فهرست

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

فصل ۲ مثلثات

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل ۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها

فصل ۵ تابع

فصل ۶ شمارش، بدون شمردن

فصل ۷ آمار و احتمال

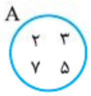
فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

درس ۱

یادآوری مجموعه‌ها

مجموعه، دسته‌ای از اشیاء است که خوب مشخص شده باشند؛ یعنی دقیقاً معلوم باشد کدام عضوها در مجموعه هستند و کدام عضوها نیستند. پس مثلاً مجموعهٔ «شاعران معروف ایرانی» یا «گل‌های خوشبو» از نظر ریاضی مجموعه نیستند. اما مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی یک مجموعه است که آن را به صورت $A=\{۲,۳,۵,۷\}$ نشان می‌دهیم.



گاهی اوقات این مجموعه را به صورت نمودار وِن شکل مقابل هم نشان می‌دهیم:

A نام مجموعه است. می‌نویسیم $۲\in A$ یعنی ۲ عضو مجموعهٔ A است و $۶\notin A$ یعنی عدد ۶ عضو مجموعهٔ A نیست.

در مجموعه‌ها عضوهای تکراری را یک بار می‌نویسیم و ترتیب اعضا اهمیتی ندارد؛ پس مثلاً $\{۱,۱,۱,۲,۲\}$ همان $\{۲,۱\}$ است.

اگر تمام عضوهای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B هم باشند، می‌نویسیم $A\subseteq B$ و می‌خوانیم «A زیرمجموعهٔ B است.» مثلاً $\{۱,۲,۳\}\subseteq\{۱,۲,۰,۳,۴\}$.

دقت کنید که $\{۱,۲,۳\}\not\subseteq\{۲,۳,۵\}$، چون عضو ۱ در مجموعهٔ اول هست اما در دومی نیست.

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را $\varnothing$ یا $\{\}$ یا تهی می‌نامیم. مثلاً مجموعهٔ اعداد اول دورقمی که یکان آن‌ها ۵ باشد، تهی است چون چنین عددی وجود ندارد. حواستان هست که $\{\varnothing\}$ تهی نیست، یک مجموعهٔ ۱عضوی است!

تست اگر $A=\{۱,۲,\{۱\}\}$ و $B=\{۱\}$ چندتا از روابط $A\subseteq A$ ، $\varnothing\subseteq B$ ، $B\in A$ ، $B\subseteq A$ و $۲\in A$ درست هستند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ ۴ خوب گوش کنید... $A\subseteq A$ همواره درست است؛ هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است.

$\varnothing\subseteq B$ نیز همیشه درست است؛ $\varnothing$ زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌ها است.

$B\in A$ درست است؛ چون $B=\{۱\}$ را به صورت عضو در مجموعهٔ A می‌بینیم:

$A=\{۱,۲,\underline{\{۱\}}\}$ این B است.

$B\subseteq A$ نیز درست است؛ چون عضو B یعنی عدد ۱، در A هم هست:

$A=\{\underline{۱},۲,\{۱\}\}$ عضو B در A هم هست.

و بالأخره رابطهٔ $۲\in A$ درست است؛ چون عضو ۲ را در A داریم، پس ۵ رابطه درست‌اند.

تا این‌جا هستید ببینید که $B\in B$ ، $\varnothing\in B$ ، $\{۱\}\in B$ و $۲\in B$ ، هیچ‌کدام درست نیستند.

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

۱ اشتراک A و B مجموعهٔ اعضایی است که در هر دوی آن‌ها باشند. اشتراک دو مجموعهٔ A و B را با $A\cap B$ نشان می‌دادیم. پس مثلاً:

$\{۱,۲,۳\}\cap\{۴,۵,۶\}=\varnothing$ $\{۱,۲,۳\}\cap\{۰,۱,۳,۴,۵\}=\{۱,۳\}$

در ذهن داشته باشید که: $A\cap A=A\ ,\ A\cap\varnothing=\varnothing$

این را هم حتماً به یاد دارید: $A\subseteq B\iff A\cap B=A$

یعنی اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، اشتراکشان می‌شود A.

اگر A و B عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی $A\cap B=\varnothing$، می‌گوییم A و B جدا از هم یا ناسازگارند.

۲ اجتماع A و B مجموعهٔ اعضایی است که در A یا در B یا در هر دوی آن‌ها باشند.

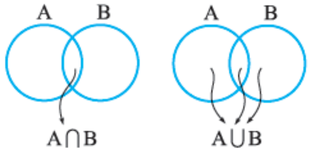
می‌گوییم اعضایی که در حداقل یکی از آن‌ها هستند. ببینید: (عضو تکراری را یک بار می‌نویسیم.) $\{۱,۲,۳\}\cup\{۰,۲,۵\}=\{۱,۲,۳,۰,۵\}$

$\{۲,۴\}\cup\{-۱,۳\}=\{-۱,۲,۳,۴\}$

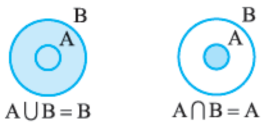
لازم به تأکید هست که: $A\cup\varnothing=A\ ,\ A\cup A=A$

و همچنین اگر $A\subseteq B$ باشد، داریم: $A\cup B=B$

نمودار ون را ببینید:



در حالتی که $A\subseteq B$ است، نمودارهای اجتماع و اشتراک را ببینید:

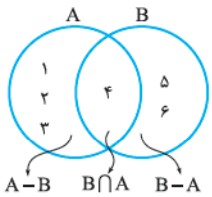


۳ تفاضل دو مجموعهٔ A و B به صورت $A-B$ یعنی مجموعهٔ عضوهایی از A که در B نیستند. از آن طرف $B-A$ یعنی مجموعهٔ عضوهایی از B که در A نیستند.

