بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّهُمَّ صَلِّ عَلی مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی (۲)

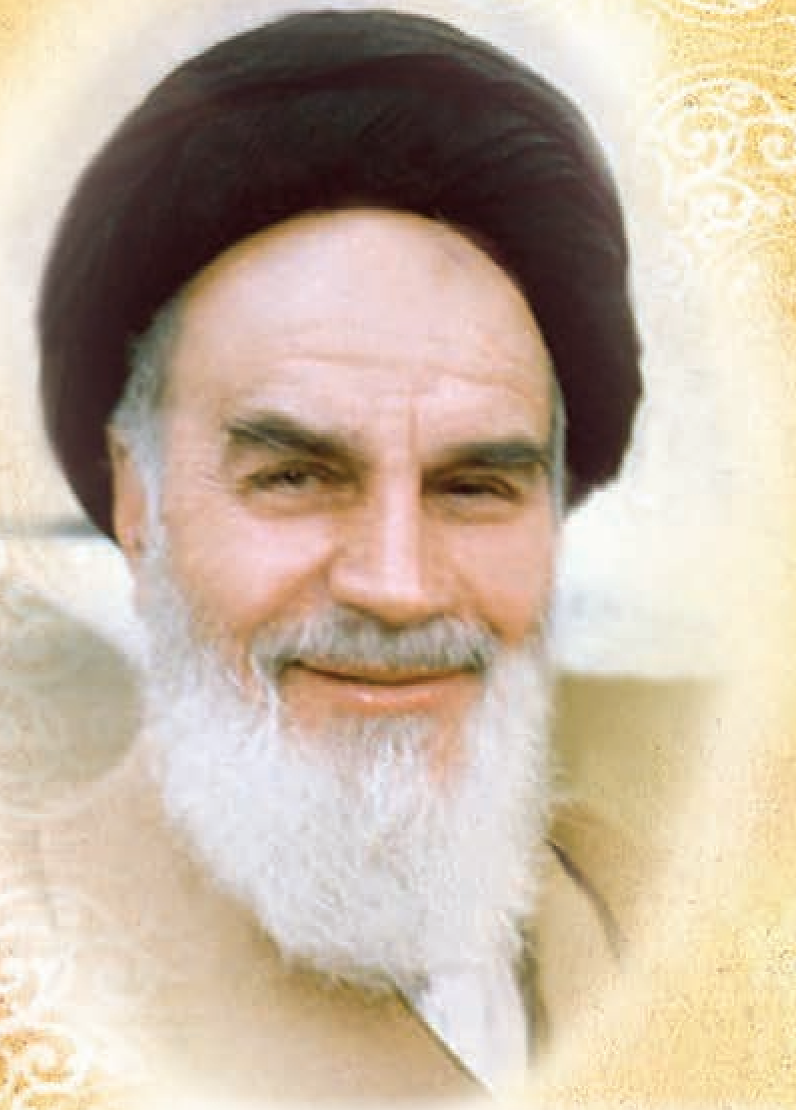
کلیهٔ رشته‌های شاخهٔ فنی و حرفه‌ای و کاردانش

پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی (۲) ـ ۲۱۱۱۴۱
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای وکاردانش
شناسه افزوده برنامه‌ریزی وتألیف: افشار بهمنی، زیبا فانی ، مالک مختاری، شهرناز بخشعلی‌زاده، ناصر بروجردیان، احمدرضا حقیقی، زین‌العابدین دهقانی ابیانه (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
نسیم اصغری، شهرناز بخشعلی‌زاده ، ناصر بروجردیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، سیدمحمد میرمعینی، نرگس یافتیان (اعضای گروه تألیف) ـ عزت‌الله خیرالله (ویراستار ادبی)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: جواد صفری (مدیر هنری) ـ طاهره حسن‌زاده (طراح جلد)ـ سمیه قنبری (صفحه‌آرا) ـ ربابه قاسمی (تصویرگر)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهیدموسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وب‌گاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارو پخش)
تلفن :۵ ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ ششم ۱۴۰۱

شابک ۸ – ۲۷۸۱ – ۰۵ – ۹۶۴ – ۹۷۸
ISBN 978 – 964 – 05 – 2781–8



ملت شریف ما اگر در این انقلاب بخواهد پیروز شود باید دست از آستین برآرد و به کار بپردازد. از متن دانشگاه‌ها تا بازارها و کارخانه‌ها و مزارع و باغستان‌ها تا آنجا که خودکفا شود و روی پای خود بایستد.

امام خمینی (قُدِّسَ سِرُّهُ)

فهرست

پودمان اول : تابع **۱**

- رابطهٔ بین کمیت‌ها ۲
- مفهوم تابع ۱۱
- بازه‌ها ۱۸
- نمادگذاری تابع‌ها ۲۲
- نمایش‌های تابع: جدول و نمودار ۲۶

پودمان دوم: تابع‌های خطی و درجهٔ دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها ونامعادله‌ها **۳۳**

- تابع‌های خطی ۳۴
- تابع‌های درجهٔ دوم ۴۶
- کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها ۵۰
- کاربرد تابع‌ها در حل نامعادله‌ها ۵۵

پودمان سوم: زاویه‌های دلخواه و نسبت‌های مثلثاتی آنها **۶۳**

- زاویهٔ چرخش ۶۴
- واحد اندازه‌گیری زاویه: رادیان ۷۰

■ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه ۷۶
■ شیب خط و تانژانت زاویه‌ها ۸۸

پودمان چهارم: لگاریتم و خواص آن **۹۵**
■ لگاریتم ۹۶
■ خواص لگاریتم ۱۰۶

پودمان پنجم: آمار توصیفی **۱۱۵**
■ خط بهترین برازش ۱۱۶
■ درون‌یابی و برون‌یابی ۱۳۰
■ میانه ۱۳۶
■ نمودار جعبه‌ای ۱۴۰

■ **منابع** **۱۴۶**

سخنی با هنرجویان گرامی

به گفتهٔ بسیاری از دانشمندان، ریاضی علمی شیرین و کاربردی است و تاریخ ریاضی نشان داده که حل مسائل عملی محیط پیرامونی موجب توسعهٔ ریاضیات شده است. هدف اصلی ریاضی، حل مسائلی است که انسان در زندگی روزمره و عملی با آنها روبه‌رو است.

شما با دیدن شنای شناگران، نمی‌توانید شنا یاد بگیرید بلکه برای شناگر شدن باید وارد آب شوید و خودتان مستقیماً عمل کنید.

یادگیری ریاضی صرفاً خواندن و شنیدن مفاهیم ریاضی نیست؛ بلکه ریاضیات علمی معنادار است و تا زمانی که خود شما درگیر حل مسائل نشوید نمی‌توانید ریاضی را یاد گرفته و از آن استفاده کنید.

طراحی این کتاب به گونه‌ای است که در یک متن داستان‌گونه، مسئله‌ای مطرح می‌شود و شما با انجام فعالیت‌هایی که در ادامهٔ مسئله آمده است به مفهوم ریاضی مورد نظر می‌رسید.

سعی کنید تمامی این عملیات را انجام دهید و مطمئن باشید خواهید توانست مفاهیم را به خوبی یاد گرفته و نهایتاً مسئله‌های کتاب را حل کنید.

مفاهیم ریاضی در این کتاب در ارتباط با هم بوده و به هم وابسته‌اند. سعی شده است مثال‌ها و تمرین‌هایی که در کتاب آمده است کاربردی بوده و با محیط پیرامونی زندگی ما مرتبط باشند.

آنچه که مسلم است ریاضیات زبان علم است و در تمام متن زندگی ما حضور دارد. یادگیری ریاضی شما را قادر می‌سازد تا توانایی تجزیه و تحلیل مسئله‌هایی را که با آنها برخورد می‌کنید، داشته باشید و خواهید دید که چگونه می‌توانید آموخته‌های خود را به کار برده و مسئله‌های مهمی را حل کنید.

در این کتاب علاوه بر تأکید بر این جنبهٔ ریاضی، به تأثیر فناوری در یادگیری ریاضی نیز توجه شده است. محیط و ابزار فناوری از جمله استفاده از ماشین حساب و نرم‌افزارهای پویا مانند جئوجبرا، این امکان را فراهم می‌سازد تا هنرجو فرصت درک شهودی، رشد مهارت‌های تفکر مانند حدسیه و فرضیه‌سازی، الگویابی و غیره را پیدا کند. بنابراین به کارگیری فناوری از اصولی است که در تألیف این کتاب به آن توجه شده است.

در خاتمه برای آنکه کتاب برای شما بهتر قابل استفاده باشد، از نظر برخی از هنرآموزان محترم استفاده شده است که بدین وسیله از ایشان تشکر و قدردانی می‌گردد.

پودمان اول

تابع

اگر پرتابه‌ای را به‌طور افقی پرتاب کنیم، پس از مدتی بر روی زمین سقوط می‌کند. هرچه سرعت اولیهٔ پرتابه بیشتر باشد، پرتابه مدت بیشتری را در هوا باقی‌می‌ماند و محل سقوط بر روی زمین فاصلهٔ بیشتری تا محل پرتاب دارد.

فاصلهٔ محل سقوط پرتابه تا محل پرتاب وابسته به سرعت اولیهٔ پرتابه است و می‌گویند این فاصله تابعی از سرعت اولیهٔ پرتابه است.

اما با توجه به گرد بودن زمین، با افزایش سرعت اولیهٔ پرتابه (تقریباً ۷ کیلومتر در ثانیه)، ممکن است پرتابه هرگز بر زمین سقوط نکند.

اگر سرعت اولیهٔ پرتابه از این مقدار بیشتر باشد، پرتابه با زمین برخورد نمی‌کند.

رابطهٔ بین کمیت‌ها

امروز، کلاس ریاضی ما با نجوم شروع شد.

دبیر گفت: من در دورهٔ دبیرستان به نجوم خیلی علاقه داشتم و دربارهٔ آن بسیار مطالعه می‌کردم. در کتاب‌های نجوم خوانده بودم که فاصلهٔ خورشید تا زمین ۱۵۰ میلیون کیلومتر است و نور خورشید حدود ۸ دقیقه و ۲۰ ثانیه طول می‌کشد تا به زمین برسد. بعد از خورشید، نزدیک‌ترین ستاره به زمین، پروکسیما قنطورس[۱] (Proxima Centauri) نام دارد. نور این ستاره ۴/۲ سال طول می‌کشد تا به زمین برسد. فاصلهٔ ستارگان از هم زیاد است و برای اندازه‌گیری آن از مقیاس بسیار بزرگی به نام سال نوری استفاده می‌شود. منظور از سال نوری، طول مسیری است که نور در یک سال طی می‌کند. برای مثال، فاصلهٔ پروکسیما قنطورس با زمین، ۴/۲ سال نوری است. دورترین ستاره‌های دیده شده، ۱۳/۳ میلیارد سال نوری با ما فاصله دارند.

آرش که از هنرجویان کنجکاو کلاس بود، با تعجب پرسید:

ما که نمی‌توانیم به این ستاره‌ها برویم؛ پس دانشمندان این فاصله‌ها را چگونه اندازه می‌گیرند؟

دبیر گفت: سؤال بسیار خوبی است. اما من یک سؤال آسان‌تر مطرح می‌کنم؛ معمولاً مساحت یک مربع را چگونه اندازه می‌گیرید؟

حمید گفت: طول ضلع مربع را اندازه می‌گیرم و سپس، آن را به توان دو می‌رسانم.

دبیر گفت: پس، مساحت مربع را به طور مستقیم اندازه‌گیری نمی‌کنید؛ بلکه از طریق طول ضلع آن، مساحتش را به دست می‌آورید.

حمید گفت: بله، مساحت مربع با طول ضلعش رابطه دارد، اما این مطلب چه ربطی به فاصلهٔ ستارگان دارد؟

دبیر گفت: صبر کنید به ارتباط این مطالب با فاصله‌های ستارگان هم می‌رسیم. آیا می‌توانید مورد دیگری هم پیدا کنید که نتوانید آن را به‌طور مستقیم اندازه‌گیری کنید ولی با اندازه‌گیری یک کمیت[۲] دیگر، اندازهٔ آن را به‌دست آورید؟

صادق گفت: در جایی دیدم که ارتفاع از سطح دریا را با دماسنج اندازه می‌گیرند. دمایی که آب در آن به جوش می‌آید یعنی دمای جوش آب، در هر مکان با ارتفاع آن مکان از سطح دریا رابطه دارد. پس اگر دمای جوش آب را در مکانی اندازه‌گیری کنیم، ارتفاع آن مکان از سطح دریا را می‌توانیم به دست آوریم.

دبیر گفت: برای اندازه‌گیری فاصلهٔ ستارگان تا زمین، آیا می‌توان از این روش استفاده کرد؟

۱ــ در بعضی از متون مربوط به ستاره‌شناسی این ستاره را پروکسیما سنتوری نام می‌برند.

۲ــ مفاهیمی مانند وزن و جرم و بار الکتریکی و فشار هوا و نظایر آنها را کمیت‌های فیزیکی و مفاهیمی مانند طول و مساحت و حجم و نظایر آنها را کمیت‌های هندسی می‌نامند. برخی از این کمیت‌ها با یکدیگر رابطه دارند و شناختن این ارتباطات بخش مهمی از کار علوم تجربی و ریاضی است.

آرش گفت: اگر بتوانیم کمیتی را بیابیم که با این فاصله‌ها ارتباط داشته باشد و بتوان آن را اندازه‌گیری کرد، شاید بتوانیم این فاصله‌ها را به دست آوریم.

دبیر گفت: به یک چراغ روشن دقت کنید. هر چه به آن نزدیک‌تر می‌شوید، نور بیشتری به شما می‌رسد و هر چه از آن دورتر می‌شوید، نور کمتری دریافت می‌کنید. آیا این مطلب به حل مسئله کمکی می‌کند؟

آرش گفت: یعنی میزان نوری که از چراغ به ما می‌رسد، با فاصلهٔ چراغ از ما مرتبط است. پس با اندازه‌گیری نوری که از ستارگان به ما می‌رسد، می‌توانیم فاصلهٔ آنها را به دست آوریم.

دبیر گفت: بله درست است. با اندازه‌گیری نوری که از ستارگان به ما می‌رسد، فاصلهٔ آنها با ما به‌دست می‌آید.

در دنیای واقعی، به کمیت‌های متعددی برخورد می‌کنیم که با هم ارتباط دارند؛ از این ارتباط می‌توان استفاده کرد و با داشتن مقدار یکی، دیگری را به دست آورد. برای درک بهتر مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها، در فعالیت(۱) ارتباط طول یک فنر و جرم جسمی را که به آن آویزان می‌شود، بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱

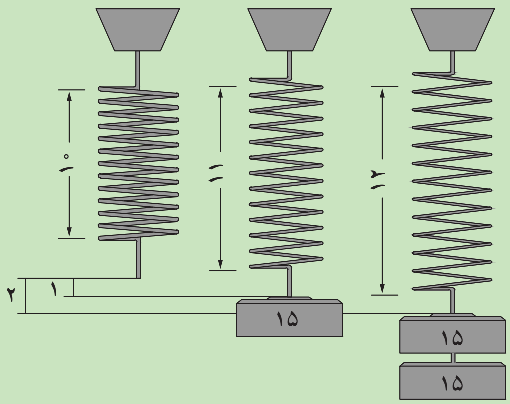
فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۶۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود پاره می‌شود.

۱ در جاهای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

الف) هر چه جرم وزنهٔ آویزان شده .... شود، طول فنر .... می‌شود.

ب) اگر به این فنر یک وزنهٔ ۳۰۰ گرمی آویزان کنیم برای پیدا کردن طول فنر، چون به ازای هر ۱۵ گرم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود، پس ابتدا ۳۰۰ را بر .... تقسیم می کنیم و سپس

....



۲ در حالت کلی، اگر جرم وزنهٔ آویزان شده را بر حسب گرم با a نشان دهیم و طول فنر را برحسب سانتی‌متر با l نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار l را برحسب مقدار a بیان کند.

....

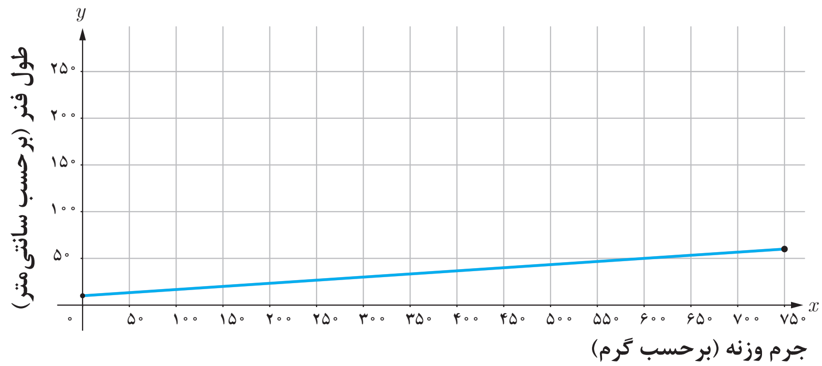
۳ حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟ (**راهنمایی:** برای پیدا کردن حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، ابتدا باید حداکثر تغییر طول فنر را به‌دست آورد).

....

فعالیت (۱) نشان می‌دهد که اندازهٔ طول فنر با اندازهٔ جرم وزنه آویزان شده مرتبط است. جدول زیر اندازهٔ طول فنر را به ازای چندین مقدار خاص برای جرم وزنهٔ آویزان شده، نشان می‌دهد.

جرم وزنه آویزان شده (بر حسب گرم)	۰	۷۵	۱۵۰	۳۰۰	۴۵۰	۵۲۵	۶۰۰	۷۵۰
طول فنر کشیده شده (بر حسب سانتی‌متر)	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰

اگر به ازای کلیهٔ مقادیر برای جرم وزنه، مقدار طول فنر را در نظر بگیریم، نمودار این رابطه به‌صورت یک پاره‌خط طبق شکل زیر است که در آن محور افقی نشان‌دهنده جرم وزنه آویزان شده برحسب گرم و محور عمودی نشان‌دهنده طول فنر بر حسب سانتی‌متر می‌باشد. جدول بالا، نقاطی از این پاره‌خط را نشان می‌دهد.



کمیت‌های مرتبط بسیاری وجود دارند. برای مثال، مساحت یک مربع و طول ضلع آن دو کمیت مرتبط هستند. در این حالت، اگر طول ضلع مربع را بدانیم، آنگاه می‌توانیم مساحت آن را به‌دست آوریم و برعکس، با داشتن مساحت مربع، طول ضلع آن نیز مشخص می‌شود.

مثال‌هایی از ارتباط بین کمیت‌ها را می‌توان در طبیعت و زندگی روزمره یافت: فشار هوا در هر نقطه و ارتفاع آن نقطه از سطح دریا، هزینه پرداخت شده بابت برق و میزان برق مصرف شده، قیمت بلیت اتوبوس‌های بین شهری و فاصلهٔ بین شهرها و غیره نمونه‌هایی از این ارتباط محسوب می‌شوند.

سؤال مهمی که مطرح می‌شود این است که رابطه بین دو کمیت را چگونه باید بیان کنیم. در مثال (۱)، نمونهٔ دیگری از ارتباط بین دو کمیت را می‌بینیم که درک بیشتری از رابطه بین کمیت‌ها را به ما می‌دهد.

مثال ۱

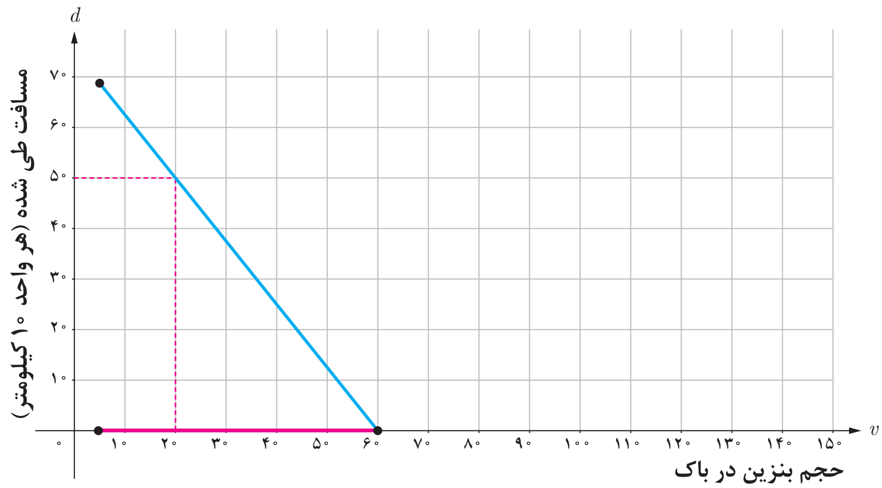
خودرویی را در نظر بگیرید که گنجایش ۶۰ لیتر بنزین را دارد. اگر این خودرو با سرعت ثابت حرکت کند، برای طی کردن هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند. باک این خودرو قبل از حرکت، پر شده است. مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو با مسافت طی شده رابطه دارد. توجه داشته باشید که هیچ خودرویی تمام بنزین باک خود را مصرف نمی‌کند و توصیه می‌شود برای وارد نشدن صدمه به موتور، حداقل ۵ لیتر بنزین در باک موجود باشد.

در این مثال نتایج زیر را می‌توان مشاهده کرد:

- هر چه بنزین در باک کمتر شود، مسافتی که با خودرو طی شده است بیشتر می‌شود.
- اگر ۴۴ لیتر بنزین در باک خودرو باقی‌مانده باشد، خودرو ۲۰۰ کیلومتر مسافت را طی کرده است. زیرا، این خودرو به ازای هر لیتر بنزین، $۱۲/۵ = \frac{۱۰۰}{۸}$ کیلومتر مسافت را طی می‌کند.
- با توجه به توصیه‌ای که برای سالم نگه داشتن موتور شده است، حجم بنزین موجود در باک نباید به صفر برسد. طبق توصیه، در باک باید حداقل ۵ لیتر بنزین وجود داشته باشد و حداکثر حجم باک نیز ۶۰ لیتر است.
- اگر مقدار بنزین باقی‌مانده در باک را بر حسب لیتر با v و مسافت طی شده را برحسب کیلومتر با d نشان دهیم، رابطه‌ای که مقدار d را برحسب v نشان می‌دهد، به‌صورت $d=۱۲/۵(۶۰-v)$ است، زیرا این خودرو به ازای هر لیتر بنزین، ۱۲/۵ کیلومتر مسافت را طی می‌کند.
- جدول زیر مسافت طی شده را به ازای چند مقدار خاص برای حجم بنزین موجود در باک، نشان می‌دهد.

حجم بنزین در باک (بر حسب لیتر)	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۴۵	۵۰	۶۰
مسافت طی شده (بر حسب کیلومتر)	۶۸۷/۵	۶۲۵	۵۰۰	۳۷۵	۱۸۷/۵	۱۲۵	۰

اگر به ازای کلیهٔ مقادیر برای حجم بنزین موجود در باک (۵ تا ۶۰ لیتر)، مسافت طی شده را در نظر بگیریم، نمودار این رابطه به‌صورت یک پاره‌خط طبق شکل صفحه بعد است که محور افقی نشان‌دهندهٔ حجم بنزین موجود در باک بر حسب لیتر و محور عمودی نشان‌دهندهٔ مسافت طی شده بر حسب هر واحد ۱۰ کیلومتر می‌باشد. جدول بالا، نقاطی از این پاره‌خط را نشان می‌دهد.



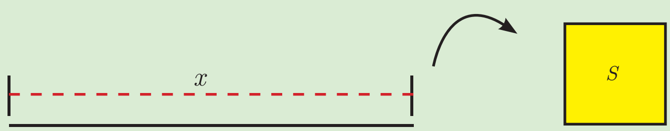
- با توجه به نمودار، اگر ۲۰ لیتر بنزین در باک باقی‌مانده باشد، خودرو ۵۰۰ کیلومتر را طی کرده است.

این مثال نشان می‌دهد که برای شناخت رابطهٔ بین مقدار بنزین باقی‌مانده و مسافت طی‌شده، کافی‌است بدانیم که حجم بنزین موجود در باک، چه مقادیری می‌تواند باشد و مسافت طی‌شده توسط خودرو چگونه از حجم بنزین موجود در باک محاسبه می‌شود. در واقع، برای شناخت رابطهٔ بین دو کمیت، باید بدانیم که این کمیت‌ها چه مقدارهایی می‌توانند داشته باشند و شیوهٔ محاسبهٔ یکی برحسب دیگری چیست.

رابطهٔ بین کمیت‌ها در زمینه‌های بسیار متنوعی دیده می‌شود و لازم است بتوانیم در هر زمینه‌ای این رابطه‌ها را تشخیص دهیم.

کار در کلاس ۱

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با قطعهٔ بریده شده یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.



۱ آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

۲ اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم، x چه مقادیری می‌تواند باشد؟

$$\cdots < x < \cdots$$

۳ اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول ۸ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع ساخته شده چند سانتی‌متر مربع است؟

....

....

۴ اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول را با x و مساحت مربع ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

....

....

با توجه به پاسخ پرسش‌های بالا، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۵ جدول زیر، ارتباط بین طول قطعهٔ بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

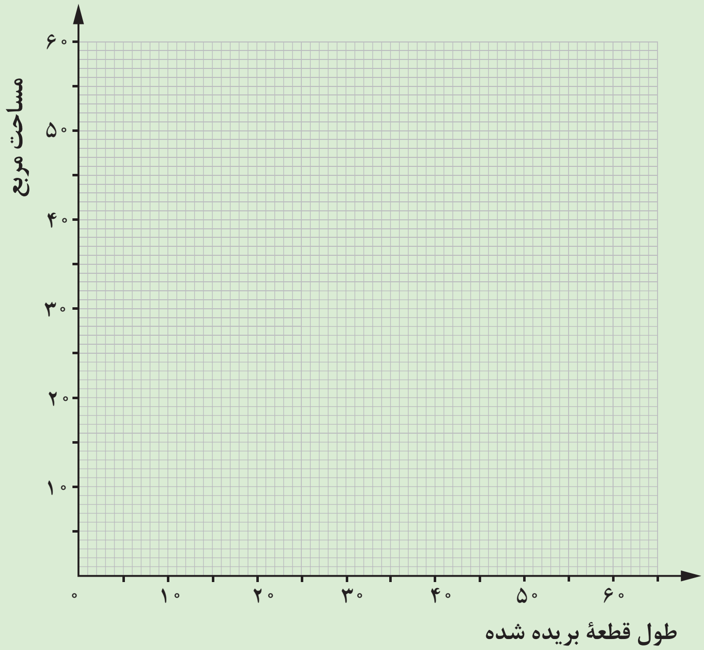
طول قطعهٔ بریده شده (برحسب سانتی‌متر)	۱	۴	۲۰	۳۲	۴۸	۶۰
مساحت مربع (برحسب سانتی‌متر مربع)		۱			۱۴۴	

....

....

....

۶ در شکل صفحهٔ بعد، محور افقی طول قطعهٔ بریده شده را بر حسب سانتی‌متر و محور عمودی، مساحت مربع ساخته شده را بر حسب سانتی‌مترمربع نشان می‌دهد. جدول بالا، نقاطی در این صفحهٔ مختصات را نشان می‌دهد. ۴ نقطهٔ اول جدول را در نمودار صفحهٔ بعد بیابید و آنها را به‌طور تقریبی به هم وصل کنید.



۷ با توجه به نمودار، برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰ سانتی‌متر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟ این مقدار را به کمک رابطهٔ قسمت (۴) نیز به‌دست آورید و سپس مقایسه کنید.

....

....

۸ آیا پاسخ به سؤالات (۲) و (۴) برای شناخت رابطهٔ بین مساحت مربع ساخته شده و طول قطعهٔ بریده شده از مفتول کافی هستند؟

....

....

مسائل

۱ کدام‌یک از گزینه‌های زیر دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

الف) طول ضلع یک مربع و محیط آن؛

ب) طول ضلع یک مربع و مساحت آن؛

پ) محیط یک مثلث و طول بزرگ‌ترین ضلع آن؛

ت) شعاع یک دایره و محیط آن؛

ث) شعاع یک دایره و مساحت آن؛

ج) مساحت یک مستطیل و محیط آن.

۲ آیا درجه حرارت یک مکان بر حسب سانتی‌گراد و درجه حرارت آن بر حسب فارنهایت مرتبط هستند؟ اگر مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین آنها را بنویسید.

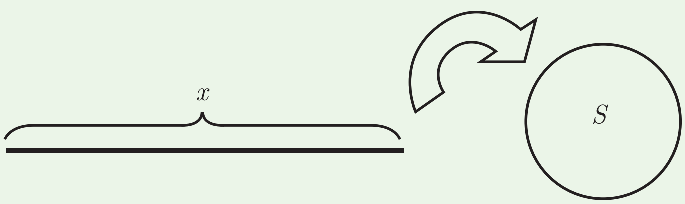
۳ وزن جلد کتابی (با حداکثر ۲۰۰ صفحه) برابر ۴۰ گرم و وزن هر ورق آن ۰/۸ گرم است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان وزن کتاب را بر حسب تعداد ورق‌های آن به‌دست آورد.

۴ راننده‌ای مسافت ۳۵۰ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر بر ساعت در حال طی کردن است.

الف) آیا مقدار مسافتی که طی می‌کند (d) و زمان (t)، دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، چه رابطه‌ای بین آنها برقرار است؟

ب) هر یک از این دو کمیت چه مقادیری را می‌توانند داشته باشند؟

۵ طنابی به طول ۱۰ متر در اختیار داریم. قطعه‌ای از آن را می‌بُریم و با قطعهٔ بُریده شده یک حلقهٔ دایره‌ای شکل می‌سازیم. مساحت حلقه دایره‌ای شکل به‌دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.



الف) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

ب) طول قطعهٔ بریده شده از طناب، چه مقادیری می‌تواند باشد؟

پ) اگر طول قطعه بریده شده از طناب ۴ متر باشد، مساحت دایرهٔ ساخته شده چندمترمربع است؟

ت) اگر طول قطعهٔ بریده شده از طناب را با x و مساحت دایرهٔ ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

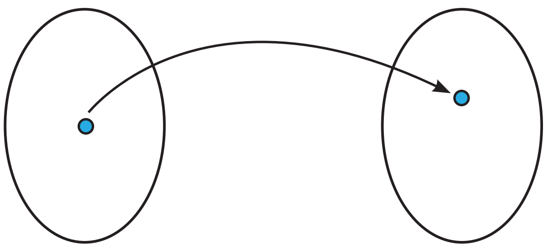
ث) جدول زیر، ارتباط بین طول قطعهٔ بریده شده و مساحت دایرهٔ ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید (فرض کنید $\pi \approx ۳$).

طول قطعه بریده شده	$\frac{۱}{۲}$	۲	۴	۶	۸
مساحت دایره	$\frac{۱}{۴۸}$	$\frac{۱}{۳}$			

۶ دو کمیت مرتبط به هم مثال بزنید. هر یک را نام‌گذاری کنید و در صورت امکان رابطهٔ بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

مفهوم تابع

اهمیت رابطهٔ بین کمیت‌ها، ابتدا در فیزیک مشاهده شد و بیان ریاضی ارتباط کمیت‌ها، مفهوم تابع را به وجود آورد. تاکنون، چند کمیت مرتبط به هم را بررسی کردیم. اگر یکی از این کمیت‌ها را کمیت (الف) و دیگری را کمیت (ب) بنامیم، مثال‌ها به گونه‌ای بودند که با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، **یک مقدار معین** برای کمیت (ب) به‌دست می‌آمد.



این دسته از روابط بین کمیت‌ها، روابط خاصی هستند که در ریاضی با مفهومی به نام تابع بیان می‌شوند و کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند. در واقع، وقتی که کمیتی مانند (ب) وابسته به کمیت دیگری مانند (الف) باشد، و به‌ازای هر مقداری از کمیت (الف)، مقدار معینی برای کمیت (ب) داشته باشیم، مفهوم تابع پیش می‌آید و می‌گوییم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است.

گفتگو

فرهاد گفت: منظور از این جمله که با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست می‌آید، چیست؟

دبیر گفت: در فعالیت (۱) دیدیم که اگر یک وزنهٔ a گرمی به فنر آویزان کنیم، طول آن برابر l خواهد شد و رابطه‌ای که بیانگر این واقعیت است به‌صورت $l=\frac{a}{۱۵}+۱۰$ به‌دست آمد. در این رابطه با مشخص شدن جرم وزنه، یک مقدار معین برای طول فنر به دست می‌آید. مثلاً اگر یک وزنه ۷۵ گرمی به فنر آویزان کنیم، طول آن یک مقدار معین می‌باشد. این مقدار معین برابر ۱۵ سانتی‌متر است. بنابراین، طول فنر تابعی از جرم وزنه می‌باشد.

فرهاد گفت: آیا مثال (۱) که در آن رابطهٔ بین مسافت طی شده با مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو را بررسی کردیم، نیز همین‌طور است؟

دبیر گفت: بله. دیدیم که مسافت طی شده (d) با مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو (v) رابطه دارد و رابطه‌ای که بیانگر این واقعیت است به‌صورت $d=۱۲/۵(۶۰-v)$ است. در این رابطه با مشخص شدن مقدار بنزین باقی‌مانده در باک، یک مقدار معین برای مسافت طی شده به‌دست می‌آید. مثلاً اگر حجم بنزین باقی‌مانده در باک ۳۰ لیتر باشد، مسافت طی شده، مقدارِ معین ۳۷۵ کیلومتر می‌باشد. بنابراین، مسافت طی‌شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین باقی‌مانده در باک است. آیا شما می‌توانید مثال دیگری ذکر کنید؟

فرهاد گفت: مساحت مربع تابعی از ضلع آن است، زیرا با مشخص شدن اندازه ضلع مربع، یک مقدار معین برای مساحت آن به‌دست می‌آید. مثلاً اگر اندازه ضلع مربع ۵ متر باشد، مساحت مربع مقدار معین ۲۵ متر مربع می‌باشد.

تعریف

اگر دو کمیت (الف) و (ب) با یکدیگر مرتبط باشند و با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، **یک مقدار معین** برای کمیت (ب) به‌دست آید، در این صورت کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند.

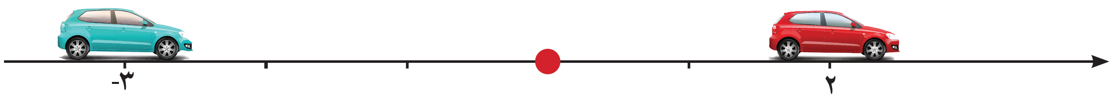
اگر دو کمیت (الف) و (ب) با هم ارتباط داشته باشند ولی با مشخص شدن مقدار کمیت (الف) نتوان **یک مقدار معین** برای کمیت (ب) به‌دست آورد؛ یعنی، با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، بیش از یک مقدار برای کمیت (ب) به‌دست آید این رابطه، تابع نیست.

مثال ۲

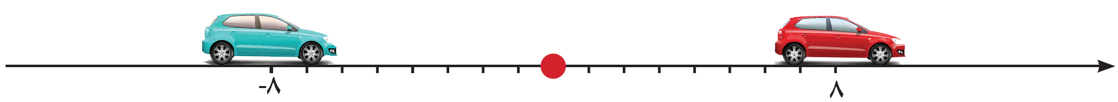
در کار در کلاس (۱) دیدیم که مساحت مربع ساخته شده (S) با طول قطعهٔ بریده شده از مفتول (x) رابطه‌ای به‌صورت $S=\frac{x^2}{16}$ دارد. در این رابطه با مشخص شدن طول قطعهٔ بریده شده، یک *مقدار معین* برای مساحت مربع ساخته شده به‌دست می‌آید. مثلاً اگر طول قطعهٔ بریده شده ۸ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع ساخته شده، مقدار معین ۴ سانتی‌متر مربع می‌باشد. بنابراین، مساحت مربع ساخته شده، تابعی از طول قطعه بریده شده است.

مثال ۳

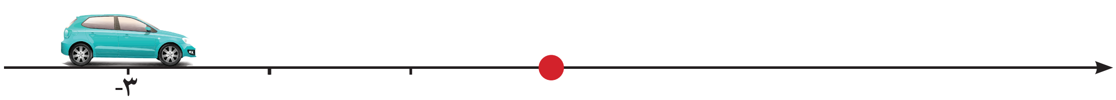
فرض کنید خودرویی در جادهٔ مستقیمی در حال حرکت است. این جاده را به‌صورت محور اعداد در نظر می‌گیریم. هر نقطه روی محور اعداد، با یک عدد حقیقی مشخص می‌شود که آن را *مختص طولی* آن نقطه می‌نامند. مثلاً در شکل زیر مختص طولی خودروی قرمز برابر ۲ و مختص طولی خودروی آبی برابر ۳- است. مختص طولی این خودرو، با فاصلهٔ آن تا مبدأ ارتباط دارد.



اگر فاصلهٔ خودرو تا مبدأ را کمیت (الف) و مختص طولی آن را کمیت (ب) بنامیم، با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، برای کمیت (ب) یک مقدار معین به‌دست نمی‌آید. مثلاً، اگر فاصلهٔ خودرو تا مبدأ ۸ واحد باشد، خودرو ممکن است دارای مختص طولی ۸- یا ۸ باشد. یعنی به‌طور قطع نمی‌توان یک مکان خاص مشخص را برای خودرو تعیین کرد. به عبارت دیگر، با داشتن فاصلهٔ خودرو تا مبدأ، برای مختص طولی آن یک مقدار معین به دست نمی‌آید، زیرا ممکن است مختص طولی خودرو، دو عدد قرینهٔ هم باشد.



بنابراین، در این مثال، کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) نخواهد بود. اما بر عکس، با مشخص شدن مختص طولی خودرو، فاصلهٔ آن تا مبدأ دقیقاً مشخص می‌شود. پس، در این مثال، کمیت (الف)، تابعی از کمیت (ب) خواهد بود. برای مثال، اگر مختص طولی خودرو برابر ۳- باشد، در این صورت فاصلهٔ آن از مبدأ مقدار معین ۳ است.



کار در کلاس ۲

۱ در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده، تابعی از طول فنر است؟ چرا؟

....

....

۲ در مثال (۱)، آیا مسافت طی شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین مصرف شده است؟ چرا؟

....

....

در بررسی نمونه‌هایی از کمیت‌های مرتبط دیدیم که برای مشخص شدن تابعی که رابطهٔ بین دو کمیت (الف) و (ب) را بیان می‌کند باید به دو سؤال اصلی زیر پاسخ دهیم:

۱ کمیت (الف) چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۲ با مشخص شدن یک مقدار برای کمیت (الف)، چگونه مقدار کمیت (ب) به‌دست می‌آید؟

تعریف

فرض کنیم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد. مقادیری را که کمیت (الف) می‌تواند داشته باشد، **دامنهٔ** این تابع می‌نامند و قانونی را که، مقادیر کمیت (ب) را بر حسب مقادیر کمیت (الف) به دست می‌دهد، **قانون یا ضابطهٔ** این تابع می‌نامند.

مثال ۴

در کار در کلاس (۲) دیدیم که اگر l، طول فنر کشیده شده با آویزان کردن یک وزنهٔ a گرمی باشد، جرم وزنه، تابعی از طول فنر کشیده شده است. مقادیری که طول فنر می‌تواند داشته باشد از ۱۰ تا ۶۰ سانتی‌متر هستند. پس، دامنهٔ این تابع $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱۰ \leq x \leq ۶۰\}$ است. مقدار a بر حسب l از طریق تساوی $a=۱۵l-۱۵۰$ محاسبه می‌شود، پس قانون تابعی که جرم وزنه را بر حسب طول فنر بیان می‌کند، به‌صورت $a=۱۵l-۱۵۰$ است.

کار در کلاس ۳

۱ در مثال (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط ماشین را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک، بیان می‌کند.

....

....

۲ در کار در کلاس (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده را برحسب طول قسمت بریده شده از مفتول، بیان می‌کند.

....

....

خواندنی

نیاز به بررسی روابط بین کمیت‌ها با رشد علوم آغاز شد. ابتدا نیوتن و گالیله برای توصیف حرکت اشیا، نیاز به یافتن رابطهٔ بین زمان و مکان اشیا را احساس کردند.

لایب‌نیتز ریاضی‌دان قرن هفدهم نیز برای توصیف یک منحنی در صفحه، نیاز به یافتن رابطه بین طول و عرض نقاط یک منحنی را احساس کرد. نهایتاً، بررسی روابط بین کمیت‌ها منجر به تعریف مفهوم تابع در ریاضی شد. اما رسیدن به مفهوم تابع چندان ساده نبود و با شروع از کارهای نیوتون و لایب‌نیتز تا رسیدن به یک مفهوم دقیق از تابع، بیش از سه قرن طول کشید (تاریخ ریاضی ایوز، جلد ۲).

