

دوازدهم

کلاس کنکور

# ریاضی

رشته علوم تجربی

نویسندگان: عباس نیکنام، کامیار علیون

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, (P(B) \neq 0)$$

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

سرشناسه : نیکنام، عباس، ۱۳۵۴ -  
 عنوان و نام پدیدآور : ریاضی ۳ دوازدهم رشته علوم تجربی / نویسندگان عباس نیکنام، کامیار علیون.  
 مشخصات نشر : تهران: کتب آموزشی پیشرو، ۱۴۰۲.  
 مشخصات ظاهری : ۴۰۰ص.؛ نمودار؛ ۲۲×۲۹ س.م.  
 شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۴۲۱-۳-۶  
 وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر  
 شناسه افزوده : علیون، کامیار، ۱۳۶۹-  
 شماره کتابشناسی ملی : ۹۲۰۴۹۵۲  
 اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا



نام کتاب : ریاضی (۳) - پایه دوازدهم (رشته علوم تجربی)  
 ناشر : کتب آموزشی پیشرو (کاپ)  
 عنوان پروژه : جزوه کلاس کنکور  
 تألیف : عباس نیکنام، کامیار علیون  
 کارشناس علمی : مهرداد آرمند  
 مدیر تألیف : احمد مصلاهی  
 ناظر فنی : سیما رائفی نیا  
 حروف چینی : جواد جعفریان  
 ویراستار فنی : مریم مجاور  
 ایده طرح جلد : احمد مصلاهی  
 طراحی جلد : امیرحامد پازتار  
 لیتوگرافی و چاپ : گلپا گرافیک / نگار نقش  
 سال و نوبت چاپ : ۱۴۰۲ / اول  
 شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۵۵۴۲۱-۳-۶  
 شمارگان : ۱۰۰۰ نسخه  
 قیمت : ۴۰۰۰۰۰ تومان

مرکز فروش: میدان انقلاب- خیابان فخررازی- خیابان امیددظری غربی- پلاک ۸۳

تلفن: ۰۲۱-۶۶۴۹۳۱۴۹۰۷۹ - ۰۲۱-۶۶۹۶۴۷۲۳ -۵ صندوق پستی: ۱۳۱۴۵-۱۱۳۹

سایت نشر کاپ: [www.cup-book.com](http://www.cup-book.com)

آدرس سایت زیرزره بین: [www.zirezarebinpub.ir](http://www.zirezarebinpub.ir)

## ◀ معرفی انتشارات کاپ

انتشارات کاپ در سال ۱۳۹۸ با هدف «تولید محتوای آموزشی» اعلام موجودیت کرد. در قدم اول، اقدام به انتشار مجموعه کتاب‌های خاخر و مربع «بیولوژی کمپبل» کردیم. در قدم دوم، مجموعه کتاب‌های «کتاب درسی زیر زره بین» را با هدف درک کتاب درسی، تولید کردیم و در قدم سوم، به تولید کتاب‌هایی که نمونه‌ای از آن‌ها را در دستان خود دارید (جزوه کلاس کنگور) پرداختیم.

## ◀ با مطالعه کتاب‌های «جزوه کلاس کنگور» به چه نتایجی می‌رسید؟

در این کتاب‌ها، یک دید با سابقه و حرفه‌ای، تمام مطالب، نکات و مهارت‌هایی که برای آمادگی در کنگور به آن‌ها نیاز دارید، با ساده‌ترین، روان‌ترین و گاهی فلاخانه‌ترین روش ممکن و با استفاده از انواع ترنندها (مانند رسم شکل‌های کمکی، تصویرسازی‌های ذهنی و انواع تکنیک‌های آموزشی) به شما آموزش می‌دهد. فاصله این که مؤلف هر آن‌چه را در کلاس‌های درسی خود عنوان می‌کند، بی‌کم‌وکاست با شما در میان می‌گذارد. کتاب‌ها کاملاً در راستای کنگور هستند و از بیان مطالبی خارج از چارچوب کنگور یا پرداختن بیش از حد به مطالب کم‌اهمیت، صرف‌نظر شده است. مهم‌ترین ویژگی این کتاب‌ها سبک نوشتاری آن‌هاست که آن‌ها را هم از کتاب‌های متداول کنگور و هم از جزوه‌های مرسوم متمایز می‌کند. فوآننده با کتابی مواجه می‌شود که هم ویژگی‌های جزوه را دارد (فلاصه و زودبازده) و هم ویژگی‌های کلاس را (به‌فصوص در بخش پاسخ تست‌ها که با گفتار غیررسمی و توضیح تفصیلی یا گفتگو با دانش‌آموزان فرضی سعی شده فضای کلاس درس به داخل کتاب منتقل شود).

دانش‌آموزان به خاطر فهم بالای کتاب‌های کمک درسی و عدم جمع‌بندی مناسب، تا روز کنگور با فویبایی به نام «توهم یادگیری ناقص» دست و پنجه نرم می‌کنند! فهم مناسب این کتاب‌ها (در عین کامل بودن)، وسواسی که در طبقه‌بندی مفاهیم به کار رفته و بلافرضه استفاده از قالب‌های یادیار (مثل کدینگ) به فوآننده کمک می‌کنند تا بتوانند این مشکل را برطرف کنند.

یک زبان‌آموز برای یادگیری زبان باید حداقل‌هایی (به اصطلاح بعضی‌ها، بیسی!) داشته باشد؛ مثلاً الگوهای اصلی جمله‌بندی و لغات متداول را بلد باشد. هر دانش‌آموزی هم برای موفقیت در یک درس باید به مطالب و مفاهیم کتاب درسی مسلط باشد. کتاب‌های ما این پایه را در اختیار شما می‌گذارند. طبیعی است برای رسیدن به مراتب عالی‌تر باید در کنار این کتاب از یک منبع تستی هم استفاده کنید.

## ◀ درباره این کتاب

تالیف این کتاب از سال ۱۴۰۰ شروع و در سال ۱۴۰۲ به پایان رسیده فیلی طول کشید چون باید مطمئن می‌شدیم به هدف‌گذاری خود در تالیف کتاب رسیده‌ایم و قوی‌ترین منبع بازار را از لحاظ آموزش مهارت‌ها و تکنیک تست‌زنی آماده کردیم. از آقایان عباس نیکنام و کامیار علیون که واقعاً برای تالیف این کتاب زحمت کشیدند و دانش خود را بی‌کم‌وکاست در اختیار ما ماطبان قرار داده‌اند، بی‌نهایت سپاسگزاریم.

# مقدمه مؤلفان

سلام

خب! قبل از هر چیز بگوییم که این کتاب قرار نیست به تنهایی کمالت کنه تا کنکور برسی! قراره کمالت کنه تا بتونی بری سراغ بقیه کتابها و با قدرت ازیس تست‌هاشون بریای. یعنی ما اینجا سعی کردیم تا قدم به قدم با هم درس رو یاد بگیریم و بعدش برای اینکه مطلب جا بیفته کلی مثال خوب و نکتهوار با هم حل کنیم. با یه عالمه روش علمی و بعضی وقتا غیر علمی!

برو که بریم!!

**آنچه می بینید:**

**نکته** خب نکته، نکته ست دیگه! نیاز به توضیح نداره که.

**تکنیک** روشی که قراره بعضی وقتا میری از حل رو با یه شیوه شخص تر و منظم تر بریم.

یا اصلاً بعضی وقتا نرییم! بپوئندن تخصص ماست!

**ویژه بچه‌های خفن** وای! اولاً که به نظر ما همین که این کتاب رو انتخاب کردید، خفید! ولی راه‌هایی که با این آیکون اومده راه‌هایی هستند که شاید انرا می به دونه‌ش نباشه ولی آگه یاد بگیري قطعاً سرعت و تسلط بیشتر میشه. خلاصه آگه یاد گرفتني خوشحال باش و آگه یاد نگرفتني ناراحت نباش.

**خطر** نکاتی که از رت کردن بخت نزدیک ترند. حواست بهشون باشه.

در نهایت تشکر از آقای « احمد مصلائی » نازنین، مدیر تألیف مجموعه که ما رو دور هم جمع کردن و در طول کار از تجربیات ارزشمندشون در تألیفات فراوانشون بهره بردیم. همچنین سپاس از خانم « سیمای رانچی نیا » که زحمت تنظیم، صفحه‌آرایی و... این کتاب رو بر عهده داشتن. ضمناً از آقای « مهرداد آرمند » عزیز که مسئولیت کارشناسی علمی کتاب رو کشیدن کمال تشکر رو داریم و در آخر تشکر ویژه از جناب اعتماد مدیریت مجموعه کاپ در طول زمان تألیف. حرف آخر اینکه ما سعی مون رو کردیم یک کتاب خاص براتون بنویسیم، شما هم سعی کنید به آرزوهایتون برسید! لطفاً، حتماً!

در ضمن نقطه نظرهای خود در مورد این کتاب را برای ما ارسال کنید.

**تقدیر:**

تقدیر به فرزندانم و تمام فرزندان ایران زمین.

عباس نیلنام

تقدیر به دوست عزیزم، هم‌رم!