پس مثلاً با دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۴,۵,۶\}$ داریم:

$$B-A=\{۴,۵,۶\}-\{۱,۲,۳,۴\}=\{۵,۶\}$$

$$A-B=\{۱,۲,۳,۴\}-\{۴,۵,۶\}=\{۱,۲,۳\}$$



نمودار ون خیلی خوب‌تر است:

موافقید که $A-B$ و $B-A$ مساوی نیستند، مگر این‌که خود A و B مساوی باشند.

در مورد این‌ها نظرتان چیست؟

$A-A=\varnothing$, $A-\varnothing=A$

$\varnothing-A=\varnothing$

اگر $A\subseteq B$ باشد، $A-B$ می‌شود $\varnothing$. به زبان ریاضی:

$A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

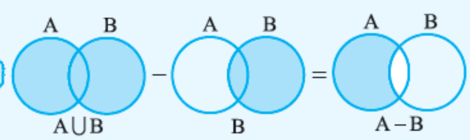
اگر A و B اشتراک نداشته باشند، $A-B$ می‌شود A. این‌طوری:

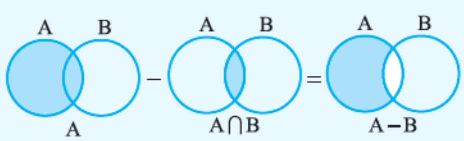
$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow A-B=A\,,\,B-A=B$

تست کدام با بقیه فرق دارد؟

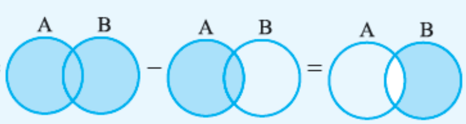
۱) $A-B$ ۲) $A-(A\cap B)$ ۳) $(A\cup B)-A$ ۴) $(A\cup B)-B$

پاسخ **گزینهٔ ۳** نمودار ون را برای ۲ و ۴ ببینید:





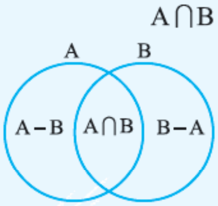
پس ۱، ۲ و ۴ همگی $A-B$ هستند، اما ۳ فرق دارد:

۳ $A\cup B-A=$  $=B-A$

تست کدام نادرست است؟

۱) $A-B\subseteq A$ ۲) $A-B\subseteq B-A$ ۳) $A\subseteq A\cup B$ ۴) $A\cap B\subseteq B$

پاسخ **گزینهٔ ۲** یک بار دیگر نمودار ون را ببینید:



داریم:

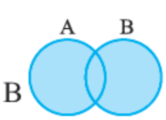
$(A-B)\subseteq A$, $(A\cap B)\subseteq A$

$A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$

و البته هر سه مجموعهٔ $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$، زیرمجموعهٔ $A-B$ هستند.

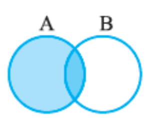
با نگاهی به نمودار ون، درستی رابطه‌های زیر را تأیید کنید:

$(A-B)\cup B=A\cup B$



$A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$

$(A\cap B)\cup(A-B)=A$

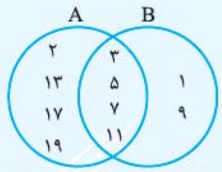


تست اگر A مجموعهٔ اعداد اول کم‌تر از ۲۰ و B مجموعهٔ اعداد فرد کم‌تر از ۱۲ باشد، $(A-B)\cup(B-A)$ چندعضوی است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

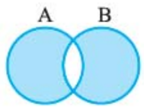
پاسخ گزینهٔ ۳ در A عضوهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ و در B اعضای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۱ را داریم.

نمودار را ببینید:



پس $A-B$ چهار عضو و $B-A$ دو عضو و اجتماع آن‌ها ۶ عضو دارد.

$(A-B)\cup(B-A)$ همان $(A\cup B)-(A\cap B)$ است. ببینید: $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$



یک مثال فانتزی هم از ترکیب اجتماع و اشتراک و تفاضل می‌بینیم:

تست اگر $A_k=\{x \mid x\in\mathbb{Z},(-1)^k\le x\le k\}$، آن‌گاه $(A_۲\cup A_۳)-(A_۱\cap A_۳)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ اولین کار نوشتن $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ است. باید به جای k اعداد ۱، ۲ و ۳ را بگذاریم:

$A_۱=\{x \mid x\in\mathbb{Z},-۱\le x\le ۱\}=\{-۱,۰,۱\}$

$A_۲=\{x \mid x\in\mathbb{Z},۱\le x\le ۲\}=\{۱,۲\}$

$A_۳=\{x \mid x\in\mathbb{Z},(-۱)\le x\le ۳\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$

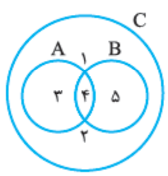
پس داریم: $A_۲\cup A_۳=\{۱,۲\}\cup\{-۱,۰,۱,۲,۳\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$