لایب‌نیتز

نیوتن

مسائل

۱ آیا دمای کلاس شما در یک روز معین، تابعی از زمان است؟ چرا؟

۲ دمای هوا در یک منطقه، در ارتفاعات مختلف از سطح دریا، متفاوت است و به ازای هر ۱۵۰متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. آیا دمای یک منطقه تابعی از ارتفاع آن منطقه از سطح دریا است؟ چرا؟

۳ یک مغازه شیرینی فروشی ماهانه ۷ میلیون تومان بابت اجارهٔ مغازه، آب، برق و دستمزد کارگران، به‌طور ثابت پرداخت می‌کند. تولید هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان هزینهٔ مواد اولیه دارد. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد. اگر x میزان تولید شیرینی باشد:

الف) درآمد این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.
ب) هزینه ماهانه مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.
پ) سود مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

۴ از منبع آبی با حجم ۵۰۰ لیتر برای پر کردن یک حوضچه استفاده می‌شود. اگر شیر آب منبع به‌طور کامل باز باشد، در هر دقیقه ۵ لیتر آب از آن خارج می‌شود.
الف) توضیح دهید که چرا حجم آب داخل حوضچه تابعی از زمان است.
ب) با فرض آنکه در لحظه صفر، حوضچه خالی است، قانون این تابع را با نوشتن حجم آب داخل حوضچه بر حسب زمان باز بودن شیر، بنویسید.
پ) دامنهٔ این تابع را مشخص کنید.

۵ سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. در این صورت کمیت ارتفاع سنگ از سطح زمین و کمیت زمان، باهم مرتبط هستند.
الف) چرا ارتفاع سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است؟
ب) اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ، زمان شروع پرتاب باشد، دامنهٔ این تابع چیست؟

۶ فرض کنیم که $x^۲$ مربع عدد حقیقی x باشد، آیا با مشخص بودن $x^۲$، برای x یک مقدار معین در اعداد حقیقی به‌دست می‌آید؟ آیا یک عدد، تابعی از مربع آن است؟ چرا؟

بازه‌ها

گفتگو

حسین دربارهٔ تمرین‌های مربوط به تابع که شب قبل حل کرده بود، با دوستش صحبت می‌کرد؛ او به دوستش گفت: در حل تمرین‌های تابع و مرور درس به مجموعه‌ای که با $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱۰ \le x \le ۶۰\}$ نمایش داده شده بود، برخورد کردم. به‌نظرم آمد که چنین نمایشی کمی دشوار است. فکر می‌کنی می‌توانیم آن را ساده‌تر بنویسیم؟

احمد گفت: بهتر است سر کلاس ریاضی از دبیر سؤال کنیم.

حسین در کلاس از دبیر ریاضی پرسید: برای اینکه در ریاضی بتوانیم آسان‌تر صحبت کنیم، از نمادها و علائم استفاده می‌شود. آیا مجموعه‌هایی مانند $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱۰ \le x \le ۶۰\}$ را می‌توان ساده‌تر نمایش داد؟

علی گفت: قبلاً وقتی می‌خواستیم اعداد طبیعی از ۱ تا ۶ را نمایش دهیم، آن را به‌صورت ۱,...,۶ می‌نوشتیم. آیا برای اعداد حقیقی هم می‌توانیم این خلاصه‌سازی را داشته باشیم؟

دبیر گفت: برخی از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی کاربرد بیشتری دارند. برای آسان‌تر صحبت کردن دربارهٔ آنها سعی می‌شود ساده‌تر نمایش داده شوند.

زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی را که به‌صورت زیر است در نظر بگیرید.

$$\{x \in \mathbb{R} \quad a \le x \le b\}$$

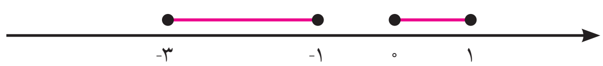
نمایش آن روی محور به‌صورت روبه‌رو است.

نقطه‌های توپر نشان‌دهندهٔ آن است که a و b دو عضو از این مجموعه هستند. مجموعهٔ بالا را به‌صورت $[a, b]$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ بسته به ابتدای a و انتهای b یا به اختصار بازهٔ بستهٔ a تا b می‌نامند.

مثال ۵

بازه‌های $[۰, ۱]$ و $[-۳, -۱]$ را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

$$[۰,۱] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \le x \le ۱\}$$
$$[-۳,-۱] = \{x \in \mathbb{R} \mid -۳ \le x \le -۱\}$$



مثال ۶

کار در کلاس (۲) نشان داد که جرم وزنه، تابعی از طول فنر و دامنه آن $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱۰ \le x \le ۶۰\}$ است. پس دامنهٔ این تابع، بازه $[۱۰, ۶۰]$ است.

اگر از بازهٔ بسته $[a\ ,\ b]$ ابتدا و انتهای آن را خارج کنیم، آن را بازهٔ باز به ابتدای a و انتهای b یا به اختصار بازهٔ باز a تا b می‌نامند و با $(a\ ,\ b)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$$

نقطه‌های توخالی نشان‌دهنده آن است که a و b متعلق به این مجموعه نیستند.
اگر از بازهٔ بسته $[a\ ,\ b]$ ابتدا یا انتهای آن را خارج کنیم، بازهٔ نیم باز، نیم بسته به‌دست می‌آید. اگر ابتدای آن را خارج کنیم، آن را با $(a\ ,\ b]$ نشان می‌دهند و آن را بازه باز در a و بسته در b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(a\,,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\le b\}$$

نمایش این مجموعه روی محور به‌صورت روبه‌رو است:

اگر از بازهٔ بسته $[a\ ,\ b]$، انتهای آن را خارج کنیم، آن را با $[a\ ,\ b)$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ بسته در a و باز در b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x<b\}$$

مثال ۷

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۵ و بزرگ‌تر از ۱ را روی محور نشان دهید و با بازه نمایش دهید.

$$(۱,۵]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۱<x\le ۵\}$$

ب) بازهٔ $[۱,۴)$ را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

$$[۱,۴)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۱\le x<۴\}$$

کار در کلاس ۴

۱ بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش داده و روی یک محور نشان دهید. سپس تعیین کنید $-\frac{۳}{۱۰}$ متعلق به کدام‌یک از بازه‌ها می‌باشد.

$[۲,۵]$

$(-۱,۳)$

$(۴,۷]$

$[-۴,-۲)$

کار در کلاس ۴

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور نمایش داده و با نماد بازه‌ها نشان دهید.

$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-۱}{۳} < x < ۲\right\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid ۳ < x \leq ۵۵\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \leq x < ۱۰\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid -۳ \leq x \leq ۸\}$

مجموعه‌های به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} \quad a \leq x\}$ را نیز بازه نامیده و با $[a, +\infty)$ نمایش می‌دهند(توجه داشته باشید که در این علامت‌گذاری نماد $+\infty$ به عدد خاصی اشاره ندارد و نشانهٔ هیچ عدد خاصی نیست).

ابتدای این بازه عدد a است ولی انتهایی ندارد و آن را بازهٔ بسته a تا مثبت بی‌نهایت می‌نامند.

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

اگر a را از این بازه خارج کنیم آن را با $(a, +\infty)$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ باز a تا مثبت بی‌نهایت می‌نامند. به عبارت دیگر:

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

به همین ترتیب، مجموعه‌هایی به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ را با $(-\infty, b]$ نمایش می‌دهند. انتهای این بازه عدد b است ولی ابتدایی ندارد و آن را بازهٔ بسته از منفی بی‌نهایت تا b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

اگر b را از این بازه خارج کنیم، آن را با $(-\infty, b)$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ باز منفی بی‌نهایت تا b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

کار در کلاس ۵

۱ بازهٔ $[۱, +\infty)$ را روی محور نمایش دهید.

۲ بازهٔ $(-\infty, ۱)$ را روی محور نمایش دهید.

۳ اجتماع این دو بازه را روی محور نمایش دهید. اجتماع این دو بازه، چه مجموعه‌ای است؟

....

مسائل

۱ مجموعه‌های زیر را با بازه نمایش دهید و روی محور مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳-

ب) مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۲

پ) مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۳- و ۵

۲ بازه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.

الف) $(۰,۳)$

ب) $[-۱,۵)$

پ) $(-۱,۴]$

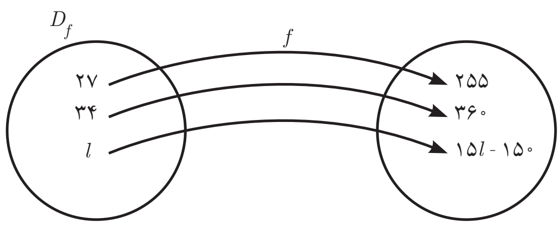
۳ مجموعهٔ جواب نامعادله $۲x-۵>۱$ را با یک بازه نمایش دهید.

۴ جدول زیر را کامل کنید.

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
			$\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x < ۲\}$
		$[۱,۴)$	
	 ۱		
مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲			

نمادگذاری تابع‌ها

رابطهٔ بین کمیت‌ها، به شکل‌های مختلفی برقرار می‌شود؛ بنابراین تابع‌های بسیاری وجود دارند. برای صحبت کردن در مورد تابع‌ها بهتر است برای هر تابع نامی انتخاب کنیم. مثلاً، در فعالیت فنر، جرم وزنهٔ آویزان شده تابعی از طول فنر است، می‌توانیم این تابع را f بنامیم.[1] در این صورت، دامنهٔ این تابع را با D_f (بخوانید دامنهٔ f یا دیِ اف)[2] نشان می‌دهیم، پس $D_f=[۱۰ , ۶۰]$
عدد ۲۷ در دامنهٔ این تابع است و با جای‌گذاری ۲۷ در قانون تابع، a=۱۵l-۱۵۰، عدد ۲۵۵=۱۵۰-۲۷×۱۵ به‌دست می‌آید. مقداری را که با جای‌گذاری ۲۷ در قانون تابع به‌دست می‌آید با f(۲۷) (بخوانید افِ ۲۷) نشان می‌دهند، پس ۲۵۵=۱۵۰-۲۷×۱۵=f(۲۷). عدد ۳۴ نیز در دامنهٔ این تابع است و با جای‌گذاری ۳۴ در قانون تابع، عدد ۳۶۰=۱۵۰-۳۴×۱۵ به دست می‌آید. مقداری را که با جای‌گذاری ۳۴ در قانون تابع به‌دست می‌آید با f(۳۴) نشان می‌دهند، پس: ۳۶۰=۱۵۰-۳۴×۱۵ = f(۳۴). اگر l عددی در D_f باشد (یعنی $l \in D_f$)، با اِعمال قانون تابع f روی آن، مقدار ۱۵۰- ۱۵l به‌دست می‌آید و آن را با $f(l)$ (بخوانید افِ اِل) نشان می‌دهند، پس: ۱۵۰- ۱۵l= $f(l)$.



اگر $l \in D_f$، در این صورت l می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد، به همین دلیل در عبارت $f(l)$، l را متغیر تابع f می‌نامند. در مسئلهٔ فنر، از نماد l به عنوان متغیر این تابع استفاده کردیم ولی می‌توانیم از نام‌های دیگری هم استفاده کنیم. اگر از نماد x برای متغیر تابع f استفاده کنیم؛ در این صورت $x \in D_f$ و $f(x)$=۱۵x-۱۵۰. انتخاب نام متغیر یک تابع، اختیاری است و هر نمادی را می‌توان برای متغیر به‌کاربرد. در نام‌گذاری توابع نیز می‌توان از نمادهای دیگری مانند g و h و غیره استفاده کرد.
در این هنگام، برای احمد، سؤالی پیش آمد.

گفتگو

احمد گفت: در فعالیت (۱) که نام تابع را f گذاشتیم، اگر طول فنر l باشد، جرم جسم آویزان شده $f(l)$ است. با استفاده از قانون این تابع، من می‌توانم f(۷۰) را هم حساب کنم، اما عدد ۷۰ در دامنه این تابع نیست. پس معنای f(۷۰) چیست؟

۱ـ نماد f اول کلمهٔ function است که در زبان انگلیسی به معنای تابع است.

۲ـ نماد D اول کلمهٔ Domain است که به معنای محدوده‌ای معین است.

دبیر گفت: همان‌طور که گفتید، ۷۰ در دامنه این تابع نیست و فنر مورد بحث در آن فعالیت، نمی‌تواند ۷۰ سانتی‌متری شود، پس در این وضعیت $f(۷۰)$ معنایی ندارد.

احمد گفت: اما ما می‌توانیم با جای‌گذاری ۷۰ در قانون تابع، $f(۷۰)$ را حساب کنیم. پس، چرا می‌گویید معنایی ندارد؟

دبیر گفت: بله، این درست است که می‌توان به ازای $l=۷۰$ مقداری را محاسبه کرد، ولی این تابع می‌خواهد وضعیت فنری را توصیف کند که حداکثر می‌تواند ۶۰ سانتی‌متر شود، بنابراین این فنر هیچ‌گاه ۷۰ سانتی‌متر نمی‌شود. پس برای این فنر مقدار $f(۷۰)$ معنایی ندارد. اما اگر می‌خواستیم فنر دیگری را توصیف کنیم که همین خصوصیات را داشت، با این تفاوت که می‌توانست ۷۰ سانتی‌متر هم بشود و مثلاً دامنهٔ آن بازهٔ $[۱۰, ۹۰]$ می‌بود، مقدار $f(۷۰)$ معنادار بود و جرم جسم آویزان شده را نشان می‌داد.

نکته

در هر تابعی، مقدار تابع فقط برای مقادیر دامنه محاسبه می‌شود و حتی اگر مقادیر خارج از دامنه را بتوان در قانون تابع قرار داد و مقداری را برای آن محاسبه کرد، عدد محاسبه شده معنایی ندارد. به عبارت دیگر، اگر f یک تابع و x متغیر آن باشد، مقادیر $f(x)$ را فقط برای xهایی محاسبه می‌کنیم که این xها در دامنه تابع باشند.

مثال ۸

تابع g با قانون $g(x)=۴x^۲-۵$ و دامنه $D_g=[-۳, ۶]$ را در نظر بگیرید. $g(-۲)$، $g(\frac{۱}{۳})$، $g(۳)$، $g(\sqrt{۵})$ را محاسبه کنید. آیا $g(۷)$ معنایی دارد؟ چرا؟

$$g(-۲)=۴\times(-۲)^۲-۵=۴\times۴-۵=۱۱$$

$$g(۳)=۴\times۹-۵=۳۱$$

$$g(\frac{۱}{۳})=۴\times(\frac{۱}{۳})^۲-۵=\frac{۴}{۹}-۵=\frac{-۴۱}{۹}=-۴\frac{۵}{۹}$$

$$g(\sqrt{۵})=۴\times(\sqrt{۵})^۲-۵=۲۰-۵=۱۵$$

$g(۷)$ معنایی ندارد؛ زیرا ۷ در دامنهٔ این تابع نیست.

کار در کلاس ۶

۱ الف) تابع به‌دست آمده در مثال (۱)، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g بنامید. D_g را بنویسید. قانون تابع g چگونه نوشته می‌شود؟

....

....

ب) مقدارهای $g(۴۵)$ و $g(۱۸)$ را بیابید. آیا مقدار $g(۷۵)$ معنایی دارد؟ چرا؟

....

....

پ) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

....

ت) اگر متغیر این تابع را با v نشان دهیم، مجموعه‌ای که v در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

....

ث) دو تابعِ قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

....

۲ الف) تابع به دست آمده در کار در کلاس (۱) که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند h نام‌گذاری کنید و D_h را بنویسید.

....

ب) مقدارهای $h(۵)$ و $h(۱۲)$ را بیابید. آیا مقدار $h(۲۰۰)$ معنایی دارد؟ چرا؟

....

پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

ث) دو تابعِ قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در این کار در کلاس، مشاهده می‌کنید که تغییر نام یک تابع یا متغیر آن، تأثیری در تابع ندارد و آن تابع را تغییر نمی‌دهد. اگر چه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود ولی تابع عوض نمی‌شود. مثلاً همهٔ تابع‌های f ، g و h به ترتیب با قانون‌های $h(t)=t^۲+۱$ ، $g(x)=x^۲+۱$ ، $f(x)=x^۲+۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به یک تابع اشاره می‌کنند.

مسائل

۱ جاهای خالی را برای تابع با قانون $f(x)=x^{۲}-x+۲$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ پر کنید.

x	$x^{۲}-x+۲$	$f(x)$
۲-	....	$f(-۲)=$....
۰	....	....
۲	....	....

۲ تابع g با قانون $g(x)=۴x^{۲}-۳x$ و دامنهٔ $D_g=[-۲,۳]$ را در نظر بگیرید. $g(-۲)$ و $g\left(-\frac{۴}{۳}\right)$ را محاسبه کنید. آیا $g(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

۳ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و قانون $f(x)=x^{۲}-۴$ مفروض است. مقادیر خواسته شده را بیابید.

الف) $f(-۲)=$ ب) $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=$ پ) $f\left(\sqrt{۲}\right)=$

۴ کرایه تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیهٔ تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر، ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را به‌دست آورید که کرایهٔ تاکسی را بر حسب مسافت طی شده بیان می‌کند. با توجه به آنکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند، دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. نامی برای این تابع و متغیر آن انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

۵ مستطیل‌هایی را در نظر بگیریدکه طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با l نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-۱)$ معنایی دارد؟

۶ سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر t، زمان (بر حسب ثانیه) و $f(t)$، ارتفاع از سطح زمین (برحسب متر) باشد. قانون این تابع به‌صورت $f(t)=-۵t^{۲}+۲۵$ است.

الف) سنگ در لحظهٔ صفر ($t=۰$) رها شده است. با پیدا کردن زمان برخورد سنگ با زمین، دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای $f(۱)$ و $f(۲)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

پ) آیا $f(۳)$ و $f(-۱)$ معنایی دارند؟چرا؟

نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

گفتگو

مسعود و احمد در پایان کلاس با دبیر خود دربارهٔ عدد π بحث می‌کردند.

مسعود گفت: در کتابی خواندم که عدد π گنگ است و نمی‌توان آن را با یک عدد اعشاری نشان داد. اما می‌توان آن را با اعداد اعشاری تقریب زد.

احمد گفت: تقریبات اعشاری عدد π را باچه قانونی پیدا می‌کنند؟

دبیر گفت: در این مورد قانونی وجود ندارد ولی یک روش محاسبه وجود دارد که به کمک آن با رایانه تا چند میلیون رقم اعشار π را محاسبه کرده‌اند.

مسعود گفت: از چه روشی برای نمایش این رقم‌ها استفاده می‌کنیم؟

دبیر گفت: فعالیت زیر می‌تواند جوابی برای این پرسش فراهم کند.

فعالیت ۲

عدد π تا ده رقم اعشار برابر است با:

$$\pi \approx ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵$$

برای n=۱,۲,۳,...,۱۰، اگر $f(n)$ ، رقم nام اعشاری π را نشان دهد، برای مثال داریم:

$$f(۱)=۱ \quad , \quad f(۲)=۴$$

۱ جاهای خالی را پر کنید.

$f(۸)=$ ...... $\qquad f(۱۰)=$ ...... $\qquad f(۹)=$ ...... $\qquad f(۶)=$ ......

۲ دامنهٔ این تابع را با یک مجموعه نشان دهید.

۳ جدول زیر را با توجه به دامنه داده شده کامل کنید.

n	۱	۲								
$f(n)$	۱	۴								

در فعالیت بالا تابعی را مشاهده کردیم که قانون خاصی نداشت و فقط روشی برای یافتن مقدار تابع داشتیم که نقش قانون تابع را بازی می‌کرد.

به کمک جدول یک تابع، می‌توان نموداری در صفحه رسم کرد. هر زوج از اعدادِ جدول که از اعداد دامنهٔ تابع (سطر اول) و مقدار تابع (سطر دوم) تشکیل شده است، نقطه‌ای در صفحه مختصات را مشخص می‌کند. مجموعه این نقاط، شکلی را در صفحه مشخص می‌کنند که نمودار تابع نامیده می‌شود. از طریق نمودار یک تابع، رفتار تابع را بهتر می‌توان تشخیص داد.

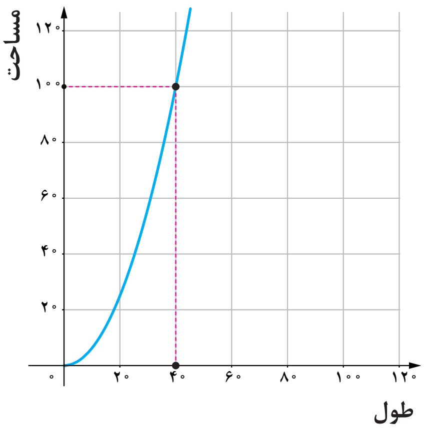
مثال ۹

اگر تابعی که در کار در کلاس (۱) به آن رسیدیم، را با h نشان دهیم دامنه این تابع $D_h=(۰,۱۰۰]$ و برای $x\in D_h$ قانون آن $h(x)=\frac{x^۲}{۱۶}$ است جدول زیر را برای این تابع در نظر می‌گیریم.

x	۴	۸	۱۶	۲۰	۳۶	۶۰	۸۰	۱۰۰
$h(x)$	۱	۴	۱۶	۲۵	۸۱	۲۲۵	۴۰۰	۶۲۵

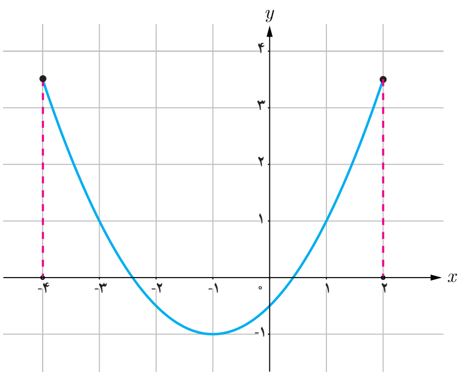
از طریق این جدول مشخص می‌شود که با زیاد شدن مقدار متغیر، مقادیر تابع نیز زیاد می‌شوند. روشن است که این جدول‌ها را نمی‌توان به ازای تمام مقادیر دامنه نوشت و فقط از تعدادی متناهی از اعداد در دامنه می‌توان استفاده کرد. معمولاً عددهایی را در دامنه انتخاب می‌کنند که مشخص شدن مقدار تابع در این نقاط، برای تشخیص رفتار تابع (چگونگی تغییرات تابع) در سرتاسر دامنه کافی باشد.

تشخیص رفتار تابع از طریق جدول چندان آسان نیست و نمودار تابع، بهتر می‌تواند رفتار تابع را نشان دهد. همانند کار در کلاس (۱) دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم. محور افقی نشان‌دهندهٔ طول قطعهٔ بریده شده و محور عمودی نشان‌دهنده مساحت مربع ساخته شده است. جدول بالا، فقط برخی از نقاط این نمودار را نشان می‌دهد. شکل روبه‌رو بخشی از نمودار این تابع می‌باشد.



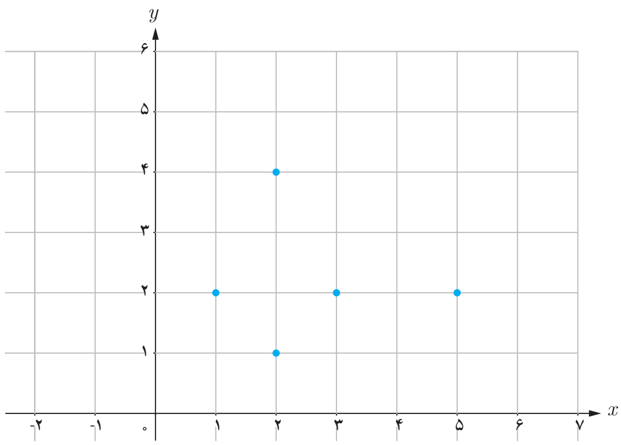
مثال ۱۰

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴,۲]$ رسم شده است.
نقطهٔ دلخواهی روی نمودار تابع در نظر بگیرید. از این نقطه خطی بر محور xها عمود کنید. طول نقطهٔ برخورد با محور افقی، یکی از مقادیر دامنه را نشان می‌دهد. اگر برای تمام نقطه‌های روی نمودار این عمل را انجام دهیم، همهٔ مقادیر دامنهٔ تابع به‌دست می‌آید.



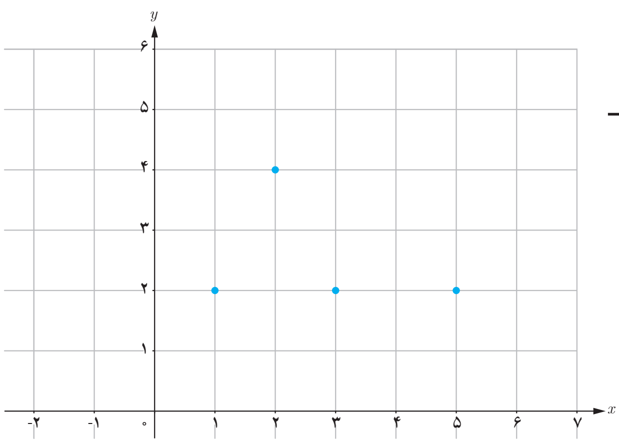
مثال ۱۱

x و y به ترتیب مقادیر متناظر دو کمیت (الف) و (ب) هستند. نقاط مشخص شده در صفحهٔ مختصات زیر، مقدارهای متناظر این دو کمیت را نشان می‌دهد. آیا کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است؟
برای اینکه کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد باید برای هر مقدار از کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به‌دست آید. مطابق شکل، وقتی x برابر ۲ می‌باشد، دو مقدار ۱ و ۴ برای y وجود دارد. بنابراین کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) نمی‌باشد.

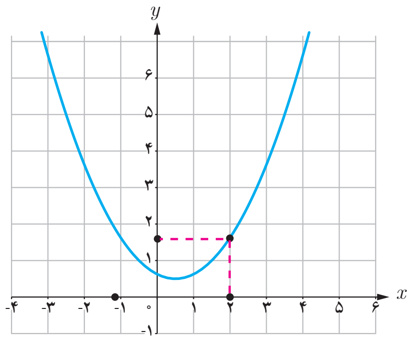


اگر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را از نقاط روی نمودار حذف کنیم، نمودار زیر به‌دست می‌آید. مشاهده می‌شود که برای هر مقدار از x، یک مقدار معین برای y به‌دست آید. پس در این حالت کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است. اگر این تابع را با f نام‌گذاری کنیم در این صورت $D_f = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$ و مقادیر تابع فقط برای مقادیر دامنه محاسبه می‌شود. یعنی $f(۱) = ۲, f(۲) = ۴, f(۳) = ۲, f(۵) = ۲$. جدول این تابع به‌صورت زیر است:

x	۱	۲	۳	۵
y	۲	۴	۲	۲



مثال ۱۲

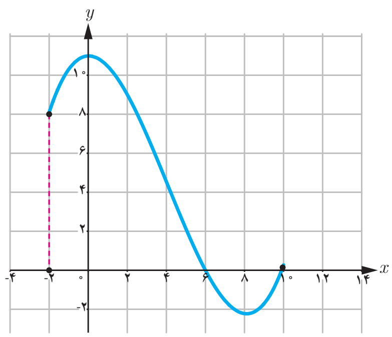


در روبه‌رو نمودار تابع h رسم شده است.
از نقطهٔ x=۲ خطی بر محور xها عمود کنید تا نمودار را قطع کند. از این نقطه خطی موازی محور xها رسم کنید تا محور yها را قطع کند. این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

این نقطه همان مقدار تابع به ازای x=۲ یعنی h(۲) است.

مثال ۱۳

نمودار تابع g به‌صورت زیر رسم شده است.



الف) دامنه g را بیابید.

ب) مقادیر تابع g را به ازای ۲-، ۱-، ۶ و ۷ بیابید.

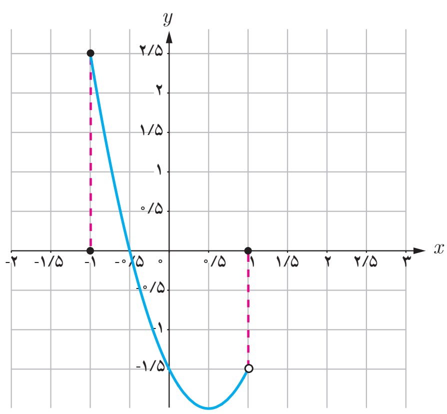
پ) آیا g(۱۱) معنایی دارد؟ چرا؟

الف) D_g=[-۲, ۱۰]

ب) g(-۲) =۸ , g(-۱) =۱۰ , g(۶) =۰ , g(۷) = -۱/۵

پ) g(۱۱) معنایی ندارد زیرا عدد ۱۱ در دامنه نیست.

مثال ۱۴



نمودار مقابل مربوط به تابع g است.

اگر از تمام نقطه‌های روی نمودار بر محور xها عمود کنیم، دامنهٔ این تابع بازه (۱ ,۱-] به‌دست می‌آید.

مسائل

۱ هر یک از جدول‌های زیر نمایش یک تابع با دامنهٔ $\{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$ می‌باشد. نمودار هریک را در صفحهٔ مختصات رسم کنید. در صورت امکان، قانون تابع را بنویسید.

الف)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۲	۰	۲	۴	۶

ب)

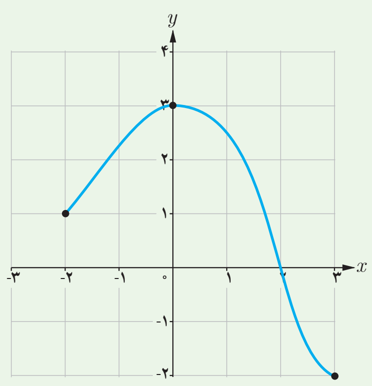
x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰	۱	۴	۹

۲ نمایش جدول تابع f با دامنهٔ $\{-۲, ۰, ۱, ۲, ۴\}$ به‌صورت زیر است:

x	-۲	۰	۱	۲	۴
$f(x)$	۰	۳	-۱	۳	۱

الف) مقادیر $f(۴)$، $f(۱)$ و $f(۰)$ را بیابید.

ب) نمودار f را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.



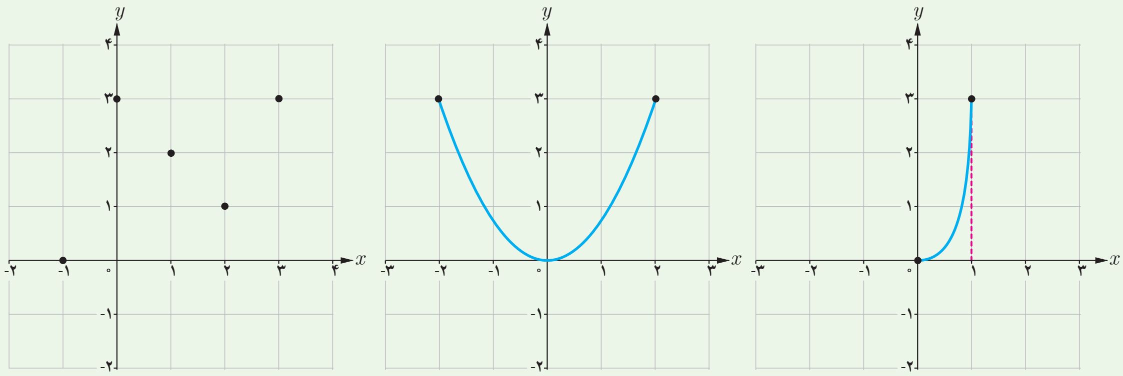
۳ نمودار تابع g به‌صورت روبه‌رو است:

الف) با توجه به شکل، دامنهٔ g را بنویسید.

ب) $g(۲)$، $g(-۲)$ و $g(۰)$ را به‌دست آورید.

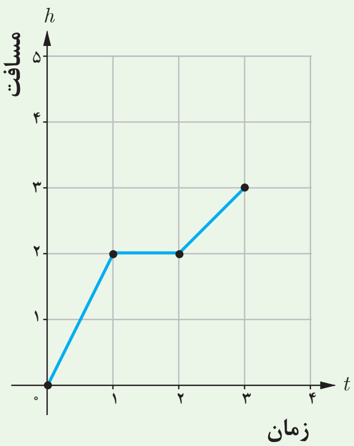
پ) آیا $g(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

۴ سه تابع زیر را درنظر بگیرید. دامنهٔ هریک از این تابع‌ها را بنویسید.



الف ب پ

۵ وضعیتی از زندگی روزمره را بنویسید که نمودار روبه‌رو نشان‌دهندهٔ آن وضعیت باشد.



۶ تابع g با دامنه $\{-۲, -۱, ۰, ۳\}$ را طوری رسم کنید که $g(-۲)=۱$ و $g(۰)=۲$.

۷ تابع دلخواه f با دامنهٔ $[-۱, ۴]$ را طوری رسم کنید که $f(-۱)=۱$ و $f(۲)=-۳$.

۸ تابع h با دامنهٔ $[۰, ۳]$ و قانون $h(x)=۳x^۲+a$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار a را طوری بیابید که $h(۱)=۲$.

ب) $h(۲)$ را بیابید.

پ) آیا $h(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

پودمان دوم

تابع‌های خطی و درجهٔ دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

گونه‌ای از گیاه بامبو پس از آنکه به ارتفاع تقریبی ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد، در هر ساعت به‌طور تقریبی، ۳/۸ سانتی‌متر رشد می‌کند. یعنی در یک شبانه‌روز این گیاه حدود ۹۱/۲ سانتی‌متر رشد می‌کند.

تابع‌های خطی

محمد علاقهٔ زیادی به گیاهان و پرورش آنها داشت. او با کمک مادرش، در باغچهٔ حیاط خانه‌شان، انواع گل و گیاه را کاشته بود و هر روز به آنها رسیدگی می‌کرد. او به‌اندازهٔ رشد هر کدام از این گیاهان دقت می‌کرد. برخی از آنها در روزهای متوالی رشدهای متفاوت و برخی دیگر رشد یکنواختی داشتند. محمد به مادرش گفت: جالب است! نحوهٔ رشد هر کدام از این گیاهان باهم فرق دارد.

مادر محمد که دبیر ریاضی بود به او گفت: دقیقاً همین‌طور است. پیشنهاد می‌کنم دو یا سه گیاه را انتخاب کنی و هرروز طول آنها را اندازه بگیری. در این‌صورت می‌توانی نحوهٔ رشد طولی هر کدام را بهتر درک کنی.

محمد به مادرش گفت: اگر مدتی این کار را انجام دهم، آیا می‌توانم پیش‌بینی کنم هر کدام از آنها بعد از یک ماه چقدر رشد طولی خواهند کرد؟

مادرش گفت: بله، باید یک مدل ریاضی برای رفتار رشد طولی آنها بنویسی تا بتوانی مقدار رشد طولی آنها را در روزهای آینده پیش‌بینی کنی.

انجام فعالیت صفحهٔ بعد می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم سازد.

فعالیت (۱)

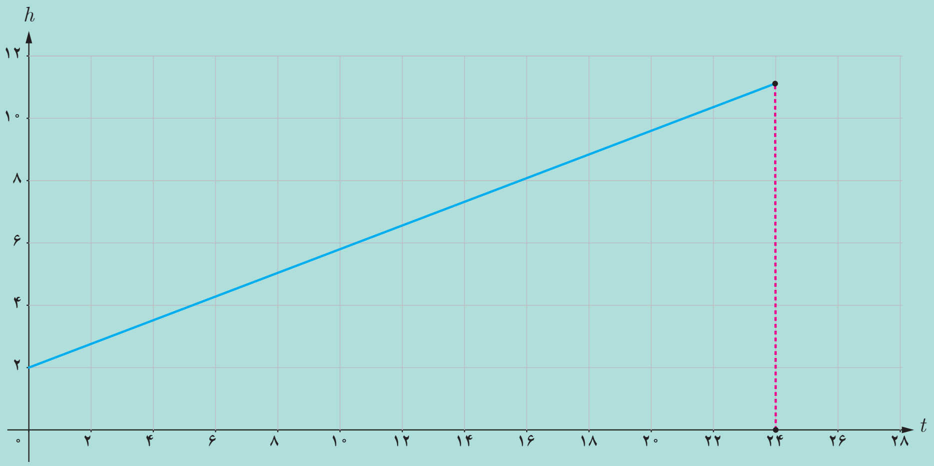
نوعی بامبو پس از آنکه به ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد، به‌طور تقریبی در هر ساعت ۳/۸ سانتی‌متر رشد می‌کند. ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر ارتفاع بامبو را (برحسب سانتی‌متر) پس از t ساعت با $h(t)$ نشان دهیم داریم: $h(t)$ =۲۰+۳/۸t.

اگر رشد بامبو را در یک شبانه‌روز در نظر بگیریم، دامنه این تابع [۰,۲۴] خواهد بود.

۱ جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

t (برحسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (برحسب سانتی‌متر)	....	....	....	....	....

نمودار زیر، نمودار تابع $h(t)$ =۲۰+۳/۸t را نشان می‌دهد.



۲ به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t، مقدار h چه تغییری می‌کند؟

....

۳ رابطهٔ بین دو کمیت h و t، خطی است یا غیر خطی؟ چرا؟

....

۴ h(۲) چه چیزی را نشان می‌دهد؟ h(۱۸) چطور؟

....

۵ اگر ۳۹= $h(a)$, a را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

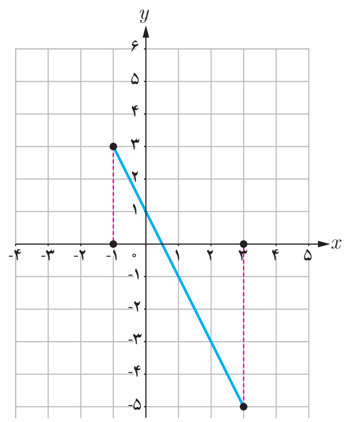
همان طور که می‌بینید در فعالیت (۱)، h و t با هم رابطهٔ خطی دارند و قانون تابعی که رابطهٔ آنها را توصیف می‌کند، یک چند جمله‌ای درجهٔ ۱ است. در این تابع به‌ازای هر ۱ واحد افزایش متغیر تابع، مقدار تابع ۳/۸ واحد افزایش می‌یابد. نمودار این تابع، یک خط راست با شیب ۳/۸ است.

تعریف

تابع‌هایی را که بتوان با قانون $f(x)=ax+b$ (a و b دو عدد مشخص هستند) نوشت، **تابع‌های خطی** می‌نامند. دامنهٔ این تابع‌ها می‌تواند $\mathbb{R}$ یا هر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. نمودار تابع‌های خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به‌صورت خط راست است. ویژگی اساسی تابع‌های خطی، آن است که به‌ازای هر ۱ واحد افزایش یا کاهش متغیر تابع، مقدار تابع به اندازهٔ ثابتی تغییر می‌کند.

مثال ۱

تابع خطی $f(x)=-۲x+۱$ را با دامنهٔ $[-۱, ۳]$ در نظر بگیرید. مقدار تابع را در دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ به کمک قانون آن به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.



داریم $f(-۱)=۳,\ f(۳)=-۵$. پس $\begin{bmatrix}-۱\\ ۳\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۳\\ -۵\end{bmatrix}$ دو نقطه از نمودار این تابع هستند و نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است.

جدول زیر تعدادی از نقاط روی این خط را نشان می‌دهد.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
$-۲x+۱$	۳	۱	-۱	-۳	-۵

$\boxed{-۲}$ $\boxed{-۲}$ $\boxed{-۲}$ $\boxed{-۲}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با هر ۱ واحد افزایش متغیر، مقدار تابع ۲ واحد کاهش می‌یابد و این نشان می‌دهد شیب خط ۲- است.

کار در کلاس ۱

رضا علاقهٔ زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل، ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

۱ رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

....

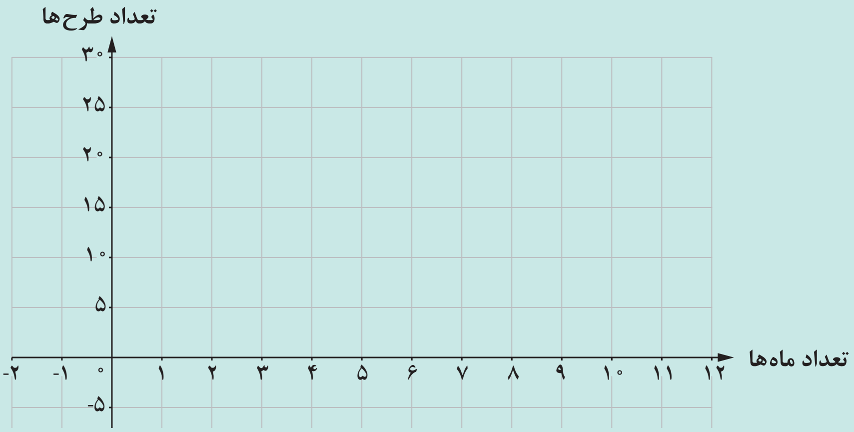
۲ اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنهٔ آن را بنویسید.

....

۳ مقادیر $f(۱۰), f(۰)$ را به‌دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(-۱)$ معنایی دارد؟

....

۴ اگر دامنهٔ تابع را بازهٔ $[۰ , ۱۲]$ در نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.



۵ اگر $f(a) = ۱۷$ مقدار a را به‌دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

....

