(a^2+b^2-12)x+(a+b-1)=0\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\begin{cases}x_1=a\in\mathbb{N}\\x_2=b\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه‌ی بین ریشه‌ها}}\begin{cases}S=x_1+x_2\Rightarrow\frac{a^2+b^2-12}{1}=a+b & (1)\\P=x_1x_2\Rightarrow\frac{a+b-1}{1}=ab\Rightarrow ab=a+b-1 & (2)\end{cases}$$

از رابطه‌ی ۱ داریم:

$$a+b=a^2+b^2-12\xrightarrow{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$$

$$a+b=(a+b)^2-2ab-12\xrightarrow{(2)}$$

$$a+b=(a+b)^2-2(a+b-1)-12\xrightarrow[t\in\mathbb{N}]{a+b=t}t=t^2-2t+2-12$$

$$\Rightarrow t^2-3t-10=0\Rightarrow(t-5)(t+2)=0\Rightarrow\begin{cases}t=5\ ✓\\t=-2\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow t=a+b=5$$

۵۵۷. گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $S=\alpha+\beta=2$ و $P=\alpha\beta=\frac{3}{4}$. حالا تلاش می‌کنیم عبارت $\alpha^4+\beta^4$ را به کمک اتحاد $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$ برحسب S و P بنویسیم و...

$$\alpha^4+\beta^4=(\underset{A}{\alpha^2})^2+(\underset{B}{\beta^2})^2=(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta})^2-2\alpha^2\beta^2$$

$$=((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)^2-2(\alpha\beta)^2=(S^2-2P)^2-2P^2$$

$$=(4-\frac{3}{2})^2-2(\frac{9}{16})=\frac{25}{4}-\frac{9}{8}=\frac{50-9}{8}=\frac{41}{8}$$

زرنگی: $\Delta=4-3=1$ است، پس:

$$x^2-2x+\frac{3}{4}=0\Rightarrow x=\frac{2\pm1}{2}$$

$$\Rightarrow\alpha^4+\beta^4=(\frac{3}{2})^4+(\frac{1}{2})^4=\frac{81}{16}+\frac{1}{16}=\frac{41}{8}$$

۵۵۸. گزینه ۱ α ریشه‌ی معادله است و در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^2-2\alpha-4=0\Rightarrow\alpha^2-4=2\alpha\quad ✻$$

حالا با توجه به رابطه‌ی ✻ حاصل عبارت موردنظر را به‌دست می‌آوریم:

$$(\alpha^2-4)^2+4\beta^2=(2\alpha)^2+4\beta^2=4\alpha^2+4\beta^2=4(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=4((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=4(2^2-2(-4))=4(4+8)=48$$

مقادیر $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را از روی ضرایب معادله محاسبه کرده‌ایم:

$$x^2-2x-4=0$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-2)}{1}=2,\quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-4}{1}=-4$$

۵۵۹. گزینه ۱ با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌های α و β در معادله‌ی داده‌شده، داریم:

$$x^2+6x+a=0\xrightarrow{\text{رابطه‌ی ریشه‌ها}}\begin{cases}S=\alpha+\beta=-6\\P=\alpha\beta=a\\\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{36-4a}}{2\times1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\beta=\frac{-6+\sqrt{4(9-a)}}{2}=\frac{-6+2\sqrt{9-a}}{2}=-3+\sqrt{9-a}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض تست}}3\alpha^2+\underbrace{2\beta^2}_{3\beta^2-\beta^2}=12\sqrt{2}+85\Rightarrow3\alpha^2+3\beta^2-\beta^2=12\sqrt{2}+85$$

$$\Rightarrow3(\alpha^2+\beta^2)-\beta^2=12\sqrt{2}+85$$

$$\Rightarrow3(S^2-2P)-(-3+\sqrt{9-a})^2=12\sqrt{2}+85$$

$$\Rightarrow3(36-2a)-(9+9-a-6\sqrt{9-a})=12\sqrt{2}+85$$

$$\Rightarrow108-6a-18+a+6\sqrt{9-a}=12\sqrt{2}+85$$

$$\Rightarrow90-5a+6\sqrt{9-a}=12\sqrt{2}+85\Rightarrow5a-6\sqrt{9-a}+12\sqrt{2}-5=0$$

$$\Rightarrow\underbrace{5a-5}_{\text{گویا}}=\underbrace{6\sqrt{9-a}-12\sqrt{2}}_{\text{گنگ}}\Rightarrow5a-5=0\Rightarrow a=1$$