$A_۱\cap A_۳=\{-۱,۰,۱\}\cap\{-۱,۰,۱,۲,۳\}=\{-۱,۰,۱\}$

و در نتیجه تفاضل می‌شود: $\{-۱,۰,۱,۲,۳\}-\{-۱,۰,۱\}=\{۲,۳\}$

که دو عضو دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- با توجه به نمودار مقابل، چندتا از عبارت‌های مقابل درست نیست؟ $A\subseteq C\,,\,۲\in(A\cup B)\,,\,۴\in(A\cup B)\,,\,۳\subseteq A$

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۲- در مجموعهٔ $A=\{\{۱\},\{\{۱\}\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{۱\}\subseteq A$ ۲) $\{۱\}\in A$ ۳) $\{\{۱\}\}\in A$ ۴) $\{\{۱\}\}\subseteq A$

۳- اگر $A=\{۲\}$، $B=\{۲,\{۲\}\}$ و $C=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B\subset C$ ۲) $A\subset B$ ۳) $A\in B$ ۴) $B\in C$

۴- اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$، $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{۱,۲,۳\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

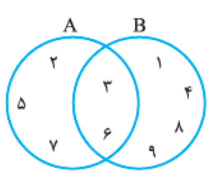
۱) $A-B=C$ ۲) $B-C=\varnothing$ ۳) $B-C=\{۱,۲\}$ ۴) $A-B=\{C\}$

۵- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$، مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶- مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$، $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $n((A\cup B)-C)=۷$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$
۳) $n(C\cup\varnothing)=n(B\cap B)$ ۴) $n(A\cap B)=n(A\cap C)$



۷- با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعهٔ $A-(A-B)$ و $B-(B-A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۸- اگر $A=\{۲,۳,۶,۷,۸\}$ و $B=\{۲,۴,۵,۶\}$ باشند، مجموعهٔ $(A\cup B)-[A-(A\cap B)]$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

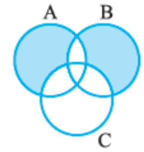
۹- مجموعهٔ $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})-(\mathbb{Z}-\mathbb{W})$ چندعضوی است؟

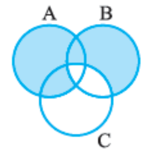
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

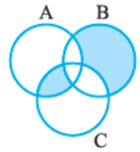
۱۰- اگر A مجموعهٔ اعداد دورقمی و $B=\{۷k : k\in A\}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $A\cap B$ چند عضو دارد؟

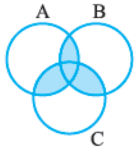
۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱- نمایش هندسی مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-C)$ کدام است؟

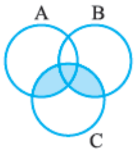
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۲- قسمت رنگی شکل مقابل، نمودار ون کدام مجموعه است؟



۱) $A-(B\cap C)$　　۲) $(A\cap B)\cup C$

۳) $A\cup(B\cap C)$　　۴) $(A\cup B)\cap C$

۱۳- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، حاصل $A-(B-(A\cap B))$ کدام مجموعه است؟

۱) A　　۲) B　　۳) $A\cap B$　　۴) $A\cup B$

۱۴- اگر A، B و C سه مجموعهٔ غیرتهی به طوری که $A\subset B$ باشند، آن‌گاه مجموعهٔ $(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C)$ کدام است؟

۱) $A-C$　　۲) $A\cap C$　　۳) A　　۴) B

۱۵- اگر $A\cup(B-A)=B$ باشد، آن‌گاه:

۱) $A\subseteq B$　　۲) $B\subseteq A$　　۳) $A=\varnothing$　　۴) $B=\varnothing$

۱۶- اگر $A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $B\cap C=\varnothing$　　۲) $B\cap C\neq\varnothing$　　۳) $A\cap(B\cup C)=\varnothing$　　۴) $A\cap(B-C)\neq\varnothing$

۱۷- اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z} \mid m\ge -n, 2^m\le n\}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $A_4\cap A_3$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۸　　۲) ۱۶　　۳) ۳۲　　۴) ۳۶

(درس ۲)

مجموعه‌های مهم اعداد ـ بازه

این مجموعه‌ها را از سال نهم می‌شناسید:

نام	نماد	عضوها	توضیح
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	$1,2,3,\ldots$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}$ است. در $\mathbb{W}$ علاوه بر اعداد طبیعی، صفر را داریم.
اعداد حسابی	$\mathbb{W}$	$0,1,2,3,\ldots$	
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	$0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}$ است. $\mathbb{Z}$ شامل قرینهٔ اعداد طبیعی هم هست.
اعداد گویا	$\mathbb{Q}$	$\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\}$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ است. اعداد کسری مثل $\frac{2}{3}$ و $-\frac{1}{5}$ و ... علاوه بر اعداد صحیح، در $\mathbb{Q}$ هستند.
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}^c$	اعدادی که نمایش کسری ندارند.	اعدادی مانند $\sqrt{2}$ و π، نمایش کسری ندارند.
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$	کل اعداد گویا و گنگ در کنار هم	کل نقاط محور اعداد حقیقی را دارد.

تست عدد $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{8}}$ عضو چندتا از مجموعه‌های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}^c$ و $\mathbb{R}$ است؟

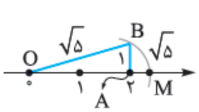
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ ۲** به جای ۹۸ می‌نویسیم ۲×۴۹ و به جای ۸ هم ۲×۴ می‌گذاریم، پس داریم:

$$\frac{\sqrt{49\times2}}{\sqrt{4\times2}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}}=\frac{7}{2}$$

پس این عدد ۳/۵ است. در $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}^c$ نیست و در $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ هست. یعنی در دوتا از مجموعه‌ها.