با مرور آنچه که دربارهٔ تابع‌های خطی دیدیم، مشاهده می‌شود که در برخی از تابع‌های خطی، با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع به میزان ثابتی افزایش می‌یابد و در برخی دیگر به‌میزان ثابتی کاهش می‌یابد.
آیا می‌توان تابع‌های خطی پیدا کرد که با افزایش یا کاهش مقدار متغیر، مقدار تابع تغییر نکند؟
در فعالیت زیر این نوع از تابع‌های خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

فعالیت (۲)

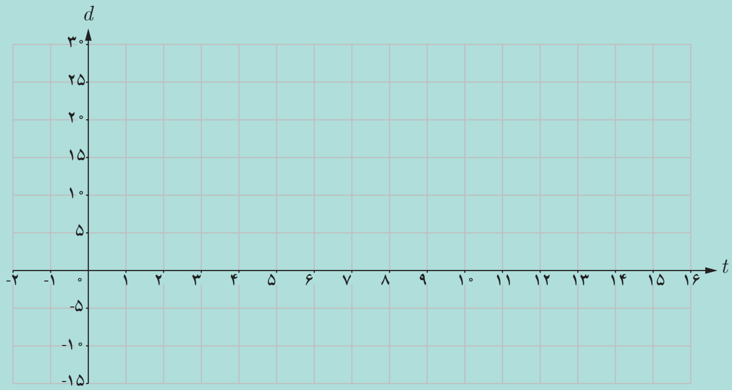
خودرویی از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۲۰ ثانیه است.

۱ مقدار مسافت طی شده به‌وسیلهٔ خودرو از نقطه A، پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟

۲ جدول زیر را کامل کنید.

t(زمان توقف برحسب ثانیه)	۰	۲	۵	۱۰	۲۰
d(مسافت طی شده برحسب کیلومتر)	—	—	—	—	—

۳ نمودار تابع را از زمان t=۰ تا زمان t=۲۰ رسم کنید.



۴ با تغییر زمان (t)، مسافت طی شده (d) چه تغییری می‌کند؟

در بازهٔ زمانی [۰,۲۰] که چراغ، قرمز است و خودرو پشت چراغ قرمز متوقف است، گرچه زمان می‌گذرد، مسافت طی شدهٔ خودرو از نقطهٔ A، ۲ کیلومتر است و تغییری نمی‌کند. قانون این تابع خطی، به‌صورت $f(t)=$۲ است و نمودار آن پاره خطی به موازات محور xهاست. در این فعالیت تابعی را بررسی کردیم که به ازای تمام مقادیر دامنه، مقداری ثابت دارد. این نوع تابع‌ها، ساده‌ترین نوع توابع خطی هستند.

تعریف

تابعی را که به‌ازای تمام مقادیر متغیر، مقداری ثابت دارد، **تابع ثابت** می‌نامند.

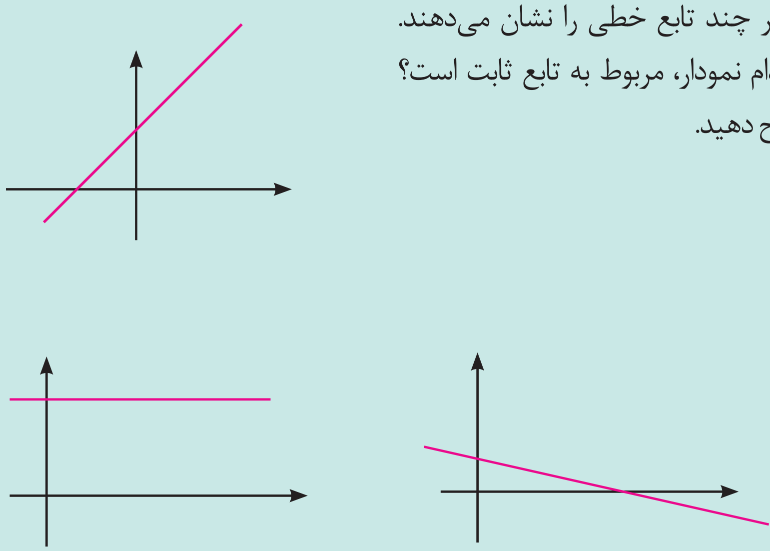
اگر f یک تابع ثابت باشد قانون آن به صورت $f(x)=c$ می‌باشد که در آن c یک عدد مشخص است. نمودار تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$ خطی به موازات محور xها (شیب صفر) است.

مثال ۲

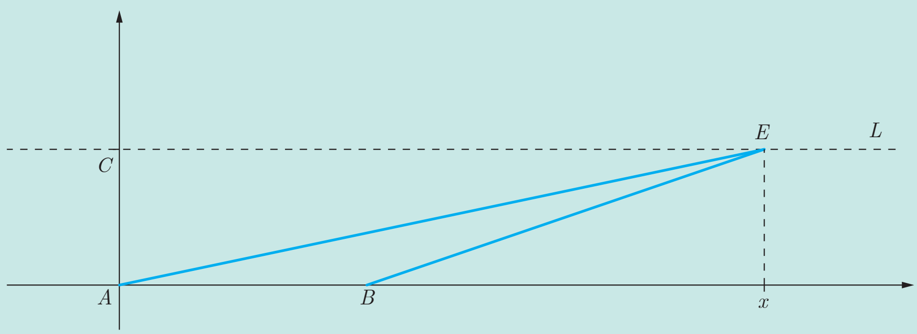
معمولاً پس از ۲۲ سالگی رشد قد متوقف می‌شود. طول قد که تابعی از زمان است در بازهٔ زمانی تقریبی ۲۲ سالگی تا حدود ۶۰ سالگی، تقریباً ثابت است. بنابراین طول قد افراد به عنوان تابعی بر حسب سن افراد، در این بازه، یک تابع ثابت است.

کار در کلاس ۲

۱ نمودارهای زیر چند تابع خطی را نشان می‌دهند. مشخص کنید کدام نمودار، مربوط به تابع ثابت است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



۲ در صفحهٔ مختصات زیر، مثلثی با رئوس $A=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ رسم کنید.



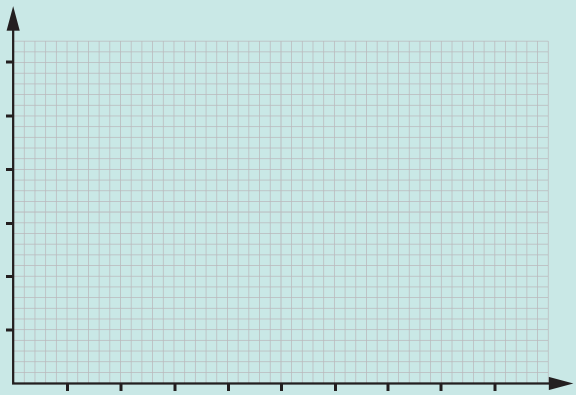
الف) در جدول زیر، x طول نقطه‌ای از خط L (مانند E) است و S (تابعی از x) مساحت مثلث ABE است. جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

x	‑۲	‑۱	۰	۱	۲
$S(x)$	....	....	....	....	....

ب) قانون این تابع را بنویسید و توضیح دهید چرا S تابعی خطی از x است؟

....

پ) با استفاده از جدول، نمودار تابع را رسم کنید.



می‌دانیم نمودار هر تابع خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک خط راست است. نمودار تابع خطی $f(x)=ax+b$ با تغییر مقادیر a و b چگونه تغییر می‌کند؟ فعالیت روبه‌رو، می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم کند.

فعالیت (۳)

تابع خطی $f(x)=ax+b$ را در نظر بگیرید. با استفاده از جئوجبرا مطابق دستورالعمل صفحهٔ ۴۳، دو لغزنده برای a و b در نظر بگیرید.

۱ با ثابت نگه‌داشتن a و تغییر مقادیر b، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟

۲ با ثابت نگه داشتن b، به ازای مقادیر مختلف a، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟

۳ اگر a مثبت باشد، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها چگونه است؟ اگر a منفی باشد، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها چگونه است؟

فعالیت بالا نشان می‌دهد که با ثابت ماندن a و تغییر b نمودار تابع، خط‌هایی هستند که با یکدیگر موازی هستند. اگر b افزایش یابد، این خط به موازات خود به بالا منتقل می‌شود و اگر b کاهش یابد، این خط به موازات خود به پایین منتقل می‌شود و با صفرشدن b، خط از مبدأ می‌گذرد. با ثابت ماندن b و تغییر a خط‌هایی به دست می‌آیند که شیب‌های مختلفی دارند و همگی از یک نقطه می‌گذرند. اگر a مثبت باشد، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها، زاویهٔ تند و اگر a منفی باشد این زاویه باز است.

مثال ۳

نمودار همهٔ تابع‌های خطی با قانون $f(x)=ax+۳$، در چه نقطه‌ای مشترک هستند؟

تابع‌های خطی $f(x)=ax+۳$ را در نظر می‌گیریم.

برای مثال:

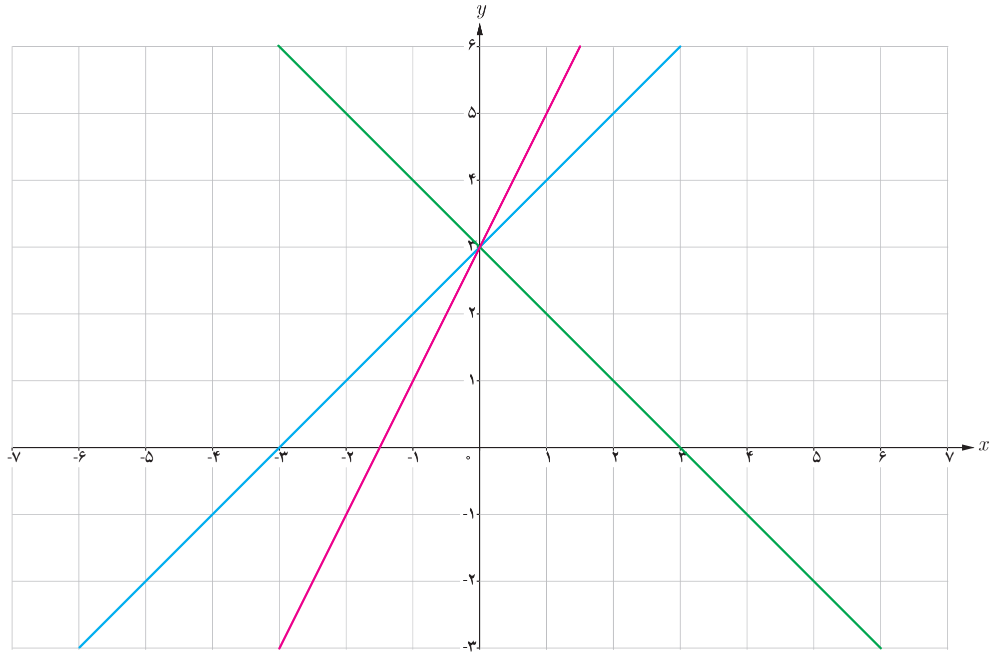
اگر $a=۱$ باشد، در این‌صورت قانون تابع $f(x)=x+۳$ است.

اگر $a=۲$ باشد، در این‌صورت قانون تابع $f(x)=۲x+۳$ است.

اگر $a=-۱$ باشد، در این‌صورت قانون تابع $f(x)=-x+۳$ است.

مشاهده می‌کنیم که برای مقدارهای مختلف a، تابع‌های مختلفی به دست می‌آید. برای رسم نمودار این تابع‌ها به کمک جئوجبرا، ابتدا لغزنده‌ای به‌نام a تعریف می‌کنیم (مطابق دستورالعمل صفحهٔ ۴۳). با کلیک راست روی نمودار، گزینهٔ ردیابی را فعال می‌کنیم تا بتوانیم نمودار این تابع‌ها را هم‌زمان مشاهده کنیم.

شکل زیر نمودار برخی از این تابع‌ها را نشان می‌دهد.



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نمودار این تابع ها، در نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ همدیگر را قطع می‌کنند. پس تمام این تابع‌های خطی از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

کار در کلاس ۳

۱ وضعیت خط‌های به معادلهٔ $۲y+۵x=c$ را به ازای مقادیر مختلف c، توصیف کنید. شیب این خط‌ها چقدر است؟

....

....

۲ وضعیت خط‌های به معادلهٔ $۲y+cx=۴$ را به ازای مقادیر مختلف c، توصیف کنید. این خط‌ها از چه نقطه مشترکی می‌گذرند؟

....

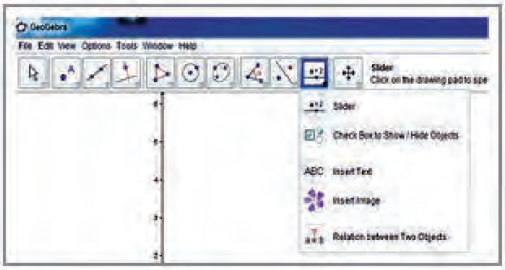
۳ آیا هر خطی در صفحهٔ مختصات، نمودار یک تابع خطی است؟ چرا؟

....

استفاده از نرم‌افزار

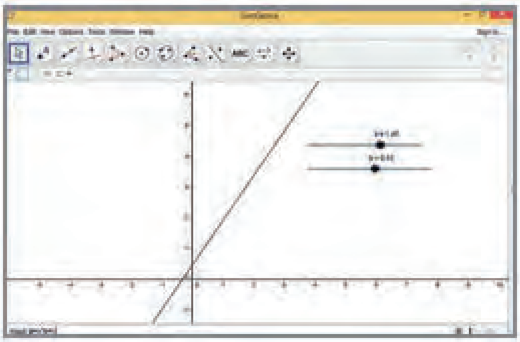
لغزنده در جئوجبرا

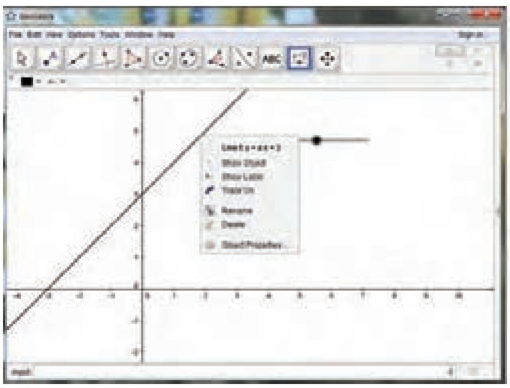
از نوار ابزار نرم افزار جئوجبرا دو Slider یا لغزنده به نام‌های a وb انتخاب کنید و دامنه تغییرات برای هرکدام تعریف کنید.



سپس در قسمت وارد کردن تابع، فرمول تابع را که شامل a و b است بنویسید.

برای تغییر مقدار a وb، نقطه روی لغزنده را حرکت دهید.





مسائل

۱ در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهار تابع داده شده است. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

x	-۲	-۱	۰	۱
$g(x)$	۵	-۱۰	-۲۵	-۴۰

x	-۲	-۱	۰	۱
$f(x)$	-۸	-۱	۰	۱

x	۰	۱	۲	۳
$k(x)$	۱	۳	۵	۷

x	-۲	-۱	۰	۱
$h(x)$	۵	۵	۵	۵

۲ علی در یک شرکت بیمه کار می‌کند. او ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان به‌عنوان حقوق پایه دریافت می‌کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می‌کند، ۵۰,۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می‌شود.

الف) قانونی برای حقوق علی به‌عنوان تابعی از تعداد مشتری‌هایی که ماهانه جذب می‌کند، بنویسید.

ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید برای شرکت جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر خواهد بود؟

پ) چرا این تابع خطی است؟

ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

۳ آرمان سوار بر یک کشتی، در فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنهٔ تابع مربوط به فاصلهٔ آرمان از ساحل (برحسب کیلومتر) را برحسب t (زمان برحسب ساعت) بنویسید.

ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

....

پ)چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

....

۴ دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجهٔ سانتی‌گراد بوده است.

الف)جدول زیر را کامل کنید.

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما برحسب درجه سانتی‌گراد)							

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

....

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟

ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.

....

۵ رابطهٔ بین دو واحد اندازه‌گیری دما، درجهٔ سانتی‌گراد (c) و درجهٔ فارنهایت (F) با قانون $F(c)=\frac{۹}{۵}c+۳۲$ بیان می‌شود.

الف) مقدارهای $F(۲۸)$ و $F(-۴۰)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

....

ب) دمای صفر درجهٔ سانتی‌گراد، معادل چند درجهٔ فارنهایت است؟

....

پ) اگر $F(c)=۲۱۲$، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

تابع‌های درجهٔ دوم

گفتگو

صدرا در ایام تعطیلات تابستان به همراه خانواده‌اش به شهر تبریز سفر کرده بود. آنها با استفاده از یک دفترچهٔ راهنما که از ایستگاه گردشگری شهر دریافت کرده بودند، هر روز از یک مکان تاریخی یا یک موزه دیدن می‌کردند. آن روز برای بازدید به مسجد کبود رفته بودند. صدرا تمام مدت به سقف مسجد خیره و محو زیبایی آن شده بود.

او به پدرش گفت: معماران چگونه توانسته‌اند انحنای گنبد را با این دقت ایجاد کنند. آیا معماران در زمان قدیم از ریاضیات مربوط به این معماری اطلاع داشته‌اند؟! پدرش به او گفت که بهتر است این سؤال را از دبیر ریاضی‌اش بپرسد. وقتی صدرا این موضوع را برای دبیرش تعریف کرد، دبیر ریاضی گفت: این منحنی‌ها از ساده‌ترین نوع منحنی‌ها در ریاضی هستند، که منحنی‌های درجهٔ دوم نامیده می‌شوند. نمونه‌ای از این منحنی‌ها، نمودار $f(x)=x^۲$ است.

تعریف

تابع‌هایی را که بتوان قانون آنها را به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم نوشت، یک **تابع درجهٔ دوم** می‌نامند. قانون یک تابع درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ است که درآن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند $(a\neq ۰)$. دامنهٔ این تابع‌ها می‌توانند $\mathbb{R}$ یا هر زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشند.

مثال ۴

تابع‌های زیر نمونه‌هایی از تابع درجهٔ۲ با دامنه $\mathbb{R}$ هستند.

۱) $f(x)=۲x^۲+۳x+۱$

۲) $g(x)=-۳x^۲+۵$

۳) $h(x)=۱/۲x^۲-۵x+۲$

اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که نمودار تابع‌های درجهٔ دوم دلخواه چگونه است. با توجه به اینکه با نمودار تابع درجهٔ دوم $y=x^2$ آشنا هستید، با نوشتن قانون $f(x)=ax^2+bx+c$ به فرم $f(x)=k(x-q)^2+p$ می‌توانیم نمودار هر تابع درجهٔ ۲ دلخواه را بررسی و رسم کنیم.
فعالیت زیر، شما را با شکل کلی نمودار تابع‌های درجهٔ دوم آشنا خواهد کرد.

فعالیت (۴)

به کمک جئوجبرا نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید).

۱ نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=x^2+p$ را به ازای مقادیر مختلف p رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=x^2+p$ را با نمودار تابع $y=x^2$ توصیف کنید.

....

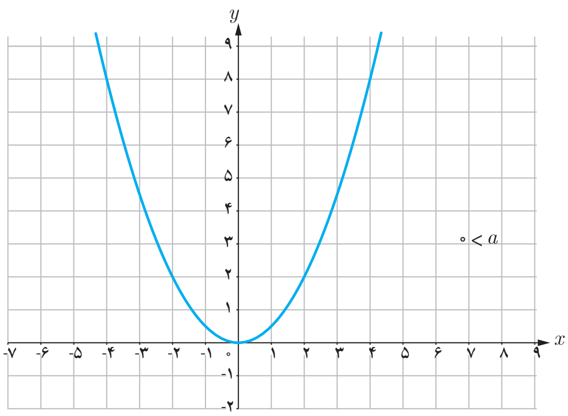
۲ نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=(x-q)^2$ را به ازای مقادیر مختلف q رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=(x-q)^2$ را با نمودار تابع $y=x^2$ توصیف کنید.

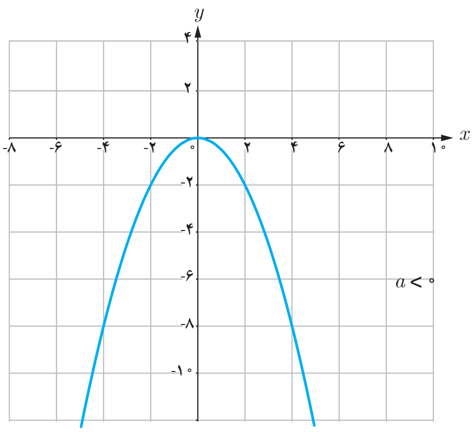
....

۳ نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=kx^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت و منفی برای k رسم کنید. با تغییر علامت k از مثبت به منفی چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

....

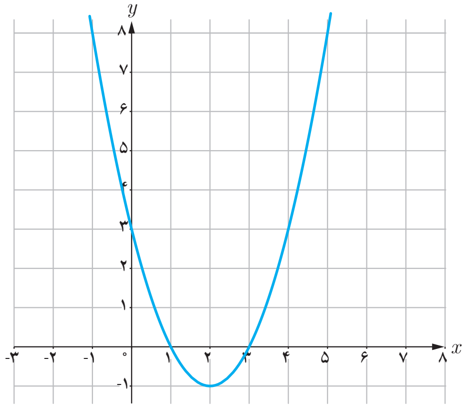
در فعالیت (۴)، با شکل کلی نمودار برخی از تابع‌های درجهٔ دوم آشنا شدید. نمودار هر تابع درجهٔ دوم از طریق نمودار تابع $y=ax^2$ با انتقال به پایین یا بالا (قسمت (۱)) و انتقال به چپ یا راست (قسمت (۲)) ساخته می‌شود. نمودار $y=ax^2$ برای حالت $a>0$ و $a<0$ در زیر آمده است.





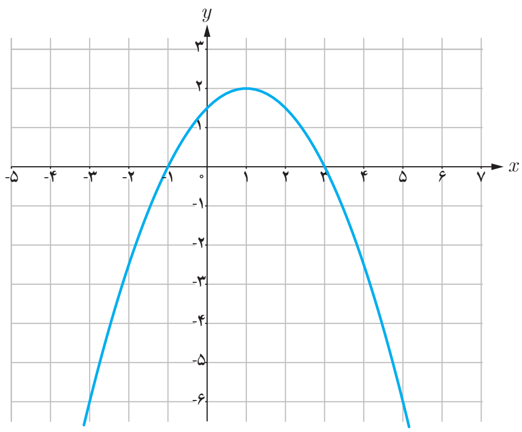
مثال ۵

الف) نمودار تابع $y=(x-2)^2-1$ را رسم می‌کنیم.



نمودار این تابع همان نمودار تابع $y=x^2$ است که به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست و به اندازهٔ ۱ واحد به پایین منتقل شده است.

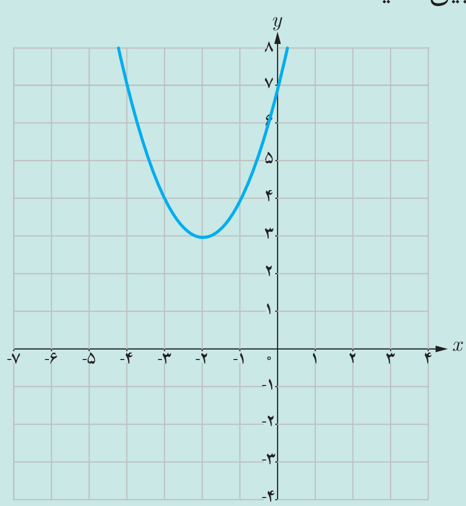
ب) اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $y=k(x-q)^2+p$ به شکل زیر باشد، علامت k و مقدار p و q را تعیین کنید.



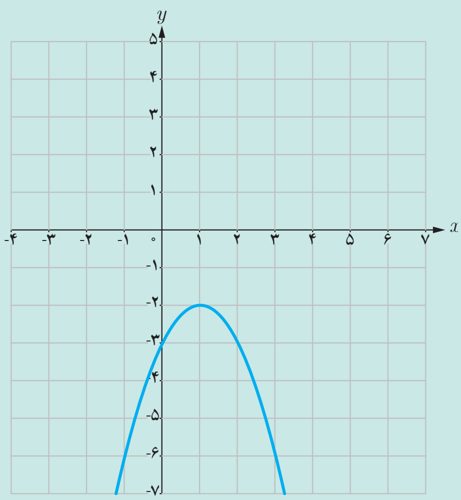
به سمت پایین بودن نمودار، نشان می‌دهد که $k<0$. این شکل نشان می‌دهد که نمودار تابع $y=kx^2$، ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا منتقل شده است، پس $q=1$ و $p=2$.

کار در کلاس ۴

نمودارهای زیر مربوط به تابع درجهٔ دوم $y=k(x-q)^2+p$ می‌باشد، علامت k ومقدار p و q را تعیین کنید.



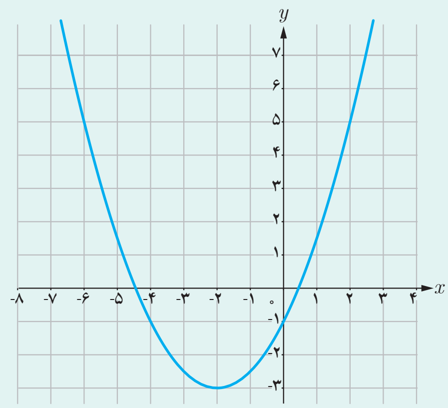
الف



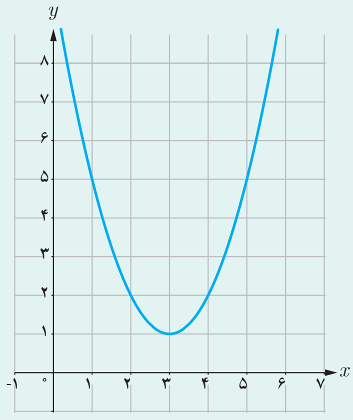
ب

مسائل

۱ نمودارهای زیر مربوط به تابع درجهٔ دوم، $y=k(x-q)^۲+p$ هستند. علامت k و مقدار q , p را تعیین کنید.



الف



ب

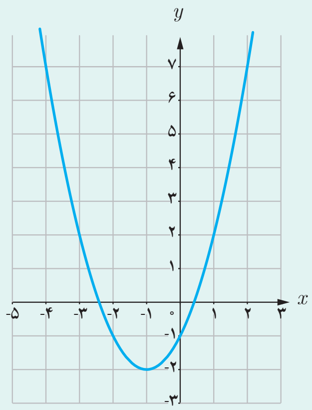
۲ نمودار روبه‌رو مربوط به یک تابع درجهٔ دوم است. مشخص کنید که کدام قانون، مربوط به این نمودار است.

الف) $f(x)=(x-۱)^۲+۱$

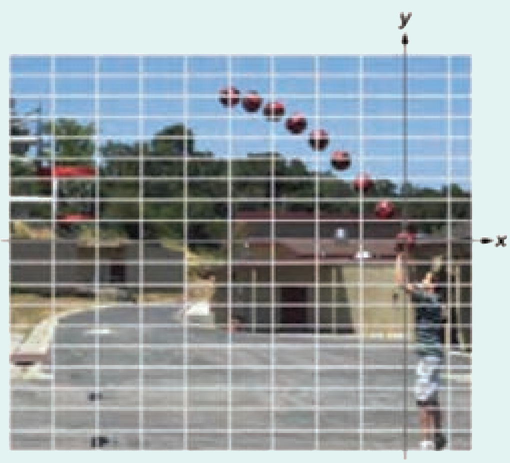
ب) $f(x)=(x-۱)^۲-۱$

پ) $f(x)=(x+۱)^۲+۲$

ت) $f(x)=(x+۱)^۲-۲$



۳ فرید بسکتبال بازی می‌کند. تصویر روبه‌رو یک پرتاب او را به سمت سبد نشان می‌دهد. صفحهٔ مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً روی نقطهٔ پرتاب توپ قرار گیرد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجهٔ دوم با قانون $h(x)=k(x-q)^۲+p$ است. علامت k و p و q را تعیین کنید.



کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها

گفتگو

برف شدیدی در حال باریدن بود. امیر و امین و چند نفر از هم‌کلاسی‌هایشان به همراه دبیر ریاضی خود قرار بود فردای آن روز به کوه بروند. پدر امیر که کوه‌نوردی حرفه‌ای بود به آنها قول داده بود که به‌همراه گروه، فردا به کوه بیاید تا گروه را راهنمایی کند. او به گروه توصیه کرد لباس گرم همراه داشته باشند.

صبح زود، گروه در حال بالا رفتن از کوه بود که امیر گفت: من سردم شده است. پدرش به او گفت: بهتر است یکی از لباس‌هایی را که آورده‌ای بپوشی، هر چه بالاتر برویم، هوا سردتر می‌شود. امیر رو به دبیر ریاضی کرد و گفت: معلوم می‌شود دما به ارتفاع بستگی دارد. آیا دما، تابعی از ارتفاع است؟ دبیر گفت: بله همین طور است. در واقع به ازای هر ۱۵۰ متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. امین پرسید: آیا می‌توانیم بفهمیم در چه ارتفاعی، دمای هوا صفر درجه می‌شود؟ دبیر قول داد که در کلاس، راجع به این موضوع بیشتر بحث کنند.

فعالیت (۵)

اگر دما در سطح دریا ۱۵ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، در کوه دماوند رابطهٔ بین دما (T بر حسب درجه سانتی‌گراد) و ارتفاع از سطح دریا (h بر حسب متر) با قانون $T(h)=۱۵-\frac{h}{۱۵۰}$ مشخص می‌شود. در اینجا T تابعی از h است و دامنهٔ این تابع بازهٔ $[۰,۵۶۱۰]$ است.

(۵۶۱۰، ارتفاع قلهٔ دماوند برحسب متر است)

۱ $T(۰)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

۲ در ارتفاع ۱۸۰۰ متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

....

۳ نمودار تابع T در زیر رسم شده است. با توجه به نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. روی محور افقی هر واحد را ۱۰۰متر در نظر می‌گیریم.

الف) تابع T ، از درجهٔ .... است.

ب) نمودار این تابع درچه نقطه‌ای محورافقی (ارتفاع) را قطع می‌کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

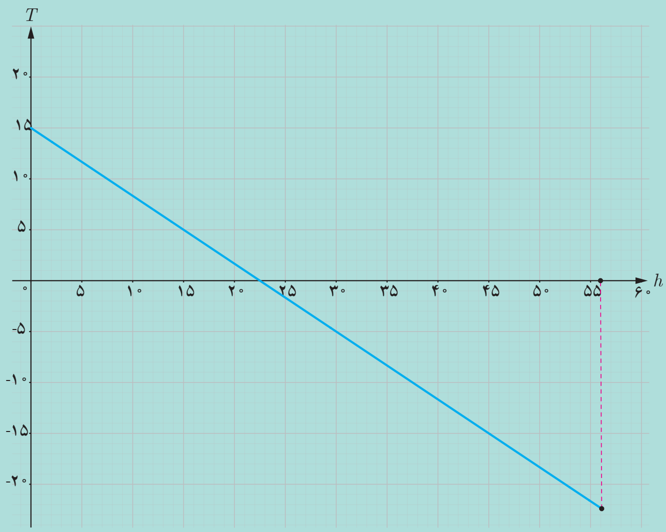
....

۴ جواب معادلهٔ $۱۵-\frac{h}{۱۵۰}=۰$ را بیابید. جواب این معادله چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

۵ از مقایسه (۳) و (۴) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

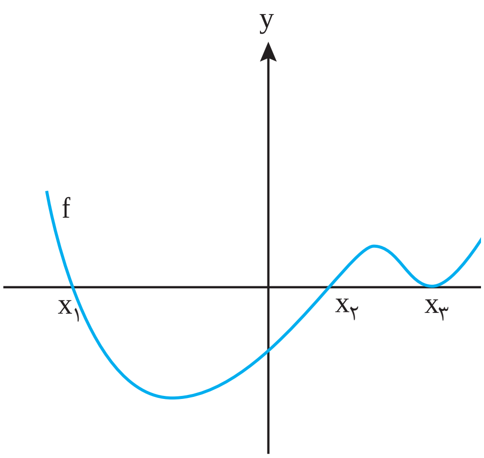
....



در فعالیت (۵) دیدیم که نمودار تابع T، محور افقی را در نقطه $h=۲۲۵۰$ قطع می‌کند؛ یعنی دما، در ارتفاع ۲۲۵۰ متری از سطح دریا، صفر درجهٔ سانتیگراد است. همچنین دیدیم، برای پیدا کردن جواب معادلهٔ $۱۵-\frac{h}{۱۵۰}=۰$ ، کافی است طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $T(h)=۱۵-\frac{h}{۱۵۰}$ با محور افقی را بیابیم.

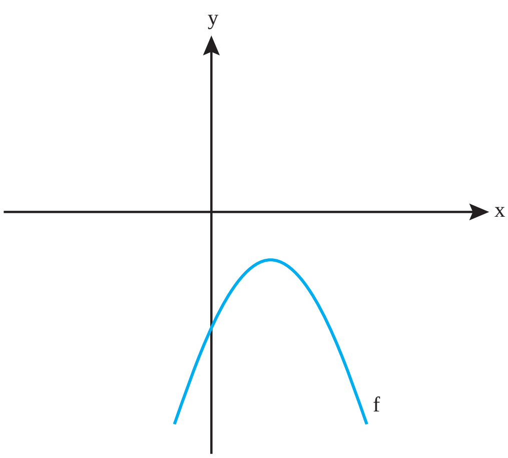
در حالت کلی برای حل معادلهٔ $ax+b=۰$ می‌توان نمودار تابع $f(x)=ax+b$ را رسم کرد. طول محل برخورد نمودار این تابع با محور xها همان جواب معادلهٔ $ax+b=۰$ است.

همچنین، برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ می‌توان نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ را رسم کرد. طول محل‌های برخورد نمودار این تابع با محور xها (درصورت وجود) همان جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم هستند.



از این روش می‌توان برای حل همهٔ معادله‌ها استفاده کرد. هر معادله‌ای را می‌توان به شکل کلی $f(x)=۰$ نوشت که در آن f تابعی با دامنهٔ مشخص است. با رسم نمودار f، محل‌های برخورد نمودار با محور xها (درصورت وجود) جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند. در شکل روبه‌رو، نقاط $x_{۱}$، $x_{۲}$ و $x_{۳}$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند. اگر نمودار f محور xها را قطع نکند، به این معناست که معادلهٔ $f(x)=۰$ جواب ندارد.

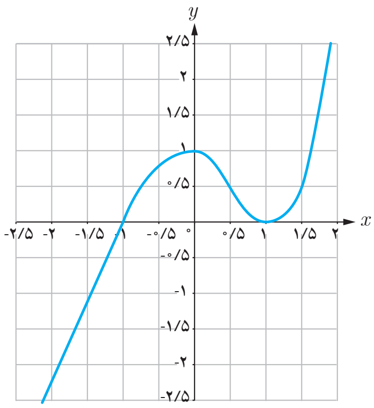
مثال ۶



معادلهٔ $-x^{۲}+۲x-۲=۰$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.

شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=-x^{۲}+۲x-۲$ را نشان می‌دهد. این نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. پس معادلهٔ بالا جواب ندارد.

مثال ۷



معادلهٔ $x^3-x^2-x+1=0$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.

نمودار تابع $y=x^3-x^2-x+1$ را به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

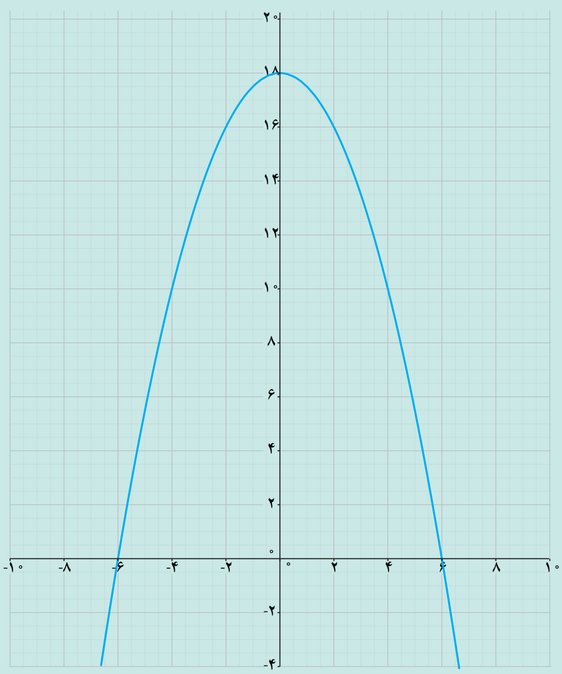
این نمودار، محور طول‌ها را در نقاط ± 1 قطع می‌کند، پس جواب‌های آن معادله، ± 1 هستند.

کار در کلاس ۵

آب از بالای آبشاری که ارتفاع آن ۱۸۰ متر است، به رودخانه می‌ریزد. تابع $h(t)=-5t^2+180$ ارتفاع یک قطرهٔ آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جدا شدن از بالای آبشار نشان می‌دهد.

۱ ارتفاع یک قطره آب از سطح رودخانه بعد از ۲ ثانیه، چقدر است؟

....



۲ نمودار تابع با قانون $h(t)$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ آورده شده است. (زمان را روی محور افقی و ارتفاع را روی محور عمودی،هر واحد ۱۰متر، در نظر بگیرید.) نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور xها را قطع می‌کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

....

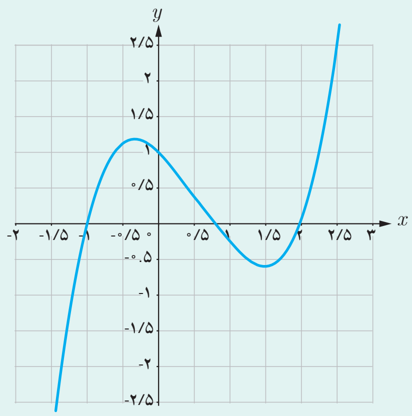
۳ جواب‌های معادلهٔ $-5t^2+180=0$ چه مقادیری هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.

....

۴ دامنهٔ تابع h را طوری تعیین کنید که قانون $h(t)$ ارتفاع قطره آب از سطح رودخانه را مشخص کند.

....

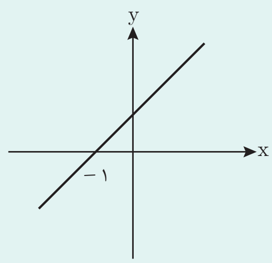
۱ اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، کدام گزینه جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ است.



الف) ۲ و ۲ـ و ۱ـ ب) ۱ و ۱ـ و ۰/۸

پ) ۲ و ۰/۸ و ۱ـ ت) معادله جواب ندارد.

۲ شکل زیر نمودار خط به معادلهٔ $y=ax+۲$ است.
با استفاده از شکل a را پیدا کنید.



۳ معادلات زیر را به کمک رسم نمودار با استفاده از جئوجبرا حل کنید.

الف) $۳x-۶=۰$ پ) $x^۲+۵x+۶=۰$ ث) $x^۳-۳x^۲+۳x-۱=۰$

ب) $-۳x^۲-۲x=۱۶$ ت) $x^۳-x^۲=۴x+۱$ ج) $x^۳-۳x-۲=۰$

۴ توپی را به هوا پرتاب می‌کنیم. ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (برحسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با h و زمان را با t نشان دهیم برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت $h(t)=-۵t^۲+۲۰t$ است. دامنه تابع $[۰,۴]$ است.

در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ چند جواب به دست می‌آید؟چرا؟

کاربرد تابع‌ها در حل نامعادله‌ها

گفتگو

یک مؤسسهٔ خیریه با هدف کمک به ایتام و کودکان بی سرپرست فعالیت می‌کند. این مؤسسه به‌طور فصلی نمایشگاهی از دست سازها، برگزار می‌کند و درآمد حاصل از فروش آنها، را صرف این کودکان می‌کند.

در نمایشگاه سال قبل، درآمد حاصل از فروش یک نوع دست ساز، ۸ میلیون تومان بوده است. هیئت مدیرهٔ مؤسسه تصمیم گرفته است که در سال جاری، درآمد حاصل را به بیش از ۸ میلیون تومان برساند. بر اساس اطلاعات اقتصادی، رابطهٔ بین قیمت این کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $x=۸۰۰۰۰-۲۰۰p$ است که در آن p قیمت کالا (بر حسب هزار تومان) و x تعداد کالای فروخته شده است.

آنها تصمیم دارند قیمت کالا را طوری تنظیم کنند تا درآمد حاصل از فروش به بیش از ۸ میلیون تومان برسد. با انجام فعالیت زیر می‌توانیم مدلی برای پاسخ‌گویی به این مسئله بسازیم.

فعالیت (۶)

۱ درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادلهٔ درآمد را تشکیل دهید.

....

۲ رابطهٔ بین قیمت کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $x=۸۰۰۰۰-۲۰۰p$ است. تابع درآمد را برحسب p بنویسید.

....

۳ چندجمله‌ای قانون تابع درآمد بر حسب p از درجهٔ چند است؟

....

۴ رابطه‌ای برای p بنویسید که در آن، درآمد حاصل از فروش دست سازها، بیشتر از ۸ میلیون تومان باشد.

....

همان طور که در فعالیت بالا دیدید، هدف مؤسسه، پیدا کردن رابطه‌ای بین قیمت کالا و درآمد حاصل از فروش است تا با قیمت‌گذاری مناسب، درآمدی بیش از ۸ میلیون تومان داشته باشد. مدل ریاضی این مسئله یک نامساوی است که با استفاده از آن می‌توان شرایط مطلوب مسئله را برقرار کرد.
این گونه نامساوی‌ها را **نامعادله** می‌نامند.