کامیار علیون



۶

### فصل ۱- تابع

- درس اول - توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی
- درس دوم - ترکیب توابع
- درس سوم - تابع وارون



۸۰

### فصل ۲- مثلثات

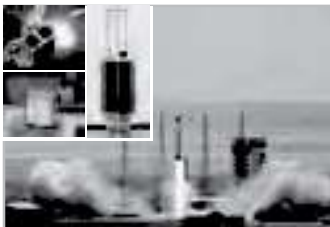
- درس اول - تناوب و تنازات
- درس دوم - معادلات مثلثاتی



۱۳۳

### فصل ۳- حد بی نهایت و حد در بی نهایت

- درس اول - حد بی نهایت
- درس دوم - حد در بی نهایت



۱۸۶

### فصل ۴- مشتق

- درس اول - آشنایی با مفهوم مشتق
- درس دوم - مشتق پذیری و پیوستگی
- درس سوم - آهنگ تغییر



۲۵۵

### فصل ۵- کاربرد مشتق

- درس اول - اکستریم‌های تابع
- درس دوم - بهینه‌سازی



۳۱۷

### فصل ۶- هندسه

- درس اول - تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی
- درس دوم - دایره

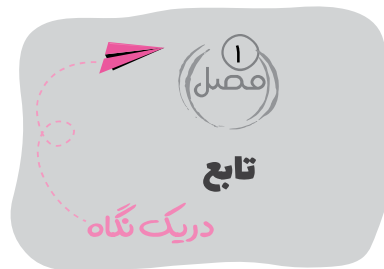
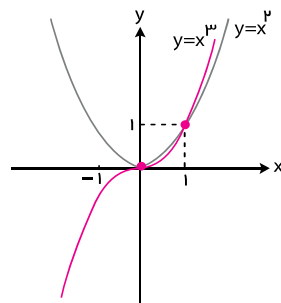


۳۸۱

### فصل ۷- احتمال

- قانون احتمال کل

۱۳ نمودار تابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  در یک دستگاه مختصات:



انتقال

۱ انواع انتقال

$f(x) + a$ : نمودار  $f(x)$ ،  $a$  واحد در راستای محور  $y$  جابجا می‌شود.

( $a > 0$ : بالا،  $a < 0$ : پایین)

$f(x + a)$ : نمودار  $f(x)$ ،  $a$  واحد در راستای محور  $x$  جابجا می‌شود.

( $a > 0$ : چپ،  $a < 0$ : راست)

$-f(x)$ : قرینه نمودار  $f(x)$  نسبت به محور  $x$ .

$f(-x)$ : قرینه نمودار  $f(x)$  نسبت به محور  $y$ .

$f(kx)$ : طول نقاط  $\frac{1}{|k|}$  برابر می‌شود. (اگر  $k < 0$  ابتدا مقدار مثبت اون

رو در نظر گرفته و بعدش نسبت به محور  $y$  قرینه می‌کنیم)

$kf(x)$ : عرض نقاط  $|k|$  برابر می‌شود. (اگر  $k < 0$  ابتدا مقدار مثبت اون

رو در نظر گرفته و بعدش نسبت به محور  $x$  قرینه می‌کنیم)

$|f(x)|$ : قسمت‌های زیر محور  $x$  نسبت به اون قرینه می‌شود.

$f(|x|)$ : قسمت‌های سمت چپ محور  $y$  به‌طور کامل حذف می‌شوند و

قسمت‌های سمت راست محور  $y$ ، نسبت به اون قرینه می‌شوند.

۲ برای تبدیل  $f(x)$  به  $kf(ax+b)+h$ :

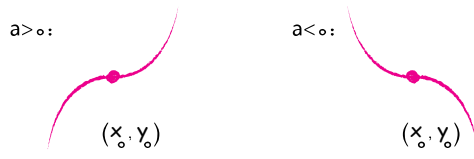
\* برای اعمال تغییرات روی  $f$  ابتدا ضریب  $k$  رو اعمال کرده و بعدش میریم سراغ  $h$ .

\* برای اعمال تغییرات روی  $f$  یا همون  $x$ ، ابتدا انتقال افقی  $b$  رو اعمال کرده و بعدش میریم سراغ  $a$ .

چند جمله‌ای‌ها

۱ عبارت  $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  به شرطی که  $a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{W}$  یک چند جمله‌ای از درجه  $n$  هست. خلاصه این‌که توان‌ها باید اعداد صحیح نامنفی باشن و ضرایب عدد حقیقی.

۲ در تابع  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  نقطه  $(x_0, y_0)$  مرکز تقارن نموداره و با توجه به علامت  $a$  به‌صورت یکی از شکل‌های زیر هست:

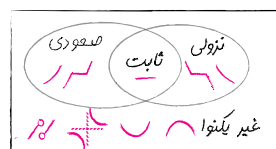


یکنوایی

۱ به جدول زیر دقت کن، تعاریف دقیق صعودی یا نزولی بودن رو می‌بینیم:

تابع	تعریف	ویژگی	تذکر	دید نموداری
صعودی	هرگاه با افزایش مقدار $x$ ، مقدار $y$ ثابت بماند یا افزایش یابد.	$x_1 > x_2$ $\Downarrow$ $f(x_1) \geq f(x_2)$	در توابع صعودی تابع می‌تواند در بازه‌ای ثابت باشد.	
اکیداً صعودی	هرگاه با افزایش مقدار $x$ ، مقدار $y$ فقط افزایش یابد.	$x_1 > x_2$ $\Downarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$	-	
نزولی	هرگاه با افزایش مقدار $x$ ، مقدار $y$ ثابت بماند یا کاهش یابد.	$x_1 > x_2$ $\Downarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2)$	در توابع نزولی تابع می‌تواند در بازه‌ای ثابت باشد.	
اکیداً نزولی	هرگاه با افزایش مقدار $x$ ، مقدار $y$ فقط کاهش یابد.	$x_1 > x_2$ $\Downarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$	-	

۲ مجموعه توابع با ویژگی‌های صعودی و نزولی بودن به چهار قسمت تقسیم می‌شوند.



۳ در توابع درجه دوم به فرم  $y = ax^2 + bx + c$ :

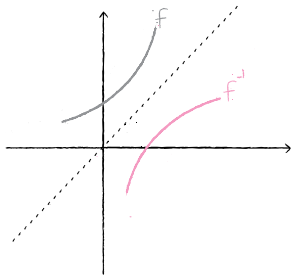
اگر  $a > 0$ : تابع بعد از رأس اکیداً صعودی و قبل از اون اکیداً نزولی است. (خوشحال)



اگر  $a < 0$ : تابع بعد از رأس اکیداً نزولی و قبل اون اکیداً صعودی است. (ناراحت)



۵ نمودار تابع  $f^{-1}$ ، قرینه نمودار تابع  $f$  نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم یا همون خط  $y = x$  هست.



۶ اگر تابع  $f$  اکیداً صعودی نباشه، تلاقی تابع  $f$  و  $f^{-1}$  فقط روی خط  $y = x$  هست، پس می شه به جای حل معادله  $f(x) = f^{-1}(x)$ ، معادله  $f(x) = x$  رو حل کرد.

\* دقت کن اگر  $f$  اکیداً صعودی نباشه، تلاقی  $f$  و  $f^{-1}$  الزاماً روی  $y = x$  نیست.

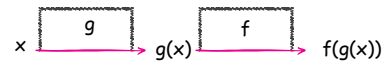
۷ در توابع هموگرافیک به فرم  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ ) زمانی  $f$  و  $f^{-1}$  برهم منطبق هستن که:  $a + d = 0$

۴ برای تشخیص یکنوایی توابع در اعمال جبری و ترکیب می شه از جدول زیر کمک گرفت:

		ن: نزولی		ص: صعودی		
$f$	$g$	$f + g$	$f - g$	$f \circ g$	$f \times g$	$f / g$
ص	ص	ص	×	ص	×	×
ص	ن	×	ص	ن	×	×
ن	ص	×	ن	ن	×	×
ن	ن	ن	×	ص	×	×

### ترکیب توابع

۱ در توابع  $f \circ g(x)$  یا همون  $f(g(x))$  تابع  $g$  به عنوان ورودی تابع  $f$  قرار می گیره.



۲ دامنه ترکیب توابع:  $D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$   
که واسه بدست آوردنش به صورت زیر عمل می کنیم:

- گام ۱: دامنه تابع درونی رو بدست میاریم.
- گام ۲: دامنه تابع بیرونی رو بدست میاریم و تابع درونی رو عوضش قرار می دیم.
- گام ۳: اشتراک گام ۱ و ۲

\* برای بدست آوردن دامنه ترکیب تابع، همیشه باید قبل از بدست آوردن ضابطه، دامنه رو بدست بیاریم.

### تابع معکوس

۱ به تابعی که به ازای هر خروجی، دقیقاً به یک ورودی متناظر باشه، تابع یک به یک می گن.

دقت کن در نمودار تابع یک به یک هر خط افقی (موازی محور xها) نمودار رو در حداکثر یک نقطه قطع می کنه.

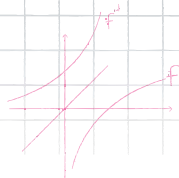
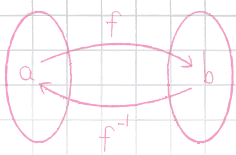
۲ هر وقت جای ورودی و خروجی تابع  $f$  رو عوض کنیم، تابع وارون یا  $f^{-1}$  بدست میاد. در واقع:  $(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$

\* شرط وارون پذیری تابع  $f$ ، یک به یک بودن اونه.  
\* دامنه تابع  $f$  همون برد تابع  $f^{-1}$  و برد تابع  $f$  همون دامنه تابع  $f^{-1}$  هست.  
 $D_f = R_{f^{-1}}, R_f = D_{f^{-1}}$

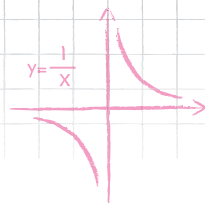
۳ برای دو تابع وارون پذیر  $f$  و  $g$  داریم:  $(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$

۴ برای تابع وارون پذیر  $f$  داریم:  
$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x, D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} \\ f^{-1} \circ f(x) = x, D_{f^{-1} \circ f} = D_f \end{cases}$$

درواقع ترکیب هر تابع با وارونش، تابع همانی رو تولید می کنه.