در اعداد گنگ، تعداد رقم‌های اعشاری بی‌شمار است و دورهٔ تناوب ندارد.



مثلاً ...۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱ نیز گنگ است. جذر اعدادی که مربع کامل نیستند، هم گنگ است؛ π نیز گنگ است. مجموعهٔ اعداد گنگ را به صورت $\mathbb{Q}^c$ یا $\overline{\mathbb{Q}}$ هم نشان می‌دهیم. این خاصیت‌ها را ببینید:

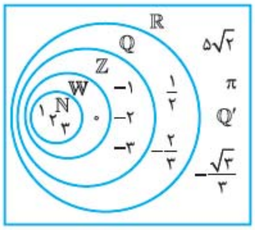
$\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ ، $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ ، $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Q}=\varnothing$ ، $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

برای نمایش اعداد $\sqrt{k}$ روی محور از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌شود، مثلاً نمایش $\sqrt{۵}$ روی محور را ببینید:

$$OA=۲\ ,\ AB=۱$$

$$OB^{۲}=OA^{۲}+AB^{۲}=۲^{۲}+۱^{۲}=۵ \Rightarrow OB=\sqrt{۵}=OM$$

این مجموعه‌ها را در نمودار ون ببینید:



تست $\mathbb{Q}$ **با کدام مجموعه، اشتراک ندارد؟**

۱) $\{x \mid x^{۲}=\frac{۴}{۹}\}$ ۲) $\{x \mid -۱<x<۰\}$ ۳) $\{x \mid x^{۲}=۳\}$ ۴) $\{x \mid x\notin \mathbb{Z}\}$

پاسخ گزینهٔ ۳ اعضای (۱) اعداد $\pm\frac{۲}{۳}$ هستند که مربع آن‌ها می‌شود $\frac{۴}{۹}$ و با $\mathbb{Q}$ اشتراک دارد؛ چون $\pm\frac{۲}{۳}$ در $\mathbb{Q}$ هستند. در (۲) اعداد گویای بین -۱ و صفر، مثلاً $-\frac{۱}{۲}$، با $\mathbb{Q}$ مشترک‌اند. در (۴) هم اعداد غیرصحیح مانند $-\frac{۱}{۲}$ با $\mathbb{Q}$ مشترک‌اند. اما در (۳)، اعدادی که $x^{۲}=۳$ باشد $\pm\sqrt{۳}$ هستند که در $\mathbb{Q}$ قرار نمی‌گیرند؛ پس با $\mathbb{Q}$ اشتراک ندارد.

تست **اگر** $\{x|x\in A,(x+۳)(۲x-۱)=۰\}$ **برابر** $\{\frac{۱}{۲}\}$ **باشد، A می‌تواند چندتا از مجموعه‌های مقابل باشد؟** $\mathbb{Q}'$ ، $\mathbb{Q}-\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{R}-\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۱ $(x+۳)(۲x-۱)=۰$ یعنی مقدار x برابر -۳ یا $\frac{۱}{۲}$ است. اما مجموعه فقط برابر $\{\frac{۱}{۲}\}$ شده، پس -۳ در A نیست و $\frac{۱}{۲}$ در آن هست. $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}'$ عدد $\frac{۱}{۲}$ را ندارند و در $\mathbb{Q}-\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}-\mathbb{W}$، عدد -۳ هم حضور دارد! اما $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ مناسب است؛ چون -۳ را ندارد و $\frac{۱}{۲}$ را دارد، پس فقط یکی از مجموعه‌ها مناسب است.

بازه‌ها

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند که همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص را نشان می‌دهند. اول انواع بازه‌ها را در جدول روبه‌رو می‌بینیم:

دقت کنید که در بازه‌ها باید $a<b$ باشد.

راستی بازهٔ باز (a,a) در واقع $\varnothing$ است و بازهٔ بسته $[a,a]$ مجموعهٔ تک‌عضوی $\{a\}$ است.

بازه	نوع	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
(a,b)	باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	a b
$[a,b)$	نیم‌باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$	a b
$(a,b]$	نیم‌باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$	a b
$[a,b]$	بسته	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$	a b
$(a,+\infty)$	باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$	a b
$[a,+\infty)$	نیم‌باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\}$	a b
$(-\infty,b)$	باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid x<b\}$	a b
$(-\infty,b]$	نیم‌باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\le b\}$	a b
$(-\infty,+\infty)$	باز	$\mathbb{R}$	a b

تست **در اعداد ۱، ۱/۱، $\sqrt{۱۰}$، ۲، $\sqrt{۲}$، $\frac{۳}{۲}$ و ۳ چندتا عضو بازهٔ $(۱,۳]$ هستند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۴ بازه از طرف ۱ باز است؛ پس شرط آن $۱<x\le ۳$ است و در نتیجه ۱ عضو آن نیست اما ۳ عضو بازه هست. ۲، $\sqrt{۲}$، $\frac{۳}{۲}$ و ۱/۱ نیز در این فاصله هستند اما $\sqrt{۱۰}$ عددی بیشتر از ۳ است و در بازه قرار ندارد.

بنابراین اعداد ۱/۱، ۲، $\sqrt{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ و ۳ در بازه هستند که می‌شود ۴تا.