تعریف

نامساوی‌هایی به صورت $ax^2+bx+c \leq 0$ یا $ax^2+bx+c \geq 0$ را که در آنها a, b, c اعداد مشخصی هستند ($a\neq 0$) **نامعادلهٔ درجهٔ دوم** می‌نامند. مقدارهایی از x که نامعادله را به یک نامساوی درست تبدیل می‌کنند، **جواب‌های نامعادله** می‌نامند.

مثال ۸

توپی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۵ متر به هوا پرتاپ شده است. ارتفاع این توپ از سطح زمین، به عنوان تابعی از زمان t (برحسب ثانیه) در یک پرتاب خاص با تابع $h(t)=-5t^2+12t+15$ بیان شده است. اگر بخواهیم زمان‌هایی را که ارتفاع توپ بیش از ۱۸ متر است به‌دست آوریم، باید نامعادلهٔ $-5t^2+12t+15>18$ را تشکیل دهیم که می‌توان آن را به صورت $-5t^2+12t-3>0$ نوشت.
جواب‌های این نامعادله همان زمان‌هایی است که ارتفاع توپ بیش از ۱۸ متر است.

کار در کلاس ۶

در یک شرکت سازندهٔ تلفن همراه، رابطهٔ بین قیمت فروش تلفن همراه (p)، (برحسب صدهزار تومان) و تعداد تلفن همراه فروخته شده (x)، از رابطهٔ $p=15-0/25x$ به دست می‌آید.

۱ مقدار x را بر حسب p بنویسید.

....

۲ درآمد حاصل از فروش تعداد x کالا ($R(p)$) را بر حسب p بنویسید.

....

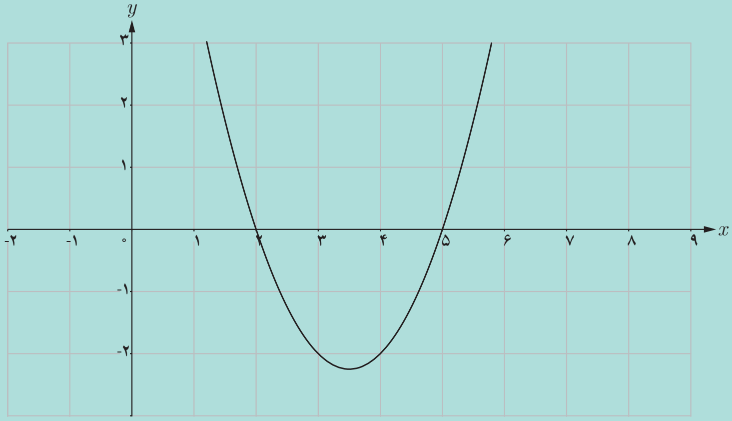
۳ نامعادله‌ای بنویسید که نشان دهد برای چه مقدارهای p، درآمد حاصل از فروش، بیشتر از ۴۰۰ میلیون است.

....

همان طور که مشاهده می‌کنید مدل ریاضی برخی از مسائلی که با آن روبه‌رو می‌شویم به صورت نامعادله است و برای حل مسئله لازم است نامعادله را حل کنیم. در بخش قبل دیدیم که محل‌های برخورد نمودار تابع $y=f(x)$ با محور طول‌ها (در صورت وجود)، جواب‌های معادله $f(x)=0$ هستند.
یعنی برای حل معادله $f(x)=0$، می‌توانیم از نمودار تابع f کمک بگیریم.
فعالیت صفحهٔ بعد نشان می‌دهد برای حل نامعادله‌ها نیز می‌توان از نمودار تابع‌ها استفاده کرد.

فعالیت ۷

تابع $f(x)=x^۲-۷x+۱۰$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. نمودار آن در زیر رسم شده است.



۱ طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور xها ، چه چیزی را نشان می‌دهند؟

....

۲ با استفاده از نمودار، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را به دست آورید.

....

۳ آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور xها قرار گرفته است، رنگی(پررنگ) کنید. و جمله زیر را کامل کنید:

عرض نقاط رنگی(کوچک‌تر از صفر / بزرگ‌تر از صفر) است.

۴ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر از دامنه را به صورت بازه نمایش دهید.

....

۵ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲-۷x+۱۰>۰$ با مجموعه به دست آمده در (۴) چه رابطه‌ای دارد؟ توضیح دهید.

....

۶ آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور xها قرار گرفته است با رنگ دیگری مشخص کنید.

....

۷ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ این قسمت از دامنه را با استفاده از بازه‌ها بنویسید.

....

۸ آیا مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲-۷x+۱۰<۰$ همان مجموعهٔ به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

....

همان‌طور که در فعالیت (۷) می‌بینید، برای xهایی که نمودار تابع بالای محور xهاست، داریم $f(x)>0$؛ پس مجموعهٔ این xها دقیقاً همان مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)>0$ است. به طور مشابه، برای xهایی که نمودار تابع، پایین محور xها است مقدار $f(x)$ منفی است و $f(x)<0$. پس مجموعهٔ این xها دقیقاً همان مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)<0$ است. نمودار تابع $f(x)=x^2-7x+10$ محور xها را در نقاطی به طول ۲ و ۵ قطع می‌کند. نمودار این تابع در بازهٔ $(2, 5)$ زیر محور xها است و این بازه دقیقاً همان مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-7x+10<0$ است. همچنین، نمودار این تابع، در مجموعهٔ $(-\infty, 2)\cup(5, +\infty)$ بالای محور xها است و این مجموعه دقیقاً همان مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-7x+10>0$ است.

در حالت کلی برای حل نامعادلهٔ $f(x)>0$ که f یک تابع است، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس، آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور xها است مشخص می‌کنیم. آن xهایی از دامنهٔ f که به ازای آنها، نمودار تابع بالای محور xها است مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)>0$ است.

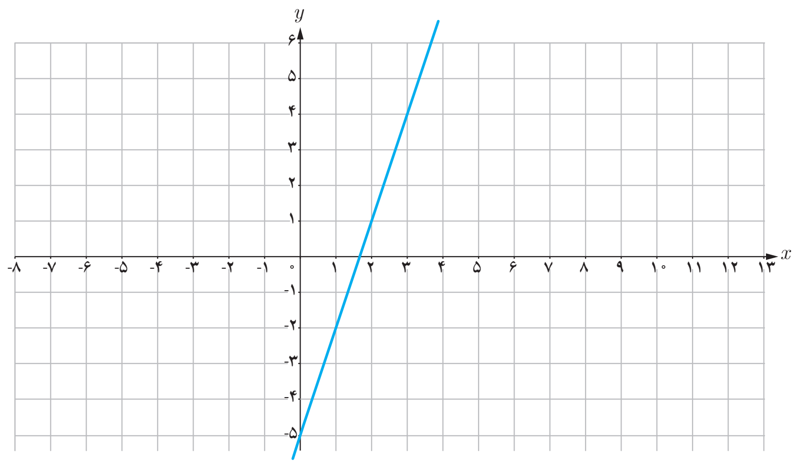
به طور مشابه، برای حل نامعادلهٔ $f(x)<0$ ، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس، آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور xها است را مشخص می‌کنیم. آن xهایی از دامنهٔ f که به ازای آنها نمودار تابع، پایین محور xها است مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $f(x)<0$ می‌باشد.

مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های به صورت $f(x)\geq 0$ (یا $f(x)\leq 0$) علاوه بر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)>0$ یا $f(x)<0$، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها را هم شامل می‌شود.

مثال ۹

نامعادلهٔ $2x-1>4-x$ را با رسم نمودار حل کنید.

ابتدا با انتقال جملات به یک طرف، نامعادله را به شکل $3x-5>0$ می‌نویسیم. سپس، نمودار تابع $f(x)=3x-5$ را که دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است رسم می‌کنیم.

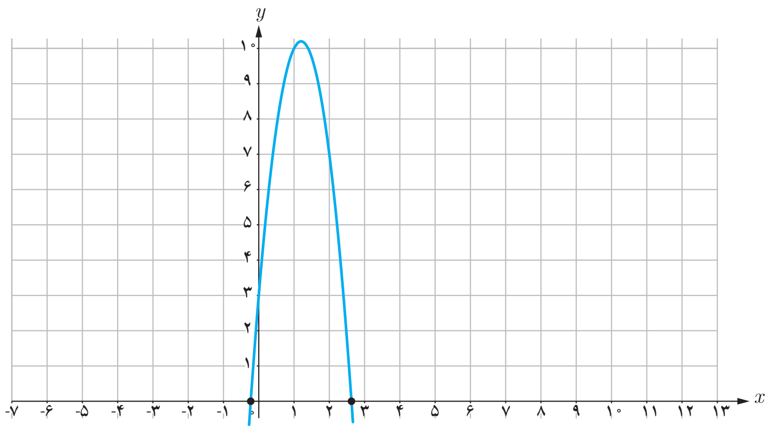


این خط در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۵}{۳}$، محورxها را قطع می‌کند و در بازهٔ $(\frac{۵}{۳},+\infty)$ بالای محورxها است. پس، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳x-۵>۰$ عبارت است از $(\frac{۵}{۳},+\infty)$.

مثال ۱۰

نامعادلهٔ $-۵t^۲+۱۲t+۵\geq ۲$ را حل کنید.

ابتدا نامعادله را به صورت $-۵t^۲+۱۲t+۳\geq ۰$ می‌نویسیم. سپس، نمودار تابع $f(t)=-۵t^۲+۱۲t+۳$ را که دامنه آن $\mathbb{R}$ است به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم.



جئوجبرا، محل تقریبی برخورد نمودار این تابع با محور xها را در نقاط به طول تقریبی ۰/۲۳- و ۲/۶۳ نشان می‌دهد. در بازهٔ بین این نقاط نمودار تابع بالای محور xها است، پس مجموعهٔ جواب این نامعادله، بازهٔ $[-۰/۲۳, ۲/۶۳]$ است.

کار در کلاس ۷

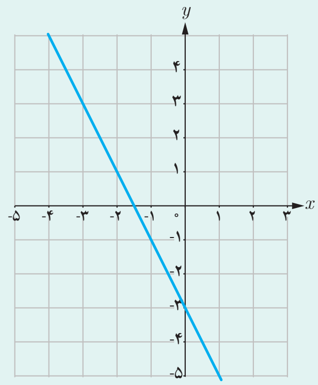
مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۸ سانتی‌متر بیشتر از عرض آنها است. عرض این مستطیل‌ها چه مقادیری باید داشته باشند تا مساحت آنها از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر باشد.

....

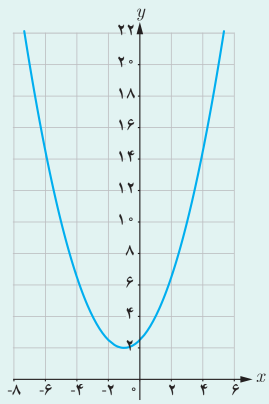
....

مسائل

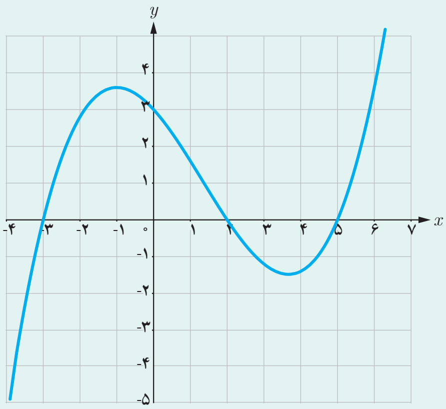
۱ در زیر نمودارهای چهار تابع رسم شده است. در هر مورد، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)\geq ۰$ را مشخص کنید.



الف



ب



پ

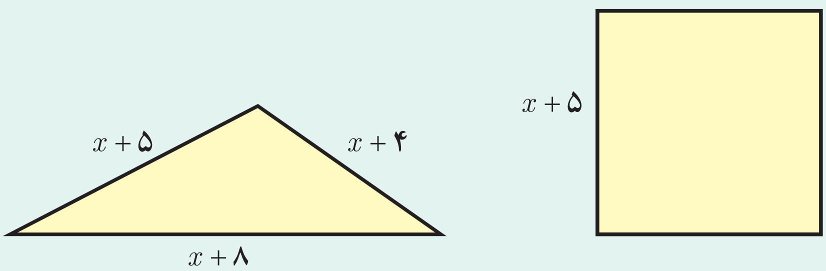
۲ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲x-۳<۰$ ب) $۳x^۲-۵x-۱>۰$ پ) $-x^۲+۴x+۳\geq -۲$

۳ پرتابه‌ای به طورعمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرتابه از سطح دریا (برحسب متر) به صورت تابعی از زمان(برحسب ثانیه) با رابطهٔ $h(t)=-۵t^۲+۱۰۰t$ داده شده است. مشخص کنید در چه بازهٔ زمانی، ارتفاع این پرتابه بیش از ۲۰۰ مترخواهد بود.

....

۴ مقدار x را طوری بیابید که اندازهٔ محیط مثلث از اندازهٔ مساحت مربع کمتر باشد.



۵ علی به تازگی یک کارگاه تولید قطعات یدکی راه اندازی کرده است. درآمد حاصل از فروش کالا به قیمت p (برحسب تومان) از قانون $R(p)=-۱۰۰p^۲+۵۰۰۰۰p$ به دست می‌آید. به‌ازای چه مقادیری برای p، میزان درآمد شرکت بیش از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ است؟

خواندنی

هدایت غریزی زنبور عسل: مهندس طبیعت

کندوی زنبور عسل نمونهٔ بارزی از طرّاحی و استحکام است. ساختار کندو به‌گونه‌ای است که بیشترین فضا برای جمع‌آوری شیره را دارا می‌باشد. محاسبات ریاضی‌دانان نشان داده است که شش ضلعی مناسب‌ترین شکل هندسی برای دستیابی به این ویژگی است. زنبورها با الهام از وحی الهی، قوانین هندسی را رعایت نموده و پناهگاهی اَمن برای خود طراحی می‌کنند. یافته‌های انسان از دیرباز از به‌کارگیری و مدل‌سازی پدیده‌های خلقت حکایت دارد. امروزه ساختار کندوی عسل، الهام‌بخش الگوی آجرهای کم‌وزن و در عین حال با استحکام است. همچنین از بافتی مشابه شانه عسل در ساخت لاستیک‌های مخصوص زمستان یا تختهٔ اسنوبورد استفاده می‌شود.

خداوند متعال این حقیقت علمی را این‌چنین به زنبور عسل الهام فرموده است:

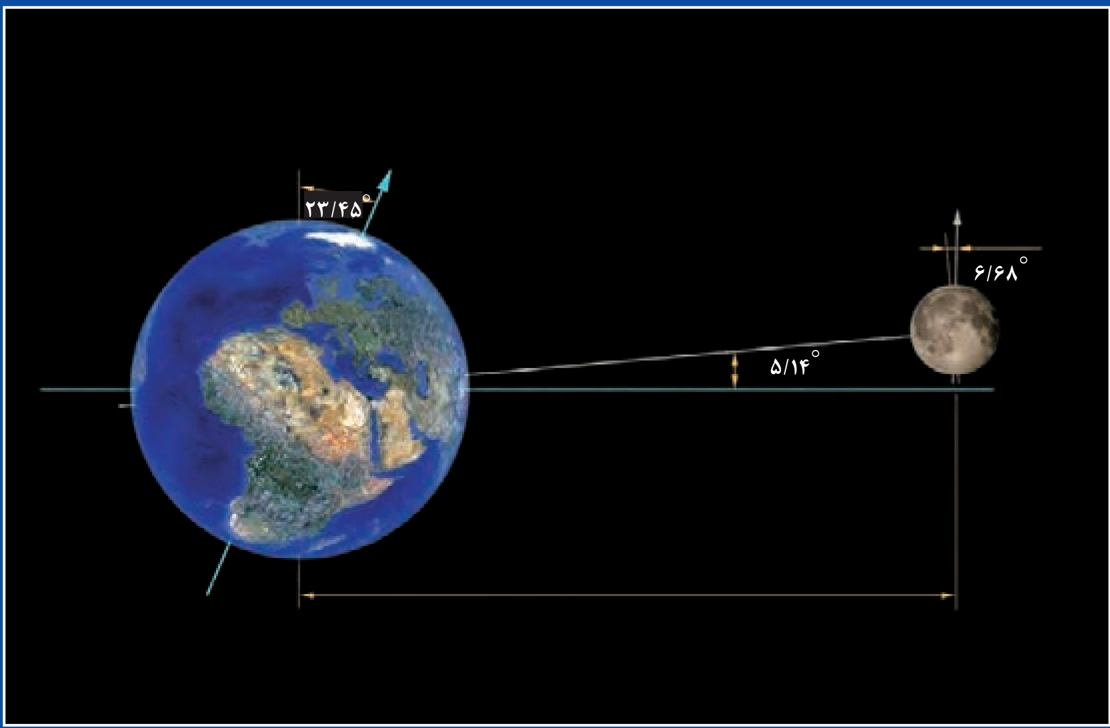
و پروردگار تو به زنبور عسل الهام کرد: از کوه‌ها، درخت‌ها و بناها خانه‌هایی برای خود برگیر؛ سپس از تمام ثمرات (و شیرهٔ گل‌ها) بخور و راه‌های پروردگارت را به اطاعت بپیما. آنگاه از درون آنها، شربتی رنگارنگ خارج می‌شود که در آن، شفا و درمان برای مردم است. به‌راستی در این امر، برای مردم اندیشمند نشانه‌ای است.

سورهٔ نحل آیات ۶۸ و ۶۹

تحقیقات بسیاری دربارهٔ الگوهای ریاضی موجود در مسیر حرکت زنبورها و دیگر ابعاد زندگی آنها انجام شده است. ساده‌ترین رابطهٔ ریاضی که می‌توان مشاهده کرد، رابطهٔ بین تعداد حجره یا سلول‌ها (شش ضلعی‌ها) با شماره حلقه‌های دور یک سلول است که با یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ نمایش داده می‌شود. اگر n شماره حلقه باشد، $Q(n)=۳n^{۲}-۳n+۱$ تابعی است که به کمک آن می‌توان تعداد حجره‌ها را پیدا کرد.

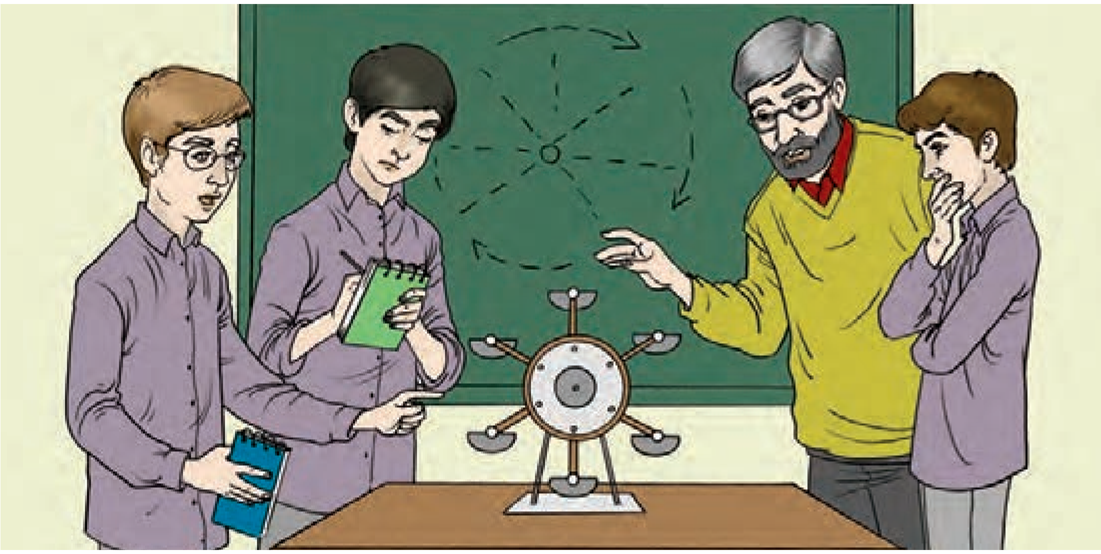
پودمان سوم

زاویه‌های دلخواه و نسبت‌های مثلثاتی آنها



حرکات چرخشی در طبیعت بسیار رخ می‌دهند و برای تبیین ریاضی آنها لازم است مفهوم زاویه‌ها را گسترش دهیم و نسبت‌های مثلثاتی را برای آنها تعریف کنیم.

زاویهٔ چرخش



دیروز، مجید به همراه خانوادهٔ خود به شهر بازی رفته بود. در آنجا چرخ و فلک بزرگی بود که مجید و بقیهٔ جوان‌ترها سوار یکی از کابین‌های آن شدند. بقیه روی نیمکت نشستند و از پایین آنها را تماشا می‌کردند. چرخ و فلک برای پیاده و سوار کردن افراد گاهی می‌ایستاد و سپس حرکت می‌کرد. پدر مجید که روی نیمکت نشسته بود آنها را گم کرد. او با تلفن همراه خود با مجید تماس گرفت تا بداند آنها کجا هستند. مجید نمی‌دانست چگونه موقعیت خود را بیان کند تا پدرش جای او را پیدا کند. او با خود فکر کرد که چگونه می‌توان موقعیت کابین‌های چرخ و فلک را توصیف کرد.

روز بعد، او این سؤال را در کلاس درس ریاضی مطرح کرد. دبیر از هنرجویان خواست تا در این مورد فکر کنند و نظر خود را بیان کنند.

آرمان گفت: به نظر من دانستن ارتفاع کابین از سطح زمین مهم است. ما می‌توانیم در هر لحظه با مشخص کردن ارتفاع کابین، موقعیت آن را مشخص کنیم.

سعید گفت: ولی من فکر نمی‌کنم فقط با داشتن ارتفاع کابین بتوان موقعیت آن را مشخص کرد، ممکن است کابین در سمت چپ یا راست چرخ و فلک باشد؛ یعنی، برخی کابین‌ها با اینکه ارتفاع یکسان دارند، جایشان متفاوت است. شاید بهتر باشد مسافت طی شدهٔ کابین روی مسیر دایره‌ای را اندازه‌گیری کنیم. اگر مسافت طی شده از نقطهٔ شروع معلوم باشد، موقعیت کابین هم مشخص می‌شود.

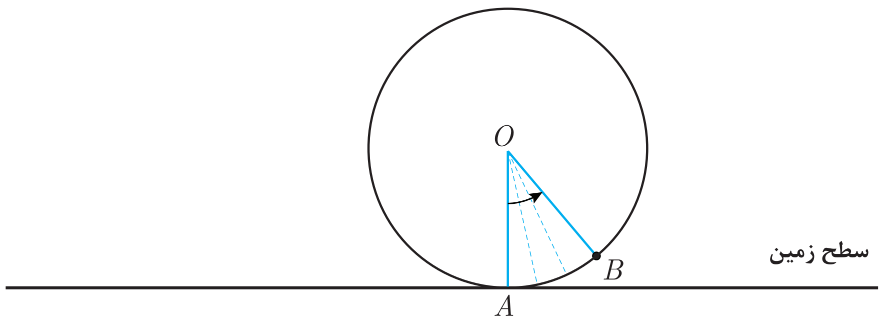
دبیر گفت: بله، با مشخص شدن مسافت طی شده، موقعیت کابین کاملاً مشخص می‌شود؛ مثلاً اگر شعاع دایرهٔ چرخ و فلک ۱۰ متر باشد و مسافت طی شده از نقطهٔ شروع، 10π متر باشد، معلوم می‌شود کابین به بالاترین نقطهٔ خود رسیده است و اگر مسافت طی شده 20π متر باشد، معلوم می‌شود کابین یک دور کامل زده و به نقطهٔ شروع برگشته است. ولی یافتن مسافت طی شده دشوار است. آیا راه ساده‌تری برای

توصیف موقعیت کابین می‌توان پیدا کرد؟

حمید گفت: فکر کنم اگر زاویهٔ طی شده توسط کابین را بدانیم، می‌توانیم مسافت طی شده را بیابیم.

دبیر گفت: منظورت از زاویهٔ طی شده چیست؟

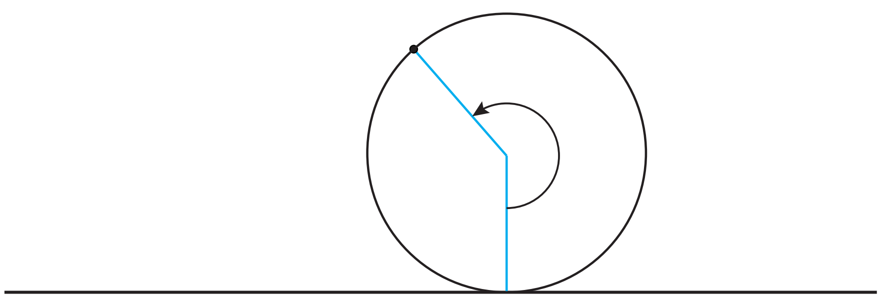
حمید گفت: اگر اجازه دهید، شکل آن را روی تخته بکشم و از روی شکل توضیح دهم.



می‌توانیم تصور کنیم چرخ و فلک همانند یک دایره و یک کابین آن مانند نقطه‌ای از این دایره (نقطهٔ **B**) است. اگر شعاع ثابتی را در نظر بگیریم که از مرکز دایره (نقطهٔ **O**) به نقطهٔ شروع حرکت (نقطهٔ **A**) وصل شده باشد، زاویهٔ بین دو شعاع **OA** و **OB** را می‌توانیم زاویهٔ طی شده، با حرکت از **A** به **B** در نظر بگیریم. در شروع حرکت، این دو شعاع بر هم منطبق‌اند و زاویهٔ بین آنها را می‌توان صفر در نظر گرفت و رفته رفته با حرکت کابین، اندازهٔ این زاویه بیشتر می‌شود.

دبیر گفت: خیلی خوب است. اندازه‌گیری این زاویه ساده‌تر از اندازه‌گیری مسافت طی شده است.(چرا؟) آیا می‌توان مستقیماً از همین زاویه برای مشخص کردن موقعیت کابین استفاده کرد؟

سعید گفت: بله، دانستن اندازهٔ زاویهٔ طی شده برای مشخص کردن موقعیت کابین کافی است، فقط یک مشکل وجود دارد. بعد از آنکه کابین بیش از یک نیم دور بزند (بیش از ۱۸۰ درجه)، زاویهٔ‌بین این دو شعاع چه معنایی دارد؟ (مانند شکل زیر)



دبیر گفت: زاویه‌هایی که با چرخش ایجاد می‌شوند، می‌توانند از ۱۸۰ درجه هم بیشتر شوند و هر مقداری باشند. این زاویه‌ها را **زاویهٔ چرخش** می‌نامند؛ مثلاً با چرخش به اندازهٔ یک دور کامل، زاویهٔ چرخش، ۳۶۰ درجه خواهد بود.

مجید گفت: وقتی چرخ و فلک یک دور زده است، باید بگوییم ۳۶۰ درجه چرخیده‌ایم. اما، اگر چرخ و فلک دورهای بیشتری بزند، زاویهٔ چرخش چقدر خواهد بود؟

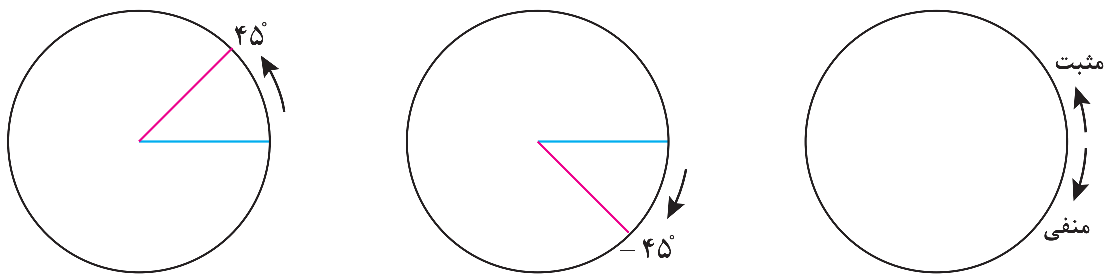
حمید گفت: فکر کنم به ازای هر دور باید ۳۶۰ درجه چرخش حساب کنیم؛ یعنی ۲ دور چرخش برابر ۷۲۰ درجه چرخش و اگر ۱۰ دور زده باشیم باید بگوییم ۳۶۰۰ درجه چرخیده‌ایم.

مجید گفت: وقتی سوار چرخ و فلک بودیم چند بار چرخ و فلک در جهت برعکس نیز حرکت کرد، زاویهٔ‌چرخش در جهت برعکس را چگونه حساب کنیم؟ آیا می‌توانیم اندازهٔ زاویهٔ چرخش در جهت برعکس را عددی منفی در نظر بگیریم؟

دبیر گفت: بله، منفی درنظر گرفتن اندازهٔ زاویهٔ چرخش در جهت برعکس بسیار طبیعی است و ما می‌توانیم زاویه‌های با مقدار منفی هم داشته باشیم. درست مثل محور اعداد که یک جهت را جهت مثبت و خلاف آن را جهت منفی در نظر گرفتیم، در اینجا نیز یک جهت چرخش را جهت مثبت و جهت خلاف آن را جهت منفی می‌نامند.

مجید گفت: چه جالب! اما کدام جهت را مثبت و کدام جهت را منفی در نظر بگیریم؟

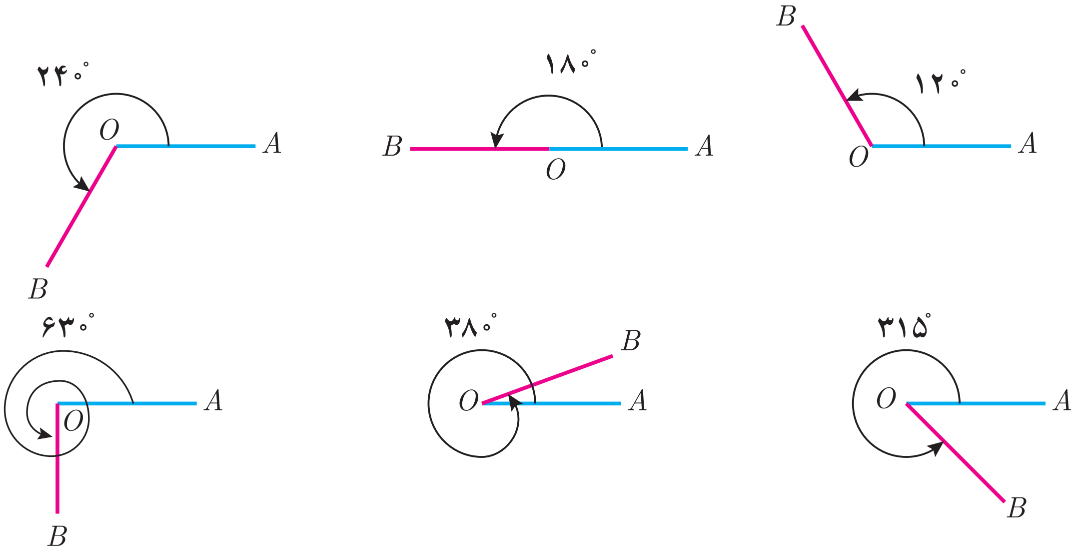
دبیر گفت: انتخاب جهت چرخش مثبت یا منفی قراردادی است. طبق قرارداد، در یک صفحه، چرخش در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را مثبت و چرخش درجهت موافق حرکت عقربه‌های ساعت را منفی در نظر می‌گیرند.



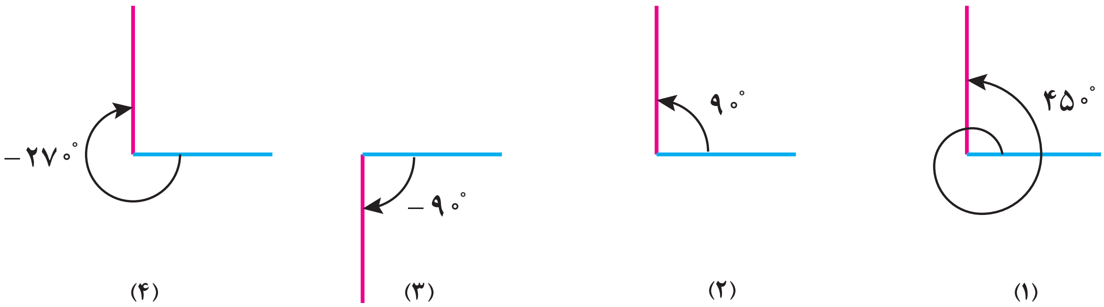
زاویه‌های با مقدار منفی را زاویهٔ منفی می‌نامند و دو زاویه را که مقدار آنها قرینهٔ یکدیگرند، دو **زاویهٔ قرینه** می‌نامند؛ مثلاً دو زاویه با مقدارهای ۴۵° و -۴۵°، قرینهٔ یکدیگرند.

زاویه را می‌توان به‌عنوان چرخش یک نیم خط نسبت به یک نیم‌خط دیگر هم در نظر گرفت. در شکل‌های صفحه بعد، نیم‌خط OA ثابت است و نیم‌خط OB حول نقطهٔ O در حال چرخش در جهت مثبت است. در این شکل‌ها، مقدار زاویهٔ چند چرخش خاص بر حسب درجه نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که **زاویهٔ چرخش یک مفهوم هندسی نیست و در آن از مفهوم حرکت و جهت حرکت نیز استفاده می‌شود.**

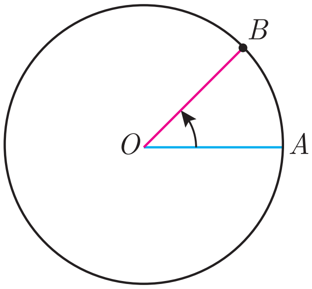


اگر جهت چرخش، منفی (موافق حرکت عقربه‌های ساعت) باشد، مقدار زاویه‌های چرخش را به‌صورت منفی درنظر می‌گیریم؛ برای مثال در شکل‌های زیر، مقدار زاویه‌های چرخش (۳) و (۴) که در جهت منفی هستند، عددی منفی است.



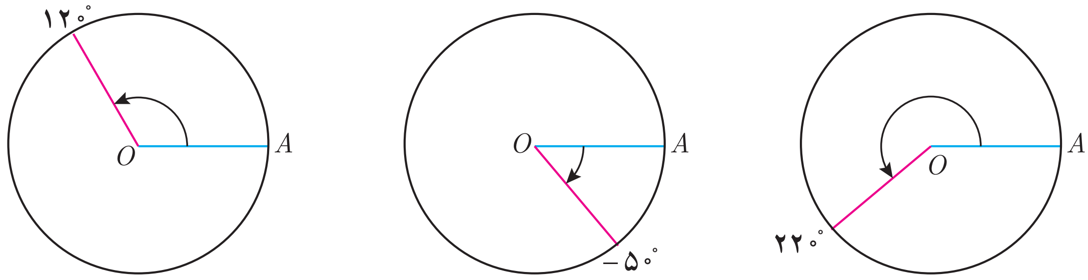
توجه داشته باشید که برای مشخص شدن زاویهٔ چرخش بین دو نیم‌خط، دانستن وضعیت قرار گرفتن آن دو نیم‌خط کافی نیست و باید معلوم باشد کدام نیم‌خط در کدام جهت و چند دور چرخش کرده است؛ برای مثال در حالت‌های (۱) و (۲) و (۴) وضعیت قرارگرفتن نیم‌خط‌ها مانند یکدیگر است، ولی هرکدام زاویه‌های چرخش متفاوتی دارند.

مفهوم زاویهٔ چرخش را در یک دایره نیز می‌توان توصیف کرد. اگر یک دایره و روی آن نقطه‌ای به‌عنوان مبدأ حرکت مانند A در نظر بگیریم، با حرکت یک نقطه مانند B از این مبدأ (مانند شکل روبه‌رو)، شعاع OB حول نقطهٔ O چرخش می‌کند و زاویه‌ای با شعاع OA می‌سازد. مقدار این زاویه **را زاویهٔ چرخش نقطهٔ B از مبدأ A** می‌نامند. پس هرگونه حرکت نقطهٔ B روی دایره، یک زاویهٔ چرخش را معین می‌کند و هر زاویهٔ چرخشی، نقطه‌ای متناظر روی دایره خواهد داشت.



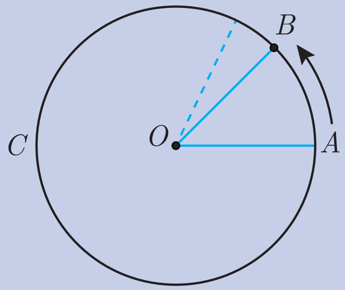
مثال ۱

نقاط متناظر زاویه‌های ۱۲۰ درجه و ۵۰ـ درجه و ۲۲۰ درجه در شکل‌های زیر مشخص شده‌اند.



کار در کلاس ۱

دوچرخه‌سواری در یک مسیر دایره‌ای شکل، از نقطهٔ A طبق شکل روبه‌رو، با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. او یک دور این دایره را در ۳ دقیقه طی می‌کند.



۱ دوچرخه‌سوار، $\frac{۱}{۴}$ این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایرهٔ بالا با یک نقطه مشخص کنید.

۲ اگر دوچرخه‌سوار پس از ۲۰ ثانیه ($\frac{۱}{۳}$دقیقه) به نقطهٔ B رسیده باشد، زاویهٔ بین دو شعاع OA وOB چند درجه است؟

....

۳ این دوچرخه‌سوار پس از ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟

....

۴ اگر یک دوربین فیلم‌برداری از مرکز دایره به دوچرخه‌سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟

....

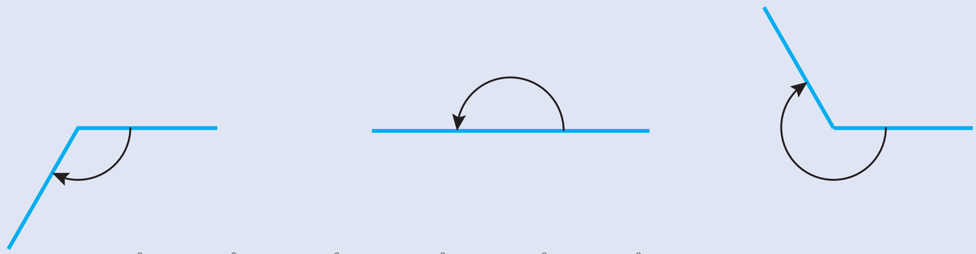
۵ جدول زیر را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

....

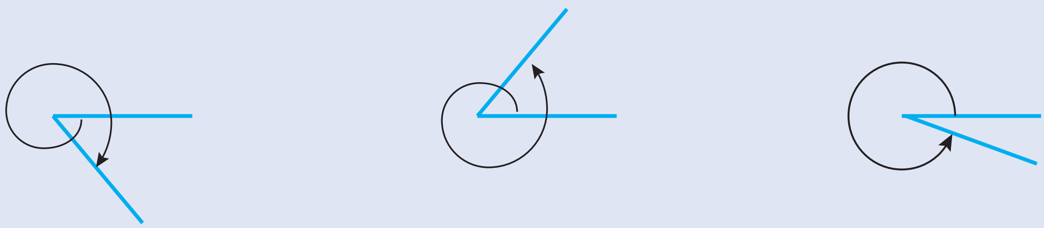
زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۴	۵	۶/۵	۷	۱۳
زاویهٔ چرخش دوربین						

مسائل

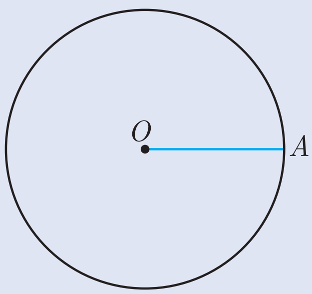
۱ در شکل‌های زیر چند زاویهٔ چرخش رسم شده‌اند. زاویه‌های چرخش داده شده را به شکل‌های صحیح آن وصل کنید.



390° -120° -240° -410° 180° 340°



۲ در دایرهٔ مقابل، نقطهٔ A مبدأ در نظر گرفته شده است. نقاط متناظر زاویه‌های ۵۰ و ۱۴۵ و ۳۰۰ و ۴۶۰ و ۶۰ - و ۱۸۰- درجه را روی این دایره نشان دهید.



۳ وضعیت دو نیم‌خط که زاویهٔ چرخش آنها صفر درجه است چگونه است؟

۴ اگر دونده‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای‌شکل در جهت مثبت بدود، زاویهٔ چرخش او نسبت به نقطهٔ شروع چند درجه است؟

۵ یک دایره و یک مبدأ روی آن انتخاب کنید. نقاط متناظر دو زاویهٔ چرخش ۱۲۰ و ۱۲۰- درجه را روی آن بیابید. از لحاظ هندسی، این نقاط چه وضعیتی نسبت به هم دارند. دو زاویهٔ قرینه دیگر مثال بزنید و وضعیت نقاط متناظر آنها نسبت به هم را توصیف کنید. آیا این وضعیت برای هر دو زاویه که قرینهٔ هم باشند برقرار است؟

واحد اندازه‌گیری زاویه: رادیان

گفتگو

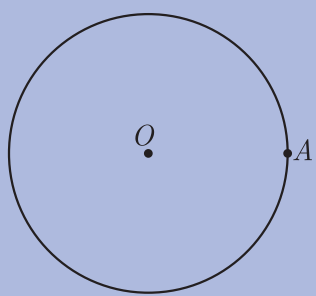
در مسئلهٔ تعیین موقعیت کابین‌های یک چرخ و فلک، سعید پیشنهاد کرده بود که مسافت طی شده توسط کابین برای شناختن موقعیت کابین به کار برده شود. او یاد گرفت که میزان زاویهٔ چرخش کابین برای دانستن موقعیت کابین کافی است، ولی نکتهٔ مهمی نظر او را جلب کرد.