$f(x)$



# تابع

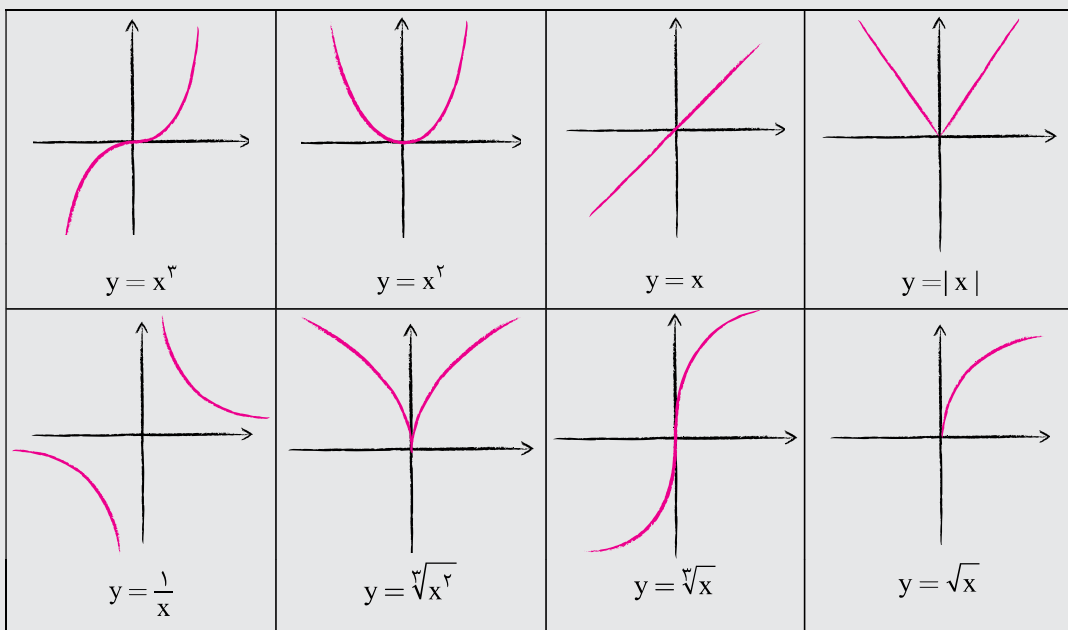
قبل از این که وارد درس بشیم این توضیح لازم است که در بعضی از فصل‌ها به ویژه فصل یک، ترتیب دروس به کم با ترتیب کتاب درسی فرق دارد، چون فکر می‌کنیم شاید با این ترتیب یادگیری بهتر بتوانی از پس تست‌ها بربیای بنابراین آزمون آزمایشی‌ای میدی که براساس صفحات کتاب درسی پیش میره، بهتره به نیم‌نگاهی به اسم درس‌ها بندازی.



ریاضی (۳)

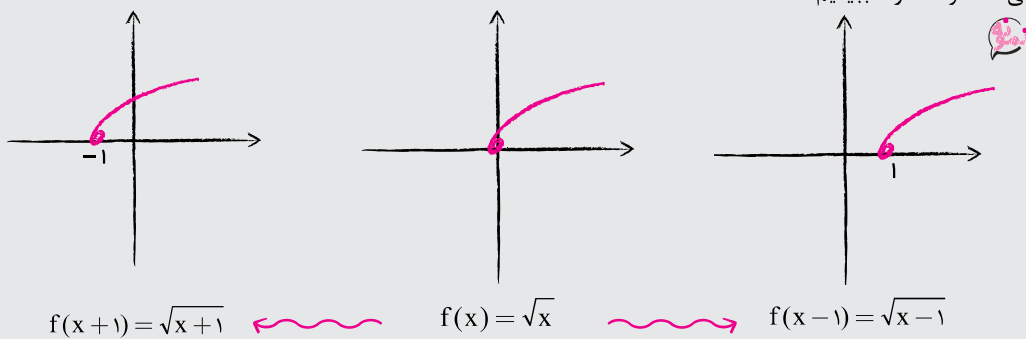
## تبدیل نمودار تابع

نمودار توابع مهم (این نمودارها رو سال‌های قبل دیدی بجز نمودار  $y = \sqrt{x}$  و  $y = \sqrt[3]{x}$  که امسال میبینی) یادآوری

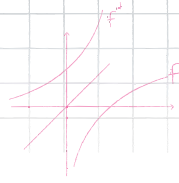
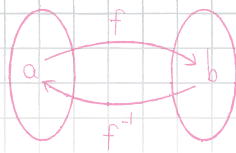
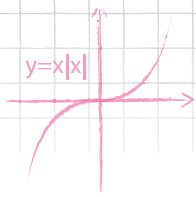


### رسم نمودارهای $y = f(x) + k$ و $y = f(x + k)$

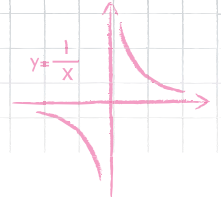
**$f(x + k)$ ، انتقال افقی:** برای رسم نمودار  $y = f(x + k)$ ، اگر  $k < 0$  باشد، نمودار  $y = f(x)$  رو  $|k|$  واحد به سمت راست می‌بریم و اگر  $k > 0$  باشد، نمودار رو  $k$  واحد به سمت چپ می‌بریم. در این حالت برد، تغییر نمی‌کنه، ولی دامنه با  $-k$  جمع می‌شه. دو تا نمونه ببینیم:



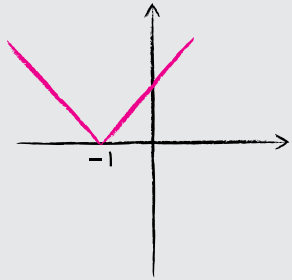




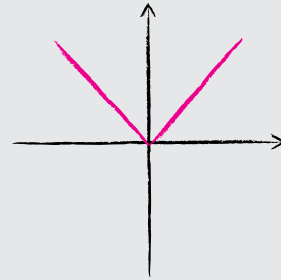
$f(x)$



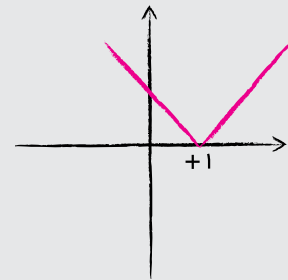
فصل ۱: تابع



$f(x+1) = |x+1|$

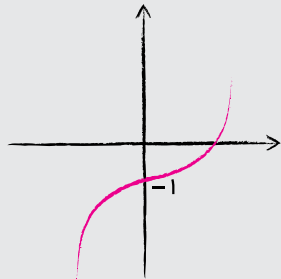


$f(x) = |x|$

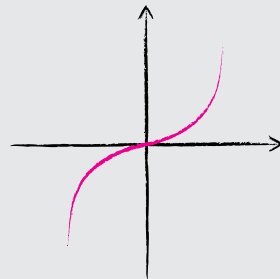


$f(x-1) = |x-1|$

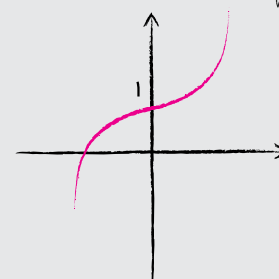
**$f(x) + k$ , انتقال عمودی:** برای رسم  $y = f(x) + k$  اگر  $k > 0$  باشد، نمودار  $y = f(x)$  رو  $k$  واحد به بالا می‌بریم و اگر  $k < 0$  باشد، نمودار رو  $|k|$  واحد به پایین می‌بریم. دقت کنید در این حالت، دامنه تغییر نمی‌کند، ولی برد با عدد  $k$  جمع می‌شه. دوتا نمونه ببینیم:



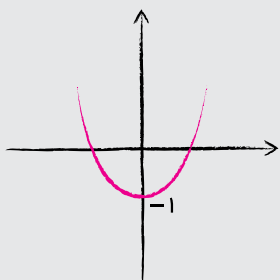
$y = f(x) - 1 = x^3 - 1$



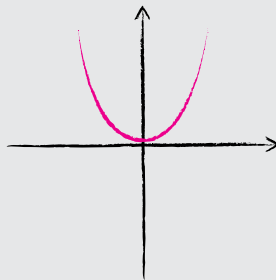
$f(x) = x^3$



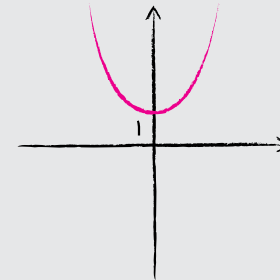
$y = f(x) + 1 = x^3 + 1$



$y = f(x) - 1 = x^2 - 1$

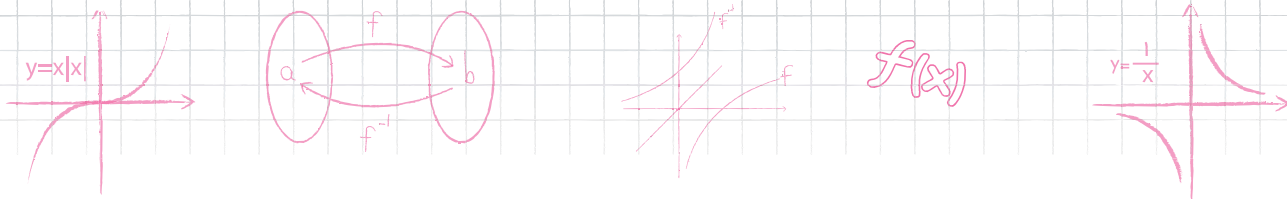


$f(x) = x^2$



$y = f(x) + 1 = x^2 + 1$

**راستی یارته ریگه!** اگر  $f(x)$  به  $f(-x)$  تبدیل می‌شد، نمودار نسبت به محور  $y$ ، قرینه و اگر  $f(x)$  به  $-f(x)$  تبدیل می‌شد، نمودار نسبت به محور  $x$ ، قرینه می‌شد.