تست چندتا از مجموعه‌های مقابل، زیرمجموعهٔ $(-۱,۲]$ هستند؟ $\{۱,۲\}$ ، $(-۱,۲]$ ، $(۰,۱)$ ، $\varnothing$ ، $\{\sqrt{۲},\frac{۳}{۲}\}$

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

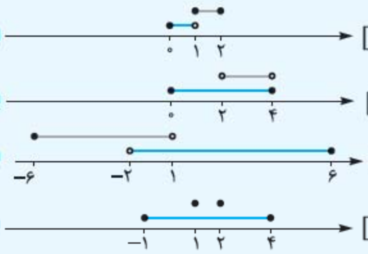
پاسخ گزینهٔ ۳ این بازه به شکل نیم‌باز ($\overset{-۱}{\circ}$———$\overset{۲}{\bullet}$) است، پس عدد ۲ را ندارد و $\{۱,۲\}$ و $(-۱,۲]$ زیرمجموعهٔ آن نیستند، اما $\frac{۳}{۲}$ و $\sqrt{۲}$ را دارد و کل بازهٔ $(۰,۱)$ در آن هست. $\varnothing$ هم زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست، پس از بین مجموعه‌های داده‌شده ۳تای آن‌ها قبول‌اند.

برای محاسبهٔ اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها، از نمایش آن‌ها روی محور استفاده می‌شود. مثال زیر را ببینید:

تست در کدام گزینه اعداد صحیح کم‌تری هست؟

۱) $[۰,۱)\cup[۱,۲]$　　۲) $[۰,۴]-(۲,۴)$　　۳) $(-۲,۶]\cap[-۶,۱)$　　۴) $[-۱,۴]-\{۱,۲\}$

پاسخ گزینهٔ ۳



۱) $[۰,۱)\cup[۱,۲]=[۰,۲] \xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} ۰,۱,۲ \Rightarrow$ ۳تا

۲) $[۰,۴]-(۲,۴)=[۰,۲]\cup\{۴\} \xrightarrow{\text{در } \mathbb{Z}} ۰,۱,۲,۴ \Rightarrow$ ۴تا

۳) $(-۲,۶]\cap[-۶,۱)=(-۲,۱) \xrightarrow{\text{عضو } \mathbb{Z}} -۱,۰ \Rightarrow$ ۲تا

۴) $[-۱,۴]-\{۱,۲\}=[-۱,۱)\cup(۱,۲)\cup(۲,۴] \xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} -۱,۰,۳,۴ \Rightarrow$ ۴تا

جواب آخر گزینه‌ها را هم ببینید:

(۴)　　(۳)　　(۲)　　(۱)

تست اگر $(x-۱,۳-۲x)\cup\{۲\}$ بازه‌ای نیم‌باز باشد، چند مقدار برای x وجود دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) هیچ　　۴) بی‌شمار

پاسخ گزینهٔ ۱ در چه صورت اجتماع بازه باز و مجموعهٔ تک‌عضوی، نیم‌باز می‌شود؟ فقط دو امکان وجود دارد:

۱) $(a,b)\cup\{a\}=[a,b)$　　۲) $(a,b)\cup\{b\}=(a,b]$

پس باید عدد ۲، مساوی عدد اول یا آخر بازه باشد: $x-۱=۲ \Rightarrow x=۳$　　$۳-۲x=۲ \Rightarrow ۱=۲x \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

حالا بازه را ببینید:

$x=۳ \Rightarrow (x-۱,۳-۲x)=(۲,-۳) \Rightarrow$ غ‌ق‌ق

$x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (x-۱,۳-۲x)=(-\frac{۱}{۲},۲) \Rightarrow$ ق‌ق

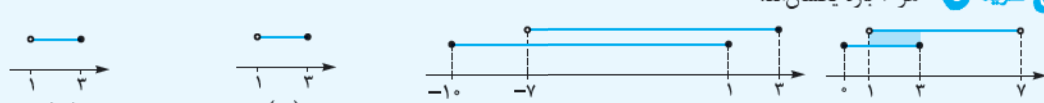
پس فقط یک مقدار برای x داریم.

حواستان هست که همیشه باید در بازهٔ (a,b) داشته باشیم $a<b$. پس بازه به شکل $(۲,-۳)$ بی‌معنی است.

تست در بین مجموعه‌های مقابل، چند بازهٔ مختلف وجود دارد؟ $[۰,۳]\cap(۱,۷)$ ، $(-۷,۳]-[-۱۰,۱]$ ، $[۱,۳]-\{۱\}$ ، $(۱,۳)\cup\{۳\}$

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۱ هر ۴ بازه یکسان‌اند!



(الف)　　(ب)　　(پ)　　(ت)

$[۰,۳]\cap(۱,۷)=(۱,۳]$　　$(-۷,۳]-[-۱۰,۱]=(۱,۳]$　　$[۱,۳]-\{۱\}=(۱,۳]$　　$(۱,۳)\cup\{۳\}=(۱,۳]$

اگر فرمول دوست دارید، این‌ها هم هست:

$[a,b]\cap[c,d]=[$عدد بیشتر بین c و a ، عدد کم‌تر بین b و $d]$

به شرطی که بازه‌ها اشتراک داشته باشند.

$[a,b]\cup[c,d]=[$عدد کم‌تر بین c و a ، عدد بیشتر بین b و $d]$

تست اگر $A=(۲,۳m+۱)$ ، $B=[n-۲,۶)$ و اجتماع آن‌ها $A\cup B=[-۱,۶)$ باشد، $m\times n$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵}{۳}$　　۲) ۱　　۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۷}{۴}$

پاسخ گزینهٔ ۴ اجتماع دو بازه از طرف چپ بسته است، پس حتماً اجتماع از اعضای بازهٔ B شروع شده است و $n-۲=-۱$ است، پس $n=۱$.