سعید گفت: به نظر می‌رسد مسافت طی شده توسط کابین و زاویهٔ چرخش آن، با هم رابطه دارند و با داشتن هر کدام می‌توان دیگری را حساب کرد. رابطهٔ بین این دو کمیت را چگونه به دست آوریم؟

دبیر گفت: بله این دو کمیت، متناسب مستقیم هستند و فعالیت زیر می‌تواند رابطهٔ بین این دو کمیت را مشخص کند.

فعالیت ۱

دایره‌ای را به شعاع r در نظر بگیرید و روی آن نقطهٔ A را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید.



۱ اگر از مبدأ، در جهت مثبت، شروع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل، زاویهٔ چرخش چند درجه است؟ مسافت طی شده چقدر است؟

۲ به ازای هر یک درجه زاویه چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

۳ اگر D ، زاویهٔ چرخش برحسب درجه و L ، مسافت طی شده باشد، نسبت $\frac{L}{D}$ چقدر است؟

۴ رابطه‌ای بنویسید که D را بر حسب L بیان کند و رابطه‌ای بنویسید که L را برحسب D بیان کند.

فعالیت (۱) نشان می‌دهد که زاویهٔ چرخش یک نقطه از یک دایره و کمان طی شده[1] توسط آن نقطه، دو کمیت متناسب مستقیم هستند. بنابر این، نسبت $\frac{L}{D}$ ، که D زاویهٔ چرخش نقطه و L طول کمان طی شده آن نقطه است، مقداری ثابت است. در یک دایره به شعاع r ، چرخش به اندازهٔ ۳۶۰ درجه،

۱ـ مسیر حرکت روی یک دایره، کمانی از آن دایره است و مسیر طی شده را کمان طی شده می‌نامند.

معادل کل محیط دایره، یعنی $۲\pi r$ است، پس $\frac{L}{D}=\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

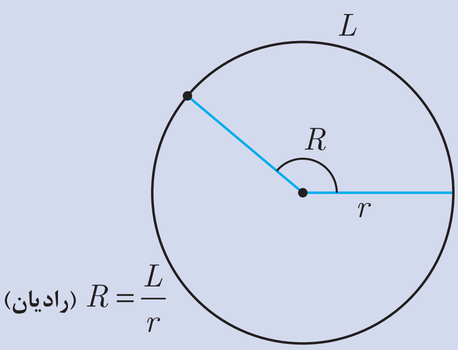
$$\frac{L}{r}=\frac{\pi}{۱۸۰}D \quad \text{و} \quad D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{L}{r}$$

این تساوی‌ها نشان می‌دهند که $\frac{L}{r}$ (نسبت طول کمان طی‌شده به شعاع دایره) مضربی از اندازهٔ زاویه است.

با مشخص بودن $\frac{L}{r}$، زاویهٔ چرخش کاملاً معین است. بنابراین، می‌توان $\frac{L}{r}$ را به‌عنوان واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه در نظر گرفت. این واحد اندازه‌گیری را **رادیان** می‌نامند.

تعریف

اگر نقطه‌ای از یک دایره به شعاع r، کمانی به طول L را در جهت مثبت طی کند، مقدار $\frac{L}{r}$ را اندازهٔ زاویه چرخش آن نقطه، بر حسب رادیان می‌نامند.
برای زاویه‌های منفی، $-\frac{L}{r}$ را مقدار آن زاویه بر حسب رادیان می‌نامند.



دایره‌ای که شعاع آن ۱ واحد است، **دایرهٔ واحد** نامیده می‌شود. در دایرهٔ واحد، طول کمان طی شده، همان اندازهٔ زاویهٔ چرخش بر حسب واحد رادیان است. در تساوی‌های زیر:

$$\frac{L}{r}=\frac{\pi}{۱۸۰}D \quad \text{و} \quad D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{L}{r}$$

$\frac{L}{r}$ همان اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان است. اگر اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان را با R و اندازهٔ آن زاویه بر حسب درجه را با D نشان دهیم، این تساوی‌ها به‌صورت زیر در می‌آیند.

$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}R \quad \text{و} \quad R=\frac{\pi}{۱۸۰}D$$

این تساوی‌ها نشان می‌دهند، ضریب تبدیل رادیان به درجه $\frac{۱۸۰}{\pi}$ و ضریب تبدیل درجه به رادیان $\frac{\pi}{۱۸۰}$ است.

مثال ۲

۱۸۰ درجه معادل چند رادیان است؟

راه حل اول: چرخش به اندازهٔ ۱۸۰ درجه، معادل پیمودن نصف محیط دایره با شعاع واحد (دایرهٔ واحد) است که برابر π واحد است. پس ۱۸۰ درجه، معادل π رادیان یعنی تقریباً ۳/۱۴ رادیان است.

راه حل دوم: با استفاده از رابطهٔ بین واحد رادیان و درجه داریم:

$$R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times D=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۱۸۰=\pi\approx ۳/۱۴$$

مثال ۳

۱ رادیان، چند درجه است؟

با استفاده از رابطهٔ بین واحدهای درجه و رادیان داریم:

$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times R=\frac{۱۸۰}{\pi}\times ۱\approx\frac{۱۸۰}{۳/۱۴}\approx ۵۷/۳$$

یعنی، ۱ رادیان تقریباً معادل ۵۷ درجه است.

مثال ۴

۱ درجه معادل چند رادیان است؟

با استفاده از رابطهٔ بین واحدهای درجه و رادیان داریم:

$$R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۱\approx\frac{۳/۱۴}{۱۸۰}\approx ۰/۰۱۷$$

پس، هر درجه، تقریباً معادل ۰/۰۱۷ رادیان است.

حالا که دو واحد متفاوت برای اندازه‌گیری زاویه‌ها در اختیار داریم باید در بیان اندازهٔ زاویه‌ها، واحدِ به‌کار رفته ذکر شود؛ مثلاً زاویه ۴۰ درجه و زاویهٔ ۴۰ رادیان، دو زاویهٔ متفاوت هستند. ۴۰ رادیان برابر $۴۰\times\frac{۱۸۰}{\pi}$ درجه، یعنی تقریباً ۲۲۹۲ درجه است. همچنین π رادیان با π درجه متفاوت است؛ زیرا π رادیان معادل ۱۸۰ درجه است و π درجه تقریباً ۳/۱۴ درجه است.

معمولاً در زاویه‌هایی که برحسب رادیان بیان می‌شوند، نماد π به‌کار می‌رود؛ مثلاً زاویه ۳۰ درجه برحسب رادیان، $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. به‌همین دلیل در بیان اندازهٔ یک زاویه، اگر نماد π در آن باشد، منظور آن است که واحد زاویه، رادیان است؛ مگر آنکه صریحاً گفته شود که واحد زاویه درجه است.

مثال ۵

زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ یعنی $\frac{\pi}{۲}$ رادیان که معادل ۹۰ درجه است. زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ یعنی $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان که معادل ۱۵۰ درجه است. زیرا:

$$\frac{۵\pi}{۶}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۱۵۰ \qquad \text{و} \qquad \frac{\pi}{۲}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۹۰$$

کار در کلاس ۲

۱ زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ و ۹۰ درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

....

....

۲ در جدول زیر تعدادی زاویه بر حسب درجه و رادیان داده شده است. معادل آنها را بر حسب واحد دیگر بیابید و جدول را کامل کنید.

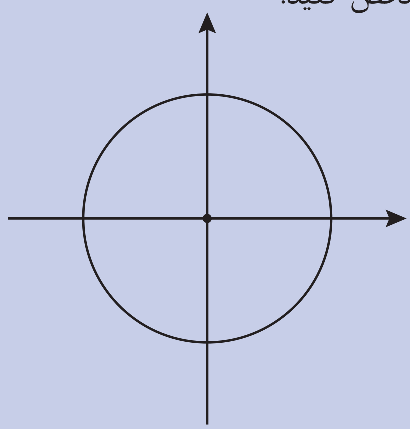
درجه	۵۵		-۲۷۰	۳۶۰۰	
رادیان		$\frac{۱۱\pi}{۳}$			$\frac{-۱۵\pi}{۴}$

....

....

....

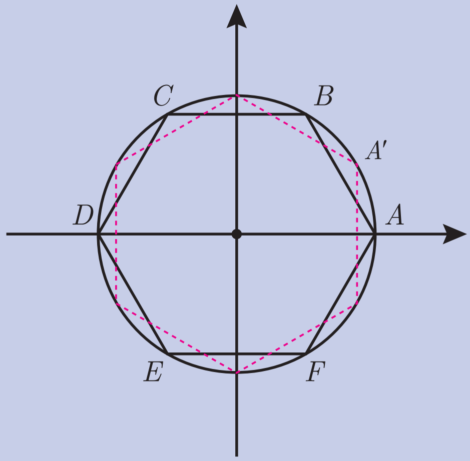
۳ نقاط متناظر زاویه‌های $\frac{۷\pi}{۳}$, ۰ , $\frac{-\pi}{۳}$, ۲π , $\frac{\pi}{۲}$, $\frac{۳\pi}{۲}$, $-\pi$, π , $\frac{-۵\pi}{۶}$, $\frac{\pi}{۶}$ را روی دایره زیر (بدون تبدیل به درجه) مشخص کنید.



۴ در شکل زیر یک شش ضلعی منتظم را داخل دایره رسم کرده‌ایم به گونه‌ای که یکی از رأس‌های آن روی نقطهٔ متناظر زاویهٔ صفر است (نقطهٔ A).

الف) بقیه رئوس این چندضلعی، متناظر چه زاویه‌هایی (بر حسب درجه) هستند؟

....



ب) اگر شش ضلعی بالا به اندازهٔ ۳۰ درجه در جهت مثبت دوران کند به طوری که رأس A به A' انتقال یابد، رئوس این چندضلعی جدید متناظر چه زاویه‌هایی هستند؟

....

....

خواندنی

واحد درجه برای اندازه‌گیری زاویه‌ها، یک واحد قراردادی است. اگر زاویهٔ راست را به ۹۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت را ۱ درجه می‌نامند. شاید این سؤال پیش بیاید که چرا به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم نکنیم؟ البته این کار را می‌کنند و با تقسیم زاویهٔ راست به ۱۰۰ قسمت مساوی، هر قسمت را ۱ گراد می‌نامند که واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه است؛ اما طول کمان طی شده در دایرهٔ واحد، مقداری طبیعی وابسته به زاویه است و به همین دلیل واحد مناسب‌تری است و در جایی که به رابطهٔ بین طول کمان دایره و زاویهٔ کمان نیاز داریم با این واحد جدید رابطهٔ بهتری به‌دست می‌آید.

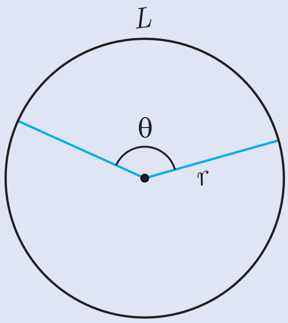
مسائل

۱ زاویه‌های ۱۵، ۱۹۰، ۵۳۰ ، و ۱۰۰۰- درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

۲ زاویه‌های $\frac{\pi}{۷}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ ، $\frac{-۸\pi}{۳}$ ، $\frac{-۱۴\pi}{۵}$ را بر حسب درجه بنویسید.

۳ اگر یک نیم‌خط بعد از چرخش روی حالت اول خود منطبق شود، توضیح دهید زاویهٔ چرخش آن بر حسب رادیان چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۴ در یک دایره به شعاع r، اگر زاویهٔ یک کمان بر حسب رادیان، θ باشد، طول این کمان برحسب r و θ چقدر است؟



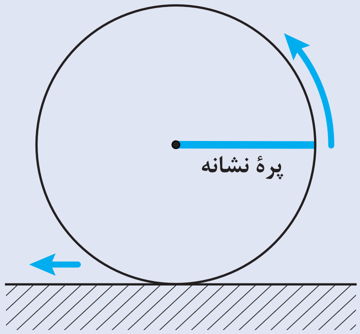
۵ در یک چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیهٔ خود، به اندازهٔ ۱ رادیان چرخیده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟ اگر مسافت طی شده توسط کابین ۷۰ متر باشد، زاویهٔ چرخش کابین برحسب رادیان و درجه چقدر است؟

۶ طول پره‌های یک چرخ، ۰/۵ متر است. این چرخ را روی زمین بدون لغزش می‌چرخانیم. با مثبت درنظرگرفتن جهت چرخش،

الف) پس از طی ۱۰۰ متر مسافت، زاویهٔ چرخش پرهٔ نشانه نسبت به حالت اولیه‌اش (برحسب درجه و رادیان) چقدر است؟

ب) اگر یکی از پره‌ها ۳۰۰۰ درجه چرخش کرده باشد، چرخ چند متر طی کرده است؟

پ) تحقیق کنید که کیلومترشمار ماشین، مسافت طی شده را چگونه نشان می‌دهد؟

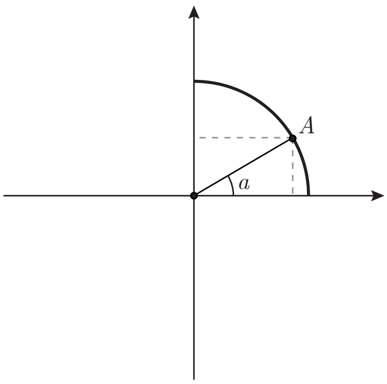


نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه

گفتگو

با یادگیری مفهوم زاویهٔ چرخش، برای مونا سؤالی پیش آمد.

مونا گفت: سال گذشته، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند به کمک مثلث‌های قائم‌الزاویه تعریف شدند. آیا نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های دلخواه هم قابل تعریف هستند؟ برای زاویهٔ باز که نمی‌توان مثلث قائم‌الزاویه رسم کرد، در این حالت، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز چگونه قابل تعریف است و چه معنایی خواهند داشت؟

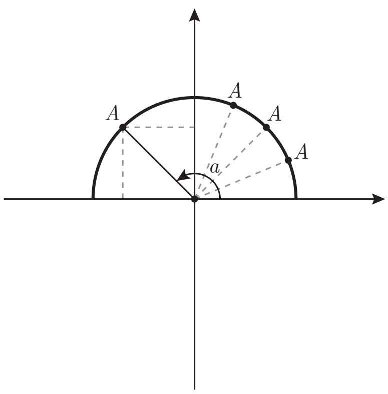


دبیر گفت: سال گذشته، تعبیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند را در یک ربع دایره بررسی کردیم. شاید از طریق تعبیر نسبت‌های مثلثاتی در یک ربع دایره، بتوانید برای این پرسش جوابی بیابید. بهتر است مجدداً مفهوم نسبت‌های مثلثاتی زاویه تند را در یک ربع دایره بررسی کنید. در صفحهٔ مختصات، یک ربع دایرهٔ واحد مانند شکل روبه‌رو رسم کنید و روی آن نقطهٔ A و زاویهٔ تند α را در نظر بگیرید.

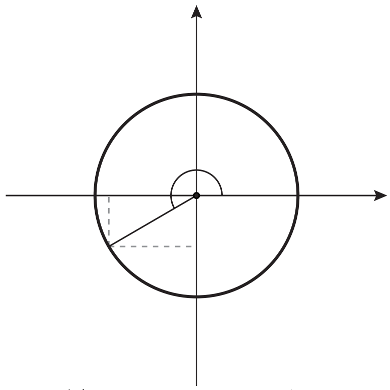
آیا می‌توانید بین نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ تند α و مختصات نقطهٔ متناظر آن (A)، رابطه‌ای بیابید؟

مونا گفت: با توجه به مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در شکل دیده می‌شوند، طول نقطهٔ A همان $\cos\alpha$ و عرض نقطهٔ A همان $\sin\alpha$ است.

دبیر گفت: حال فرض کنید به جای ربع دایرهٔ واحد، یک نیم‌دایرهٔ واحد داشته باشیم. اگر نقطهٔ A حرکت کند و از ربع اول دایره به ربع دوم برود، چه اتفاقی برای نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α و مختصات نقطهٔ A می‌افتد؟



سارا گفت: تا زمانی که در ربع اول دایره هستیم، کسینوس و سینوس زاویهٔ α به ترتیب، همان طول و عرض نقطهٔ A هستند. اما، وقتی وارد ربع دوم می‌شویم، برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز، هنوز



تعریفی نداریم، ولی مختصات نقاط متناظر این زاویه‌ها را می‌توانیم حساب کنیم. آیا می‌شود همانند زاویه‌های تند در ربع اول، مختصات نقاط متناظر زاویه‌های باز را به عنوان کسینوس و سینوس این زاویه‌ها تعریف کنیم؟

مونا گفت: ولی طول نقاط متناظر زاویه‌های باز، منفی است.

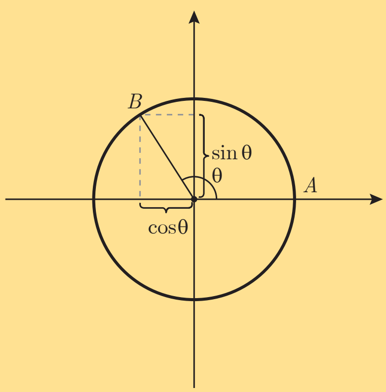
آیا کسینوس یک زاویه می‌تواند منفی باشد؟

دبیر گفت: بله، حدس سارا درست است و ریاضی‌دان‌ها، سینوس و کسینوس زاویه‌های باز را به همین شکل تعریف می‌کنند و منفی شدن سینوس یا کسینوس زاویه‌ها مشکلی ندارد.

مونا گفت: آیا برای بقیهٔ زاویه‌های چرخش هم می‌توان همین تعریف را به‌کار برد؟

معلم گفت: بله، برای هر زاویهٔ چرخش در دایره واحد، طول نقطهٔ متناظر آن را کسینوس آن زاویه و عرض آن را سینوس آن زاویه، تعریف می‌کنند.

تعریف



در صفحهٔ مختصات، دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ A به مختصات $\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ را به‌عنوان مبدأ برای اندازه‌گیری زاویه در نظر می‌گیریم. اگر B نقطهٔ متناظر زاویه چرخش θ باشد، طول B را $\cos\theta$ و عرض B را $\sin\theta$ می‌نامند.

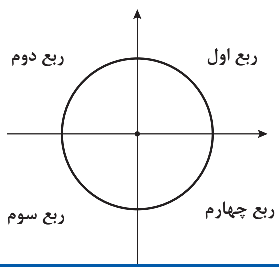
از آنجا که کسینوس یک زاویه، طول نقطهٔ متناظر آن زاویه و سینوس یک زاویه، عرض نقطه متناظر آن زاویه است، محور افقی را **محور کسینوس‌ها** و محور عمودی را **محور سینوس‌ها** می‌نامند. در این حالت در شکل بالا، دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات را **دایرهٔ مثلثاتی** می‌نامند و نقطهٔ $\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ مبدأ اندازه‌گیری زاویه‌ها است.

مثال ۶

برای زاویه‌های خاص ۰، ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه که به ترتیب نقاط متناظر آنها دارای مختصات $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$ هستند، نتیجه می‌شود:

θ / نسبت مثلثاتی	۰°	۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان	۱۸۰° یا π رادیان	۲۷۰° یا $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان
sinθ	۰	۱	۰	-۱
cosθ	۱	۰	-۱	۰

معمولاً دایره مثلثاتی را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند و طبق شکل مقابل این چهار قسمت را ربع‌های اول، دوم، سوم و چهارم دایره مثلثاتی می‌نامند.



مثال ۷

نقطهٔ متناظر با زاویهٔ ۲/۲۳ رادیان در کدام ربع قرار دارد؟

با توجه به آنکه $\frac{\pi}{۲} \approx \frac{۳/۱۴}{۲} = ۱/۵۷$ و $\pi \approx ۳/۱۴$، داریم: $\frac{\pi}{۲} < ۲/۲۳ < \pi$ و نقطهٔ متناظر این زاویه در ربع دوم است.

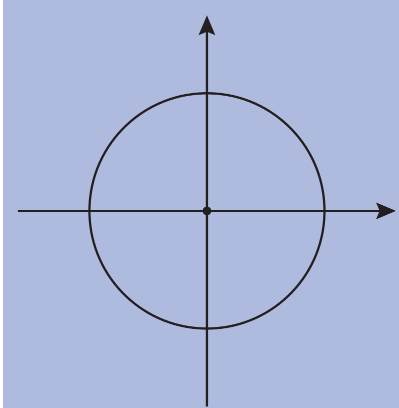
گفتگو

مونا پرسید: سال گذشته، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند را با رسم مثلث‌های قائم‌الزاویه به‌دست می‌آوردیم. اما، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز را چگونه حساب کنیم؟

دبیر گفت: با انجام فعالیت زیر می‌توانید سینوس و کسینوس زاویه‌های باز را حساب کنید.

فعالیت ۲

۱ فرض کنید θ یک زاویهٔ تند بر حسب رادیان باشد، π-θ چه نوع زاویه‌ای است؟



۲ با رسم شکل، وضعیت نقاط متناظر دو زاویه θ و π- θ روی دایرهٔ مثلثاتی را نسبت به هم و محور سینوس‌ها مشخص کنید.

۳ سینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴ کسینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

برای هر زاویهٔ تند θ (برحسب رادیان)، زاویهٔ $\pi-\theta$ باز است و نقاط متناظر آنها روی دایرهٔ مثلثاتی نسبت به محور سینوس‌ها قرینه یکدیگرند. بنابر این:

نکته

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \ , \ \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

البته این تساوی‌ها برای هر زاویهٔ دلخواه θ نیز برقرارند. به کمک این تساوی‌ها، می‌توانید سینوس و کسینوس زاویه‌های باز را حساب کنید.

توجه داشته باشید که در محاسبات با زاویه‌ها، همواره از یک واحد استفاده کنید؛ یا همهٔ زاویه‌ها باید برحسب درجه باشند، یا همهٔ زاویه‌ها باید بر حسب رادیان باشند.

مثال ۸

سینوس و کسینوس زاویهٔ ۱۵۰ درجه را حساب کنید.

این زاویه باز به صورت $۱۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ$ است، پس

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

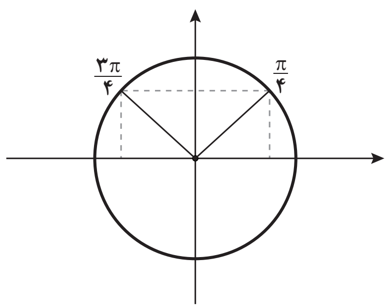
مثال ۹

سینوس و کسینوس زاویه $\frac{۳\pi}{۴}$ را حساب کنید.

این زاویه، یک زاویهٔ باز است و نقطهٔ متناظر آن در ربع دوم قرار دارد و داریم $\frac{۳\pi}{۴} = \pi - \frac{\pi}{۴}$. پس نقطهٔ متناظر با این زاویه، قرینهٔ نقطه متناظر با زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ نسبت به محور عمودی (محور سینوس‌ها) است. بنابراین:

$$\sin\frac{۳\pi}{۴} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۴} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



برای محاسبهٔ سینوس و کسینوس زاویه‌های دیگر نیز می‌توان تساوی‌های مشابهی را به‌دست آورد.

کار در کلاس ۳

۱ اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد، نقطه متناظر زاویهٔ $\pi+\theta$ در کدام ربع قرار دارد؟

....

۲ وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $\pi+\theta$ نسبت به هم چگونه است؟

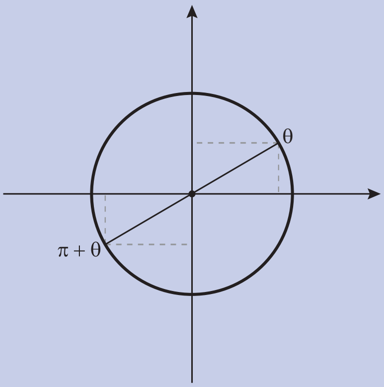
....

۳ طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

۴ نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....



از پاسخ به سؤال‌های بالا نتیجه می‌شود که برای یک زاویهٔ تند مانند θ داریم:

نکته

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \,,\quad \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$

البته این تساوی‌ها برای هر زاویهٔ دلخواه θ نیز برقرارند.

مثال ۱۰

سینوس و کسینوس زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۶}$ را به دست آورید.

داریم: $\frac{۷\pi}{۶} = \pi + \frac{\pi}{۶}$، پس نقطهٔ متناظر این زاویه در ربع سوم قرار دارد. بنابراین:

$$\sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۷\pi}{۶} = \cos(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۱۱

سینوس و کسینوس زاویهٔ ۲۴۰ درجه را حساب کنید.

داریم: $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$، پس نقطهٔ متناظر این زاویه در ربع سوم است.

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

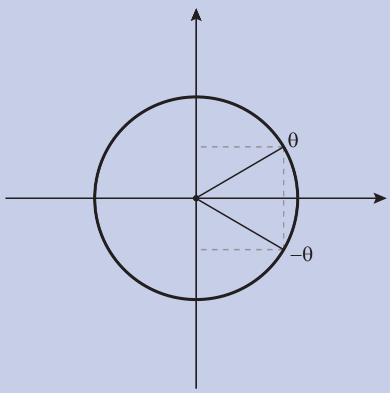
$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

گفتگو

مونا پرسید: سینوس و کسینوس زاویه‌های منفی را چگونه حساب کنیم؟

دبیر گفت: کافی است ببینیم نقاط متناظر زاویه‌های θ و $-\theta$ در یک دایره مثلثاتی، چه وضعیتی نسبت به هم دارند.

کار در کلاس ۴



۱ اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد، نقطهٔ متناظر زاویه $-\theta$ در کدام ربع قرار دارد؟

۲ وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $-\theta$ نسبت به هم چگونه است؟

....

۳ طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

۴ نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

از پاسخ به سؤال‌های بالا نتیجه می‌شود که برای یک زاویه تند θ، $\cos\theta$ و $\cos(-\theta)$ با هم مساوی‌اند ولی سینوس آنها قرینهٔ یکدیگرند و داریم:

نکته

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ , \ \cos(-\theta) = \cos\theta$$

البته این تساوی‌ها برای هر زاویهٔ دلخواه θ نیز برقرارند.

مثال ۱۲

سینوس و کسینوس زاویهٔ ۳۰ـ درجه را حساب کنید.

داریم:

$$\sin(-۳۰^\circ) = -\sin ۳۰^\circ = -\frac{۱}{۲} \quad , \cos(-۳۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۱۳

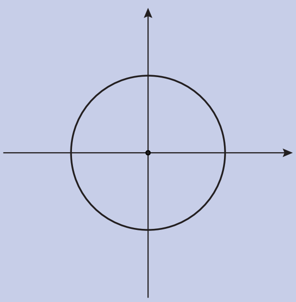
سینوس و کسینوس زاویهٔ $\frac{-۵\pi}{۶}$ را حساب کنید. داریم:

$$\sin\frac{-۵\pi}{۶} = -\sin\frac{۵\pi}{۶} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

همچنین،

$$\cos\frac{-۵\pi}{۶} = \cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کار در کلاس ۵



۱ در شکل مقابل، نقاط متناظر زاویه‌های داده‌شده در جدول را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید، سپس جدول را کامل کنید.

θ / نسبت مثلثاتی	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳} + ۲\pi$	$\frac{\pi}{۳} + ۴\pi$	$\frac{\pi}{۳} - ۲\pi$	$\frac{\pi}{۳} - ۴\pi$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					

۲ اگر به یک زاویه مانند θ (بر حسب رادیان)، مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا کم کنیم، نقطهٔ متناظر زاویهٔ جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

....

۳ با ذکر دلیل، نتیجه بگیرید اگر به زاویه‌ای (بر حسب رادیان)، مضارب صحیح ۲π را اضافه یا کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند.

....

۴ سینوس و کسینوس زاویه‌های $\frac{۱۴\pi}{۳}$ و $\frac{-۲۵\pi}{۶}$ رادیان را حساب کنید.

....

اگر به یک زاویه (بر حسب رادیان)، مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا کم کنیم، نقاط متناظر این دو زاویه بر هم منطبق‌اند. به همین دلیل، نسبت‌های مثلثاتی آنها با هم برابرند، زیرا نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، مختصات نقطهٔ متناظر آن است.

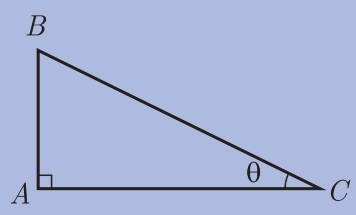
گفتگو

سارا پرسید: تا اینجا فقط نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه را تعریف کردیم و یاد گرفتیم چگونه مقدار آنها را پیدا کنیم. اما، تانژانت این زاویه‌ها چگونه تعریف می‌شود؟

دبیر گفت: فعالیت زیر به ما کمک می‌کند تانژانت زاویه‌های دلخواه را تعریف کنیم.

فعالیت ۳

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با زاویهٔ تند θ در نظر بگیرید.



۱ طول ضلع AB را بر حسب $\sin\theta$ بنویسید.

....

۲ طول ضلع AC را بر حسب $\cos\theta$ بنویسید.

....

۳ در این مثلث، $\tan\theta$ را بر حسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست آورید.

....

۴ به کمک رابطه‌ای که در (۳) به‌دست آوردید، برای تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه پیشنهادی ارائه کنید.

....

فعالیت (۳) نشان می‌دهد که برای زاویه‌های تند مانند θ داریم: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. این تساوی را برای زاویه‌های دلخواه تعمیم می‌دهند و تانژانت یک زاویه دلخواه α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

از آنجا که سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه قبلاً تعریف شده‌اند، تساوی بالا، تانژانت زاویه‌های دلخواه را تعریف می‌کند. فقط برای زاویه‌هایی که کسینوس آنها صفر است، تانژانت آن زاویه‌ها تعریف نمی‌شود؛ مثلاً برای زاویه‌های $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ (رادیان) که کسینوس آنها صفر است، تانژانت تعریف نمی‌شود.

تعریف

اگر α زاویه‌ای باشد که $\cos\alpha \neq ۰$ بنا به تعریف $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

مثال ۱۴

تانژانت زاویه‌های ۳۳۰ درجه و $\frac{۴\pi}{۳}$ رادیان را حساب کنید.

$$\tan ۳۳۰^\circ=\frac{\sin ۳۳۰^\circ}{\cos ۳۳۰^\circ}=\frac{\sin(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)}{\cos(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)}=\frac{\sin(-۳۰^\circ)}{\cos(-۳۰^\circ)}=\frac{-\sin ۳۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan\frac{۴\pi}{۳}=\frac{\sin\frac{۴\pi}{۳}}{\cos\frac{۴\pi}{۳}}=\frac{\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})}{\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})}=\frac{-\sin(\frac{\pi}{۳})}{-\cos(\frac{\pi}{۳})}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}$$

گفتگو

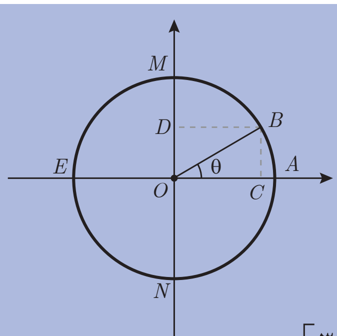
سارا پرسید: سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه چه اعدادی می‌توانند باشند؟

مونا گفت: از سال گذشته یادم می‌آید که سینوس و کسینوس زاویه‌های تند، اعدادی در بازهٔ (۱, ۰) بودند. اما سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه، مختصات نقاط روی دایرهٔ واحد هستند، پس می‌توانند اعداد منفی نیز باشند.

دبیر گفت: برای پاسخ به سؤال سارا، بهتر است از طریق محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها آن را بررسی کنیم.

فعالیت ۴

یک دایره مثلثاتی مانند شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. در این شکل B نقطهٔ متناظر زاویهٔ θ، BC عمود بر محور کسینوس‌ها و BD عمود بر محور سینوس‌ها است.



وقتی θ در بازه‌های $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{۲},\pi\right]$ و $\left[\pi,\frac{۳\pi}{۲}\right]$ و $\left[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right]$ تغییر می‌کند، مکان نقطهٔ C روی محور کسینوس‌ها و نقطهٔ D روی محور سینوس‌ها را توصیف کنید.

مقدارهای $\cos\theta$ و $\sin\theta$ در چه بازه‌ای قرار دارند؟ جدول را مانند مثال کامل کنید.

مقدار زاویهٔ θ	در بازهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$	در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۲},\pi\right]$	در بازهٔ $\left[\pi,\frac{۳\pi}{۲}\right]$	در بازهٔ $\left[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right]$
مکان نقطهٔ C	روی پاره‌خط OA قرار دارد	روی پاره‌خط OE قرار دارد		
مقدار cos θ	در بازهٔ [۰,۱] قرار دارد	در بازهٔ [-۱,۰] قرار دارد		
مکان نقطهٔ D				
مقدار sin θ				

این فعالیت نشان می‌دهد سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه، اعدادی در بازهٔ $[-۱,۱]$ هستند.
سال گذشته دیدیم که تانژانت زاویه‌های تند هر عدد مثبتی می‌تواند باشد. برای زاویه‌های دلخواه که در ربع دوم و چهارم قرار می‌گیرند، مقادیر تانژانت منفی است و می‌توانیم ببینیم که مقدار تانژانت این زاویه‌ها هر مقدار منفی می‌تواند باشد. بنابر این، هر عدد حقیقی (مثبت، منفی یا صفر) به‌صورت تانژانت یک زاویه خواهد بود.
در محاسبات با نسبت‌های مثلثاتی، گاهی نیازمند محاسبهٔ توان‌هایی از آنها هستیم. برای سادگی، عبارت $(\sin\theta)^۲$ را به‌صورت $\sin^۲\theta$ می‌نویسیم؛ به همین ترتیب برای توان‌های بالاتر نیز، عبارت‌هایی مانند $(\sin\theta)^۵$ را به‌صورت $\sin^۵\theta$ می‌نویسیم. برای سایر نسبت‌های مثلثاتی نیز از این قرارداد استفاده می‌کنیم؛ مثلاً منظور از عبارت $\tan^۳\theta$، توان سوم $\tan\theta$ است.

مثال ۱۵

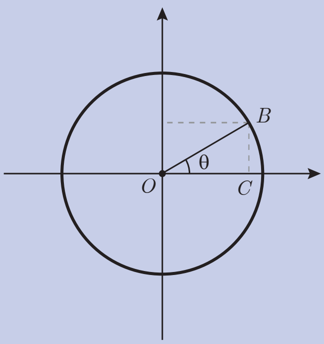
$$\sin^۲ ۳۰^\circ = (\sin ۳۰^\circ)^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \quad \text{ولی} \quad \sin ۳۰^{\circ ۲} = \sin ۹۰۰^\circ$$

توجه داشته باشید که عبارت $\sin\theta^۲$ با عبارت $\sin^۲\theta$ فرق دارد. منظور از $\sin\theta^۲$، سینوس زاویه $\theta^۲$ است و منظور از $\sin^۲\theta$، توان دوم $\sin\theta$ است.

کار در کلاس ۶

۱ زاویهٔ تند θ را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی در شکل روبه‌رو در نظر بگیرید.
با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه OCB، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$$



....

۲ تساوی بالا برای سایر زاویه‌ها نیز برقرار است. درستی این تساوی را برای چند زاویه در ربع‌های دیگر بررسی کنید.

....

۳ اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به‌طوری که $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

....

مسائل

۱ در جدول‌های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه‌های داده شده در کدام ربع از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند.

زاویهٔ θ بر حسب درجه	۳۶۳	۲۸۰	۱۴۰	−۸۰
مکان زاویهٔ θ				

زاویهٔ θ بر حسب رادیان	$\frac{12\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{4}$
مکان زاویهٔ θ				

۲ با تعیین مکان زاویهٔ $-\frac{5\pi}{4}$ تعیین کنید کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است.

الف) $0<\sin(-\frac{5\pi}{4})$ و $0<\cos(-\frac{5\pi}{4})$.

ب) $0<\sin(-\frac{5\pi}{4})$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4})<0$

پ) $\sin(-\frac{5\pi}{4})<0$ و $0<\cos(-\frac{5\pi}{4})$

ت) $\sin(-\frac{5\pi}{4})<0$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4})<0$

۳ جدول زیر را با مشخص‌کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها کامل کنید. در هر مورد مثالی بزنید.

θ / علامت نسبت مثلثاتی	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$				
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

۴ مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin^{۲} ۶۰^\circ$

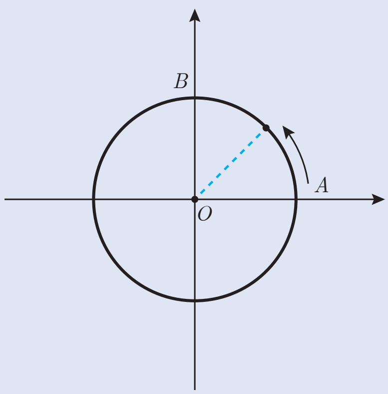
ب) $\tan^{۴} ۳۰^\circ$

پ) $(\sin ۱۵ + \cos ۱۵)^{۲}$

ت) $\cos ۱۵^{۲} + \sin ۱۵^{۲}$

۵ دوچرخه‌سواری روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۵۰ متر از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند و در هر ثانیه ۲ متر طی می‌کند.

الف) زاویهٔ چرخش این دوچرخه سوار در هر ثانیه چند رادیان است؟



ب) اگر دوچرخه‌سوار پس از ۳۰ دقیقه حرکت بایستد، در کدام ربع از دایره ایستاده است؟

۶ زاویهٔ θ در ربع سوم است و $\cos\theta = -\frac{۱}{۵}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

۷ اگر برای زاویهٔ θ داشته باشیم $\sin\theta = \frac{-۲}{۳}$، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورد؟ چرا؟ چه اطلاعات دیگری را هم باید بدانیم؟

۸ نشان دهید برای زاویهٔ دلخواه θ تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \,,\; \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \,,\; \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

۹ دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آنها ۱- است.

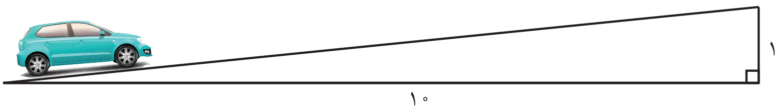
شیب خط و تانژانت زاویه‌ها

گفتگو

سعید به تازگی از سفر به یکی از مناطق کوهستانی کشور بازگشته بود. او گفت جاده سربالایی و سرازیری‌های بسیاری داشت و در کنار جاده میزان سربالایی و سرازیری جاده با علامتی مانند روبه‌رو نشان داده شده بود.

سعید در کلاس ریاضی پرسید: عددهای روی این تابلو چه چیزی را نشان می‌دهند؟

دبیر گفت: این علامت به معنای نسبت ۱ به ۱۰ است و در اینجا یعنی به ازای هر ۱۰ واحد حرکت افقی، ارتفاع از سطح زمین ۱ واحد افزایش می‌یابد. پس می‌توانیم وضعیت سربالایی جاده را با شکل زیر مدل‌سازی کنیم.



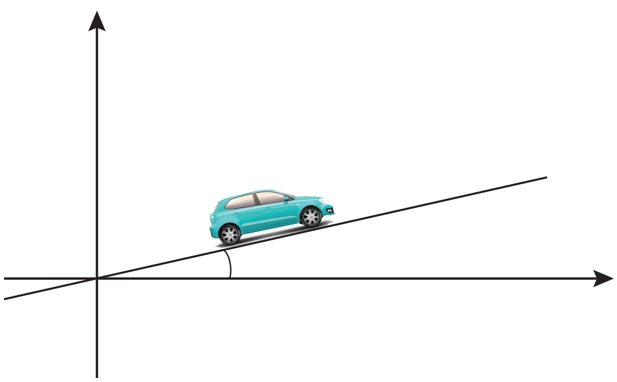
دبیر ادامه داد: در این حالت می‌گویند: شیب این جاده $\frac{۱}{۱۰}$ است.

سعید گفت: اما $\frac{۱}{۱۰}$ همان تانژانت زاویه‌ای است که جاده با خط افق می‌سازد. بنابراین شیب جاده همان تانژانت زاویه‌ای است که جاده با خط افق می‌سازد.

سعید ادامه داد: در ریاضی برای خط‌هایی که در یک صفحهٔ مختصات رسم شده‌اند نیز مفهوم شیب تعریف شده است. آیا بین شیب جاده و شیب خط، رابطه‌ای وجود دارد؟

دبیر گفت: باید این دو مفهوم را بررسی کنیم تا ببینیم آیا رابطه‌ای بین آنها وجود دارد یا نه.