**ریاضی (۳)**

**مثال** نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 4x - x^2$  را در امتداد محور  $x$  ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم، فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل

با نمودار تابع  $f$ ، از مبدا مختصات کدام است؟ (سراسری، ۱۳۰۱)

- (۱)      (۲)      (۳)  $2\sqrt{5}$       (۴)  $\sqrt{10}$

وقتی می‌گه ۲ واحد در جهت منفی محور  $x$  یعنی به جای  $x$  در پراگتت عبارت  $x+2$  رو قرار میدیم.

$$\Rightarrow y = 4(x+2) - (x+2)^2 \Rightarrow y = 4x + 8 - (x^2 + 4x + 4) \Rightarrow y = -x^2 + 4$$

حالا تلاقی این دو منحنی رو با برابر قرار دادن دو ضابطه به دست میاریم.

حالا  $x=1$  رو در یکی از ضابطه‌ها قرار میدیم تا  $y$  رو به دست بیاریم.

$$y = 4x - x^2 = 4(1) - (1)^2 = 3 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی } (1, 3)$$

بنابراین فاصله از مبدأ مختصات یا همون نقطه  $(0,0)$  برابر است با:

$$\sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

**مثال** نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را ۳ واحد به طرف  $x$  های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در

کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ (سراسری، ۹۸)

- (۱)  $(3, 4)$       (۲)  $(2, 5)$       (۳)  $(3, 5)$       (۴)  $(2, 6)$

خب بلاهایی که خواسته سر تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  در میاریم:

$$\Rightarrow y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5$$

۳ واحد به طرف  $x$  های مثبت یعنی به جای  $x$  تو یه پراگتت بذار  $x-3$ .

$$y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2$$

۲ واحد به طرف  $y$  های منفی یعنی ۲ واحد از کل تابع کم کن.

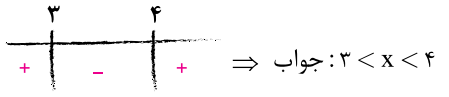
$$y = -(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 5 - 2 = -x^2 + 8x - 12$$

پس تابع جدید برابره با:

حالا واسه اینکه نمودار تابع جدید بالای نیمساز ربع اول یا همون  $y = x$  باشه، کافیه نامعادله  $-x^2 + 8x - 12 > x$  رو حل کنیم:

$$-x^2 + 8x - 12 - x > 0 \rightarrow -x^2 + 7x - 12 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 7x + 12 < 0 \rightarrow (x-3)(x-4) < 0$$

جهت نامساوی برمی‌گردد



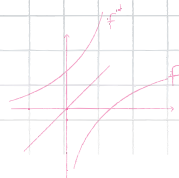
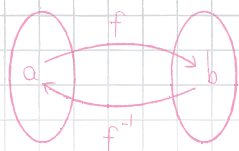
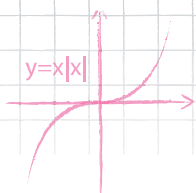
❖ فب! حالا بریم سراغ بحث‌های مربوط به امسال

● رسم نمودارهای  $y = f(kx)$  و  $y = kf(x)$

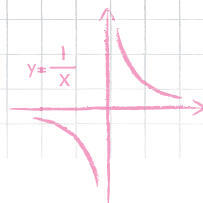
**$f(kx)$ ، انقباض یا انبساط افقی:**

حالت اول،  $|k| > 1$ : برای رسم  $y = f(kx)$  اگه  $k > 1$  باشه، نمودار رو در جهت محور  $x$  ها  $\frac{1}{k}$  برابر می‌کنیم و اگه  $k < -1$  باشه، باید هم

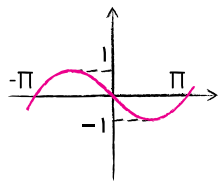
نمودار رو در جهت محور  $x$  ها  $\frac{1}{|k|}$  برابر کنیم، هم نسبت به محور  $y$  ها قرینه کنیم (فرقی نداره اول کدوم کار رو انجام بدیم).



$f(x)$

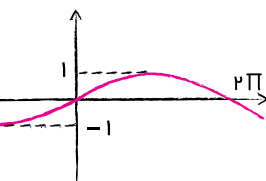


به این کار می‌گن انقباض در جهت محور  $x$  ها.



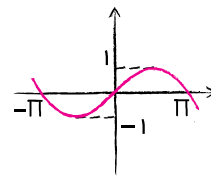
$$y = f(-2x) = \sin(-2x)$$

$$k = -2$$



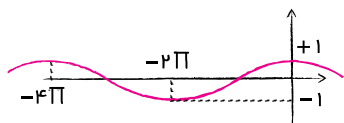
$$f(x) = \sin x$$

$$k = 2$$



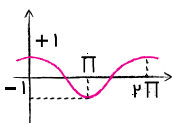
$$y = f(2x) = \sin 2x$$

حالت دوم،  $|k| < 1$ : برای رسم نمودار  $y = f(kx)$  اگر  $0 < k < 1$  باشد نمودار  $y = f(x)$  رو در جهت محور  $x$  ها  $\frac{1}{k}$  برابر کنیم و اگر  $-1 < k < 0$  باشد، باید هم نمودار رو در جهت محور  $x$  ها  $\frac{1}{|k|}$  برابر کنیم، هم نسبت به محور  $y$  ها قرینه کنیم (بازم می‌گن تقدم و تأخر این دو عمل مهم نیست). به این کار انبساط در جهت محور  $x$  ها می‌گن. به نمونه ببینیم:



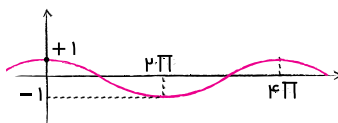
$$y = \cos\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$k = -\frac{1}{2}$$



$$y = \cos x$$

$$k = \frac{1}{2}$$

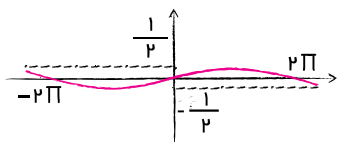


$$y = f\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

دقت کنید در دو حالت اخیر برد تغییر نمی‌کنه، ولی دامنه  $\frac{1}{k}$  برابر می‌شه.

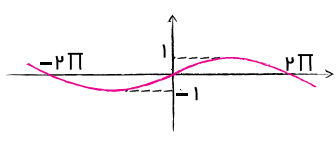
**$kf(x)$ . انبساط یا انقباض عمودی:**

حالت اول،  $|k| < 1$ : برای رسم نمودار  $y = kf(x)$ ، اگر  $0 < k < 1$  نمودار در جهت محور  $y$  ها  $k$  برابر میشه و اگر  $-1 < k < 0$  نمودار هم در راستای محور  $y$  ها  $|k|$  برابر می‌شه و هم نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌شه. به این کار انقباض عمودی می‌گن.



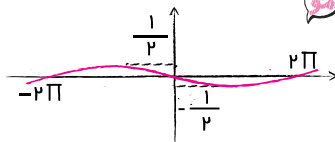
$$y = \frac{1}{2} \sin x$$

$$k = +\frac{1}{2}$$



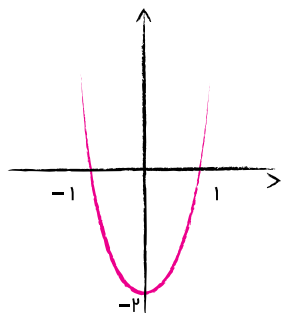
$$f(x) = \sin x$$

$$k = -\frac{1}{2}$$



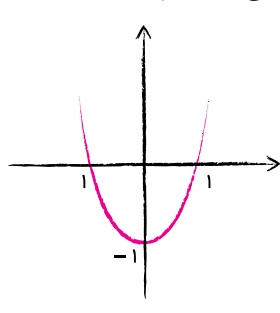
$$y = -\frac{1}{2} \sin x$$

حالت دوم،  $|k| > 1$ : در این حالت اگر  $k > 1$  نمودار در راستای محور  $y$  ها  $k$  برابر میشه و اگر  $k < -1$  باشد نمودار هم در راستای محور  $y$  ها  $|k|$  برابر می‌شه و هم نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌شه. به این کار انبساط عمودی می‌گن.