۵۶۰. گزینه ۱ وقتی نمودار یک سهمی محور xها را در هر دو طرف مبدأ قطع می‌کند، معادله‌ی مربوطه دو ریشه دارد: یکی مثبت و دیگری منفی و این یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها باید منفی باشد:

$$P=\frac{c}{a}<0\Rightarrow\underbrace{\boxed{\frac{1-m}{m+2}}}_{P}<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت P}}\begin{cases}1-m=0\\m+2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=1\ \text{(ریشه‌ی صورت)}\\m=-2\ \text{(ریشه‌ی مخرج)}\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{جدول}}$

m	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
P		− ✓	ت ن	+		− ✓	

$\xrightarrow[P<0\ \text{باشد}]{\text{می‌خواهیم}}$ مجموعه‌ی مقادیر مورد قبول m $=\{m\mid m<-2$ یا $m>1\}$

زرنگی:

$$m=0\xrightarrow{\text{در معادله}}2x^2+3x+1=0\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}x=-1,-\frac{1}{2}$$

$\xrightarrow{\text{دو ریشه‌ی منفی}}$ حذف گزینه‌ی «۲»

$$m=2\xrightarrow{\text{در معادله}}4x^2+3x-1=0\Rightarrow\frac{c}{a}=-\frac{1}{4}<0$$

$\xrightarrow{\text{دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت}}$ حذف گزینه‌ی «۳»

$$m=-3\xrightarrow{\text{در معادله}}-x^2+3x+4=0\Rightarrow\frac{c}{a}=-4<0$$

$\xrightarrow{\text{دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت}}$ حذف گزینه‌ی «۴»

۵۶۱. گزینه ۴ شرط داشتن دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز در معادله‌ی درجه‌ی دوم عبارت است از: $S<0,\ P>0,\ \Delta>0$

بنابراین:

$$\Delta=(-2m)^2-4(m-6)(-3)=4m^2+12m-72>0$$

$$\xrightarrow{\div4}\Delta=m^2+3m-18>0\xrightarrow{\text{تجزیه کن}}(m+6)(m-3)>0$$

$\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{جدول}}$

m	$-\infty$		-6		3		$+\infty$
$m^2+3m-18$		+ ✓		−		+ ✓	

$\Rightarrow m<-6$ یا $m>3$ (۱)

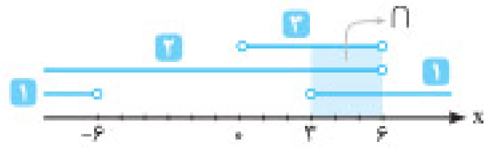
$$P=\frac{c}{a}=\frac{-3}{m-6}>0\Rightarrow m-6<0\Rightarrow m<6\quad(2)$$

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{2m}{m-6}<0$$

m	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$2m$		$-$		$+$		$+$	
$m-6$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{2m}{m-6}$		$+$		$-$		$+$	

جدول تعیین علامت $\Rightarrow 0<m<6$ ③

جواب نهایی = ① $\cap$ ② $\cap$ ③ $\Rightarrow 3<m<6$



زرنگی: به‌ازای $m=6$ ضریب x^2 صفر می‌شود، پس گزینه‌ی «۲» غلطه!