سعید گفت: شیب یک خط به معادلهٔ $y= ax + b$ ، عدد a است، اما شیب جاده، تانژانت یک زاویه است. این دو مقدار چه ارتباطی با هم می‌توانند داشته باشند؟



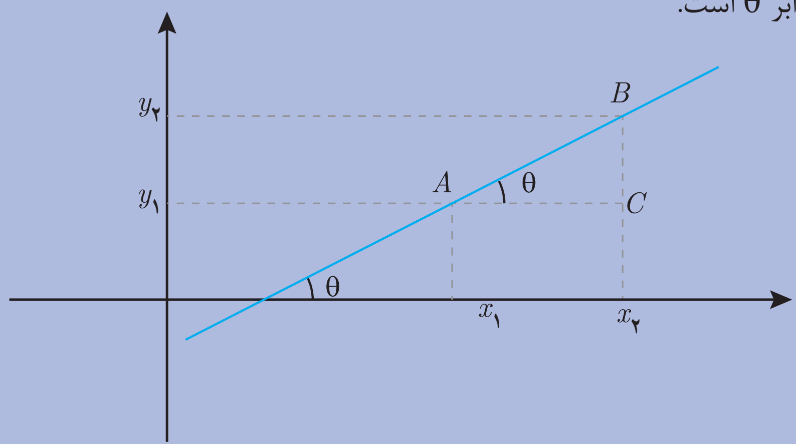
دبیر گفت: اگر مسیر یک جاده را همانند یک خط و خط افق را همانند محور افقی یک صفحهٔ مختصات درنظر بگیریم، وضعیت جاده و خط کاملاً مشابه هم خواهند بود.

سعید گفت: طبق این شکل، شیب جاده، تانژانت زاویهٔ بین خط و محور افقی است. آیا شیب خط نیز همین مقدار است؟

دبیر گفت: فعالیت صفحه بعد می‌تواند پاسخ سؤال سعید را مشخص کند.

فعالیت ۵

یک خط دلخواه به معادلهٔ $y = ax + b$ با شیب مثبت ($a > ۰$) در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویهٔ این خط با محور طول‌ها برابر θ است.



۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

....

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

....

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، تانژانت زاویهٔ θ را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

....

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویه آن با محور افقی به‌دست می‌آورید؟

....

این فعالیت نشان می‌دهد که برای یک خط با شیب مثبت، تانژانت زاویهٔ تند بین این خط و محور xها همان شیب خط است.

مثال ۱۶

خط به معادلهٔ $y = x + ۲$ با محور xها زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد زیرا، شیب این خط عدد ۱ است و زاویهٔ تندی که تانژانت آن ۱ است، ۴۵ درجه است.

مثال ۱۷

معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد و محور yها را در نقطهٔ به عرض ۲ قطع کند.

شیب این خط برابر تانژانت ۶۰ درجه، یعنی $\sqrt{۳}$ است. می‌دانیم معادلهٔ خط با شیب m که از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ b \end{bmatrix}$ می‌گذرد به‌صورت $y = ax + b$ است. پس معادلهٔ این خط عبارت است از:

$$y = \sqrt{۳}x + ۲$$

پس از آنکه برای خط‌های با شیب مثبت، یکسان بودن شیب خط و تانژانت زاویهٔ بین خط و محور xها مشخص شد، نکتهٔ دیگری توجه سعید را جلب کرد.

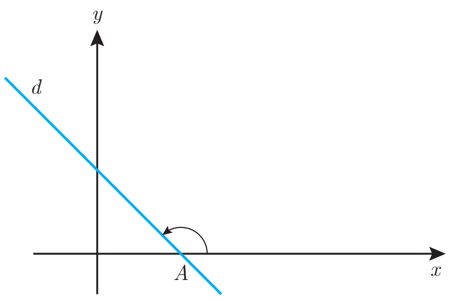
گفتگو

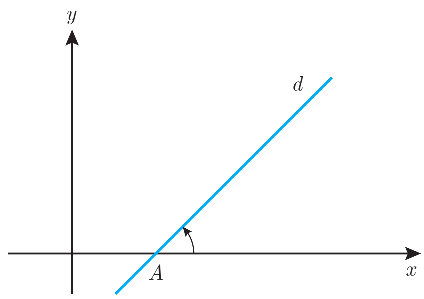
سعید گفت: برخی خط‌ها در صفحهٔ مختصات شیب منفی دارند. آیا در چنین وضعیتی هم می‌توانیم شیب این خط‌ها را برابر تانژانت یک زاویه بدانیم؟

حمید گفت: تانژانت زاویه‌های باز، منفی است. شاید بتوانیم برای یک خط با شیب منفی، یک زاویهٔ باز بیابیم که تانژانت آن برابر شیب آن خط باشد.

سعید گفت: آیا زاویهٔ بین خط‌های با شیب منفی و محور xها یک زاویه باز است؟

دبیر گفت: باید تعریف دقیق‌تری از زاویهٔ بین یک خط و محور طول‌ها داشته باشیم. در شکل زیر خط d محور طول‌ها را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند. نیم‌خط Ax را در جهت مثبت، حول نقطهٔ A دوران می‌دهیم تا بر d منطبق شود. اندازهٔ چرخش Ax را زاویهٔ بین خط d و محور طول‌ها می‌نامند. در حالتی که خط d محور طول‌ها را قطع نکند، با آن موازی است و زاویهٔ بین خط d و محور طول‌ها، صفر در نظر گرفته می‌شود.



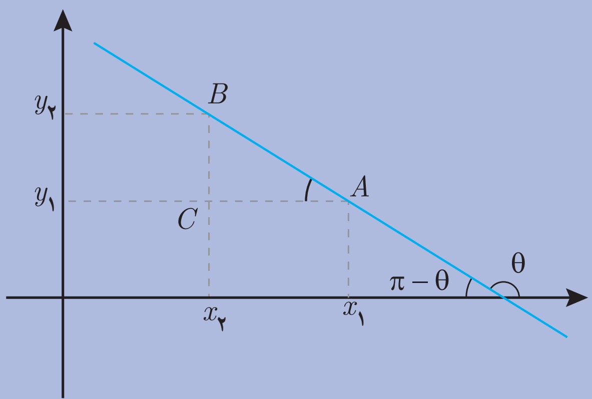


حمید گفت: با این تعریف، زاویهٔ خط‌های با شیب مثبت با محور طول‌ها، تند و زاویهٔ خط‌های با شیب منفی با محور طول‌ها، باز است. شاید تانژانت این زاویه نیز همان شیب خط باشد.

دبیر گفت: حدس خوبی زدی. با انجام فعالیت زیر می‌توانید درستی این حدس را بررسی کنید.

فعالیت ۶

یک خط دلخواه را به معادلهٔ $y = ax + b$ با شیب منفی $(a < 0)$ در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویه این خط با محور طول‌ها برابر زاویه باز θ است.



۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

....

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

....

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، تانژانت زاویه $\pi - \theta$ (زاویهٔ A) را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

....

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و $\tan(\pi - \theta)$ به‌دست می‌آورید؟

....

۵ با استفاده از (۴) چه رابطه‌ای بین شیب خط و تانژانت زاویهٔ بین خط و محور طول‌ها به‌دست می‌آورید؟

....

از فعالیت‌های (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که شیب هر خطی (مثبت یا منفی)، برابر تانژانت زاویه آن خط با محور طول‌ها است.

نکته

برای هر خط d با شیب m که با محور طول‌ها زاویه θ می‌سازد داریم: $\tan\theta = m$

مثال ۱۸

معادلهٔ خطی را که از مبدأ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه باز $\frac{5\pi}{6}$ می‌سازد، بنویسید.

ابتدا تانژانت این زاویه را که شیب این خط است محاسبه می‌کنیم. با استفاده از رابطهٔ $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ داریم:

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

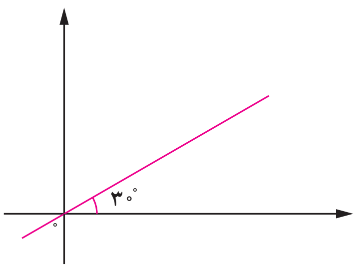
پس معادلهٔ این خط عبارت است از: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

مثال ۱۹

نمودار خط به معادلهٔ $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ را بدون نقطه‌یابی رسم کنید.

می‌دانیم $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ پس ابتدا خطی رسم می‌کنیم که با محور xها زاویه 30° بسازد.

با توجه به اینکه عرض از مبدأ این خط، ۲ است از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ خطی به موازات این خط رسم می‌کنیم.



مثال ۲۰

زاویهٔ خط به معادلهٔ $y = 2$ با محور طول‌ها چقدر است؟

این خط موازی محور طول‌ها است و زاویهٔ آن با محور طول‌ها صفر است. همچنین شیب آن صفر است و تانژانت زاویهٔ بین این خط و محور طول‌ها نیز صفر است.

کار در کلاس ۷

۱ زاویهٔ بین خط به معادلهٔ $y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$ و محور طول‌ها، چند رادیان است؟

....

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویهٔ ۱۵۰ درجه بسازد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

....

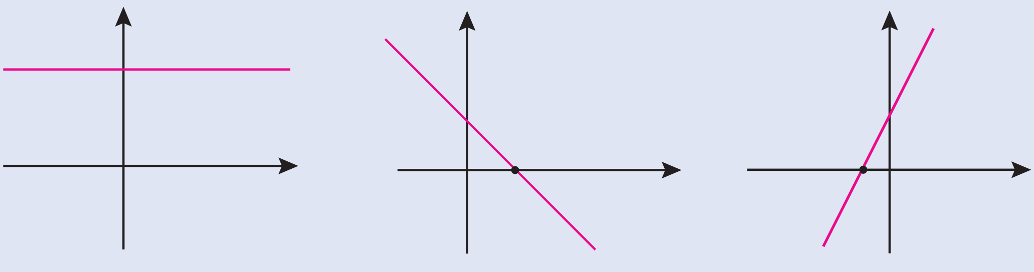
۳ شیب خط $y = -4$ چقدر است؟ زاویهٔ بین خط $y = -4$ و محور طول‌ها چقدر است؟

....

مسائل

برای حل مسائل این صفحه در صورت نیاز از نقاله و ماشین‌حساب استفاده کنید.

۱ در شکل‌های زیر زاویهٔ بین خط و محور طول‌ها و شیب خط را به‌دست آورید.



۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویهٔ ۲۰ درجه بسازد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ بگذرد.

۳ خطی که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟

۴ خط به معادلهٔ $\sqrt{۳}x - ۳y = ۴$ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع می‌کند و چه زاویه‌ای با آن می‌سازد؟

۵ از برخورد سه خط با معادله‌های $y = \sqrt{۳}x$ و $y = -x + ۵$ و $y = ۰$ (محور طول‌ها)، یک مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را بر حسب رادیان به‌دست آورید.

۶ خط‌های به معادلهٔ $۳x - ۵y = c$ با هم (موازی‌اند/ متقاطع‌اند). زاویهٔ این خط‌ها با محور طول‌ها برحسب درجه و رادیان به‌طور تقریبی چقدر است؟

پودمان چهارم

لگاریتم و خواص آن

دانشمندان اخیراً موفق به کشف دورترین کهکشان در محدوده شناخته شده جهان هستی شدند. این کهکشان که MACS ۰۶۴۷ JD – نام‌گذاری شده، تقریباً ۱۳/۳ میلیارد سال نوری با ما فاصله دارد و از نظر اندازه، جزء کوچکی از کهکشان راه شیری است. به گفتهٔ دانشمندان، با توجه به سرعت نور در فضا، آنچه که اکنون ما از زمین می‌بینیم، متعلق به زمانی است که دنیا تنها ۴۲۰ میلیون سال سن داشته است. شاید جالب باشد بدانید که سن فعلی جهان حدود ۱۳/۷۵ میلیارد سال است. کار با این گونه اعداد بزرگ وقت و انرژی زیادی از دانشمندان را به خود اختصاص می‌داد؛ اختراع لگاریتم تا قبل از ظهور کامپیوتر کمک مؤثری در تسهیل این محاسبات داشته است. امروزه لگاریتم درحسابداری، شیمی، فیزیک و... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

امروز دبیر با ورود به کلاس گفت:

«چه کسی می‌داند کدام موضوع از ریاضیات است که به گفتهٔ لاپلاس طول عمر اختر شناسان را چند برابر کرده است؟»

او همچنین گفت: به نظر من این موضوع نه تنها طول عمر اختر شناسان، بلکه طول عمر دریانوردان، بازرگانان، شیمی‌دانان، ریاضی‌دانان، و زمین شناسان و همهٔ انسان‌های کرهٔ زمین را چند برابر کرده است.

طرح این سؤال موجب تعجب هنرجویان شده بود و همه کنجکاو بودند که این چه موضوعی از ریاضی است که موجب افزایش طول عمر می‌شود.

مریم گفت: تاکنون فکر می‌کردم موضوع‌هایی که در زمینهٔ افزایش طول عمر کار می‌شود مربوط به حوزهٔ زیست‌شناسی است، برای من جالب است بدانم ارتباط این موضوع با ریاضی چیست.

دبیر گفت: این موضوع در بسیاری از شاخه‌های علوم نیز کاربرد دارد و برای آشنایی با این موضوع بهتر است فعالیت صفحهٔ بعد را انجام دهید.

فعالیت ۱

۱ فاصلهٔ زمین از خورشید تقریباً ۱۲۹۱۴۰۱۶۳کیلومتر و فاصلهٔ ستارهٔ پروکسیما قنطورس تا زمین تقریباً ۱۷۷۱۴۷برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید است. برای تعیین فاصلهٔ این ستاره تا زمین باید از کدام چهار عمل اصلی استفاده کرد؟ حدس می‌زنید برای انجام این عمل چقدر زمان نیاز دارید؟

۲ ستارهٔ شباهنگ (سیروس) در فاصلهٔ تقریباً ۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ کیلومتری از زمین است، اگر بخواهیم بدانیم فاصلهٔ ستاره شباهنگ از زمین چند برابر فاصلهٔ خورشید تا زمین است چه عملی باید انجام دهید؟ حدس می‌زنید زمان انجام این عمل چقدر است؟

۳ با استفاده از جدول مقابل که در آن توان‌هایی از ۳ محاسبه شده است، جاهای خالی را کامل کنید و حاصل را با استفاده از ضرب اعداد توان‌دار بنویسید.

$$۱۲۹۱۴۰۱۶۳ \times ۱۷۷۱۴۷ = ۳^{\dots} \times ۳^{\dots} = ۳^{\dots}$$

$$۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ \div ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ = ۳^{\dots} \div ۳^{\dots} = ۳^{\dots}$$

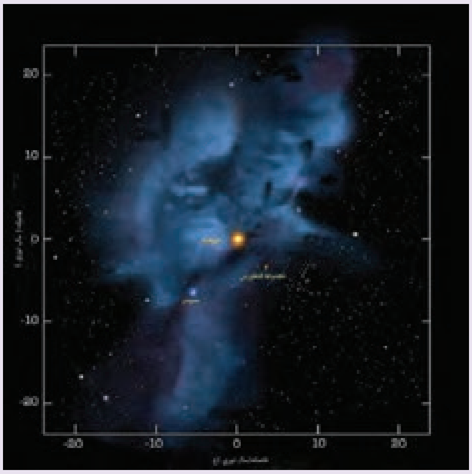
۴ با استفاده از قسمت قبل و جدول مقابل به سؤال‌های (الف) و (ب) پاسخ دهید.

الف) فاصلهٔ پروکسیما قنطورس از زمین چقدر است؟

ب) فاصلهٔ ستارهٔ شباهنگ (سیروس) چند برابر فاصلهٔ خورشید تا زمین است؟

۵ محاسبهٔ مستقیم ساده‌تر است یا استفاده از جدول؟ زمان انجام کدام روش کمتر است؟

....



نزدیک‌ترین ستاره به زمین که فقط در نیمکره جنوبی قابل رؤیت است پروکسیما قنطورس و نزدیک‌ترین ستاره که از همهٔ نقاط زمین قابل رؤیت است شباهنگ (سیروس) است.

حاصل	۳^n	n
۱	$۳^{۰}$	۰
۳	$۳^{۱}$	۱
۹	$۳^{۲}$	۲
۲۷	$۳^{۳}$	۳
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۷۷۱۴۷	$۳^{۱۱}$	۱۱
۵۳۱۴۴۱	$۳^{۱۲}$	۱۲
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۲۹۱۴۰۱۶۳	$۳^{۱۷}$	۱۷
۳۸۷۴۲۰۴۸۹	$۳^{۱۸}$	۱۸
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۷۶۲۵۵۹۷۴۸۴۹۸۷	$۳^{۲۷}$	۲۷
۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۹۶۱	$۳^{۲۸}$	۲۸
۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳	$۳^{۲۹}$	۲۹

در این فعالیت دیدیم که برای ضرب و تقسیم دو عدد بزرگ، اگر بتوان آنها را به صورت اعداد توان‌دار (با پایهٔ مساوی) نوشت آنگاه با جمع و تفریق توان‌های آنها به نتیجهٔ مورد نظر خواهیم رسید. استفاده از این تکنیک که به‌جای ضرب و تقسیم اعداد بزرگ، با جمع و تفریق اعداد کوچک‌تر کار می‌کنیم موجب افزایش سرعت و کاهش زمان محاسبات می‌شود و از اشتباهاتی که درمحاسبهٔ مربوط به اعداد بزرگ است جلوگیری می‌کند. به‌نظر می‌رسد جملهٔ معروف لاپلاس نیز به این دلیل بوده که برای انجام این محاسبات، وقت و نیروی بسیار زیادی از دانشمندان تلف می‌شده است و این روش باعث شده که دانشمندان وقت خود را با محاسبات حجیم هدر ندهند.

استفاده از اعداد توان‌دار و توجه به توان آنها برای انجام محاسبات، موجب پیدایش مفهومی به نام **لگاریتم** در ریاضی شده است. در فعالیت (۱) با توجه به تساوی $۱۷۷۱۴۷=۳^{۱۱}$، برای انجام عمل ضرب به جای عدد ۱۷۷۱۴۷ از عدد ۱۱ (که توان در $۳^{۱۱}$ می‌باشد) استفاده شده است. بنا به تعریف عدد ۱۱ را **لگاریتم** ۱۷۷۱۴۷ در مبنای ۳ می‌نامند.

مثال ۱

الف) تساوی $۸ = ۲^{۳}$ نمایش عدد ۸ به صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۲ است؛ بنابراین ۳ را لگاریتم ۸ در مبنای ۲ می‌نامند.

ب) اگر عدد ۱۰۰۰ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۱۰ بنویسیم، داریم، $۱۰۰۰ = ۱۰^{۳}$ بنابراین لگاریتم ۱۰۰۰ در مبنای ۱۰ عدد ۳ است .

پ) عدد ۶۴، توانِ سوم عدد ۴ است، یعنی $۶۴ = ۴^{۳}$، بنابراین لگاریتم ۶۴ در مبنای ۴ عدد ۳ است.

کار در کلاس ۱

۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) از $۸۱ = ۳^{۴}$ نتیجه می‌شود: لگاریتم ...... در مبنای ...... عدد ۴ است.

ب) لگاریتم ۱۰۰۰۰ در مبنای ۱۰ عدد .... است؛ زیرا $۱۰۰۰۰ = ۱۰^{...}$

پ) $... = ۴^{۲}$ نشان می دهد: لگاریتم ...... در مبنای ۴ عدد ...... است.

۲ عدد ۶۴ را به‌صورت یک عدد توان دار با پایهٔ ۲ نوشته و با استفاده از آن لگاریتم ۶۴ در مبنای ۲ را بنویسید.

....

با معرفی لگاریتم این سؤال مطرح خواهد شد که آیا می‌توان هر عدد حقیقی را به‌عنوان مبنای لگاریتم درنظر گرفت؟ فعالیت بعد مناسب بودن عدد ۱ به‌عنوان مبنا را بررسی می‌کند.

فعالیت ۲

تساوی‌های $1^0=1$ و $1=\sqrt[3]{1}=1^{\frac{1}{3}}$ و $1^2=1$ و $1^3=1$ و $1=\frac{1}{1^3}=1^{-3}$ و $1^4=1$ و ... را در نظر بگیرید،

۱ در تساوی $1^{\cdots}=1$ به‌جای نقطه چین چه اعدادی می‌توان قرار داد؟

....

۲ آیا می‌توان عدد a را طوری پیدا کرد که: $1^a=2$. به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۲ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

....

۳ آیا عدد a را می‌توان طوری یافت که در تساوی: $1^a=3$ صدق کند. به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۳ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

....

۴ آیا عددی غیر از ۱ را می‌توان به‌صورت عددی توان‌دار با پایهٔ ۱ نوشت؟ چرا ؟

....

۵ با توجه به نتایج بالا، فکر می‌کنید می‌توان عدد ۱ را به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب کرد؟ چرا ؟

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد عدد ۱ را نمی‌توان به عنوان مبنا برای لگاریتم در نظر گرفت.
تعریف لگاریتم در حالت کلی به شکل زیر است.

تعریف

اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و اعداد حقیقی b و c به گونه‌ای باشند که: $b=a^c$ آنگاه c را لگاریتم b در مبنای a می‌نامند و با $\log_a b$ نشان می‌دهند. یعنی $\log_a b=c$

در تعریف لگاریتم[1]، مبنا همواره عددی مثبت و مخالف ۱ در نظر گرفته می‌شود، زیرا توان‌رسانی به توان اعداد دلخواه فقط با پایهٔ مثبت قابل تعریف است.

نکته

در نماد $\log_a b$، عدد b توان a نیست، بلکه a مبنای لگاریتم است، به عبارت دیگر: $\log_a b\neq \log a^b$

۱ـ لگاریتم در زبان انگلیسی logarithm است و آن را به‌طور خلاصه با log نمایش می‌دهند.

مثال ۲

در تساوی ۹ = $۳^۲$ ، عدد ۹ به صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۳ نمایش داده شده است؛ بنابراین ۲ برابر است با لگاریتم ۹ در مبنای ۳ و می‌نویسیم: ۲ = $\log_۳ ۹$ یعنی :

توان عدد، مقدار لگاریتم است

$\log_۳ ۹ = ۲ \qquad\qquad ۳^۲ = ۹$

پایهٔ عدد، مبنای لگاریتم است

مثال ۳

در توان‌رسانی با اعداد گویا دیدیم برخی اعداد رادیکالی را (که زیر رادیکال عددی نامنفی باشد) می‌توان به صورت عددی با توان گویا نوشت. مثلاً $\sqrt{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۲}}$، بنابراین لگاریتم $\sqrt{۱۰}$ در مبنای ۱۰ برابر با $\frac{۱}{۲}$ یا ۰/۵ است و می‌نویسیم:

$$\log_{۱۰} \sqrt{۱۰} = ۰/۵$$

لگاریتم در بسیاری از شاخه‌های علوم نظیر نجوم، فیزیک، زمین‌شناسی، شیمی، ریاضی و همچنین در حسابداری و مسائل مالی کاربرد فراوانی دارد. استفاده از این مفهوم و به‌کارگیری خواص آن در حل مسائل مربوط به این شاخه‌ها، گسترده‌تر از محاسبات مربوط به ضرب و تقسیم اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک می‌باشد.

مثال ۴

نوعی باکتری را در نظر بگیرید که در هر واحد زمانی ۲ برابر می‌شود ، اگر با ۱ گرم از این نوع باکتری شروع کنیم مقدار این باکتری‌ها پس از ۱ واحد زمانی $۲^۱$ گرم و پس از ۲ واحد زمانی $۲^۲$ گرم خواهد بود. اگر بخواهیم بدانیم پس از چند واحد زمانی مقدار باکتری‌ها ۸ گرم خواهد شد، لازم است بدانیم چه توانی از ۲ مساوی ۸ است و این همان $\log_۲ ۸$ می‌باشد. به‌همین ترتیب $\log_۲ ۱۶$ مقدار زمانی که لازم است تا این باکتری‌ها به ۱۶ گرم برسد را نشان می‌دهد.

کار در کلاس ۲

۱ هر سطر جدول زیر، تساوی‌های متناظر را نشان می‌دهد، جدول را کامل کنید.

تساوی برحسب لگاریتم	تساوی برحسب عدد توان‌دار
$\log_{۵}۱۲۵ = \dots$	$۵^{۳} = ۱۲۵$
$\log_{۷}\dots = \dots$	$۷^{۲} = \dots$
$\log_{۳}۸۱ = \dots$	$۳^{\dots} = ۸۱$
$\log_{\dots}۶۴ = ۳$	$۴^{\dots} = ۶۴$
....	$۲^{۵} = \dots$
....	$b^{۳} = ۲/۱$
$\log_{۳}۲۷ = \dots$	....
$\log_{۸}۲ = \dots$	$\sqrt[۳]{۸} = ۸^{\frac{۱}{۳}} = ۲$
$\log_{a}۴ = ۳/۳$	....

۲ عدد ۲۵ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایهٔ ۵ نوشته و با استفاده از آن حاصل $\log_{۵}۲۵$ را بنویسید.

یک سؤال مهم آن است که آیا می‌توان از همهٔ اعداد لگاریتم گرفت؟ یعنی آیا اعدادی وجود دارند که لگاریتم آنها تعریف نشده باشد؟ فعالیت زیر پاسخ این سؤال را فراهم می‌کند.

فعالیت ۳

۱ اگر $b = ۴^c$، جدول زیر را کامل کنید.

c	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
b	$\frac{۱}{۱۶}$	....	$\frac{۱}{۲}$	....	۲	....	....

۲ آیا در سطر دوم جدول عددی منفی وجود دارد؟ دربارهٔ علامت b چه می‌توان گفت؟

....

۳ با توجه به اینکه تساوی $b = ۴^c$ نشان می‌دهد $\log_۴ b = c$، دربارهٔ علامت b در $\log_۴ b$ چه می‌توان گفت؟

....

۴ اگر در پایه به جای ۴، عدد ۳ باشد با یک مثال درستی نتیجه‌ای که از قسمت قبل به دست آورده‌اید را بررسی کنید.

....

۵ اگر a عددی مثبت و مخالف ۱باشد و $b = a^c$ دربارهٔ علامت b چه می‌توان گفت؟ دربارهٔ علامت b در $\log_a b$ چه می‌توان گفت؟ آیا از عدد منفی می‌توان لگاریتم گرفت؟

....

با انجام فعالیت (۳) ملاحظه می‌کنید اعداد مثبت به هر توانی برسند حاصل، همواره عددی مثبت خواهد بود. یعنی هیچ توانی از یک عدد مثبت، عددی منفی نمی‌باشد، بنابراین:

نکته

فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند، یعنی عبارت $\log_a b$ برای $b > ۰$ تعریف می‌شود.

کار در کلاس ۳

۱ با توجه به ویژگی‌های توان رسانی اعداد، جملات زیر را کامل کنید.

برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند a:

الف) با توجه به $a^{۱} = a$، داریم $\log_a a = ...$

ب) از $a^{\circ} = ۱$ نتیجه می‌شود : $\log_a ۱ = ...$

پ) با درنظر گرفتن $a^{-n} = \frac{۱}{a^n}$ می‌توان گفت: $\log_a \frac{۱}{a^n} = ...$

ت) اگر $b = a^c$، آنگاه $\log_a b = c$. بنابراین: $\log_a a^c = ...$

مثال ۵

عبارت‌های زیر برقرار هستند:

الف) $\log_۴ ۴ = ۱$ زیرا $۴^{۱} = ۴$ ب) $\log_{\sqrt{۳}} \sqrt{۳} = ۱$ پ) $\log_۵ ۱ = ۰$ زیرا $۵^{\circ} = ۱$ ت) $\log_{۰/۴} ۱ = ۰$

ث) با توجه به اینکه $۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰^۳} = \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۰/۰۰۱$ داریم $\log_{۱۰} ۰/۰۰۱ = -۳$.

ج) از $۴^{-۱} = \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰/۲۵$ نتیجه می‌شود: $\log_۴ ۰/۲۵ = -۱$.

معمولاً برای نمایش لگاریتم در مبنای ۱۰ مبنای لگاریتم را نمی‌نویسند. پس $\log b = \log_{۱۰} b$.

با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان دید که لگاریتم اعدادی که توان‌های صحیح یا گویایی از مبنای لگاریتم می‌باشند به سادگی قابل محاسبه است، اما محاسبهٔ لگاریتم سایر اعداد چگونه انجام می‌شود؟ مثلاً برای محاسبهٔ $\log_{۱۰} ۹$ باید توانی از ۱۰ را پیدا کنیم که مساوی عدد ۹ باشد، واضح است که این عدد به سادگی قابل محاسبه نیست اما با استفاده از ماشین حساب می‌توان تقریب اعشاری این عدد را پیدا کرد.

استفاده ازماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) log ۹

ب) log۰/۰۰۱۶

9 → log → =

0 → . → 0 → 0 → 1 → 6 → log → =

خواندنی

مطالعهٔ نجوم از دیرباز مورد توجه ایرانیان بوده است. یکی از جلوه‌های آن مطالعات دقیق دربارهٔ تعیین طول سال است، ستاره‌شناسان آریایی با ستاره‌ها و طلوع و غروب آن آشنا بوده‌اند، سال نو در ایران باستان با گذر خورشید از نقطهٔ اعتدال بهاری آغاز می‌شد. در دورهٔ اسلامی علم هیئت به‌عنوان یکی از شاخه‌های اصلی نجوم در دایرهٔ علوم اسلامی قرار گرفت و دانشمندان بزرگ اسلامی از جمله خواجه‌نصیرالدین طوسی در این زمینه مشغول به فعالیت شدند. تأسیس رصدخانه‌ها، تدریس علم نجوم و هیئت، ساخت ابزارهای نمایش زمان، اصلاح تقویم و... شاهدهایی از عظمت این علم در دوران اسلامی در ایران است.

فعالیت دانشمندان ایرانی در زمینهٔ نجوم و اشکالاتی که مخصوصاً خواجه‌نصیرالدین طوسی و شاگردانش بر نظریهٔ "زمین مرکزی" مربوط به بطلمیوس وارد کردند، زمینهٔ فکری کوپرنیک ستاره‌شناس لهستانی ـ آلمانی را فراهم کرد تا مدل غیر بطلمیوسی "خورشید مرکزی" را ارائه کند در این نظریه خورشید را مرکز عالم در نظر گرفته و سایر اجرام آسمانی به دور آن می‌گردند. محاسبات مورد نیاز برای تنظیم مدل خورشید مرکزی وقت زیادی از دانشمندان را به خود اختصاص می‌داد. این مشکل زمینه‌های ابداع لگاریتم توسط ریاضی‌دان هم‌عصر کوپرنیک یعنی جان نپر را فراهم کرد.

خواجه نصیرالدین طوسی منجم، حکیم، متکلم و... دانشمند ایرانی است که در قرن ششم می‌زیسته است. وی رصدخانه و کتابخانهٔ مراغه را تأسیس کرد که در آن حدود چهارصد هزار جلد کتاب وجود داشت.

مسائل

۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید:

الف) از $۶۴ = ۴^{۳}$ نتیجه می‌شود: لگاریتم ۶۴ در مبنای .... عدد .... است.

ب) لگاریتم ۳۲ در مبنای ۲ عدد .... است؛ زیرا $۳۲ = ۲^{\cdots}$.

پ) از $\sqrt[۳]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$ نتیجه می‌شود: لگاریتم $\sqrt[۳]{۲}$ در مبنای ۲ عددِ .... است.

ت) با توجه به اینکه $۲۴۰۱ = ۷^{۴}$ داریم: $\log_{۷} ۲۴۰۱ = \ldots$

ث) با توجه به $۸^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲}$، می‌توان گفت: $\log_{۸} \frac{۱}{۲} = \cdots$.

ج) تساوی‌های $۰/۰۰۱ = \frac{۱}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰^{۳}} = ۱۰^{-۳}$ نشان می‌دهند: $\log ۰/۰۰۱ = \ldots$

۲ مانند قسمت (الف) تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید.

الف) $۱۶ = ۴^{۲} \leftrightarrow \log_{۴} ۱۶ = ۲$ ب) $۰/۰۰۰۱ = ۱۰^{-۴}$ پ) $۰/۱۲۵ = ۲^{-۳}$

ت) $۲/۱ = a^{۳}$ ث) $۴/۳ = ۲^{x}$ ج) $۹ = (\frac{۱}{۳})^{-۲}$ چ) $(۲۴۰۱)^{\frac{۱}{۴}} = ۷$

۳ در هر کدام از موارد زیر یک تساوی شامل لگاریتم داده شده است، مانند قسمت (الف) تساوی شامل عدد توان‌دارِ متناظر با هر کدام را بنویسید.

الف) $\log_{۲} ۶۴ = ۶ \leftrightarrow ۲^{۶} = ۶۴$ ب) $\log_{۳}(\frac{۱}{۹}) = -۲$ پ) $\log_{a} ۳ = ۶$

ت) $\log_{b} c = ۲$ ث) $\log_{۳} ۲ = x$ ج) $\log_{۳۲} ۲ = \frac{۱}{۵}$

۴ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\log_{۷} ۴۹ = \ldots$ ب) $\log_{۵} ۱۲۵ = \ldots$ پ) $\log_{۲} ۱۲۸ = \ldots$

ت) $\log_{۲} \frac{۱}{۸} = \cdots$ ث) $\log_{۱۰} ۰/۰۰۰۱ = \ldots$

۵ با استفاده از ماشین حساب، حاصل لگاریتم‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

الف) $\log ۵۰ \approx \ldots$ ب) $\log ۱۲ \approx \ldots$ پ) $\log ۲ \approx \ldots$

۶ نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۴ برابر می‌شود.

الف) پس از چند واحد زمانی، وزن ۱ گرم از این باکتری‌ها ۶۴ گرم خواهد شد؟

ب) پس از چند واحد زمانی، وزن این باکتری‌ها ۳۲ گرم خواهد شد؟

۷ در هر مورد زیر، یک تساوی شامل عددی توان‌دار و تساوی لگاریتمی متناظر با آن را طوری بنویسید که حاصل، لگاریتم عددی با ویژگی خواسته شده باشد.

الف) عدد طبیعی ب) عدد صحیح منفی پ) عدد گویا

خواص لگاریتم

گفتگو

اگر به کلام لاپلاس، در خصوص نقش لگاریتم در انجام محاسبات با اعداد بزرگ و آشنایی با مفهوم لگاریتم توجه کرده باشید، شاید این سؤال به ذهن شما نیز رسیده باشد که:

« چگونه برای ضرب و تقسیم اعداد بزرگ از لگاریتم استفاده می‌کنند؟»

دبیر پرسید: با توجه به فعالیت (۱) که در خصوص فاصلهٔ ستارگان و برای معرفی لگاریتم مطرح شد، آیا کسی می‌تواند پاسخ سؤال فوق را حدس بزند؟

مریم گفت: در فعالیت (۱) برای ضرب دو عدد بزرگ ابتدا آنها را به‌صورت دو عدد توان‌دار نوشتیم. سپس توان‌های آنها را با هم جمع کرده و مقدار عدد توان‌دار جدید را به‌دست آوردیم. بنابراین، با استفاده از جدول مقادیر توان‌های ۳، عمل ضرب اعداد، به جمع توان‌های آنها تبدیل شد.

دبیر گفت: بله، بنابراین شما به جای ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار، توان‌های آنها را جمع و تفریق کردید. با توجه به مفهوم لگاریتم، این توان‌ها چه هستند؟

مریم گفت: این توان‌ها، لگاریتم آن اعداد در مبنای ۳ بودند. یعنی برای انجام محاسبهٔ مورد نیاز، لگاریتم‌ها را جمع یا تفریق کردیم.

دبیر گفت: پاسخ نهایی سؤال شما مربوط به خواص لگاریتم است. فعالیت زیر یکی از خواص مهم لگاریتم را نشان می‌دهد.

فعالیت ۴

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	c	$\log b$	$\log c$	bc	$\log bc$
۱۰	۱۰۰	۱	....	۱۰۰۰	۳
۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	....	۳	....	۷
۰/۱	۱۰۰	۱-	....	$۱۰^{-۳}$	....
$\sqrt{۱۰}$	$\sqrt{۱۰}$	....	....	....	۱
۱۰^{x}	۱۰^{y}	x	....	۱۰^{x+y}	....

۲ در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های $\log b$ و $\log c$ و ستون $\log bc$ وجود دارد؟

....

۳ این رابطه را به صورت یک جمله بیان نمایید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

....

فعالیت (۴) نشان می‌دهدکه لگاریتم حاصل ضرب دو عدد با مجموع لگاریتم‌های آن دو عدد برابر است. این یکی از خواص مهم لگاریتم است و در حالت کلی داریم:

نکته

برای $b,c > ۰$ داریم: $\log bc = \log b + \log c$

این رابطه برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

مثال ۶

با استفاده از این خاصیت لگاریتم، می‌توانیم بدون آنکه دو عدد را ضرب کنیم لگاریتم حاصل‌ضرب آنها را به دست آوریم.

الف) $\log ۱۰۰\sqrt[۵]{۱۰} = \log(۱۰۰\times\sqrt[۵]{۱۰}) = \log ۱۰۰ + \log\sqrt[۵]{۱۰} = ۲ + \log ۱۰^{\frac{۱}{۵}} = ۲ + \frac{۱}{۵} = \frac{۱۱}{۵}$

ب) $\log ۲ + \log ۵ = \log(۲ \times ۵) = \log ۱۰ = ۱$

پ) $\log ۱۲۵ + \log ۴ + \log ۲ = \log(۱۲۵ \times ۴ \times ۲) = \log ۱۰۰۰ = ۳$

اکنون که با لگاریتم و یکی از خاصیت‌های آن آشنا شده‌ایم، می‌توانیم مسئله مربوط به فعالیت (۱) را به کمک لگاریتم حل کنیم.

مثال ۷

فاصله زمین از خورشید با دقت بیشتر ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ کیلومتر و فاصلهٔ ستارهٔ پروکسیما قنطورس تا زمین با دقت بیشتر۲۶۸۶۰۶ برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید است. برای به‌دست آوردن فاصله این ستاره تا زمین باید حاصل ضرب ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ × ۲۶۸۶۰۶ را حساب کنیم. انجام این ضرب مشکل است ولی محاسبهٔ لگاریتم آن آسان است. کافی است که لگاریتم این دو عدد را حساب کنیم و با هم جمع کنیم. بنابراین ابتدا لگاریتم این دو عدد را به کمک ماشین حساب به دست می‌آوریم:

$\log ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ \approx ۸/۲$ و $\log ۲۶۸۶۰۶ \approx ۵/۴$

با استفاده از خاصیت لگاریتم داریم:

$$\log(۱۴۹۶۸۰۰۰۰ \times ۲۶۸۶۰۶) = \log ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ + \log ۲۶۸۶۰۶ \approx ۸/۲ + ۵/۴ = ۱۳/۶$$

پس: $\log(۱۴۹۶۸۰۰۰۰ \times ۲۶۸۶۰۶) \approx ۱۳/۶$

چون مبنای این لگاریتم ۱۰ بوده است، خواهیم داشت:

$$۱۴۹۶۸۰۰۰۰ \times ۲۶۸۶۰۶ \approx ۱۰^{۱۳/۶}$$

با استفاده از ماشین حساب داریم: $۱۰^{۱۳/۶} \approx ۳۹۸۱۰۷۱۷۰۵۵۳۴۹$.

بنابراین فاصله مورد نظر تقریباً ۳۹۸۱۰۷۱۷۰۵۵۳۴۹ کیلومتر است.

این شیوهٔ محاسبه را برای محاسبه حاصل‌ضرب هر دو عدد بزرگ یا کوچکی می‌توان به‌کار برد.

استفاده ازماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب، $\log ۱۰۰ + \log ۱۰۰۰$ و $\log(۱۰۰+۱۰۰۰)$ را با تقریب تا دو رقم اعشار به‌دست آورید و در مربع علامت مساوی(=)یا نامساوی (≠) قرار دهید:

$$\log(۱۰۰+۱۰۰۰) \ \square \ \log ۱۰۰ + \log ۱۰۰۰$$

1 → 0 → 0 → log → + → 1 → 0 → 0 → 0 → log → =

1 → 1 → 0 → 0 → log → =

نکته

در حالت کلی: برای $a,b > ۰$ داریم: $\log(a+b) \neq \log a + \log b$

کار درکلاس ۴

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\log ۴ + \log ۲۵ =$

ب) $\log ۱۰۰\sqrt{۱۰} =$

پ) $\log \sqrt[۳]{۲۰} + \log \sqrt[۳]{۲} + \log \sqrt[۳]{۲۵} =$

۲ فاصلهٔ دورترین ستاره‌ای که با چشم غیر مسلح قابل رؤیت است از زمین، $۱۰^{۱۱} \times ۵۰۵۶۱۱۹۷۲۲$ برابر فاصلهٔ زمین از خورشید است. فاصلهٔ این ستاره از زمین را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.

....

دیدیم که لگاریتم حاصل ضرب دو عدد مثبت با مجموع لگاریتم‌های آنها برابر است. در مورد لگاریتم تقسیم دو عدد، چه رابطه‌ای برقرار است؟ فعالیت صفحهٔ بعد به بررسی این مطلب می‌پردازد.

فعالیت ۵

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	c	$\log b$	$\log c$	$\frac{b}{c}$	$\log\frac{b}{c}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	....	۱۰۰	....
۱۰۰	۱۰	....	....	....	....
۰/۱	۱۰۰	۱-	....	$۱۰^{-۳}$	....
$۱۰۰\sqrt{۱۰}$	$۱۰\sqrt{۱۰}$	....	$\frac{۳}{۲}$	....	....
۱۰^{x}	۱۰^{y}	x	....	۱۰^{x-y}	....