هم‌چنین در انتهای بازه، اجتماع عدد ۶ به صورت باز است، پس انتهای بازهٔ A یعنی $۳m+۱$ از ۶ بیشتر نیست.

$$\underbrace{۲<۳m+۱}_{\text{به‌خاطر شرط بازهٔ A}} \le ۶$$

$$۱<۳m<۵ \Rightarrow \frac{۱}{۳}<m\le\frac{۵}{۳}$$

چون n برابر ۱ بود، پس $m\times n$ عددی بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۵}{۳}$ است و خود $\frac{۵}{۳}$ هم می‌تواند باشد، اما $\frac{۷}{۴}$ نیست. ($\frac{۷}{۴}$ از $\frac{۵}{۳}$ بیشتر است.)

تست کدام‌یک بازه است؟

۱) $(-۵,۱)-\{۰\}$ ۲) $(-۲,۳)-\{۱,۲\}$ ۳) $[-۲,۲]-(۱,۲)$ ۴) $(-۱,۴]-\{۷,۴\}$

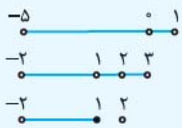
پاسخ گزینهٔ ۴

۱) اجتماع دو بازه است:

۲) اجتماع ۳ بازه است:

۳) یک بازه و یک مجموعهٔ تک‌عضوی است (در واقع ۲تا بازه).

اما ۴) یک بازه است:



$(-۱,۴]-\{۷,۴\}=(-۱,۴)$

بعضی وقت‌ها سروته بازه برحسب یک متغیر هستند. کار سختی نداریم، فقط باید خودمان بازه‌ها را مشخص کنیم.

تست اگر A_i بازهٔ $((-۱)^i i, i^۲)$ باشد. حاصل $(A_۱\cup A_۳)-(A_۳\cap A_۲)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

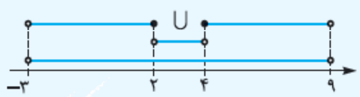
پاسخ گزینهٔ ۲

$i=۱ \Rightarrow A_۱=((-۱)^۱ ۱,۱)=(-۱,۱)$ $\quad i=۲ \Rightarrow A_۲=((-۱)^۲\times۲,۴)=(۲,۴)$ $\quad i=۳ \Rightarrow A_۳=((-۱)^۳\times۳,۳^۲)=(-۳,۹)$

پس $A_۱\cup A_۳=(-۳,۹)$ و $A_۳\cap A_۲=(۲,۴)$ و بنابراین:

$(A_۱\cup A_۳)-(A_۳\cap A_۲)=(-۳,۹)-(۲,۴)=(-۳,۲]\cup[۴,۹)$

به شکل هم توجه کنید:



در $(-۳,۲]$ اعداد صحیح ±۲ و ±۱ و صفر را داریم (پنج عدد صحیح) و در $[۴,۹)$ اعداد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ را داریم (پنج عدد صحیح) یعنی روی هم ۱۰ عضو صحیح دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۸- در میان اعداد $\sqrt{۲}$، ۱/۴۱۴۲، ۱/۴۱۴، ۱/۴۱ و ۱/۴ به ترتیب چند عدد گویا و چند عدد گنگ هست؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۲، ۳ ۲) ۳، ۲ ۳) ۴، ۱ ۴) ۱، ۴

۱۹- کدام رابطه درست است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Q}$ ۲) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$

۲۰- کدام مجموعه تهی نیست؟

۱) $\mathbb{W}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}'$ ۳) $\{x\in\mathbb{N}\,|\,-۲\le x\le ۲\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۲<x<۳\}$

۲۱- چندتا از تساوی‌های مقابل نادرست است؟ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$, $\mathbb{W}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{N}$, $\mathbb{W}-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'$, $\mathbb{Z}\cap\mathbb{W}=\mathbb{N}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}'$ ۲) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{Q}'$ ۳) $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'\not\subseteq\mathbb{Q}'$ ۴) $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{Q}$

۲۳- چندتا از عبارت‌های مقابل درست است؟ $\{۰,۱\}\subseteq[-۱,۲)$, $[-۱,۲]\subseteq(-۱,۲)$, $۱\in\{۰,۲\}$, $-۲\subseteq\{-۲,۰\}$, $\frac{۴}{۳}\in[\frac{۱}{۲},۲)$ *(کتاب درسی)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۲۴- اگر $A=(-\frac{۷}{۳},\sqrt{۶})$ و $B=(-\frac{۵}{۳},\frac{۴}{۳}]$، آن‌گاه در $A-B$ چند عدد صحیح وجود دارد؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۵- کدام بازه، بسته است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $(۱,۳)-(۱,۲)$ ۲) $(۱,+\infty)\cup(-\infty,۲)$ ۳) $[۱,۳)-(۲,۳)$ ۴) $(-\infty,۲)\cap(-۳,+\infty)$

۲۶- حاصل کدام گزینه یک بازه نیست؟ *(کتاب درسی)*

۱) $(-۳,۱)\cup(-۲,۲)$ ۲) $(-۴,-۲)-(-۳,-۲)$ ۳) $(۱,۵)-(۳,۴)$ ۴) $(۱,۵)\cap(۳,۷)$

۲۷- اشتراک دو مجموعهٔ $[-۵,۴)$ و $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ چندعضوی است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۸- حاصل $(-۲,۳)\cup[(\frac{۴}{۳},۵)\cap(۳,۱۰)]$ کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $(-۲,۱۰)$ ۲) $(-۲,۵)$ ۳) $(-۲,۵)-\{۳\}$ ۴) $[-۲,۵)$