$m=2 \xrightarrow{\text{در معادله}} -4x^2-4x-3=0$

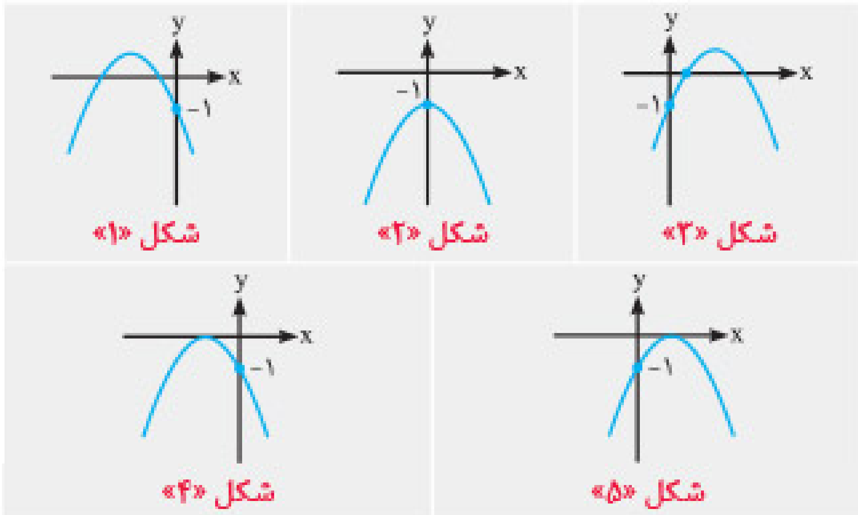
$\xrightarrow{\text{وجود ریشه}} \Delta=(-4)^2-4(-4)(-3)=-32 \xrightarrow[\text{ندارد}]{\text{ریشه}}$ حذف گزینه‌ی «۳»

$m=-7 \xrightarrow{\text{در معادله}} -13x^2+14x-3=0$

$\xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} -\frac{b}{a}=\frac{14}{13}>0 \Rightarrow$ دو ریشه‌ی منفی ندارد $\Rightarrow$ حذف گزینه‌ی «۱»

۵۶۲. گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که به ازای $a=3$ ضابطه‌ی تابع می‌شود $f(x)=3x-1$ و نمودار تابع f از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. فرض کنید $a\neq 3$. می‌دانیم اگر ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر باشد، نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. پس حتماً باید: $a-3<0 \Rightarrow a<3$ ①

با شرط $a<3$، یکی از شکل‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم. البته توجه داشته باشید که $f(0)=-1$ است، یعنی نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند.



از این ۵ شکل، فقط شکل «۳» مدنظر ما نیست، پس شرایط شکل «۳» را محاسبه کرده و آن را از شرط $a<3$ کم می‌کنیم (اصل متمم). اما مشاهده می‌کنیم که در شکل «۳» نمودار تابع در دو نقطه با طول‌های مثبت محور xها را قطع کرده است، یعنی شرایط شکل «۳» به‌صورت مقابل است: $\Delta>0, P>0, S>0$

و اما حل این سه نامعادله:

$\Delta>0 \Rightarrow a^2-4(a-3)(-1)>0 \Rightarrow a^2+4a-12>0 \Rightarrow (a+6)(a-2)>0$

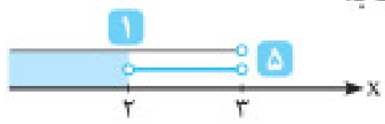
$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-6$ یا $a>2$ ②

$P>0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3}>0 \Rightarrow a-3<0 \Rightarrow a<3$ ③

$S>0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3}>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0<a<3$ ④

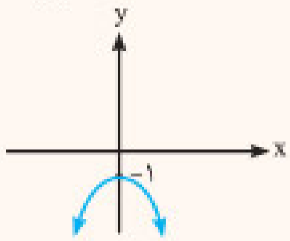
② $\cap$ ③ $\cap$ ④ $\rightarrow 2<a<3$ ⑤

حالا برای پیدا کردن جواب نهایی مسئله باید ⑤ را از ① کم کنیم، پس جواب نهایی مسئله برابر است با: $a\leq 2$



زرنگی: این‌جوری فرض کن: $a=0 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x)=-3x^2-1$

شکل تقریبی



می‌بینید که سهمی از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد! پس هر گزینه‌ای که $a=0$ را قبول ندارد، حذف می‌شود: یعنی گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴»!

۵۶۳. گزینه ۲

$$\begin{cases}\alpha=1-\sqrt{2}\\ \beta=1+\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}S=\alpha+\beta=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2\\ P=\alpha\beta=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1^2-(\sqrt{2})^2\\ \quad=1-2=-1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2-2x-1=0$$

کمی اضافه‌تر: اگر معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ در گزینه‌ها وجود نداشته باشد، به جای آن می‌توان هر مضربی از معادله را به‌عنوان معادله‌ی موردنظر معرفی کرد. برای مثال به جای همین معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ می‌توان هر یک از معادله‌های $-2x^2+4x+2=0$ (-2 برابر آن) یا $\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$ ($\frac{1}{3}$ برابر آن) را معرفی کرد.