۲ در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های $\log b$ و $\log c$ و ستون $\log\frac{b}{c}$ وجود دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

فعالیت (۵) نشان می‌دهد که لگاریتم تقسیم دو عدد با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه برابر است، درحالت کلی داریم:

نکته

برای $b,c > ۰$ داریم: $\log\frac{b}{c} = \log b - \log c$

این خاصیت، برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

مثال ۸

الف) با توجه به $\log ۵ \approx ۰/۷$ و $\log ۲۰ \approx ۱/۳$ مقدار تقریبی $\log ۴$ را به دست می‌آوریم:

$$\log ۴ = \log\frac{۲۰}{۵} = \log ۲۰ - \log ۵ \approx ۰/۶$$

ب) $\log\frac{۱}{۱۰۰} = \log ۱ - \log ۱۰۰ = ۰ - ۲ = -۲$

استفاده ازماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب، $(\log ۸ - \log ۲)$ و $\log(۸-۲)$ را با تقریب دو رقم اعشار به دست آورید و در مربع، علامت مناسب مساوی (=) یا نامساوی ($\neq$) قرار دهید.

8 → log → − → 2 → log → =

6 → log → =

$\log(۸-۲) \ \square \ \log ۸ - \log ۲$

نکته

در حالت کلی: برای $a,b > ۰$ داریم: $\log(a-b) \neq \log a - \log b$

کار درکلاس ۵

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۲۰ - \log ۲ =$

ب) $\log ۰/۰۰۱ = \log \frac{۱}{۱۰۰۰} = \cdots$

۲ با تکمیل نقطه چین‌ها، نتیجهٔ فعالیت (۵) را با استفاده از خاصیت لگاریتم ضرب دو عدد به دست آورید (b و $c > ۰$).

$$\log(b) = \log(\frac{bc}{c}) = \log(\frac{b}{c} \times \ldots) = \log(\frac{b}{c}) + \ldots$$

بنابراین:

$$\log(\frac{b}{c}) = \cdots - \cdots$$

از رابطهٔ $(a^m)^n = a^{mn}$ می‌توان استفاده کرد و خاصیت دیگری از لگاریتم را به دست آورد.

فعالیت ۶

۱ جدول زیر را تکمیل کنید.

b	n	b^n	$\log b$	$\log b^n$
۱۰	۵	....	....	....
۱۰۰	۲	....	۲	....
۰/۱	۳	....	۱-	....
$\sqrt{۱۰}$	۴	....	....	....
۱۰^x	n	$(۱۰^x)^n = ۱۰^{nx}$	x	....

۲ در هر سطر، چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های n و $\log b$ و عدد ستون $\log b^n$ وجود دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

....

فعالیت بالا نشان می‌دهدکه لگاریتم b^n برابر است با n برابر لگاریتم b. درحالت کلی داریم:

نکته

برای $b > ۰$ و هر عدد حقیقی x داریم: $\log b^x = x \log b$

ویژگی بالا برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

مثال ۹

به کمک خواص لگاریتم، عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید ($a , b , c > ۰$):

الف) $۳\log \sqrt[۳]{۵} + ۲\log \sqrt{۲} = \log(\sqrt[۳]{۵})^۳ + \log(\sqrt{۲})^۲ = \log ۵ + \log ۲ = \log(۵ \times ۲) = \log ۱۰ = ۱$

ب) $\frac{۱}{۲}\log a + ۲\log b - ۵\log c = \log a^{\frac{۱}{۲}} + \log b^۲ - \log c^۵ = \log \frac{\sqrt{a}b^۲}{c^۵}$

مثال ۱۰

عبارت‌های زیر را به صورت مجموع یا تفاضل چند لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید ($x , y , z > ۰$):

الف) $\log(۵^۶ \times ۱۰^۳) = \log ۵^۶ + \log ۱۰^۳ = ۶\log ۵ + ۳$

ب) $\log \frac{۱۰x^۲y^۵}{z^۴} = \log ۱۰ + \log x^۲ + \log y^۵ - \log z^۴ = ۱ + ۲\log x + ۵\log y - ۴\log z$

کار در کلاس ۶

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۲۰۰^۵ - \log ۲^۵ =$

ب) $\log ۱۲ + ۲\log ۲ - \frac{۱}{۲}\log ۳۶ + \log ۱۲۵ =$

۲ عبارت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید ($b,c,x > ۰$).

الف) $۴\log ۶ + ۵\log b - \frac{۱}{۲}\log c =$

ب) $\log x^۲ - \log x =$

اکنون که با مفهوم لگاریتم و برخی از خواص آن آشنا شده‌اید به سؤال صفحه بعد که توسط یکی از هنرجویان مطرح شده است دقت کنید:

گفتگو

مریم گفت: در ماشین حساب‌ها معمولاً کلید لگاریتم در مبنای ۱۰ وجود دارد. آیا راهی وجود دارد که لگاریتم در مبنای غیر از ۱۰ را نیز با استفاده از این ماشین حساب‌ها به‌دست آورد؟

دبیر گفت: در پدیده‌های واقعی معمولاً لازم است لگاریتم اعداد در مبنای غیر از ۱۰ را به‌دست آوریم، محاسبهٔ لگاریتم این اعداد بدون استفاده از ماشین حساب کار ساده‌ای نیست.

مریم گفت: آیا راهی برای محاسبهٔ مقدار این لگاریتم با استفاده از ماشین حساب وجود دارد؟

دبیر گفت: با انجام فعالیت زیر با خاصیت دیگری از لگاریتم آشنا خواهید شد، برای محاسبهٔ لگاریتم اعداد در هر مبنا به‌کمک ماشین حساب از این خاصیت می‌توان استفاده کرد.

فعالیت ۷

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	a	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
۱۰۰	۱۰	....	....	....	۲
۱۰	۱۰۰	....	۲	....	$\frac{۱}{۲}$
$\sqrt{۱۰}$	۱۰	....	۱	....	....
۱۰۰۰	۱۰۰	....	....	....	$\frac{۳}{۲}$

۲ با مقایسهٔ اعداد دو ستون آخر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چه رابطه‌ای بین $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ وجود دارد؟

....

فعالیت (۷) نشان می‌دهد که لگاریتم یک عدد در مبنای غیر از ۱۰ را می‌توان به‌صورت تقسیم لگاریتم دو عدد در مبنای ۱۰ نوشت، در حالت کلی داریم:

نکته

برای $a,b > ۰$ و $a \neq ۱$ داریم: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

با استفاده از خاصیت بالا، محاسبهٔ لگاریتم اعداد در هر مبنایی با استفاده از ماشین حساب‌هایی که فقط قابلیت محاسبهٔ لگاریتم در مبنای ۱۰ را دارند، امکان‌پذیر می‌باشد.

مثال ۱۱

برای محاسبهٔ $\log_{۳}۵$ به کمک ماشین حساب داریم: $\log ۵ \approx ۰/۷$ و $\log ۳ \approx ۰/۴۷$ بنابراین :

$$\log_{۳} ۵ = \frac{\log ۵}{\log ۳} \approx \frac{۰/۷}{۰/۴۷} \approx ۱/۴۸$$

استفاده از ماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب حاصل $\log_{۵} ۸$ را به دست آورید:

8 → log → ÷ → 5 → log → =

کار در کلاس ۷

حاصل هر کدام از قسمت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید.

الف) $\frac{\log ۴}{\log ۳}$

ب) $۲ + \log_{۵} ۳$

مسائل

۱ عبارت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $\log\sqrt{۵}+\log\sqrt{۲}=\cdots$

ب) $\log ۴۰۰۰-\log ۴=\cdots$

پ) $۲\log ۵۰+۲\log ۲=\cdots$

ت) $۵\log x-\log y=\cdots$

ث) $۳\log a+۲\log b-\log z-\log a^{۲}+\log ۴=\cdots$

ج) $۴+\log_{۴} ۳=\cdots$

چ) $۴-\log_{۳} ۵=\cdots$

۲ اگر $\log ۲\approx ۰/۳۰۱$ و $\log ۳\approx ۰/۴۷۷$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۴$ ب) $\log ۶$ پ) $\log ۱۸$ ت) $\log\frac{۲}{۳}$ ث) $\log ۵$ ج) $\log ۴۵$

۳ درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{\log ۱۰}{\log ۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰}$ ب) $\log ۱۰۰+\log ۰/۰۱=۰$ پ) $(\log ۱۰۰۰)^{۲}=\log ۱۰۰۰^{۲}$

۴ الف) با استفاده از ماشین حساب، تقریب اعشاری اعداد $\log ۲۰$ و $\log ۳۰$ و $\log ۶۰۰$ را تا دو رقم اعشار به دست آورید. آیا تساوی $\log(۲۰\times۳۰)=\log ۲۰\times\log ۳۰$ برقرار است؟

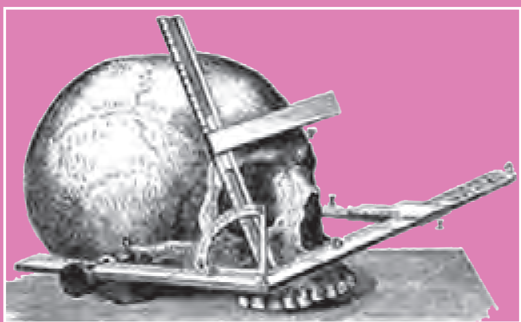
ب) به کمک قسمت (الف) درمربع علامت مناسب $\neq$ یا $=$ را قرار دهید:

برای اعداد مثبت a و b در حالت کلی داریم: «$\log(a\times b)\ \square\ \log a\times\log b$»

۵ باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۲ برابر می‌شود. با استفاده از ماشین حساب تعیین کنید پس از چند واحد زمانی وزن این باکتری‌ها ۲۰ گرم خواهد شد؟

پودمان پنجم

آمار توصیفی



آنتروپومتری (**Anthropometry**) به معنای مردم‌سنجی یا انسان‌سنجی است که در آن به اندازه‌گیری بخش‌های مختلف بدن انسان به‌منظور شناسایی تفاوت‌ها و دسته‌بندی فیزیکی مردمان پرداخته می‌شود. نظریه‌های مختلفی در ارتباط با اندازهٔ بخش‌های مختلف اعضای بدن انسان وجود دارد. کاربرد اولیهٔ این اندازه‌گیری‌ها در مردم‌شناسی جسمانی یا دیرین مردم‌شناسی بود تا از این طریق به درک بهتری از طبقه‌بندی انسان‌ها برسند. بررسی تخصصی جمجمه یا جمجمه‌سنجی نیز شاخه‌ای از این دانش است.

طرح‌هایی از اندازه‌گیری بخش‌های بدن انسان در دفترچهٔ خاطرات لئوناردو داوینچی نیز دیده می‌شود.

از سال‌های دههٔ ۱۹۵۰ میلادی، مهندسیِ آنتروپومتری با هدف اندازه‌گیری، تحلیل و به‌کارگیری اندازهٔ بخش‌های مختلف بدن انسان، برای طراحی و ارزیابی محصولات، ابزار و محیط‌های کاری معرفی شد. امروزه مردم‌سنجی در زمینه‌های طراحی صنعتی، طراحی پوشاک، ارگونومی و معماری کاربردهای بسیاری دارد.

خط بهترین برازش

علی در کارگاه پیراهن‌دوزی مردانه مشغول کار است. او پارچه‌ها را برای بُرِش آماده می‌کند. روزی امیر، مسئول کارگاه، وارد شد.

امیر گفت: علی صبر کن. برش‌ها را متوقف کن. باز هم مرجوعی داریم.

علی گفت: دوباره چه اشکالی پیش آمده؟

امیر گفت: مثل دفعه‌های قبل. یکی می‌گوید یقه‌اش اندازه است ولی مچ آن تنگ است و دیگری می‌گوید مچ اندازه است ولی یقه‌اش تنگ است. بالاخره نفهمیدیم باید با اندازه چه کسی کار کنیم! ولی باید فکری کرد. اگر همین‌طور پیش برویم، مشتری‌هایمان را از دست می‌دهیم.

علی گفت: این جدول اندازه‌هایی است که معمولاً طبق آن برش می‌زنم.

سایز	۴۶	۴۸	۵۰	۵۲
قد بالا تنه	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵
نصف کارور پشت	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
نصف دور پشت	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
نصف دور سینه	۶+۴۶	۶+۴۸	۶+۵۰	۶+۵۲
دور گردن	۳۶	۳۸	۴۰	۴۲
قد پیراهن	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸
کادر آستین	۳۸	۴۰	۴۲	۴۴
قد آستین	۶۰	۶۰	۶۱	۶۱
دور مچ	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶

امیر گفت: ظاهراً این اندازه‌ها مناسب نسل جدید ما نیست. باید فکری کرد.

علی گفت: یعنی باید برویم پسرهای شهر را ردیف کنیم و دور گردن و دور مچ دستشان را اندازه بگیریم؟!

امیر گفت: اگر برای نجات کسب و کارم مجبور به این کار شوم، شاید هم بله!

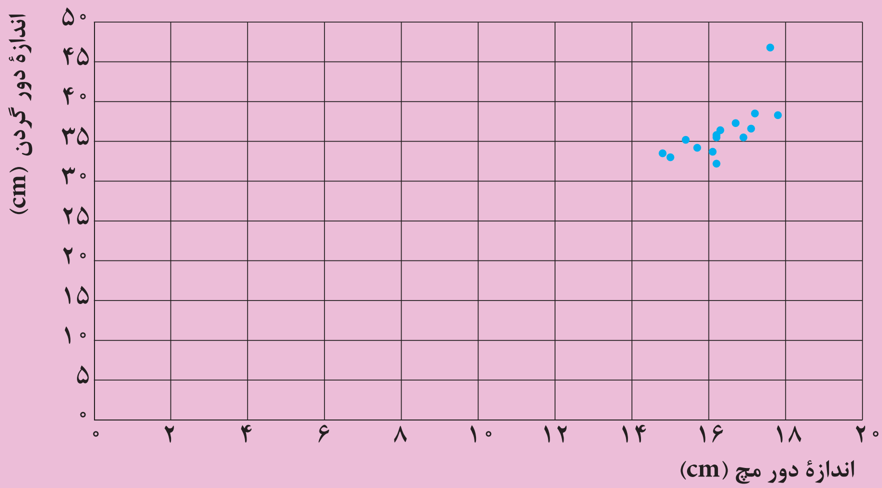
فکر می‌کنید آیا امیر مجبور به انجام چنین کاری می‌شود؟ اصولاً در وضعیت‌های مشابه آیا امکان دارد که همهٔ افراد جامعه را اندازه‌گیری کنیم؟ در چنین وضعیت‌هایی شرکت‌های تولیدی چه می‌کنند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا فرایندی را که تولیدکنندگان بزرگ طی می‌کنند بهتر درک کنید.

فعالیت ۱

نظریه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد بین اندازهٔ دور مچ دست و اندازهٔ دور گردن افراد یک رابطهٔ خطی وجود دارد. تولیدکنندگان با داشتن این رابطه می‌توانند اندازه‌های مناسبی برای محصولات خودشان در نظر بگیرند. برای آشنایی با فرایند پیدا کردن این رابطه، اندازه دور گردن و دور مچ دست ۱۵ نفر در جدول زیر آورده شده است.

اندازهٔ دورگردن (y برحسب cm)	اندازهٔ دور مچ (x برحسب cm)
۳۳/۵	۱۴/۸
۳۳	۱۵
۳۵/۲	۱۵/۴
۳۴/۲	۱۵/۷
۳۳/۷	۱۶/۱
۳۲/۲	۱۶/۲
۳۵/۵	۱۶/۲
۳۵/۸	۱۶/۲
۳۶/۴	۱۶/۳
۳۷/۳	۱۶/۷
۳۵/۵	۱۶/۹
۳۶/۶	۱۷/۱
۳۸/۵	۱۷/۲
۴۶/۸	۱۷/۶
۳۸/۳	۱۷/۸

در صفحهٔ مختصات زیر، نقطه‌هایی مشخص شده است که طول هر نقطه، نشان‌دهندهٔ اندازهٔ دور مچ و عرض آن نشان‌دهندهٔ اندازهٔ دور گردن یک نفر است.



۱ آیا نقاط، روی یک خط راست قرار دارند؟

۲ خطی (به‌طور تقریبی) رسم کنید که تا حد ممکن با نقاط مشخص شده در صفحه، کمترین فاصله را داشته باشد. سعی کنید نیمی از نقاط در بالای خط و نیمی دیگر زیر خط و با فاصلهٔ یکسان از خط قرار گیرند.

۳ اطلاعات جدول صفحهٔ قبل را در Excel وارد کنید و طبق دستورالعمل صفحهٔ ۱۲۰، به کمک Excel خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط مشخص شده روی صفحه داشته باشد.

۴ اگر x اندازهٔ دور مچ و y اندازهٔ دور گردن باشد، معادلهٔ خط رسم شده را به کمک Excel طبق دستورالعمل صفحه ۱۲۰ پیدا کنید.

۵ ستون y' را با دو رقم اعشار کامل کنید. (y' اندازه دور گردن به کمک معادلهٔ خط است.)

اندازهٔ دور مچ (x برحسب cm)	اندازهٔ دورگردن (y برحسب cm)	y'	خطا: $e=y-y'$	e^2	y''	خطا: $e'=y-y''$	e'^2
۱۴/۸	۳۳/۵	۳۱/۹۵	+۱/۵۵	۲/۴	۳۲/۸۶	۰/۶۴	۰/۴۱
۱۵	۳۳						
۱۵/۴	۳۵/۲	۳۳/۶۱	۱/۵۹	۲/۵۲	۳۳/۹۱	۱/۲۹	۱/۶۵
۱۵/۷	۳۴/۲	۳۴/۴۵	−۰/۲۵	۰/۰۶	۳۴/۴۴	−۰/۲۳۵	۰/۰۶
۱۶/۱	۳۳/۷						
۱۶/۲	۳۲/۲	۳۵/۸۴	−۳/۶۴	۱۳/۲۲	۳۵/۳۱	−۳/۱۱	۹/۶۷
۱۶/۲	۳۵/۵	۳۵/۸۴	−۰/۳۴	۰/۱۲	۳۵/۳۱	۰/۱۹	۰/۰۴
۱۶/۲	۳۵/۸	۳۵/۸۴	−۰/۰۴	۰	۳۵/۳۱	۰/۴۹	۰/۲۴
۱۶/۳	۳۶/۴						
۱۶/۷	۳۷/۳						
۱۶/۹	۳۵/۵						
۱۷/۱	۳۶/۶	۳۸/۳۴	−۱/۷۴	۳/۰۲	۳۶/۸۶	−۰/۲۹	۰/۰۸
۱۷/۲	۳۸/۵						
۱۷/۶	۴۶/۸	۲۹/۷۳	۷/۰۷	۵۰/۰۱			
۱۷/۸	۳۸/۳	۴۰/۲۸	−۱/۹۹	۳/۹۴	۳۸/۱۱	۰/۱۹	۰/۰۴

۶ آیا مقادیر به‌دست‌آمده به کمک معادلهٔ خط، با مقادیر اندازه‌گیری شده برابرند؟ چرا؟

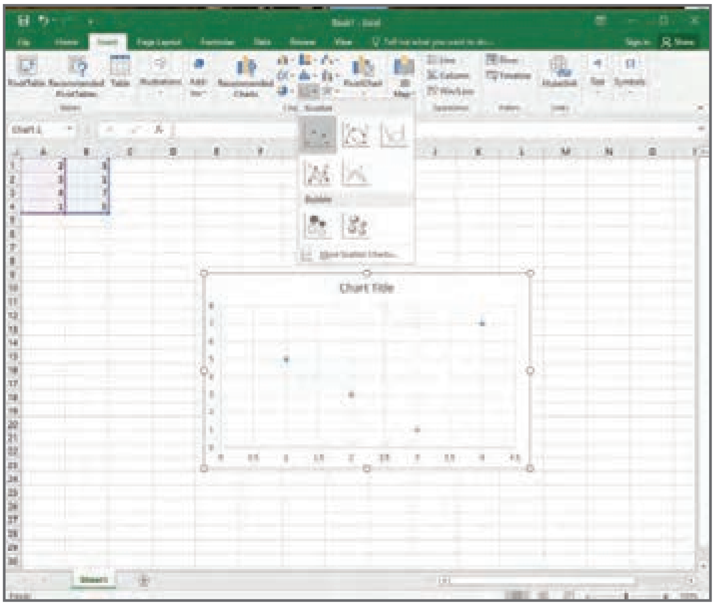
۷ ستون خطا (e)، اختلاف مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده را کامل کنید.

۸ به کمک دستور Σ در Excel مجموع خطاها (ستون e) را به‌دست آورید. آیا این عدد مجموع واقعی خطاها را نشان می‌دهد؟ چرا؟

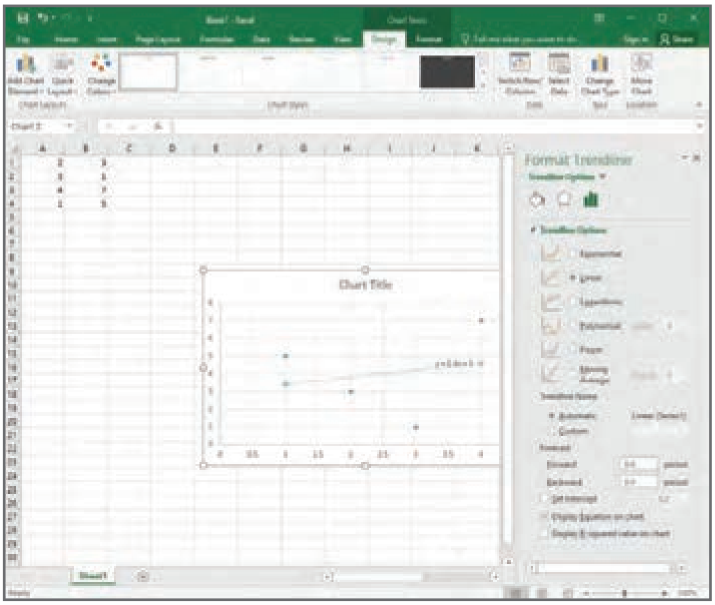
۹ مجموع مجذور خطاها را به دست آورید.

۱۰ فکر می‌کنید چرا مجذور خطاها را به‌دست می‌آوریم؟

یک کاربرگ در excel باز کنید. در ستون اول اندازه‌های دور مچ (محور xها) و در ستون دوم اندازه‌های دور گردن (محور yها) را وارد کنید. به‌منظور رسم نمودار، اطلاعات دو ستون را گرفته، از منوی insert، chart type (نوع نمودار) و سپس scatter (پَراکَنش) را انتخاب کنید.



به‌منظور پیدا کردن معادلهٔ خط بهترین برازش، روی یکی از نقطه‌ها، راست کلیک کنید و گزینهٔ Add TrendLine را انتخاب کنید و در پنجره‌ای که باز می‌شود، گزینه Display Equation on Chart را انتخاب کنید.



در آمار، نموداری را که در فعالیت (۱) رسم کردید، نمودار **پَراکَنش** می‌نامند. خطی که در فعالیت(۱) به کمک excel رسم شد، خط **بهترین برازش** نام دارد. این نام‌گذاری به این دلیل است که این خط، بهترین رابطهٔ خطی ممکن بین دو کمیت «اندازهٔ دور مچ» و «اندازهٔ دور گردن» را نشان می‌دهد. شیب مثبت خط نشان می‌دهد که با افزایش اندازهٔ دورمچ، اندازهٔ دور گردن نیز افزایش می‌یابد. از نمودار پراکنش و خط بهترین برازش برای بررسی رابطهٔ بین دو کمیت استفاده می‌شود. در نمودار فعالیت(۱)، هر نقطه در صفحه مختصات، نشان‌دهندهٔ اندازهٔ دور مچ دست (طول نقطه) و اندازهٔ دور گردن (عرض نقطه) یک نفر است.

تعریف

نمودار پراکنش دو کمیت، مجموعه‌ای از نقاط در صفحهٔ مختصات است که طول و عرض هر نقطه، داده‌های مربوط به اندازه‌گیری‌های متناظر دو کمیت است.

ادریان لژاندر در سال ۱۸۰۵ با یافتن ضریب زاویه و عرض از مبدأ آن خط، روشی برای رسم خط بهترین برازش پیدا کرد. او در این روش سعی کرد تا مجموع مجذور خطاهای بین مقدار واقعی و مقدار محاسبه شده، کمترین مقدار شود. خط به‌دست آمده با این روش را خط بهترین برازش و این روش را **روش کمترین مجذورات** می‌نامند. همان‌طور که در فعالیت (۱) مشاهده کردید، به دلیل اینکه مقادیر خطاها مثبت یا منفی هستند (خطا زمانی صفر است که نقطه دقیقاً روی خط قرار داشته باشد) مجموع خطاها، مقدار خطای واقعی را نشان نمی‌دهد. به همین دلیل مجموع مجذور خطاها را به‌دست می‌آوریم تا علامت‌ها خطاها تأثیرگذار نباشد. برای رفع این مشکل می‌توان از قدر مطلق خطاها نیز استفاده کرد، ولی به دلیل دشواری انجام محاسبات با قدر مطلق، از مجذور خطاها استفاده می‌کنیم.

فعالیت ۲

۱ در فعالیت (۱) با حذف سطر مربوط به ۱۷/۶(در ستون اول)، نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱۷/۶ \\ ۴۶/۸ \end{bmatrix}$ را از داده‌هایتان خارج کنید؛ و خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط داشته باشد.

۲ ستون y'' را با دو رقم اعشار کامل کنید. (y'' اندازه دور گردن به کمک معادلهٔ جدید خط است.)

۳ ستون e' را کامل کنید.

۴ مجموع مجذور خطاها را برای مقادیر به‌دست آمده برای y'' به‌دست آورید و با جواب قسمت ۱۰ در فعالیت (۱) مقایسه کنید.

۵ فکر می‌کنید کدام خط برای پیش‌بینی مناسب‌تر است؟ چرا این اتفاق می‌افتد؟

در آمار، نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱۷/۶ \\ ۴۶/۸ \end{bmatrix}$ را که با بقیهٔ داده‌ها تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد، **دادهٔ پَرت**[۱] می‌نامند. معمولاً اگر داده‌های پرت را از داده‌ها خارج کنیم درک بهتری از وضعیت به‌دست می‌آوریم.

در بسیاری از موارد خط بهترین برازش، رابطهٔ خطی مناسبی را بین دو کمیت به ما می‌دهد، و از طریق آن می‌توان مقدارهای متناظر بین این کمیت‌ها را پیش‌بینی و از این پیش‌بینی‌ها در برنامه‌ریزی‌ها استفاده کرد. معمولاً تولیدکنندگان، از این روش برای تولید محصولاتی که برای عموم عرضه می‌شود، استفاده می‌کنند.

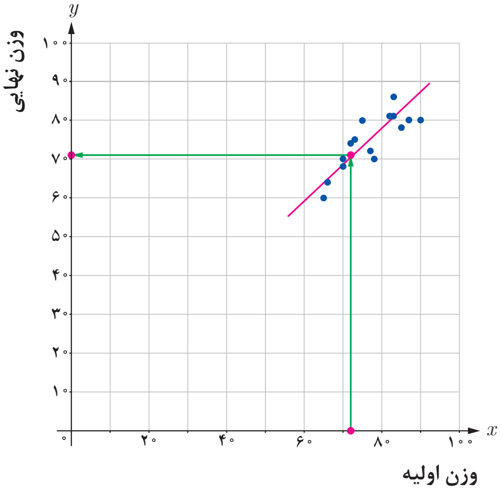
۱ـ Outlier

مثال ۱

در یک مطالعه، تأثیر مصرف یک داروی خاص بر کاهش وزن، بررسی شده است. وزن اولیه و وزن نهایی ۱۵ شرکت‌کننده در این مطالعه برحسب کیلوگرم در جدول زیر نشان داده شده است.

وزن نهایی	وزن اولیه
۸۱	۸۳
۸۱	۸۲
۶۸	۷۰
۷۵	۷۳
۷۰	۷۰
۷۸	۸۵
۷۲	۷۷
۷۴	۷۲
۶۰	۶۵
۷۰	۷۸
۸۰	۷۵
۸۶	۸۳
۶۴	۶۶
۸۰	۹۰
۸۰	۸۷

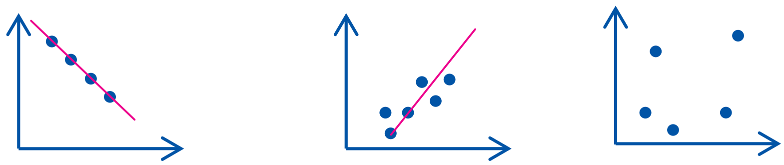
نمودار پراکنش و خط بهترین برازش داده‌های بالا به شکل زیر است.



از روی نمودار می‌توان پیش‌بینی کرد که اگر فردی با وزن ۷۲ کیلوگرم از این دارو استفاده کند، پس از زمان تجویز شده برای مصرف، ۷۱ کیلوگرم خواهد شد.

مثال ۲

در نمودارهای زیر، هر نقطه نشان‌دهندهٔ مقادیر متناظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها، بین این دو کمیت رابطه‌ای وجود دارد؟ رابطهٔ بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایشی یا کاهشی بودن یکی بر حسب دیگری، توصیف کنید.



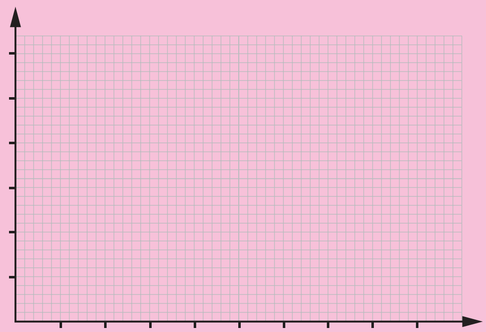
الف ب پ

همان‌طور که مشاهده می شود، نقاط مشخص شده در نمودار (الف)، روی یک خط راست قرار دارند و با افزایش مقادیر روی محورxها، مقادیر روی محور yها کاهش می‌یابد. نقاط مشخص شده در نمودار (ب)، روی یک خط راست قرار ندارند ولی با افزایش مقادیر روی محورxها، عموماً مقادیر روی محور yها افزایش می‌یابد. در این وضعیت می‌توان رابطه بین دو کمیت را به طور تقریبی با خط نشان داد. با دقت روی نقاط مشخص شده در نمودار (پ)، متوجه می‌شویم که تغییرات مقادیر روی محور xها هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره تغییرات مقادیر روی محور yها به ما نمی‌دهد. در این وضعیت احتمالاً بین دو کمیت رابطه‌ای وجود ندارد. دقت پیش‌بینی از روی نمودار (الف) بیشتر از دقت پیش‌بینی از روی نمودار (ب) است.

کار در کلاس ۱

برخی از هنرآموزان عقیده دارند که درصد قبولی هنرجویان در یک کلاس با تعداد هنرجویان در کلاس رابطه دارد. جدول زیر تعداد هنرجویان در کلاس‌های مختلف یک هنرستان و درصد قبولی آنها در امتحان پایان سال را نشان می‌دهد.

درصد قبولی	تعداد هنرجویان در کلاس
۸۰	۱۰
۶۰	۱۵
۵۰	۳۰
۸۰	۱۲
۵۰	۲۵
۵۰	۲۴
۷۰	۱۵
۷۰	۶۰
۴۰	۲۸
۸۰	۱۲



۱ نمودار پراکنش را رسم کنید.

۲ خط بهترین برازش را رسم کنید.

۳ پیش‌بینی می‌کنید چند درصد از هنرجویان در یک کلاس ۴۰ نفره قبول می‌شوند.

۴ برخی عقیده دارند نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۶۰ \\ ۷۰ \end{bmatrix}$ (اطلاعات مربوط به یک کلاس ۶۰ نفره) یک دادهٔ پرت (مربوط به یک وضعیت غیر معمول) است. فکر می‌کنید اگر در تحلیل خود این داده را کنار بگذارید، بهتر است یا خیر؟ توضیح دهید چرا؟

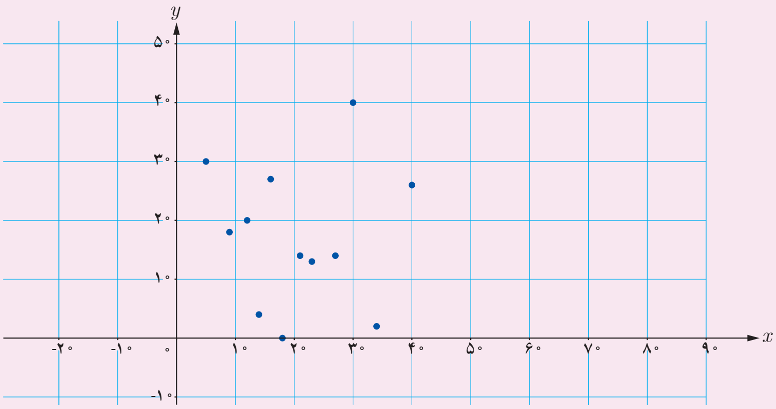
....

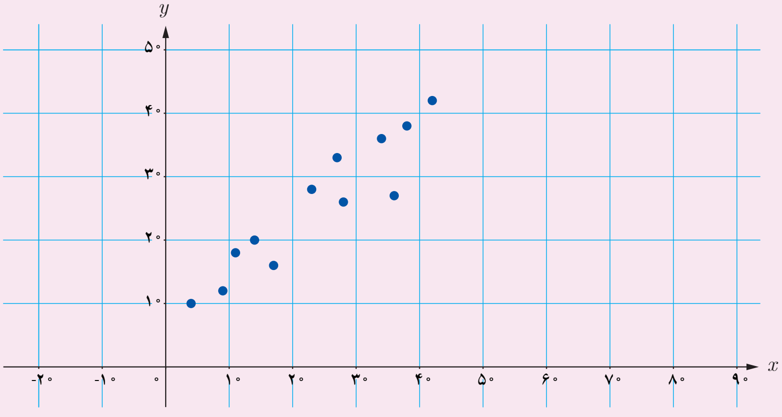
۵ این داده را خارج کنید و پاسخ سؤال (۳) را مجدداً به‌دست آورید.

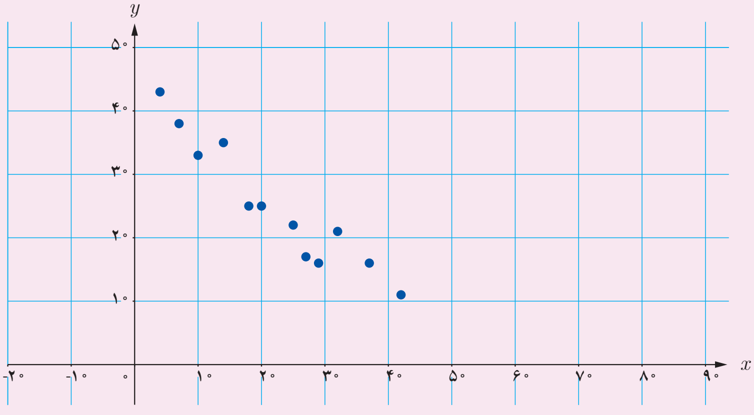
....

مسائل

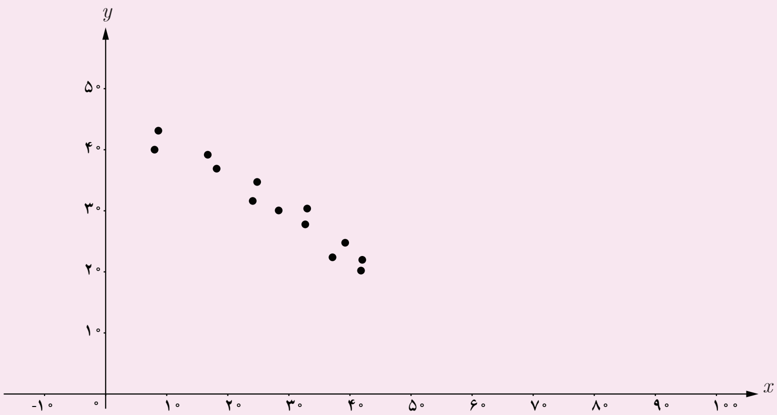
۱ در نمودارهای زیر، هر نقطه نشان‌دهندهٔ مقادیر متناظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها، بین این دو کمیت رابطه‌ای وجود دارد؟ رابطهٔ بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایشی یا کاهشی بودن یکی بر حسب دیگری، توصیف کنید.



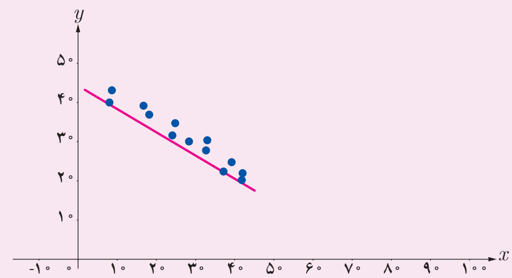


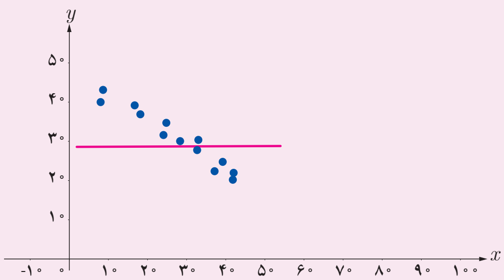


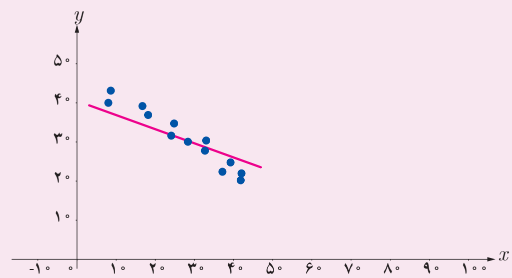
۲ نمودار زیر رابطهٔ بین مدت زمانی که فرد رانندگی می‌کند و مسافت باقی‌مانده تا مقصد را نشان می‌دهد.

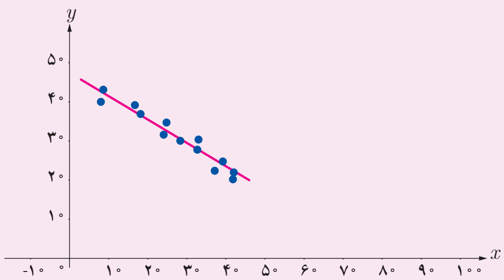


کدام‌یک از نمودارهای زیر، خط بهترین برازش برای نمودار پراکنش بالا را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید.









۳ جدول روبه‌رو طول قد و فاصلهٔ نوک دو انگشت وسط ۲۰ نفر را (در حالتی که دست‌ها از طرفین کاملاً باز است) برحسب سانتی‌متر نشان می‌دهد.

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

ب) آیا رابطه‌ای بین طول قد و فاصلهٔ نوک دو انگشت وسط افراد دیده می‌شود؟ توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و معادلهٔ آن را به‌دست آورید.

ت) به کمک معادله یا نمودار، با داشتن طول قد خودتان، فاصلهٔ نوک دو انگشت وسط خودتان را تخمین بزنید.

ث) فاصلهٔ نوک دو انگشت وسط خودتان را اندازه بگیرید. آیا با مقدار تخمین زده شده تفاوت دارد؟ اگر بله، توضیح دهید چرا؟

طول قد	فاصله بین نوک انگشتان
۱۸۰	۱۸۱
۱۵۶	۱۵۴
۱۶۸	۱۶۸
۱۴۷	۱۴۸
۱۳۱	۱۳۸
۱۵۹	۱۶۰
۱۵۴	۱۴۲
۱۵۵	۱۵۴
۱۷۸	۱۸۱
۱۷۵	۱۷۵
۱۳۵	۱۳۰
۱۸۰	۱۷۵
۱۷۸	۱۸۶
۱۶۱	۱۵۸
۱۳۹	۱۳۹
۱۵۴	۱۴۸
۱۵۶	۱۵۶
۱۵۲	۱۵۴
۱۷۰	۱۷۵
۱۵۶	۱۵۲

۴ سینا می‌گوید: اگر ریاضی شما خوب باشد، علوم شما نیز خوب است. علی می‌خواهد درستی این گفته را بررسی کند. به همین دلیل نمرهٔ ریاضی و علوم ۷ نفر را پرسید. داده‌هایی که علی به‌دست آورده در جدول زیر ثبت شده است.

نمره ریاضی	۱۷	۵/۵	۹	۱۶	۱۰	۶/۵	۸
نمره علوم	۱۵	۸	۱۰	۱۵	۱۱	۹	۱۰

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

ب) آیا با گفتهٔ سینا موافق‌اید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید.

ت) پیش‌بینی می‌کنید نمرهٔ علوم دانش‌آموزی که در آزمون ریاضی ۱۴ شده است، چند باشد؟

۵ جدول زیر، نمرات ریاضی و زبان ۱۰ دانش‌آموز را نشان می‌دهد.

نمره ریاضی	۸	۱۳	۱۴	۱۷	۱	۲	۱۳	۹	۴/۵	۱۹
نمره زبان	۹	۹	۱۳	۱۲	۲	۱۸	۱۸	۶	۸	۱۰

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید. (طول هر نقطه نمرۀ ریاضی و عرض هر نقطه نمرۀ زبان یک دانش‌آموز است).

ب) آیا بین نمرۀ ریاضی و نمرۀ زبان دانش‌آموزان رابطه‌ای مشاهده می‌کنید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و به کمک معادلۀ آن و یا نمودار، نمرۀ زبان دانش‌آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

ت) نقطه‌های نشان‌دهندۀ نمرۀ ریاضی و زبان کدام دو دانش‌آموز با نمرات بقیۀ دانش‌آموزان هماهنگی ندارد؟

ث) این دو داده را از داده‌هایتان حذف کنید و خط بهترین برازش را رسم کنید و این‌بار نمرۀ زبان دانش‌آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

ج) آیا تفاوتی بین دو پیش‌بینی شما وجود دارد؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۶ جدول مقابل داده‌های مربوط به اندازۀ کفش و قد ۱۲ مرد را نشان می‌دهد.