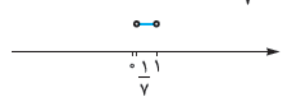
۲۹- اگر $A=(-۳,۱]$ ، $B=(۰,۴)$ و $C=[-۲,۲]$ ، آن‌گاه $(A\cup C)-B$ دارای چند عضو صحیح است؟ *(کتاب درسی)*

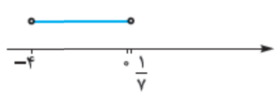
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

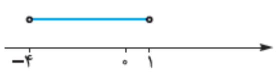
۳۰- اگر $A=\{x|۱<\frac{۲x+۱}{۳}\le ۵,x\in\mathbb{Q}\}$ ، $B=\{x|۱<\frac{x+۵}{۷}<۳,x\in\mathbb{N}\}$ و $C=(-۲,۸)-(-۳,۴)$، مجموعهٔ $A\cap B$ چندعضومشترک‌بامجموعهٔ Cدارد؟

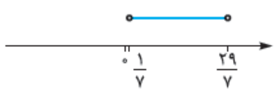
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۱- اگر $(b,۲)\cup(۱,a)=(-۲,\frac{۱۵}{۷})$ باشد. نمایش مجموعهٔ $(a-۲,b+۳)\cap(b-۲,a+۲)$ روی محور اعداد حقیقی به کدام صورت است؟

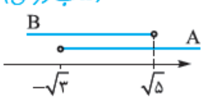
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۲- اگر $C=(-۲,۲]$ و بازه‌های A و B به شکل زیر روی محور نشان داده شوند. حاصل $(A\cap B)-C$ چگونه است؟ *(کتاب درسی)*



۱) $\varnothing$ ۲) شامل عدد صحیح نیست.

۳) فقط یک عدد صحیح دارد. ۴) فقط دو عدد صحیح دارد.

۳۳- اگر $(-\infty,۲m-۱]\cup[m+۲,+\infty)=\mathbb{R}$. حدود m کدام است؟

۱) $m\le ۱$ ۲) $m\ge ۱$ ۳) $m\le ۳$ ۴) $m\ge ۳$

۳۴- اگر عدد حقیقی x در بازهٔ $[۲x-۱,۳x+۲)$ قرار گیرد. چند مقدار صحیح برای آن وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵- اگر $A=(b-۱,۲b+۱)$ ، $۳\in A$ و $۲\notin A$ نباشد. محدودهٔ قابل قبول برای b کدام بازه است؟

۱) $(۲,۴)$ ۲) $[۲,۴)$ ۳) $[۳,۴)$ ۴) $(۳,۴)$

۳۶- اجتماع بازه‌های $B=(a,۵)$ و $A=(-۲,b)$ برابر $(-۳,۶)$ است. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $ab=-۱۸$ ۲) $ab=۱۸$ ۳) $ab=-۱۵$ ۴) $ab=۱۵$

۳۷- اگر $(-\infty,m-۲]\cap[۲m+۱,+\infty)=\{a\}$. مقدار $a+m$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۵ ۴) -۸

۳۸- اگر $(-۱,۲]\cap(a,b)=(a+۱,a+۳)$. $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۲

۳۹- اگر n عددی طبیعی و دو مجموعهٔ $A=[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$ و $B=(n-۳,n+۱)$ دارای اشتراک ناتهی باشند. جمع مقادیر n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱۵

۴۰- اگر هیچ‌یک از مجموعه‌های $A\cap(-۱,۲)$ و $A-(-۱,۲)$ تهی نباشند. کدام بازه به عنوان A مورد قبول است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۴۱- به ازای چند مقدار صحیح m، بازهٔ $(۱۰,m)$ شامل دقیقاً سه عدد مضرب ۴ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۲- اگر $(-\infty,۴]\cap(۳-a,+\infty)=\varnothing$ ، بازهٔ $(-۱,a+۵)$ حداکثر شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۳- اگر $(-۲,۲)\subseteq(۴a-۲,a+۱)$ ، عدد $\frac{۵}{۲}a+۱$ حتماً متعلق به کدام بازه است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $[۱,۴]$ ۳) $[-۱,۲]$ ۴) $[۰,۲]$

۴۴- اگر $-۱<a<۰$ باشد، مجموعهٔ $(a,-\frac{۱}{a})\cap(\frac{۱}{a},-a)$ برابر با کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{a},-\frac{۱}{a})$ ۲) $(a,-a)$ ۳) $(a,-\frac{۱}{a})$ ۴) $(-a,-\frac{۱}{a})$

۴۵- اگر $[3a-1, 4] = (2, 4) \cap [a+2, 5]$ ،$[-2, 4]$. کدام‌یک از اعداد زیر عضو بازهٔ $(a-2, a)$ است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۴

۴۶- به ازای چند n طبیعی، $(\frac{2}{n+1}, \frac{5}{2n+1})$ نمایش یک بازه نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۷- اگر $A_i = (-i, i)$ ، حاصل $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ کدام است؟

۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-2, 2)$ ۳) $(-3, 3)$ ۴) $(-1, 2)$