۵۶۴. گزینه ۱ معادله‌ی درجه‌ی دومی با $S=-1/5$ و $P=-7$ تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم: $x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2+1/5x-7=0$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم تا ساده‌تر بشه}]{\text{ابتدا در ۲ ضرب}} 2x^2+3x-14=0$$

$$\xrightarrow[(\Delta=9+112=121)]{\text{از }\Delta\text{ برو}} x=\frac{-3\pm\sqrt{121}}{2(2)}=\frac{-3\pm 11}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{-3+11}{4}=\frac{8}{4}=2 \ (\text{در گزینه‌ها نیست})\\ \text{یا}\\ \beta=\frac{-3-11}{4}=\frac{-14}{4}=\frac{-7}{2}\end{cases}$$

۵۶۵. گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال $S=2\sqrt{3}$ و $P=-1$. از طرفی معادله‌ی موردنظر به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ است؛ پس:

$$\underbrace{x^2-2\sqrt{3}x-1=0}_{\text{(این تو گزینه‌ها نیست!)}} \xrightarrow{\times\sqrt{3}} \sqrt{3}x^2-6x-\sqrt{3}=0 \ ✓$$

۵۶۶. گزینه ۲ ریشه‌های معادله با ضرایب معلوم $3x^2+7x+1=0$ را α و β و ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+b=0$ را x_1 و x_2 می‌نامیم. بر اساس گفته‌ی تست $x_1=\alpha+1$ و $x_2=\beta+1$ است. از طرفی با توجه به ضرایب معادله‌ی $3x^2+7x+1=0$، $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{3}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$ است.

اکنون توجه کنید که:

$$P=x_1x_2=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}+1=-1$$

$$\xrightarrow[p=b]{x^2+ax+b=0} b=-1$$

۵۶۷. گزینه ۴ جواب‌های معادله‌ی $x^2-bx-2c=0$ را α و β در نظر می‌گیریم: برای جواب‌های معادله‌ی مطلوب (که آن‌ها را x_1 و x_2 فرض کرده‌ایم) داریم: $x_1=-2\alpha \ , \ x_2=-2\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases}S=x_1+x_2=-2\alpha-2\beta=-2(\alpha+\beta) \xrightarrow{\alpha+\beta=b} S=-2b\\ P=x_1x_2=(-2\alpha)(-2\beta)=4\alpha\beta \xrightarrow{\alpha\beta=-2c} P=-8c\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2+2bx-8c=0$$

زرنگی:

$$b=c=۱ \xrightarrow{\text{در معادله}} x^۲-x=۲ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} -۱,۲ \xrightarrow{\text{(۲−) برابر کن}} ۲,-۴$$

$$\xrightarrow[S=-۲,P=-۸]{\text{معادله بنویس}} x^۲+۲x-۸=۰ \xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{b=c=۱} x^۲+۲bx-۸c=۰ \checkmark$$

۵۶۸. (گزینه ۴) ابتدا مقادیر S و P را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=(\sqrt{a}-\sqrt{a+۱})+(\sqrt{a}+\sqrt{a+۱})=۲\sqrt{a}$$

$$P=\alpha\beta=(\sqrt{a}-\sqrt{a+۱})(\sqrt{a}+\sqrt{a+۱})=(\sqrt{a})^۲-(\sqrt{a+۱})^۲$$

$$=a-(a+۱)=-۱$$

بنابراین: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۲\sqrt{a}x-۱=۰$

زرنگی: این‌جوری فرض کن:

$$a=۱ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} ۱+\sqrt{۲},۱-\sqrt{۲} \Rightarrow P=-۱,S=۲$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} x^۲-۲x-۱=۰ \xrightarrow[a=۱]{\text{مطابقت با گزینه‌ها}} x^۲-۲\sqrt{a}x-۱=۰ \checkmark$$

۵۶۹. (گزینه ۳) اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases}S=x_۱+x_۲=۴\\ P=x_۱x_۲=۱\end{cases}$$