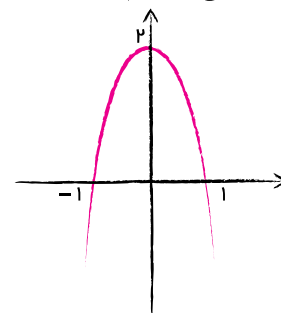
$$y = 2f(x) = 2(x^2 - 1)$$

$$k = +2$$

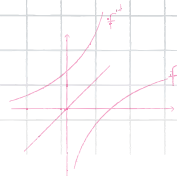
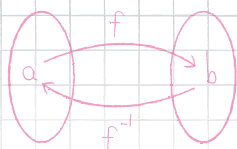


$$f(x) = x^2 - 1$$

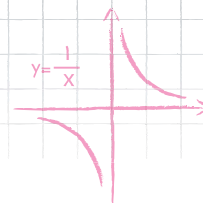
$$k = -2$$



$$y = -2f(x) = -2(x^2 - 1)$$

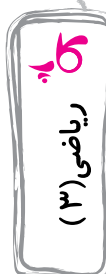


$f(x)$



واسه اینکه یه جمع‌بندی کنیم و بهتر بفهمی چی شد به جدول زیر و مثال هاش دقت کن.

$y = f(x+1)$	نمودار $y = f(x)$ رو یک واحد به چپ انتقال میدیم.
$y = f(x-2)$	نمودار $y = f(x)$ رو دو واحد به راست انتقال میدیم.
$y = f(x)+1$	نمودار $y = f(x)$ رو یک واحد به بالا انتقال میدیم.
$y = f(x)-2$	نمودار $y = f(x)$ رو دو واحد به پایین انتقال میدیم.
$y = f(2x)$	نمودار $f$ رو در جهت محور $x$ ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم. (انقباض افقی)
$y = f(\frac{1}{3}x)$	نمودار $f$ رو در جهت محور $x$ ها $3$ برابر می‌کنیم. (انبساط افقی)
$y = f(-3x)$	ابتدا نمودار رو نسبت به محور $y$ قرینه می‌کنیم بعد در جهت محور $x$ ، $\frac{1}{3}$ برابر می‌کنیم. (انقباض افقی)
$y = 2f(x)$	نمودار $f$ رو در جهت محور $y$ ها دو برابر می‌کنیم. (انبساط عمودی)
$y = -\frac{1}{5}f(x)$	اول نمودار رو نسبت به محور $x$ قرینه می‌کنیم، بعد در جهت محور $y$ ها $\frac{1}{5}$ برابر می‌کنیم. (انقباض عمودی)



تمرین

(قلمپی، ۹۹)

نمودار کدام تابع از انقباض عمودی نمودار تابع  $f$  به دست می‌آید؟

$y = \frac{1}{3}f(x)$  (۴)     
  $y = 2f(x)$  (۳)     
  $y = f(3x)$  (۲)     
  $y = f(\frac{x}{3})$  (۱)

۱  ۲  ۳  ۴

**نکته** اگر بخواهیم نمودار  $y = kf(ax+b)+h$  رو از روی نمودار  $y = f(x)$  رسم کنیم، فرقی نداره اول به اعمال روی  $f$  بپردازیم بعد به اعمال روی  $x$  (یا همون ورودی  $f$ ) یا برعکس.

**خطر** دقت کن: ۱ برای اعمال روی  $f$  ابتدا ضریب  $f$  (در اینجا یعنی  $k$ ) و بعد از اون عددی که جمع یا تفریق میشه (در اینجا یعنی  $h$ ) رو در نظر می‌گیریم.

۲ برای اعمال روی ورودی  $f$  یا همون  $x$ ، اول عدد ثابتی که جمع یا تفریق میشه (در اینجا یعنی  $b$ ) و بعد از اون ضریب  $x$  (در اینجا یعنی  $a$ ) رو لحاظ می‌کنیم. در مثال زیر در مورد  $a, k, b, h$  بیشتر توضیح میدیم:

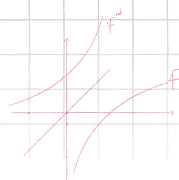
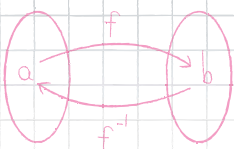
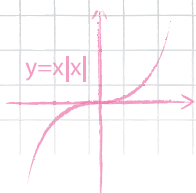
مثلاً برای رسیدن به تابع  $y = 2f(\frac{x-2}{5})+1$  از روی تابع  $y = f(x)$  با توجه به این که  $2f(\frac{x-2}{5})+1 = 2f(\frac{x-2}{5})+1$  است،

اول  $x$  رو به  $x - \frac{2}{5}$  تبدیل می‌کنیم و بعد از اون  $x$  رو به  $\frac{1}{5}x$ .

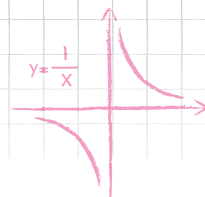
$$f(x) \xrightarrow{(b)} f(x - \frac{2}{5}) \xrightarrow{(a)} f(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5})$$

بعدش  $f$  رو در  $2$  ضرب می‌کنیم و در آخر به علاوه  $1$  می‌کنیم.

$$f(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}) \xrightarrow{(k)} 2f(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}) \xrightarrow{(h)} 2f(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}) + 1$$



$f(x)$



مراحل رسیدن از  $f(x)$  به  $3f(2x-1)+2$  را نشان داده و مشخص کنید در هر مرحله چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

خب اول بریم سراغ  $f$ :

$$f \xrightarrow{\text{عرض نقاط ۳ برابر می‌شه } \times 3} 3f \xrightarrow{\text{به عرض نقاط ۲ واحد اضافه می‌شه.} +2} 3f+2$$

دیدید؟! طبق چیزی که گفتیم اول ضرب  $f$  (یعنی ۳) و بعدش عددی که جمع میشه (یعنی ۲) رو اعمال کردیم.

$$f(x) \xrightarrow{\text{طول نقاط ۱ واحد اضافه می‌شه } x \rightarrow x-1} f(x-1) \xrightarrow{\text{طول نقاط ۱/۲ برابر می‌شه } x \rightarrow 2x} f(2x-1)$$

حالا بریم سراغ تغییرات  $x$ :

اگه دقت کرده باشی طبق چیزی که گفتیم این جا اول عددی که منها میشه (یعنی -۱) و بعدش ضرب  $x$  (یعنی ۲) رو اعمال کردیم. راستی! همیشه که اول از ورودی  $f$  شروع کنیم و بعدش بریم سراغ فور  $f$ . یعنی می‌تونستیم اول یک واحد به سمت راست انتقال بدیم و در جهت محور  $x$  ها  $\frac{1}{2}$  برابر کنیم و بعد در جهت محور  $y$ ، ۳ برابر کنیم و در آخر ۲ واحد به بالا انتقال بدیم.

مثال

اگر  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  باشد، فاصله رأس‌های دو سهمی  $f(x)$  و  $g(x) = \frac{1}{4}f(\frac{x}{4})$  چقدر است؟ (کج، ۹۹)

$$\frac{\sqrt{17}}{4} \quad (۴) \quad \frac{\sqrt{17}}{6} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{17}}{2} \quad (۲) \quad \frac{\sqrt{17}}{3} \quad (۱)$$

اول رأس  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  رو به دست میاریم:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2 \rightarrow y_s = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow \text{راس: } (2, -1)$$

حالا می‌دونیم برای تبدیل  $f(x)$  به  $\frac{1}{4}f(\frac{x}{4})$  باید مراحل زیر رو طی کنیم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{عرض نقاط ۱/۴ برابر } \times \frac{1}{4}} \frac{1}{4}f(x) \xrightarrow{\text{طول نقاط دو برابر } x \rightarrow \frac{x}{4}} \frac{1}{4}f(\frac{x}{4})$$

بنابراین در نمودار  $g(x) = \frac{1}{4}f(\frac{x}{4})$  طول نقطه  $(2, -1)$  دو برابر و عرض اون  $\frac{1}{4}$  برابر شده که حاصل نقطه  $(4, -\frac{1}{4})$  می‌شه. حالا فاصله دو نقطه رو به دست میاریم:

$$\sqrt{(4-2)^2 + (-1 - (-\frac{1}{4}))^2} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

مثال

علی برای رسم نمودار تابع  $y = f(\frac{1}{4}x - 4)$ ، به اشتباه ابتدا طول تمام نقاط روی نمودار تابع  $f$  را ۲ برابر می‌کند و سپس آن را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهد. او با کدام انتقال بر روی نمودار حاصل می‌تواند اشتباه خود را اصلاح کند؟ (قلمی، ۹۹)

(۱) ۲ واحد به سمت راست

(۲) ۴ واحد به سمت چپ

فهمیدی علی چی کار کرده؟! همون چیزی رو که در خطر توضیح دادیم، سوتی داده! ترتیب رو رعایت نکرده. اول  $x$  رو

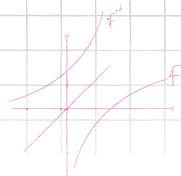
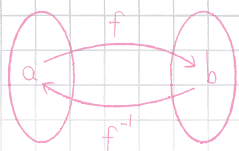
به  $\frac{1}{4}x$  تبدیل کرده و بعدش ۴ واحد رفته سمت راست. یعنی:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{4}x} f(\frac{1}{4}x) \xrightarrow{x \rightarrow x-4} f(\frac{1}{4}(x-4)) = f(\frac{1}{4}x - 2)$$

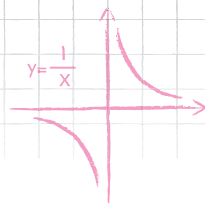
خب حالا به کمک کدوم گزینه می‌تونیم  $f(\frac{1}{4}x - 2)$  رو به  $f(\frac{1}{4}x - 4)$  تبدیل کنیم؟

$$f(\frac{1}{4}x - 2) \xrightarrow{x \rightarrow x-2} f(\frac{1}{4}(x-2) - 2) = f(\frac{1}{4}x - 3) \quad \text{گزینه (۱) ۲ واحد راست:}$$

$$f(\frac{1}{4}x - 2) \xrightarrow{x \rightarrow x-4} f(\frac{1}{4}(x-4) - 2) = f(\frac{1}{4}x - 4) \quad \text{گزینه (۲) ۴ واحد راست:}$$



$f(x)$



$$f\left(\frac{1}{4}x - 2\right) \xrightarrow{x \rightarrow x-8} f\left(\frac{1}{4}(x-8) - 2\right) = f\left(\frac{1}{4}x - 6\right)$$

گزینه ۳ (۸ واحد است):

$$f\left(\frac{1}{4}x - 2\right) \xrightarrow{x \rightarrow x+2} f\left(\frac{1}{4}(x+2) - 2\right) = f\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$$

گزینه ۴ (۲ واحد چپ):

وقتی دیدیم گزینه ۲ جوابه دیگه بررسی بقیه لازم نبود ولی برای تمرین بقیه رو هم بررسی کردیم.