سایز کفش	قد (سانتی‌متر)
۴۴	۱۷۵
۴۳	۱۸۲
۴۰	۱۷۰
۴۴	۱۷۳
۴۲	۱۷۰
۴۶	۱۸۵
۴۶	۱۷۷
۴۳	۱۷۲
۴۲	۱۶۵
۴۲	۱۷۸
۴۴	۱۷۵
۴۶	۱۸۳

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را به کمک excel رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، اندازۀ کفش مردی را که قد او ۱۸۰ سانتی‌متر است پیش‌بینی کنید.

پ) باستان‌شناسان رد پایی به اندازۀ ۵۸ سانتی‌متر پیدا کرده‌اند. پیش‌بینی می‌کنید طول قد این انسان چقدر بوده است؟

۷ دانش‌آموزی برای توصیف داده‌هایش، نمودار پراکنش را رسم کرد. او برای رسم نمودن خط بهترین برازش، اولین نقطه و آخرین نقطه را به هم وصل کرد. آیا او خط بهترین برازش را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

درون‌یابی و برون‌یابی

گفتگو

پس از آنکه علی و امیر رابطهٔ بین اندازهٔ مچ دست و دور گردن نمونهٔ ۱۵ نفری خودشان را بررسی کردند.

امیر پرسید: اگر بخواهیم برای افرادی که اندازهٔ دور گردنشان خیلی بیشتر است پیراهن بدوزیم، از چه اندازه‌هایی باید استفاده کنیم؟

علی گفت: چطور است خط بهترین برازش را ادامه دهیم و از روی آن اندازهٔ دور مچ را تخمین بزنیم.

امیر گفت: فکر نمی‌کنم هر چقدر دلمان بخواهد، بتوانیم خط را ادامه دهیم.

علی پرسید: چرا؟

امیر گفت: فرض کن بین وزن و سن افراد هم رابطه‌ای وجود داشته باشد، آن وقت می‌دانی وزن یک آدم ۹۰ ساله چقدر زیاد می‌شود؟

پس از یافتن خط برازش، این سؤال قابل طرح است که خط برازش در چه محدوده‌ای اعتبار دارد؟ آیا پس از مدل‌سازی رابطهٔ بین دو کمیت برای نمونه‌ای مشخص، می‌توان این رابطه را برای تمام جامعه تعمیم داد و از آن مدل، برای همهٔ اعضای جامعه استفاده کرد؟ این سؤالی است که برنامه‌ریزان نیز از خود می‌پرسند. برای پاسخ به این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت ۳

برخی تحقیقات در حوزهٔ بانکداری نشان می‌دهند بین نرخ سود بانکی و میزان سرمایه‌ای که بانک جذب می‌کند همبستگی وجود دارد. یکی از بانک‌ها، میزان سرمایهٔ خود را در زمان‌های مختلف که سود بانکی مختلفی پرداخت می‌کرده است، بررسی و در جدول زیر ثبت کرده است.

سرمایه (میلیون تومان)	نرخ سود بانکی (درصد)
۲۵	۱۰
۲۶	۸
۲۱	۹
۱۵	۱۱
۱۷	۱۱
۱۹	۱۱
۲۷	۱۰
۲۶	۹
۳۱	۷
۳۶	۶
۳۹	۶
۴۰	۵

۱ به کمک excel خط بهترین برازش را برای این اطلاعات رسم کنید.

۲ اگر نرخ سود ۱۰/۵ درصد تعیین شود، مقدار سرمایهٔ جذب شده را پیش‌بینی کنید.

....

۳ اگر نرخ سود به ۱۲ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایهٔ جذب شده را پیش‌بینی کنید.

....

۴ اگر نرخ سود به ۱۸ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایهٔ جذب شده را پیش‌بینی کنید.

....

۵ در کدام حالت پیش‌بینی شما به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود؟ توضیح دهید.

....

در وضعیت بالا در جدول داده‌ها، مقادیر درصد سود پرداختی (x) در بازهٔ بستهٔ $[5,11]$ قرار دارد. در قسمت (۲) می‌خواهیم سرمایهٔ جذب شده با پرداخت ۱۰/۵ درصد سود را پیش‌بینی کنیم. توجه داشته باشید که ۱۰/۵ در بازهٔ تغییرات x قرار دارد. ولی در قسمت‌های (۳) و (۴) می‌خواهیم سرمایهٔ جذب شده را برای درصد سودهای پرداختی خارج از این بازه پیش‌بینی کنیم. پیش‌بینی‌هایی مانند وضعیت (۲) را **درون‌یابی** و پیش‌بینی‌هایی مانند وضعیت‌های (۳) و (۴) را **برون‌یابی** می‌نامند.

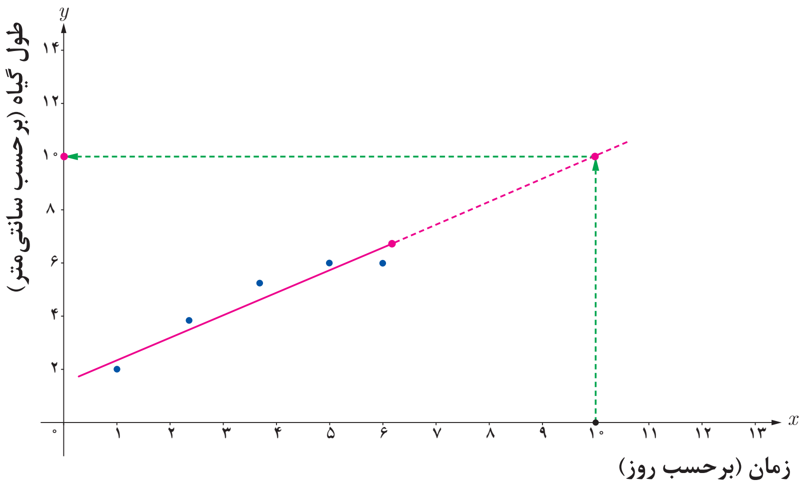
در برون‌یابی هرچه از ابتدا یا انتهای بازه دورتر شویم، ممکن است پیش‌بینی‌ها با خطاهای زیاد همراه و حتی غیر واقعی شوند.

تعریف

x و y دو کمیت مرتبط هستند. اگر مقادیر این دو کمیت برای برخی از xها در یک بازه، مشخص باشد، پیش‌بینی مقادیر y به ازای xهای مشخص در این بازه به کمک خط برازش را **درون‌یابی** و پیش‌بینی مقادیر y به ازای xهای مشخص در خارج از این بازه را **برون‌یابی** می‌نامند.

مثال ۳

نمودار زیر میزان رشد گیاه را پس از ۵ روز نشان می‌دهد. می‌خواهیم طول گیاه را بعد از ۱۰ روز پیش‌بینی کنیم.



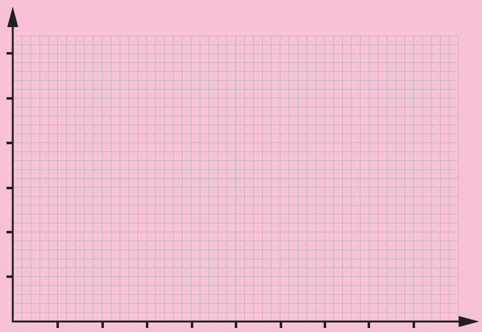
با توجه به اینکه بعد از مدتی، معمولاً رشد طولی متوقف می‌شود و یا میزان افزایش طول در واحد زمان کاهش می‌یابد، پیش‌بینی طول گیاه با استفاده از این نمودار بعد از ۱۰ روز (برون‌یابی)، ممکن است دقیق نباشد.

کار در کلاس ۲

میزان مصرف اکسیژن توسط خرچنگ‌ها و دمای آب با هم رابطه دارند. نرخ مصرف اکسیژن نوعی خرچنگ در زیر آب در جدول زیر آورده شده است.

دما ($^\circ$C)	۲۰	۱۷/۵	۱۵	۱۲/۵	۱۰	۵/۵
نرخ مصرف اکسیژن (Mmol / Kg / Min)[1]	۲۳	۱۷	۱۲	۹	۵/۵	۴/۵

۱ نمودار پراکنش و خط بهترین برازش این داده‌ها را رسم کنید.



۱ـ خوانده شود میلی‌مول بر کیلوگرم بر دقیقه

۲ به کمک نمودار، مقدار تقریبی دما را در حالتی که نرخ مصرف اکسیژن ۱۴ Mmol / Kg / Min است، پیدا کنید.

....

....

....

۳ به کمک معادلهٔ خط بهترین برازش، نرخ مصرف اکسیژن این خرچنگ را در زیر آب در دماهای $0^\circ C$، $17^\circ C$، $50^\circ C$ و $150^\circ C$ پیش‌بینی کنید.

....

....

....

۴ برای پیش‌بینی مقدار اکسیژن درکدام دماها از درون‌یابی و برای کدام دماها از برون‌یابی استفاده کردید؟

....

۵ پیش‌بینی در کدام وضعیت با خطای زیاد همراه و یا آنکه غیر واقعی است؟ توضیح دهید.

....

مسائل

۱ مهرناز می‌خواهد آزمایشی انجام دهد که به کمک آن، تأثیر نور را بر سرعت غذاسازی توسط گیاه از طریق فتوسنتز بررسی کند.

مهرناز لامپ را در ۱۰۰ متری گیاه قرار داد و تعداد حباب‌هایی را که توسط گیاه در یک دقیقه تولید شد شمرد. سپس لامپ را نزدیک‌تر کرده و در هر حالت، تعداد حباب‌های ایجاد شده توسط گیاه در دقیقه را شمرد. او نتایج را در جدول زیر ثبت کرد.

تعداد حباب‌ها در دقیقه	فاصلهٔ لامپ از گیاه برحسب متر
۱۰	۱۰۰
۲۰	۸۰
۲۸	۷۰
۳۲	۶۰
۳۷	۴۰
۳۷	۲۰

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، جملهٔ زیر را کامل کنید:

هر چه فاصلهٔ لامپ از گیاه .... باشد، سرعت فتوسنتز .... است.

پ) اگر لامپ در ۱۰ سانتی‌متری گیاه قرار داشته باشد، تعداد حباب‌ها در دقیقه را پیش‌بینی کنید.

ت) اگر لامپ را در ۲ سانتی‌متری گیاه قرار دهیم، برای پیدا کردن تعداد حباب‌هایی که گیاه تولید می‌کند از برون‌یابی استفاده می‌کنیم یا درون‌یابی؟ فکر می‌کنید در این وضعیت این پیش‌بینی چقدر درست باشد؟

۲ ایمان برای شرکت در مسابقات دو ۱۰۰ متر، تمرین می‌کند. جدول زیر، زمان به پایان رساندن مسیر را بر حسب ثانیه در پایان هر هفته تمرین نشان می‌دهد.

زمان به پایان رساندن مسیر	تعداد هفته‌های تمرین
۱۳	۱
۱۲	۲
۱۱/۵	۳
۱۱/۲۵	۴
۱۱	۵

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.
ب) به کمک نمودار یا معادلهٔ خط بهترین برازش، زمان به پایان رساندن مسیر توسط ایمان پس از ۱۴ هفته را پیش‌بینی کنید.
پ) آیا پیش‌بینی شما درست است؟ برای پاسخ به این سؤال رکورد جهانی دو ۱۰۰ متر مردان را از اینترنت پیدا کنید.
ت) برای این پیش‌بینی از درون‌یابی استفاده کردید یا برون‌یابی؟ آیا پاسخ به‌دست آمده معنادار است؟ توضیح دهید چرا؟

۳ جدول زیر تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک تابستانی را از سال ۱۹۴۸ تا سال ۲۰۰۰ نشان می‌دهد.

تعداد کشورها	سال	تعداد کشورها	سال
۹۲	۱۹۷۶	۵۹	۱۹۴۸
۸۰	۱۹۸۰	۶۹	۱۹۵۲
۱۴۰	۱۹۸۴	۷۲	۱۹۵۶
۱۶۰	۱۹۸۸	۸۳	۱۹۶۰
۱۶۹	۱۹۹۲	۹۳	۱۹۶۴
۱۹۷	۱۹۹۶	۱۱۲	۱۹۶۸
۱۹۹	۲۰۰۰	۱۲۱	۱۹۷۲

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.
ب) به کمک معادلهٔ خط بهترین برازش، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک ۲۰۰۴ و المپیک ۲۰۱۶ را پیش‌بینی کنید.
پ) با مراجعه به اینترنت، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۰۴ و سال ۲۰۱۶ را پیدا کنید. این تعداد را با پیش بینی‌های خودتان مقایسه کنید. در صورت وجود اختلاف، توضیح دهید چرا این اختلاف وجود دارد.
ت) به کمک معادله یا نمودار، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۲۸ را پیش‌بینی کنید. آیا این پیش‌بینی معنادار است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

میانه

گفتگو

عموی طاها حسابدار یک شرکت خصوصی بود. طاها پس از مصاحبهٔ استخدامی، قرار شد در آن شرکت به‌عنوان مسئول فنی مشغول به کار شود. مدیر عامل شرکت حقوق طاها را یک میلیون و پانصد هزار تومان در نظر گرفت.

طاها به عمویش گفت: قبلاً به من گفته بودید میانگین حقوق افراد این شرکت ۲ میلیون تومان است، فکر نمی‌کنید حقوق من کم باشد؟

عموی طاها گفت: اگر به لیست حقوق کارکنان نگاه کنی، متوجه می‌شوی که حقوقی که به شما پیشنهاد شده است، حقوق خوبی است.

طاها با دیدن لیست حقوق کارکنان گفت: شما به چه دلیلی می گویید که حقوق من خوب است؟

عمویش گفت: حقوق شما از حقوق بیش از نیمی از کارکنان بیشتر است.

طاها با تعجب گفت: چگونه می‌توانم حقوق خود را با حقوق دیگران مقایسه کنم و بفهمم جایگاه حقوق من در بین حقوق دیگران چگونه است؟

عنوان شغلی	میزان حقوق به میلیون تومان
مدیر عامل	۵/۸
معاون	۳/۲
کارمند قراردادها	۱/۷
روابط عمومی	۱/۳
حسابدار	۱/۸
مسئول فناوری	۱/۲
بایگانی	۱
منشی	۱/۱
نگهبان	۰/۹

شما با انجام فعالیت زیر متوجه می‌شوید که آماردان‌ها چگونه داده‌ها را با هم مقایسه می‌کنند.

فعالیت ۴

۱ داده‌های ارائه شده در لیست حقوق کارکنان را از کم به زیاد مرتب کنید.

....

۲ عددی را پیدا کنید که تعداد حقوق‌های قبل از آن، با تعداد حقوق‌های بعد از آن برابر باشد.

....

اگر حقوق کارکنان را از کم به زیاد مرتب کنیم، عدد ۱/۳ (میلیون) در وسط قرار می‌گیرد، یعنی تعداد حقوق‌های قبل از عدد ۱/۳ (میلیون) با تعداد حقوق‌های بعد از آن برابر است؛ این عدد را میانه می‌نامند. در لیست حقوقی مرتب شده، حقوقی که قرار است طاها بگیرد بعد از عدد ۱/۳ (میلیون) است که از حقوق نیمی از کارکنان بیشتر است. با دقت بیشتر متوجه می‌شویم که اگر حقوق‌ها را از زیاد به کم نیز مرتب می‌کردیم، همین نتیجه به‌دست می‌آمد.

تعریف

پس از مرتب کردن مقادیر داده‌ها، عددی را که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر است **میانه** می‌نامند.

میانگین داده‌ها ۲ میلیون تومان است و این عدد نشان نمی‌دهد چه تعداد از داده‌ها بیشتر یا کمتر از آن است. می‌دانیم عدد میانگین ممکن است در بین داده‌ها نباشد؛ برای مثال، عدد دو میلیون تومان در لیست حقوق کارکنان نیست. همچنین به علت وجود داده پرت (حقوق مدیر عامل ۵/۸میلیون تومان است) در لیست حقوق، میانگین، خیلی بالا رفته است که تصوری اشتباه دربارهٔ میزان دریافت حقوق کارکنان در ما ایجاد می‌کند؛ زیرا فقط ۲ نفر حقوق بیشتر از میانگین دارند و ۷ نفر حقوق کمتر از میانگین دریافت می‌کنند.

میانگین و میانه، هر دو به توصیف وضعیت داده‌ها می‌پردازند و هر کدام ویژگی‌هایی از داده‌ها را بیان می‌کنند.

مثال ۴

ساعت‌هایی را که علی در روزهای یک هفته مطالعه کرده است به صورت زیر است:

۲ ، ۳ ، ۳ ، ۴ ، ۱ ، ۵ ، ۸

برای پیدا کردن میانه، ابتدا داده‌ها را به شکل زیر مرتب می‌کنیم.

۸ ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۳ ، ۲ ، ۱

عدد ۳ **میانه** است. جایگاه این عدد مشخص می‌کند که تعداد داده‌های قبل از جایگاه عدد ۳، با تعداد داده‌های بعد از آن، برابرند.

گفتگو

دبیر به دانش‌آموزان گفت: اگر به لیست حقوق کارکنان آن شرکت، حقوق طاها را هم اضافه کنیم، میانگین و میانهٔ آن، چه تغییری می‌کند؟

سعید گفت: من حساب کردم، میانگین ۱/۹۵ میلیون می‌شود ولی برای به‌دست آوردن میانه، حقوق‌ها را که مرتب کردم داده‌ای در وسط ندیدم.

دبیر گفت: توجه کنید همانطور که ممکن است میانگین بین داده‌ها نباشد، میانه هم لزوماً در بین داده‌ها نیست.

سعید گفت: پس برای آنکه تعداد داده‌های بعد از میانه با تعداد داده‌های قبل از میانه برابر باشد، باید عددی بین ۱/۳ و ۱/۵ میلیون انتخاب کنیم. آیا فرقی نمی‌کند چه عددی را انتخاب کنیم؟

دبیر گفت: نه فرقی نمی‌کند ولی در این صورت، میانه به‌طور دقیق مشخص نخواهد بود. برای هماهنگی، طبق قرارداد، میانگین این دو عدد را به‌عنوان میانه انتخاب می‌کنند.

سعید گفت: پس، میانه ۱/۴ میلیون است.

مثال ۵

مصرف شیر ۱۰ خانوادهٔ ۴ نفره در یک ماه برحسب لیتر به‌صورت زیر است:

۱۴ ، ۵ ، ۴ ، ۸ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۳ ، ۱۰ ، ۵ ، ۱۵

برای پیدا کردن میانه، ابتدا داده‌های مسئله را مرتب می‌کنیم.

میانه = $\frac{۸+۱۰}{۲}$ = ۹

مثال ۶

تعداد نان مصرفی ۷ خانواده در یک هفته به‌صورت زیر است:

۸ ، ۱۳ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۰ ، ۱۴ ، ۱۵

میانهٔ مصرف این خانواده‌ها برابر با ۱۳ است.

مثال ۷

در یک مطالعه، ۵ داده به‌دست آمده است. اگر ۶ ، ۱۲، ۱۲ و ۱۴ چهارتا از این داده‌ها باشند، دادهٔ پنجم را به‌گونه‌ای پیدا کنید که میانگین و میانهٔ این داده‌ها با هم برابر باشند.

چون ۵ داده داریم، میانه در جایگاه سوم قرار دارد. پس فرقی نمی‌کند که داده مورد نظر از ۶ کوچک‌تر، یا بین ۶ و ۱۲، یا بین ۱۲ و ۱۴ و یا از ۱۴ بزرگ‌تر باشد؛ در هر صورت، میانه ۱۲ خواهد بود. فرض برابری میانه و میانگین نشان می‌دهد که میانگین هم برابر با ۱۲ است. پس مجموع ۵ داده باید ۶۰ = ۱۲ × ۵ باشد. یعنی دادهٔ پنجم برابر است با: ۱۶ = (۶+۱۲+۱۲+۱۴) − ۶۰

کار در کلاس ۳

۱ تعداد روزهای مسافرت چند خانواده به‌صورت مقابل است. ۸ ، ۳ ، ۶ ، ۴ ، ۳ ، ۷ ، ۵ ، ۲

میانه این داده‌ها را بنویسید.

۲ اگر تعداد داده بدون تکرار و .... (فرد / زوج) باشد، میانه در داده‌ها قرار ندارد.

۳ داده‌های زیر تعداد شرکت‌کنندگان شهرهای مختلف را در یک مسابقه نشان می‌دهد و میانهٔ داده‌ها عدد ۱۷ است. در دایره و مربع چه اعدادی می‌توانند قرار بگیرند؟ چرا؟

۲۰ ، ۲۰ ، ۱۹ ، ۱۹ ، ۱۸ ، □ ، ○ ، ۱۵ ، ۱۴ ، ۱۳ ، ۱۳ ، ۱۲ ، ۱۱

مسائل

۱ مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها نباشد و مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها باشد.

۲ اگر همهٔ داده‌ها ۲ برابر شوند، میانه چه تغییری می‌کند؟

۳ در جلسه‌های تمرین پرتاب نیزه، دو ورزشکار، پرتاب‌های مختلفی انجام داده‌اند. مسافت پرتاب شده توسط آنها برحسب متر به‌صورت زیر است:

۷۰ ، ۷۰ ، ۵۵ ، ۶۶ ، ۵۸ ، ۶۹ ، ۶۶ ، ۷۱ ، ۶۳ ، ۷۲ ، ۶۰ ، ۶۵ ، ۷۰ : ورزشکار اول

۷۰ ، ۶۸ ، ۵۹ ، ۵۸ ، ۶۸ ، ۶۵ ، ۷۱ ، ۶۵ ، ۷۲ ، ۷۰ ، ۶۰ ، ۷۵ : ورزشکار دوم

میانه پرتاب دو ورزشکار را با هم مقایسه کنید. توضیح دهید در این مسئله، میانه چه چیزی را نشان می‌دهد. عملکرد کدام‌یک را بهتر ارزیابی می‌کنید؟

۴ داده‌های مقابل را در نظر بگیرید: ۸ ، ۵ ، ۳

الف) میانگین و میانهٔ این داده‌ها را حساب کنید.

ب) در داده‌ها به جای عدد ۸، عدد ۹۰ را بنویسید و مجدداً میانگین و میانه را حساب کنید.

با توجه به تغییرات انجام شده در قسمت «ب»، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

پ) با تغییر یکی از داده‌ها (میانه / میانگین) همواره تغییر می‌یابد.

ت) میانه به کوچکی و بزرگی داده‌های قبل و بعد از خود بستگی (دارد / ندارد).

۵ میانه نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۲۵ نفری، برابر ۱۷ است. میانه چه اطلاعاتی درباره نمره‌های کلاس به شما می‌دهد؟

۶ میانهٔ نمرات ریاضی در دو کلاس، ۱۷ و ۱۲ است. وضعیت نمرات دو کلاس را توصیف کنید.

۷ میانگین ۵ داده برابر با ۱۷ و میانهٔ آنها ۱۴ است. ۵ عدد مثال بزنید که این شرایط را داشته باشند. این مسئله چند جواب می‌تواند داشته باشد؟

نمودار جعبه‌ای

در هنرستانی دو کلاس ۱۶ نفری به نام‌های «تلاش» و «کوشش» بود که بین آنها آزمون هماهنگ درس ریاضی برگزار شد. دبیران این دو کلاس نتایج کار هنرجویان خود را برای ارائه در جلسهٔ دبیران آماده کردند. روز جلسه، مدیر از دبیران خواست نتایج این آزمون را گزارش کنند تا عملکردکلاس‌ها مشخص شوند. دبیران این دو کلاس، فهرست نمرات را به همراه میانگین و میانهٔ نمرات به شکل زیر ارائه کردند:

کلاس تلاش: میانگین۱۶ و میانه ۱۴/۵ — کلاس کوشش: میانگین ۱۵ و میانه ۱۶

کلاس کوشش

نمرهٔ هنرجویان
۱۰
۱۷
۱۲
۱۵
۲۰
۱۰
۱۷
۱۷
۱۰
۱۰
۱۵
۱۹
۱۷
۱۲
۱۹
۲۰

کلاس تلاش

نمرهٔ هنرجویان
۱۸
۱۴/۵
۱۸
۱۴
۱۹
۹
۱۴
۱۹/۵
۱۴/۵
۱۹
۱۸
۱۴
۱۳
۱۴
۱۴
۱۹/۵

مدیرگفت: درک عملکرد هنرجویان از طریق این فهرست دشوار است، بهتر است نموداری رسم شود تا درک بهتری داشته باشیم.

یکی از دبیرانی که آمار درس می‌داد گفت: بهتر است از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم.

شما با انجام فعالیت زیر می‌توانید با مفهوم نمودار جعبه‌ای و کاربردهای آن آشنا شوید.

فعالیت ۵

نمره‌های مرتب شدهٔ درس ریاضی کلاس «کوشش» به صورت زیر است.

۲۰، ۲۰ ، ۱۹ ، ۱۹ ، ۱۷ ، ۱۷ ، ۱۷ ، ۱۷ ، ۱۵ ، ۱۵ ، ۱۲ ، ۱۲ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰

۱ میانهٔ نمره‌ها را با نقطه‌ای به نام M روی خطچین زیر مشخص کنید.

....

۲ برای اعداد قبل از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خطچین با نقطهٔ C مشخص کنید همچنین برای اعداد بعد از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خطچین با نقطهٔ D مشخص کنید.

....

۳ کمترین نمره را با نقطهٔ A و بیشترین نمره را با نقطهٔ B روی خطچین مشخص کنید.

....

۴ مستطیلی رسم کنید که نقاط C و D روی عرض‌های این مستطیل(جعبه) قرار گیرند. پاره‌خطی از A به C و پاره‌خطی از B به D وصل کنید. درصد تعداد نمرات دانش‌آموزان در هر بازه را پیدا کرده و در جدول زیر را کامل کنید.

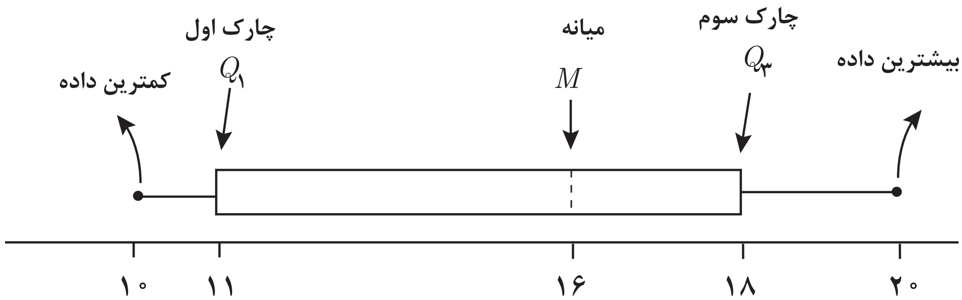
بازه نمرات	قبل از C	بین C و D	قبل از D	بعد از D
درصد تعداد نمرات هنرجویان				

در فعالیت (۵)، میانه[۱] برابر ۱۶ است، یعنی $M = ۱۶$. میانهٔ اعداد قبل از M برابر ۱۱ است، یعنی $C = ۱۱$. تعداد نمره‌های قبل از C، $\frac{۱}{۴}$ کل نمرات است؛ به‌همین دلیل آن را **چارک اول** می‌نامند و با $Q_۱$[۲] نشان می‌دهند. تعداد نمره‌های بعد از $Q_۱$، سه برابر تعداد نمرات قبل از آن است. میانهٔ اعداد بعد از M برابر ۱۸ است، یعنی $D = ۱۸$. تعداد نمره‌های قبل از D، $\frac{۳}{۴}$ تعداد کل نمره‌ها است؛ به همین دلیل آن را **چارک سوم** می‌گویند و با $Q_۳$ نشان می‌دهند. تعداد نمره‌های قبل از $Q_۳$ سه برابر تعداد نمره‌های

۱ـ M حرف اول کلمه Median به معنی میانه است.

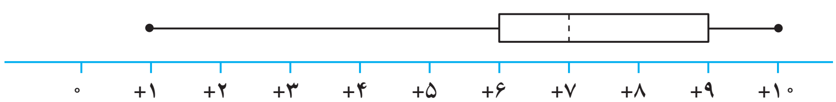
۲ـ Q حرف اول کلمه Quartile به معنی چارک است.

بعد از آن است. تعداد نمره‌های بین Q_1 و Q_3، یعنی آنهایی که درون جعبه قرار دارند، تقریباً ۵۰ درصد تعداد کل نمره‌ها است.



مثال ۸

نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید.



در این نمودار میانه برابر با ۷ است. نزدیک‌تر بودن میانه به چارک اول (۶)، نسبت به چارک سوم (۹) نشان می‌دهد تمرکز داده‌ها در سمت چپ میانه بیشتر از سمت راست میانه است (زیرا تعداد داده‌ها در هر دو طرف برابر است ولی در سمت چپ، ۵۲ درصد داده‌ها بین ۶ و ۷ است. در صورتی که در سمت راست، ۵۲ درصد داده‌ها بین ۷ تا ۹ است). به همین ترتیب بلندتر بودن دنبالهٔ سمت چپ نسبت به دنبالهٔ سمت راست نشان می‌دهد که پراکندگی داده‌ها در سمت چپ بیشتر از پراکندگی داده‌ها در سمت راست است.

مثال ۹

پلیس راهور، در یک شهر، آمار تصادفات نوروز را از چهار روز قبل از تعطیلات طی ۲۰ روز به‌صورت زیر گزارش کرده است:

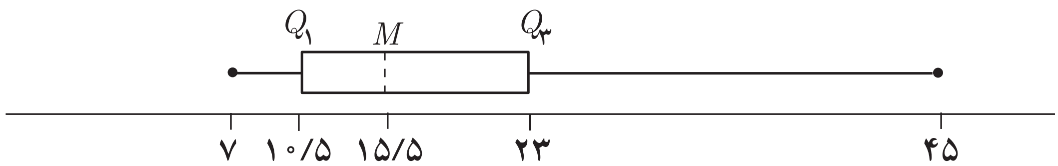
۴۵ ، ۲۲ ، ۳۳ ، ۲۸ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۲ ، ۷ ، ۱۸ ، ۱۴ ، ۲۰ ، ۲۶ ، ۹ ، ۸ ، ۱۶ ، ۲۴ ، ۸ ، ۱۷

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم می‌کنیم.

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$\underbrace{\text{۷، ۸ ، ۸ ، ۹ ، ۱۰ ، ۱۱ ، ۱۲ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۵}}$ ، $\underbrace{\text{۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰ ، ۲۲ ، ۲۴ ، ۲۶ ، ۲۸ ، ۳۳ ، ۴۵}}$

کمترین داده برابر ۷ و بیشترین داده برابر ۴۵ است، پس دامنهٔ تغییرات داده‌ها برابر با ۳۸ است.
میانه M=۱۵/۵ و چارک اول $Q_۱$ = ۱۰/۵ و چارک سوم $Q_۳$ = ۲۳ است.

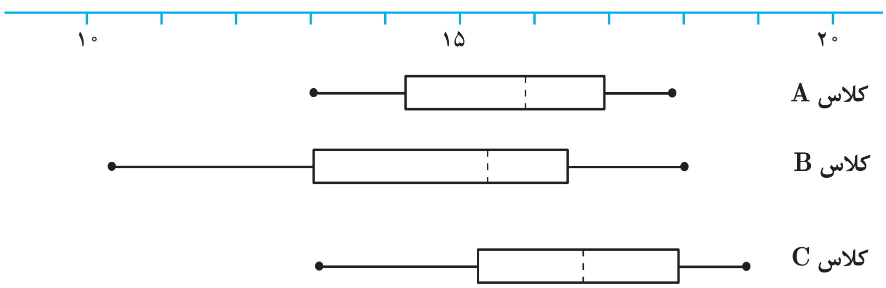


میانه M=۱۵/۵ است. این عدد نشان می‌دهد که تقریباً ۵۰ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه بیشتر یا مساوی ۱۶ است (تعداد تصادف‌ها عدد طبیعی است) .
چارک اول، $Q_۱$ = ۱۰/۵ نشان می‌دهد که تقریباً ۲۵ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه کمتر یا مساوی ۱۰ است.
چارک سوم، $Q_۳$ = ۲۳ نشان می‌دهد که تقریباً ۷۵ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه کمتر یا مساوی ۲۳ است.

هر یک از دو دنباله رسم شده در دو طرف جعبه نشان دهندهٔ تقریبا ٪۲۵ داده‌ها است و بلندتر بودن دنبالهٔ سمت راست نشان می‌دهد پراکندگی تعداد تصادف‌ها در این قسمت بیشتر است. در این مثال تقریباً ٪۲۵ از داده‌ها از ۷ تا ۱۰/۵ است. همچنین نزدیک بودن M به $Q_۱$ نشان می‌دهد پراکندگی تعداد تصادف‌ها بین آنها کمتر از پراکندگی تعداد تصادف‌های بین M تا $Q_۳$ است.
در نمودار جعبه‌ای، تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها درون جعبه قرار می‌گیرند. اگر M در وسط جعبه قرار داشته باشد، نشان می‌دهد پراکندگی داده‌ها از $Q_۱$ تا M همانند پراکندگی از M تا $Q_۳$ است. هر چقدر M از وسط جعبه به $Q_۳$ نزدیک‌تر شود پراکندگی بین آن دو کمتر از پراکندگی بین $Q_۱$ تا M خواهد شد.

مثال ۱۰

نمودار زیر عملکرد سه کلاس B ، A و C را در امتحان ریاضی نشان می‌دهد.



این نمودار نشان می‌دهد که نیمی از هنرجویان کلاس C از ۷۵٪ هنرجویان کلاس B عملکرد بهتری داشته‌اند. همه هنرجویان کلاس A و همهٔ هنرجویان کلاس C از ۲۵٪ هنرجویان کلاس B عملکرد بهتری داشته‌اند. تقریباً نمره نیمی از هنرجویان کلاس B بیشتر یا مساوی ۱۶ است. در حالی که نمره نیمی از هنرجویان کلاس C بیشتر یا مساوی ۱۷/۵ است. گرچه کمترین نمره در کلاس A با کمترین نمره در کلاس C برابر است، ولی نمرهٔ نیمی از هنرجویان کلاس C بیشتر از نمرهٔ نیمی از هنرجویان کلاس A است.

کار در کلاس ۴

۱ میزان بارندگی (بر حسب میلی‌متر) در یک شهر طی ۱۵ روز به‌صورت زیر گزارش شده است:

۲، ۰، ۵، ۱، ۹، ۰، ۱۲، ۱۵، ۲۵، ۵، ۰، ۸، ۲، ۳، ۱۶

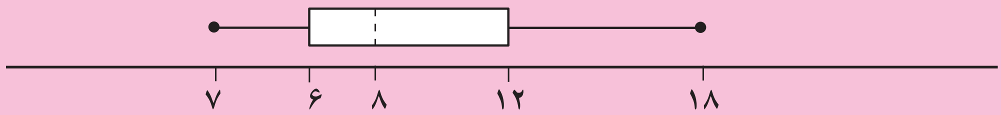
الف) چارک اول، میانه و چارک سوم چه اعدادی هستند؟

....

ب) تقریباً چند درصد داده‌ها بین Q_1 و Q_3 قرار دارند؟

پ) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم و آن را تفسیر کنید.

۲ یک شرکت بیمه می‌خواهد بررسی‌هایی را برای پرداخت هزینه‌های بستری بیماران دچار حملهٔ قلبی انجام دهد. بعد از آنکه مدت بستری شدن (بر حسب روز) تعدادی بیمار پس از حمله قلبی در یک بیمارستان مشخص شد نمودار جعبه‌ای آن را به‌صورت زیر رسم کرده‌اند:



الف) میانهٔ داده‌ها چند است؟

ب) چارک اول چند است؟ چند درصد داده‌ها قبل از آن و چند درصد بعد از آن قرار دارند؟

پ) مقدار Q_3 چند است؟ این عدد نشان‌دهندهٔ چیست؟

ت) چند درصد داده‌ها درون جعبه قرار دارند؟

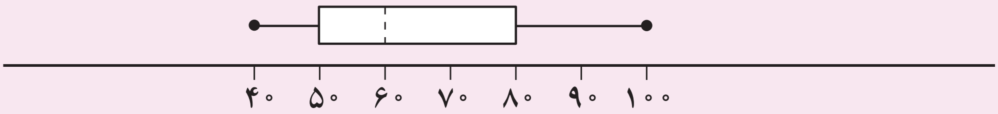
ث) بلندتر بودن دنبالهٔ سمت راست جعبه نشان‌دهندهٔ چیست؟

۳ نمودار جعبه‌ای فهرست نمرات کلاس‌های تلاش و کوشش (در ابتدای این بخش) را رسم کنید. سپس با مقایسهٔ این نمودارها، به نظر شما کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟

....

مسائل

۱ نمودار جعبه‌ای نمره‌های زبان انگلیسی در یک کلاس به‌صورت زیر است:

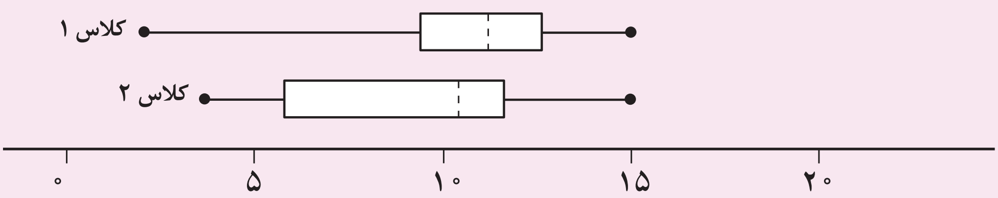


الف) میانه برابر چه عددی است؟

ب) فاصله بین Q_1 و Q_3 چقدر است؟

پ) چند درصد از نمره‌ها قبل از Q_3 قرار دارند؟

۲ نمودارهای زیر عملکرد دو کلاس را در درس عربی نشان می‌دهد.



الف) در کدام کلاس، نمرهٔ دانش‌آموزان پراکندگی کمتری دارد؟

ب) نیمی از دانش‌آموزان کلاس ۱، نمره‌شان بیشتر از چند است؟

پ) کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟

ت) آیا می‌توان گفت ۷۵ درصد دانش‌آموزان کلاس ۱ از همهٔ دانش‌آموزان کلاس ۲ بهتر عمل کرده‌اند؟

۳ در یک تیم والیبال، کوتاه‌ترین قد ۱۶۸ و بلندترین قد ۲۰۳ سانتی‌متر و میانه برابر ۱۸۴ سانتی‌متر است. اگر فاصلهٔ بین Q_3 و Q_1 برابر ۱۱ باشد، آیا می‌توان نمودار جعبه‌ای قد افراد این تیم را رسم کرد؟

۴ غلظت قند خون ۱۲ نفر (برحسب $mM\ dm^{-3}$)، ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا اندازه‌گیری شده است. نتایج به‌دست آمده به شرح زیر است.

۴/۲	۳/۸	۳/۹	۴/۶	۵/۱	۳/۷
۳/۸	۴/۰	۴/۷	۵/۲	۴/۰	۳/۹

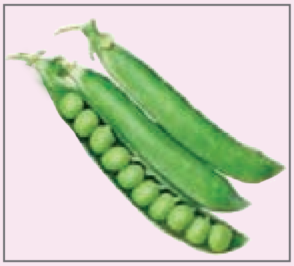
الف) میانه و چارک‌های اول و سوم را پیدا کنید.

ب) اگر غلظت قند خون شما، ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا ۴/۱ باشد، وضعیت خود را نسبت به این افراد توصیف کنید.

۵ سجاد در رشته کشاورزی تحصیل می‌کرد. او تنوع تعداد نخودهای موجود در غلاف‌ها را بررسی کرد. تعداد نخودهای موجود در ۱۷ غلاف به شرح زیر است.

۴ ، ۵ ، ۸ ، ۱۲ ، ۱۰ ، ۴ ، ۳ ، ۱۱ ، ۵ ، ۶ ، ۵ ، ۹ ، ۸ ، ۷ ، ۱۰ ، ۹ ، ۷

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم و تفسیر کنید.



منابع

۱ـ بخشعلی زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ پناهنده، سوسن؛ دهقانی ابیانه، زین‌العابدین و فانی، زیبا.(۱۳۹۵). ریاضی ۱. شرکت چاپ‌ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۲ـ بروجردیان، ناصر. (تابستان ۱۳۹۲). تابع و حد تابع در نگاه جدید و نگاه قدیم. مجله‌ریاضی پایا، شماره۲ دوره یکم.

۳ـ بخشعلی زاده ، شهرناز. (۱۳۸۴). آمار و مدلسازی. محراب قلم.

۴ـ Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics- course ۲.۱nd Edition.

۵ـ Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics- course ۲.۲nd Edition.

۶ـ Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics- course ۲.۳nd Edition.

۷ـ Moore- Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts-course ۲. McGraw-Hill. ۲۰۰۶

۸ـ Moore- Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts-course ۳. McGraw-Hill. ۲۰۰۶

۹ـ Barber, Dianne B. MATH IN CONTEXT: A Tool Kit for Adult Basic Skills Educators. Appalachian State University. NC Community College System. ۲۰۰۷