همچنین اگر ریشه‌های معادله‌ی خواسته شده را α و β بنامیم، طبق فرض تست داریم:

$$\begin{cases}\alpha=-۳x_۱+۲\\ \beta=-۳x_۲+۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S'=\alpha+\beta=-۳(x_۱+x_۲)+۴=-۳(۴)+۴=-۸\\ P'=\alpha\beta=(-۳x_۱+۲)(-۳x_۲+۲)=۹x_۱x_۲-۶(x_۱+x_۲)+۴\\ \quad=۹-۲۴+۴=-۱۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی جدید}} x^۲-S'x+P'=۰ \xrightarrow{S'=-۸,P'=-۱۱} x^۲+۸x-۱۱=۰$$

زرنگی: اگر ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲-۴x+۱$ را با x و ریشه‌ی معادله‌ی خواسته‌شده را با X نمایش دهیم، داریم:

$$X=۳(-x)+۲ \Rightarrow ۳x=۲-X \Rightarrow x=\frac{۲-X}{۳} \xrightarrow{\text{قرار بده در معادله}}$$

$$(\frac{۲-X}{۳})^۲-۴(\frac{۲-X}{۳})+۱=۰ \Rightarrow \frac{۴-۴X+X^۲}{۹}-\frac{۸-۴X}{۳}+۱=۰$$

$$\xrightarrow{\times۹} ۴-۴X+X^۲-۲۴+۱۲X+۹=۰ \Rightarrow X^۲+۸X-۱۱=۰$$

۵۷۰. (گزینه ۳) با توجه به ضرایب معادله‌ی $۲x^۲-۳x-۴=۰$، $\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-۲$ است و برای S و P معادله‌ی جدید داریم:

$$S=(\frac{۱}{\alpha}+۱)+(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=\frac{-۳}{۴}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱$$

$$=\frac{۱}{-۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱=\frac{-۱}{۲}-\frac{۳}{۴}+۱=\frac{-۲-۳+۴}{۴}=\frac{-۱}{۴}$$

حالا معادله‌ی جدید را به شکل $x^۲-Sx+P=۰$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰ \xrightarrow{\times۴} ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

۵۷۱. (گزینه ۳) ابتدا معادله‌ی $x(۵x+۳)=۲$ را مرتب می‌کنیم و با توجه به ضرایب آن مقادیر $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۵x^۲+۳x-۲=۰ \xrightarrow[\text{ریشه‌ها هستن}]{\alpha \text{ و } \beta} \begin{cases}\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۲}{۵}\\ \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-۳}{۵}\end{cases}$$

سپس ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲-kx+۲۵=۰$ را $x_۱=\frac{۱}{\alpha^۲}$ و $x_۲=\frac{۱}{\beta^۲}$ فرض می‌کنیم:

$$S=x_۱+x_۲=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}$$

$$=\frac{(\frac{-۳}{۵})^۲-۲(\frac{-۲}{۵})}{(\frac{-۲}{۵})^۲}=\frac{\frac{۹}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۹}{۴}$$

از طرفی: $S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}=\frac{k}{۴}$

بنابراین: $\frac{k}{۴}=\frac{۲۹}{۴} \Rightarrow k=۲۹ \checkmark$

زرنگی:

$$۵x^۲+۳x-۲=۰ \xrightarrow{a+c=b} \alpha=-۱ \text{ یا } \beta=\frac{۲}{۵}$$

یکی از ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲-kx+۲۵=۰$، $\frac{۱}{\alpha^۲}$ است:

$$x_۱=\frac{۱}{\alpha^۲}=۱ \xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{در معادله}} ۴-k+۲۵=۰ \Rightarrow k=۲۹ \checkmark$$

۵۷۲. (گزینه ۱)

$$x^۲-x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases}x_۱+x_۲=S=۱\\ x_۱x_۲=P=-۴\end{cases}$$

اگر ریشه‌های معادله‌ی جدید را α و β بنامیم، طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}\alpha=x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲}\\ \beta=x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}S=\alpha+\beta=x_۱^۳+x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}\\ P=\alpha\beta=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S=(x_۱^۳+x_۲^۳)+\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=(S^۳-۳PS)+\frac{S}{P}\\ \quad=(۱-۳(-۴)(۱))+\frac{۱}{-۴}\\ P=x_۱^۳x_۲^۳+\underbrace{x_۱^۲+x_۲^۲}_{S^۲-۲P}+\frac{۱}{-۴}=P^۳+S^۲-۲P+۱\\ \quad=(-۴)^۳+۱-۲(-۴)+\frac{۱}{-۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S=\frac{۵۱}{۴}\\ P=\frac{-۲۲۱}{۴}\end{cases} \xrightarrow[X^۲-SX+P=۰]{\text{معادله‌ی جدید}} X^۲-\frac{۵۱}{۴}X-\frac{۲۲۱}{۴}=۰$$