آقا کلاً راه راحت‌تر واسه حل این جور مسأله‌ها نداریم؟! نمی‌شه میون بُر زد؟ یعنی منظورم اینه راهی هست که دونه دونه مسیر انتقال نریم؟

چرا نمی‌شه! خوب حواستو جمع کن:

**تکنیک** اولش به همین سادگی شروع می‌شه. اگه  $f(\text{🍎}) = \text{🍌}$  و  $f(\text{🍌}) = \text{🍎}$  باشه، اونوقت  $\text{🍌} = \text{🍌}$  و  $\text{🍎} = \text{🍎}$  یعنی: اولاً، داخل پراتزها باید یکسان باشه و ثانیاً، جواب  $f$  ها هم باید یکی بشه.

آقا ما هیچی نفهمیدیم!!

بابا صبر کن یه کم!! من که هنوز چیزی نگفتم! تو مثال معنی همه حرفای بالا رو می‌فهمی.

مثلاً اگر نقطه  $A(2, 4)$  روی  $g(x) = 3f(2x-1) + 1$  باشه، متناظر  $A$  روی تابع  $h(x) = -2f\left(\frac{3-x}{2}\right) + 3$  چه نقطه‌ای است؟

یعنی بعد از انتقال و همه بلاهایی که سر  $g$  و  $x$  میاد تا به  $h$  تبدیل شه، مختصات  $A$  به چی تبدیل می‌شه؟

به زبان ساده  $x_A = 2$  و  $y_A = 4$ . پس اون‌ها را سرچاشون بذار، یعنی:

$$y = 3f(2x-1) + 1 \rightarrow 4 = 3f(2 \times 2 - 1) + 1 \Rightarrow 1 = f(3)$$

خب پس تا این جای کار رسیدیم به اینکه  $f(3) = 1$  هست.

حالا طبق چیزی که گفتیم داخل پراتز رابطه جدید باید برابر همون عدد به دست اومده داخل پراتز یعنی ۳ بشه و جواب  $f$  هم باید

$$y = -2f\left(\frac{3-x}{2}\right) = 1 + 3$$

۱ بشه (یعنی به جای  $f$  عدد یک رو قرار بدیم): بین چه جوری:

$$\text{پراتز جدید} = \frac{3-x}{2} = 3 \Rightarrow x = -3$$

$$y = -2 \times 1 + 3 \Rightarrow y = 1$$

و به جای  $f$  یک می‌ذاریم تا  $y$  جدید رو به دست بیاریم.

یعنی مختصات  $A'$  (تغییر یافته  $A$ ),  $(-3, 1)$  می‌شه.

حالا دیگه هر انتقال یا انبساط و انقباض رو با همین روش بررسی کن.

**مثال**

اگر نقطه  $(a, b)$  روی نمودار تابع  $y = 1 + f(1+x)$  قرار داشته باشه، کدام یک از نقاط زیر حتماً روی نمودار تابع  $y = 1 - f(1-x)$  قرار دارد؟

(گزینه ۹۰، ۹۷)

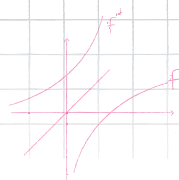
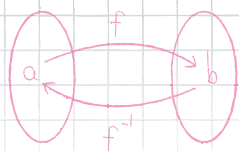
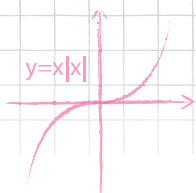
(۱)  $(-a, -b)$       (۲)  $(2-a, -b)$       (۳)  $(2-a, 2-b)$       (۴)  $(-a, 2-b)$

۱    ۲    ۳    ۴

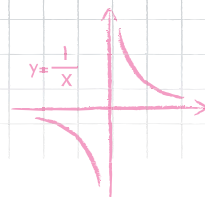
اگر  $(a, b)$  مختصات نقطه  $A$  باشه،  $x_A = a$  و  $y_A = b$  است. پس کافی به جای  $x$ ،  $a$  و به جای  $y$ ،  $b$  رو در رابطه  $y = 1 + f(1+x)$

$$y = 1 + f(1+x) \rightarrow b = 1 + f(a+1) \Rightarrow f(a+1) = b-1$$

قرار بدیم:



$f(x)$



حالا کافیه در رابطه جدید یعنی  $y = 1 - f(1-x)$  داخل پرانتز رو برابر با  $a+1$  و مقدار  $f$  رو  $b-1$  بذاریم:

$$y = 1 - \underbrace{f(1-x)}_{a+1} = b-1$$

$$1-x = a+1 \Rightarrow x = -a \quad \text{و} \quad y = 1 - (b-1) = 2-b$$

بنابراین:

پس نقطه انتقال یافته به مختصات  $(-a, 2-b)$  هست.

تمرین

نقطه  $A(a, b)$  روی تابع  $y = 2f(x-1) + 1$  با نقطه  $B(1, 7)$  روی تابع  $y = -f(2x) + 3$  متناظر است. حاصل  $a+b$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴      ۵) ۵

با انجام کارهای مثال‌های قبل، نقطه  $A(a, b)$  به نقطه  $B(\frac{a-1}{2}, \frac{-b+7}{2})$  یا همون  $(1, 7)$  تبدیل میشه.

مثال

در تابع  $y = 2f(3x+1)$  دامنه  $[-4, 5]$  و برد  $[0, 4]$  می‌باشد. دامنه و برد تابع  $y = f(2x-1) - 1$  را بیابید.

اول دامنه:

مگه میشه با تکنیک گفته شده، مسائل دامنه رو هم حل کرد؟

چرا نشه، فقط باید حواستو جمع کنی.

اول جواب من رو بده. اینجا وقتی میگه دامنه  $y = 2f(3x+1)$ ،  $[-4, 5]$  هست. منظورش چیه؟! بله! یعنی محدوده تغییرات  $x$  رو داده، نه محدوده تغییرات  $3x+1$ . پس تو باید طبق قرارمون اول داخل پرانتز رو بسازی:

$$-4 < x \leq 5 \rightarrow -12 < 3x \leq 15 \rightarrow -11 < 3x+1 \leq 16$$

حالا که محدوده عبارت داخل پرانتز رابطه قدیم رو به دست آوردیم، داخل پرانتز تابع جدید یعنی  $y = f(2x-1) - 1$  رو در همون بازه قرار میدیم تا محدوده  $x$  یا همون دامنه جدید رو حساب کنیم:

$$-11 < 2x-1 \leq 16 \Rightarrow -10 < 2x \leq 17 \rightarrow -5 < x \leq \frac{17}{2}$$

حالا برد:

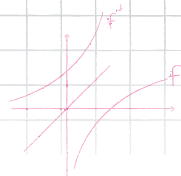
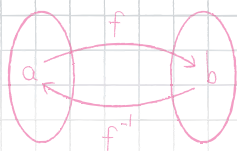
اول محدوده تغییرات  $f$  رو به کمک برد رابطه قدیم به دست میاریم:

$$0 \leq y < 4 \rightarrow 0 \leq 2f < 4 \rightarrow 0 \leq f < 2$$

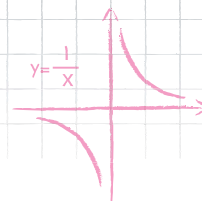
(حواست باشه کاری به داخل پرانتز نداریم، اون واسه دامنه مهمه)

حالا به کمک محدوده به دست اومده واسه  $f$  میریم سراغ تابع جدید:

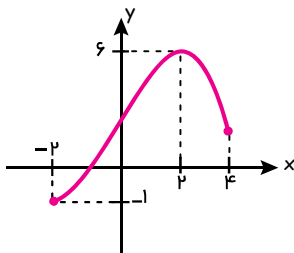
$$0 \leq f < 2 \rightarrow -1 \leq f-1 < 1 \Rightarrow \text{برد جدید: } [-1, 1)$$



$f(x)$



**مثال**



اگر تمام نمودار تابع  $y = \frac{1}{3}f(4x+2) - 5$  به صورت روبه رو باشد، دامنه تابع  $y = 1 - f(\frac{2x}{3} + 1)$  (سنهش، ۹۹) شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳۶  
(۲) ۳۵  
(۳) ۲۶  
(۴) ۲۵

(۱)  (۲)  (۳)  (۴)

با توجه به شکل، دامنه یا همون حدود  $x$  در رابطه  $y = \frac{1}{3}f(4x+2) - 5$ ،  $[-2, 4]$  هست؛ بنابراین ابتدا حدود داخل پرانتز رو می‌سازیم:

$$-2 \leq x \leq 4 \rightarrow -8 \leq 4x \leq 16 \rightarrow -6 \leq 4x+2 \leq 18$$

پرانتز رابطه در محدوده  $[-6, 18]$  هست؛ بنابراین پرانتز رابطه جدید رو هم در همون محدوده قرار میدیم تا حدود  $x$  یا همون دامنه

$$-6 \leq \frac{2x}{3} + 1 \leq 18 \rightarrow -7 \leq \frac{2x}{3} \leq 17$$

$$-21 \leq 2x \leq 51 \rightarrow \frac{-21}{2} \leq x \leq \frac{51}{2} : [-10.5, 25.5]$$

$$-10, -9, \dots, 25 \Rightarrow \text{تعداد} = 25 - (-10) + 1 = 36$$

این جواری هم می‌تونیم بگی ۱۰ تا منفی، ۲۵ تا مثبت و یکی هم صفر، روی هم ۳۶ عدد.