$$\Rightarrow ۴X^۲-۵۱X-۲۲۱=۰$$

۵۷۳. (گزینه ۲) ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳\sqrt{۲}x+۴=۰$ را α و β و ریشه‌های معادله‌ی مطلوب را $x_۱$ و $x_۲$ فرض می‌کنیم. در این‌صورت بر اساس گفته‌ی سؤال، $x_۱=\alpha^۲$ و $x_۲=\beta^۲$ بوده و با توجه به این‌که $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۳\sqrt{۲}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=۴$ است، مقادیر $S=x_۱+x_۲$ و $P=x_۱x_۲$ را یافته و معادله را به شکل $x^۲-Sx+P=۰$ تشکیل می‌دهیم:

$$S=x_۱+x_۲=\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=(۳\sqrt{۲})^۲-۲(۴)=۱۸-۸=۱۰$$

$$P=x_۱x_۲=\alpha^۲\beta^۲=(\alpha\beta)^۲=(۴)^۲=۱۶ \Rightarrow x^۲-۱۰x+۱۶=۰$$

۵۷۴. گزینه ۱ می‌دانیم که منظور از صفرهای تابع $f(x)=x-3\sqrt{x}+2$، ریشه‌های معادله‌ی $x-3\sqrt{x}+2=0$ است. از طرفی این معادله با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ (که معادل $x=t^2$ است) به معادله‌ی درجه‌ی دوم $t^2-3t+2=0$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$t^2-3t+2=0 \xrightarrow[\text{ضرایب صفر}]{\text{مجموع}} \begin{cases} t=1 \\ \text{یا} \\ t=\frac{2}{1}=2\end{cases} \xrightarrow{x=t^2} \begin{cases} x=1^2=1=\alpha \\ \text{یا} \\ x=2^2=4=\beta \end{cases}$$

بنابراین دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}+1=\frac{1}{1}+1=2$ و $\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$ هستند. برای این منظور مقادیر $S=2+\frac{5}{4}=\frac{13}{4}$ و $P=2\times\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$ را محاسبه می‌کنیم و معادله را به‌شکل $x^2-Sx+P=0$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-Sx+P=0 \xrightarrow[P=\frac{5}{2}]{S=\frac{13}{4}} x^2-\frac{13}{4}x+\frac{5}{2}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-13x+10=0$$

۵۷۵. گزینه ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $8x^2-mx-8=0$ را x_1 و x_2 و ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ را α و β بنامیم، بر اساس فرض تست و رابطه‌ی مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها می‌توان نوشت:

$$8x^2-mx-8=0 \xrightarrow[\text{هستند } x_2 \text{ و } x_1]{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases}x_1=\alpha^3\\ x_2=\beta^3\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\alpha^3+\beta^3=\frac{m}{8}, \quad x_1x_2=\alpha^3\beta^3=-1$$

$$2x^2-x-2=0 \xrightarrow[\text{هستند } \beta \text{ و } \alpha]{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases}\alpha\beta=\frac{-2}{2}=-1\\ \alpha+\beta=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

حال اگر طرفین رابطه‌ی $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ را به توان ۳ برسانیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\alpha^3+\beta^3}_{\frac{m}{8}}+3\underbrace{\alpha\beta}_{(-1)}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{(\frac{1}{2})}=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{m}{8}-\frac{3}{2}=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{8}=\frac{3}{2}+\frac{1}{8}=\frac{13}{8} \xrightarrow{\times 8} m=13$$

۵۷۶. گزینه ۱ سؤال را از منظر دیگری حل می‌کنیم. ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-7x+3=0$ (به دلیل صفر شدن مجموع ضرایب) برابر $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$ بوده و در نتیجه ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ به‌صورت $\alpha=\frac{2}{x_1}=2$ و $\beta=\frac{2}{x_2}=\frac{8}{3}$ هستند. حال اگر مجموع این دو ریشه را برابر رابطه‌ی مجموع دو ریشه با توجه به ضرایب معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ قرار دهیم، مقدار a به‌دست می‌آید:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a} \Rightarrow 2+\frac{8}{3}=\frac{-a}{3} \Rightarrow \frac{14}{3}=\frac{-a}{3} \Rightarrow a=-14$$