**تمرین**

اگر دامنه تابع  $f$  بازه  $D_f = [-1, 4]$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = -3f(-\frac{x}{2} + 2)$  شامل چند عدد طبیعی است؟ (قلمی، ۹۹)

- (۱) ۱۱  
(۲) ۱۰  
(۳) ۵  
(۴) ۶

راهنمایی: منظور از تابع  $f$ ، همون  $f(x)$  هست که درون پرانتزش داره تو بازه  $[-1, 4]$  تغییر می‌کنه، پس باید پرانتز

جدید هم ....

**تمرین**

اگر دامنه تابع  $y = f(x+2) + 4x - 1$  برابر  $[-2, 4]$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = f(2x+1)$  کدام است؟ (گزینه‌زور، ۱۳۰۰)

- (۱)  $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$   
(۲)  $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$   
(۳)  $[-4, 2]$   
(۴)  $[-\frac{3}{2}, 1]$

(۱)  (۲)  (۳)  (۴)

**تکنیک**

حالا یک تکنیک باحال دیگه؛ در انتقال توابع به جای اینکه کل تابع رو دنبال کنیم، می‌تونیم نقاط خاص اونو دنبال کنیم، در این صورت هر بلایی سر نقطه خاص بیاد، همون بلا بر سر کل تابع میاد.

یعنی چی؟

فرض کن تو با تمام بچه‌های کلاس به یک اردوی تفریحی بری و قرار نباشه در طول اردو اون‌ها رو ترک کنی. حالا من به جای اینکه همه شما رو دنبال کنم، فقط خودتو دنبال می‌کنم. در این صورت هر کجا تو باشی و هر کجا تو بری اون‌ها هم همراه تو خواهند بود. دقیقاً خودتو مثل

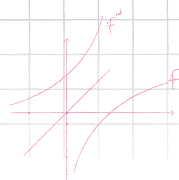
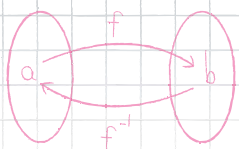
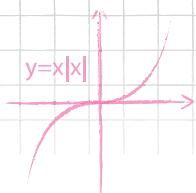
یک نقطه خاص و بقیه بچه‌ها رو تمام نقاط تابع در نظر بگیریم. افتاد!

از این تکنیک جاهای دیگم میتونی استفاده کنی مثلاً تو بحث تابع معکوس.

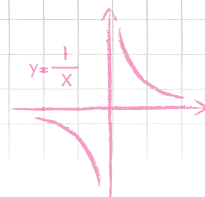
اونجا به جای این که کل تابع رو معکوس کنی میتونی فقط یک نقطه رو معکوس کنی، حالا صبر کن می‌بینی.





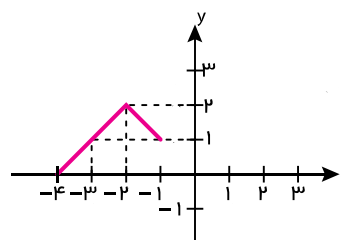
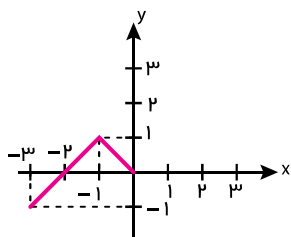
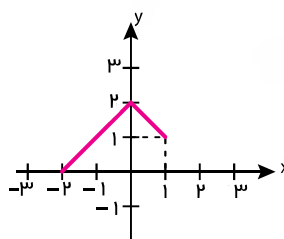
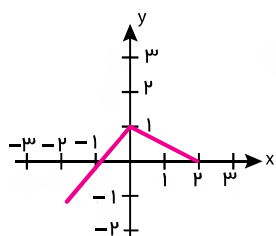
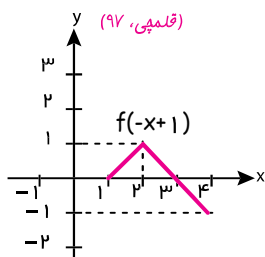


$f(x)$



مثال

اگر نمودار تابع  $y = f(-x+1)$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $y = f(x+1)+1$  کدام است؟

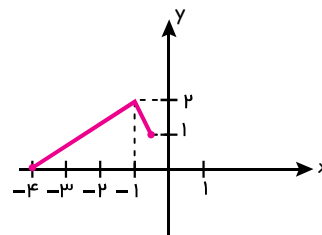
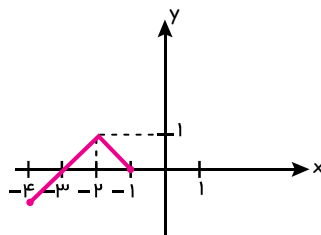
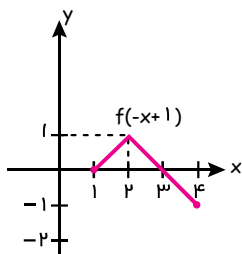


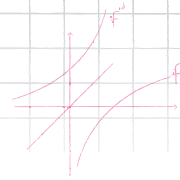
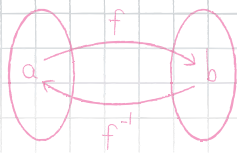
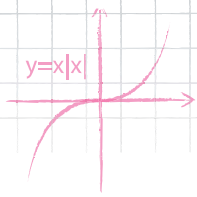
1  2  3  4

راه اول: نقطه  $(2, 1)$  از  $y = f(-x+1)$  رو در نظر بگیر. با جایگذاری  $x = 2$  و  $y = 1$  داریم:  $1 = f(-2+1) \Rightarrow 1 = f(-1)$ . حالا باید داخل پراتنز تابع جدید رو مساوی  $-1$  بذاریم و  $x$  رو به دست بیاریم و به جای  $f$  عدد  $1$  رو بذاریم و  $y$  رو به دست بیاریم:  $y = f(x+1)+1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = -1 \Rightarrow x = -2 \\ y = 1+1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$  حالا باید دنبال گزینه‌ای بگردیم که نقطه  $(-2, 2)$  روی اون باشه یعنی گزینه ۳. راستی اگه تو تا گزینه این نقطه رو داشت، نقطه رو عوض می‌کنیم. در ضمن دقت کنید  $(2, 1)$  نقطه خاصی از تابع اولیه بود (ماکزیمم بود) حالا در این تابع هم یک نقطه خاصه (بازم ماکزیممه).

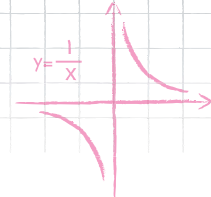
راه دوم: مسیر انتقال  $f(-x+1)$  به  $f(x+1)+1$  رو تعیین می‌کنیم:

$$f(-x+1) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور y}]{x \rightarrow -x} f(x+1) \xrightarrow[\text{واحد به سمت بالا}]{+1} f(x+1)+1$$



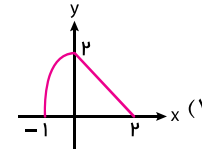
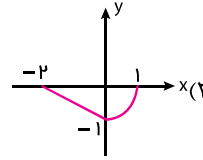
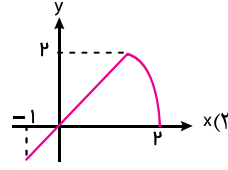
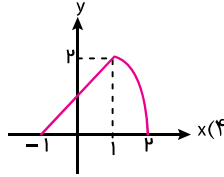


$f(x)$



مثال

اگر نمودار تابع  $f$  به صورت  $x$  باشد، نمودار تابع  $g(x) = 2f(1-x)$  کدام است؟



راهنمایی: شاید لازم بشه دو تا نقطه رو دنبال کنی...

### چند جمله‌ای

صورت کلی یک چندجمله‌ای درجه  $n$  به شکل زیر است:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

که در آن  $a_n \neq 0$  و  $a_n$  ها اعداد حقیقی و  $n$  عدد صحیح نامنفی است.

کدام یک از توابع زیر چندجمله‌ای هستند؟

ب)  $y = 3x^2 + |x| + \sin x$

الف)  $y = \sqrt{x} + 1$

د)  $y = \sqrt{2x} + 1$

ج)  $y = \frac{x^4 + x^2}{4}$

الف) با توجه به اینکه توان  $x$  در  $\sqrt{x}$  برابر با  $\frac{1}{2}$  هست، طبق تعریف عدد صحیح نامنفی نیست، بنابراین چندجمله‌ای نیست.