برای به‌دست آوردن مقدار b نیز می‌توانیم از حاصل‌ضرب ریشه‌ها کمک بگیریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow 2\times\frac{8}{3}=\frac{b}{3} \Rightarrow b=16$$

۵۷۷. گزینه ۱

$$x=5-x^2 \Rightarrow x^2+x-5=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=S=-1\\ x_1x_2=P=-5\end{cases}$$

$$x=5-x^2 \Rightarrow x^2+x=5 \Rightarrow x(x+1)=5 \Rightarrow x+1=\frac{5}{x}$$

$$\Rightarrow (x+1)^3=\frac{125}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^3}=\frac{x^3}{125}$$

پس اگر ریشه‌های معادله‌ی خواسته‌شده را $X=\frac{1}{(x+1)^3}$ و ریشه‌های معادله‌ی داده‌شده را x بنامیم، داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌های معادله‌ی جدید}=S'=X_1+X_2=\frac{x_1^3}{125}+\frac{x_2^3}{125}$$

$$=\frac{x_1^3+x_2^3}{125}=\frac{S^3-3PS}{125}=\frac{(-1)^3-3(-5)(-1)}{125}=\frac{-16}{125}$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید}=P'=X_1\cdot X_2=\frac{x_1^3}{125}\cdot\frac{x_2^3}{125}$$

$$=\frac{P^3}{125\times125}=\frac{(-5)^3}{125\times125}=\frac{-1}{125} \xrightarrow{\text{معادله‌ی جدید}} X^2-S'X+P'=0$$

$$\Rightarrow X^2+\frac{16}{125}X-\frac{1}{125}=0 \Rightarrow 125X^2+16X=1$$

۵۷۸. گزینه ۳ با توجه به داده‌های سؤال، مستطیل زیر را رسم می‌کنیم:

$$S_{\text{مستطیل}}=(4m+3)\times m=45 \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 4m^2+3m-45=0$$

$$\xrightarrow{\text{از روش } \Delta \text{ حل‌کن}} \Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(4)(-45)$$

$$=729>0 \Rightarrow \text{دو ریشه داریم.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{729}}{8}=\frac{-3+27}{8} \\ \quad =\frac{24}{8}=3=\text{عرض}, \ 4a+3=4(3)+3=15=\text{طول} \\ \text{یا} \\ m=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{729}}{8}=\frac{-3-27}{8} \\ \quad =\frac{-30}{8}<0 \ \times \end{cases}$$

بنابراین: $\sqrt{3^2+15^2}=\sqrt{234}=\text{قطر}$

۵۷۹. گزینه ۴ همان‌طور که گفتیم در یک لیگ با n تیم، که هر تیم با دیگر تیم‌های لیگ فقط یک بازی انجام می‌دهد، تعداد کل بازی‌های انجام‌شده از رابطه‌ی $N=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{n(n-1)}{2}$ به‌دست می‌آید.

در اینجا داریم:

$$\frac{n(n-1)}{2}=105 \Rightarrow n(n-1)=2\times105 \Rightarrow n^2-n-210=0$$

$$\Rightarrow (n-15)(n+14)=0 \Rightarrow n=15$$

۵۸۰. گزینه ۱ با توجه به شکل، طول قاب مستطیل‌شکل برابر $2x+15$ و عرض آن $2x+10$ است؛ داریم: $(2x+15)(2x+10)=300$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}} (2x)^2+(15+10)(2x)+15\times10=300$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 4x^2+50x-150=0 \xrightarrow{\div 2} \underset{(a=2,b=25,c=-75)}{2x^2+25x-75=0}$$

$$\xrightarrow{\text{از } \Delta \text{ برو}} \Delta=(25)^2-4(2)(-75)=625+600=1225$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{1225}=35 \Rightarrow x=\frac{-25\pm35}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \ \checkmark \\ x=\frac{-60}{4}<0 \ \times \end{cases} \Rightarrow \text{ابعاد قاب}=(2x+10)\times(2x+15)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{5}{2}} (2\times\frac{5}{2}+10)\times(2\times\frac{5}{2}+15)=15\times20$$