ب) عبارات شامل قدرمطلق و جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی چندجمله‌ای نیستند.

ج) با تفکیک تابع به صورت  $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^2$  واضحه تابع چندجمله‌ای است.

د) دقت کن ضرایب چندجمله‌ای می‌تونه اعداد حقیقی و غیر صحیح باشند، بنابراین تابع چندجمله‌ای است.

مثال

کدام یک از توابع زیر چندجمله‌ای نیست؟

۲)  $g(x) = \sqrt{2x}(x+1)^2 - x^2$

۱)  $f(x) = \sqrt{2x}(x-1)^2 - x$

۴)  $k(x) = \sqrt{\pi} - (\sqrt{2x}-1)^2$

۳)  $h(x) = \frac{4x^2 + 8x}{5} + 1$

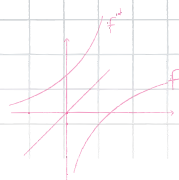
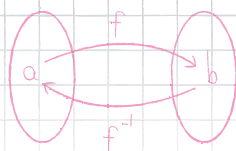
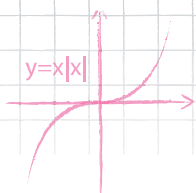
دقت کنید در گزینه ۲،  $x$  زیر رادیکال است و می‌دانیم  $\sqrt{x}$  چندجمله‌ای نیست.

کراج، ۹۹

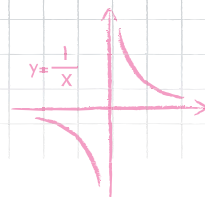
در سال‌های قبل چند نوع از این توابع رو بررسی کردیم. امسال می‌خواهیم تابع درجه ۳ به فرم  $f(x) = x^3$  و انتقال یافته‌های اونو بررسی کنیم. همون طور که ضابطه تابع درجه ۲  $f(x) = ax^2 + bx + c$  رو می‌تونستیم به صورت  $y = a(x-x_0)^2 + y_0$  نمایش بدیم که در اون  $(x_0, y_0)$  مختصات رأس سهمی بود.

$$(y_0 = f(x_0) = \frac{-\Delta}{4a}, x_0 = \frac{-b}{2a})$$





$f(x)$



تابع درجه ۳ که صورت کلی او  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  هست رو در صورتی که از روی  $y = x^3$  ساخته شده باشد، می‌تونیم به شکل

$y = a(x - x_0)^3 + y_0$  نمایش بدیم که در اون  $x_0 = \frac{-b}{3a}$  و  $y_0 = f(x_0)$  نقطهٔ مرکز تقارن تابع است. در این صورت اگه

مثبت باشد، نمودار به صورت (یه کم جلوتر می‌بینیم که صعودیه) است. و اگر  $a$  منفی باشد، نمودار به صورت است. (یه

کم جلوتر می‌بینیم که این یکی نزولیه.) بنابراین:

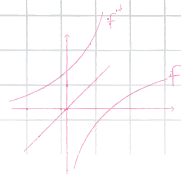
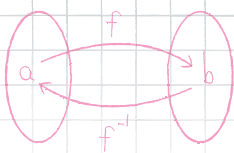
**نکته** مرکز تقارن تابع درجه سوم: در تابع  $f(x) = a(x - x_0)^3 + y_0$ ، نقطهٔ  $(x_0, y_0)$  همون مرکز تقارن نمودار است.

حالا اگه این تابع را به صورت  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  بازنویسی کنیم،  $x_0$  برابر با  $\frac{-b}{3a}$  خواهد بود.

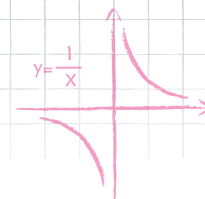
◀ در جدول زیر خلاصه‌ای از توابع درجه ۰، ۱، ۲ و ۳ رو آوردیم:

	تابع ثابت	تابع خطی	تابع درجه ۲	تابع درجه ۳
ضابطه	$y = k$	$y = ax + b$	$y = ax^2 + bx + c$ $y = a(x - x_0)^2 + y_0$	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $y = a(x - x_0)^3 + y_0$
نمودار			 $x_0 = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن عرض رأس سهمی $y_0 = f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-\Delta}{4a}$	 مرکز تقارن $(x_0, y_0)$ $x_0 = \frac{-b}{3a}$ ، $y_0 = f(\frac{-b}{3a})$

**یادآوری** برای رسم یا نوشتن ضابطهٔ تابع ثابت، داشتن یک نقطه از آن کافی است و برای رسم تابع خطی یا نوشتن ضابطهٔ تابع خطی، داشتن شیب و یک نقطه از آن یا داشتن دو نقطه از آن کافی است. همین‌طور برای رسم یا نوشتن ضابطهٔ تابع درجه ۲، داشتن سه نقطه یا داشتن مختصات رأس و یک نقطه از آن کافی است (به کتاب دهم و یازدهم یه نگاهی بنداز).



$f(x)$



ریاضی (۳)

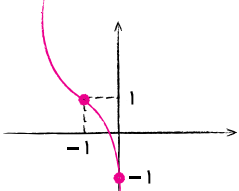
حالا در مورد این تابع هم داشتن سه نقطه یا داشتن مرکز تقارن و یک نقطه برای رسم یا نوشتن ضابطه کفایت می‌کند.

**تکنیک** برای رسم این نوع تابع درجه ۳ مرکز تقارن و یک نقطه دلخواه از تابع رو مشخص می‌کنیم و یکی از دو فرم  $y = a(x - x_0)^3 + y_0$  یا  $y = a(x - x_0)^3 + y_0$  رو با این دو نقطه مطابقت میدیم؛ البته فرم صعودیه، یعنی با زیاد شدن طول نقاط، عرض نقاط هم زیاد میشه و فرم نزولیه، یعنی با زیاد شدن طول نقاط، عرض اون‌ها کم می‌شه. دقت کن این روش برای توابع درجه ۳ به صورت  $y = a(x - x_0)^3 + y_0$  هست.

**مثال** تابع  $f(x) = -2(x+1)^3 + 1$  را رسم کنید.

خب طبق چیزی که گفتیم، مختصات مرکز تقارن که طول اون برابر با ریشه عبارت داخل پرانتز یعنی  $x = -1$  هست رو به دست میاریم:

مرکز تقارن:  $(-1, 1) \Rightarrow x = -1 \rightarrow y = 1$



حالا مثلاً به ازای یک طول دلخواه مثل  $x = 0$  مختصات یه نقطه دیگه از تابع رو به دست میاریم:

$x = 0 \rightarrow y = -1: (0, -1)$

حالا می‌خوایم نقطه  $(-1, 1)$  به عنوان مرکز تقارن رو به نقطه  $(0, -1)$  جوری وصل کنیم که یکی از شکل‌های یا تشکیل بشه، چه جوری؟ کدومش؟ بله دیگه شکلی که نزولیه امکان پذیره.

**مثال**

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = -(2-x)^3 - 1$  از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

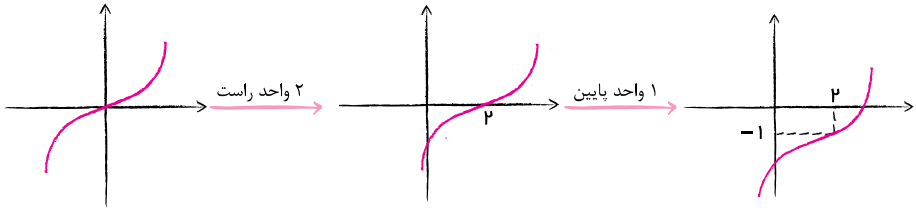
(قلمچی، ۹۸)

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

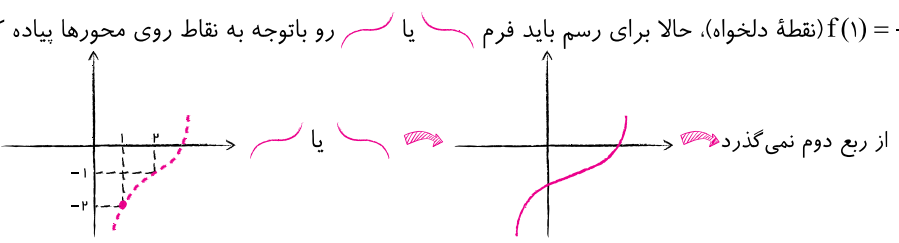
$-(2-x)^3 - 1 = (x-2)^3 - 1$

راه اول:

کافیه نمودار  $y = x^3$  رو اول ۲ واحد به راست سپس یک واحد به پایین انتقال بدیم.



راه دوم: برای رسم کافیه مرکز تقارن (ریشه داخل پرانتز  $x_0$  و  $y_0 = f(x_0)$ ) و یک نقطه دلخواه از تابع رو مشخص کنیم. مرکز تقارن  $(2, -1)$  و  $f(1) = -2$  (نقطه دلخواه)، حالا برای رسم باید فرم یا رو باتوجه به نقاط روی محورها پیاده کنیم.



(قلمچی، ۹۹)

نمودار تابع  $f(x) = x^3 + 3x - 3x^2$  از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- اول و سوم (۱) اول و چهارم (۲) دوم و چهارم (۳) دوم و سوم (۴)

راهنمایی:  $x^3 - 3x^2 + 3x = (x-1)^3 + 1$