۴۸- اگر $A_n = (-n, 1]$ ، مجموعهٔ $A_4 - A_1$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۹- اگر $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ و $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ ۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ ۳) $[-1, 1]$ ۴) $\varnothing$

۵۰- اگر n عدد طبیعی و A_n بازهٔ $((-1)^n n, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$ تعلق دارد؟ $(\bigcup_{n=1}^{4} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۵۱- اگر $A_n = [n-1, n+1]$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $\bigcup_{n=1}^{4} A_n - \bigcap_{n=1}^{3} A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $\{x : 1 \le x \le 5\}$ ۲) $\{x : 0 \le x \le 5\}$ ۳) $\{x : 0 \le x \le 5, x \neq 2\}$ ۴) $\{x : 1 \le x \le 5, x \neq 2\}$

درس ۳

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد اعضای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

اگر $n(A) = 0$ باشد، A تهی است.

اگر $n(A) = k$ باشد، مجموعهٔ A را متناهی (kعضوی) می‌نامیم. گاهی به جای «متناهی» می‌گوییم «باپایان».

اگر $n(A)$ از هر عددی بزرگ‌تر باشد، آن را نامتناهی می‌نامیم.

تعداد عضوهای یک مجموعهٔ متناهی عددی حسابی است.

نمونه‌هایی از مجموعه‌های نامتناهی ببینید:

۱) $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'$ نامتناهی‌اند.

۲) تمام بازه‌های اعداد حقیقی مثلاً $[1, 2)$ یا $(-\infty, 0)$ نامتناهی‌اند.

۳) مجموعه شکل‌های هندسی مختلف (مثلاً خط‌ها با شیب ۲ یا دایره‌ها به مرکز مبدأ) معمولاً نامتناهی‌اند.

کتاب درسی تأکید دارد که مجموعهٔ درختان، اتم‌ها، مولکول‌ها، انسان‌ها و ... همیشه متناهی‌اند. با این‌که تعداد خیلی زیادی عضو دارند، اما با داشتن وقت کافی می‌توان اعضای آن‌ها را شمرد و به پایان رسید.

تست کدام متناهی است؟

۱) اعداد صحیح بازهٔ $(-1, 4)$ ۲) اعداد گویای بازهٔ $(-1, 4)$ ۳) اعداد گنگ در بازهٔ $(-1, 4)$ ۴) اعداد حقیقی بازهٔ $(-1, 4)$

پاسخ **گزینهٔ ۱** گفتیم که بازه‌ها همیشه نامتناهی‌اند. حالا به خاطر بسپارید که بین هر دو عدد حقیقی مختلف، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد. پس ۲، ۳ و ۴ نامتناهی‌اند اما ۱ متناهی و فقط شامل چهار عضو ۰، ۱، ۲ و ۳ است.

این جدول را ببینید:

	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$B - A$
A و B متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
A و B هر دو نامتناهی	نامتناهی	—	—	—
A متناهی و B نامتناهی	نامتناهی	متناهی	متناهی	نامتناهی

این‌طوری هم بگوییم: اشتراک یک مجموعهٔ متناهی با هر مجموعهٔ دیگری قطعاً متناهی است. اگر A متناهی باشد، $A - B$ قطعاً متناهی است.

تست اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ ، $B=[۱,۳]$ ، $C\subseteq A$ ، $D\subseteq B$ و $B\subseteq E$ باشد، چندتا از مجموعه‌های C، D و E قطعاً متناهی‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

پاسخ گزینهٔ ۱ C زیرمجموعهٔ A است و چون A متناهی است C هم حتماً متناهی است.

D زیرمجموعهٔ بازهٔ B است، می‌تواند متناهی باشد، مثلاً $D=\{۱\}$ یا نامتناهی باشد، مثلاً $D=(۱,۲)$.

E زیرمجموعهٔ B را دارد، پس تمام B را در خودش دارد و از یک مجموعهٔ نامتناهی بیشتر است! پس نامتناهی است.

خلاصه فقط یکی از مجموعه‌ها یعنی E قطعاً نامتناهی شد و فقط مجموعهٔ C قطعاً متناهی شد.

نتیجهٔ این مثال را به خاطر بسپاریم:

۱ هر زیرمجموعه از یک مجموعهٔ متناهی، متناهی است.

۲ اگر مجموعه‌ای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی دارد، حتماً نامتناهی است.

۳ زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ نامتناهی، می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

تست کدام وجود ندارد؟

۱) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B که $A-B$ یک‌عضوی و $B-A$ دوعضوی باشد.

۲) سه زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ که هر سه نامتناهی‌اند و دوبه‌دو اشتراک ندارند.

۳) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از $\mathbb{Z}$ که یکی زیرمجموعهٔ دیگری است.

۴) مجموعهٔ متناهی که شامل تمام اعداد گویای بین $\frac{۱}{۷۰}$ و $\frac{۱}{۷۱}$ باشد.

پاسخ گزینهٔ ۴ همین اول بگوییم که اعداد گویای بین $\frac{۱}{۷۱}$ و $\frac{۱}{۷۰}$ نامتناهی است. اما بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ دو مجموعهٔ $A=\mathbb{N}\cup\{-۱\}$ و $B=\mathbb{N}\cup\{-۲,-۳\}$ را در نظر بگیرید. $A-B=\{-۱\}$ و $B-A=\{-۲,-۳\}$ است؛ پس وجود دارد.

۲ مجموعه‌های $\{۱,۴,۷,...\}$، $\{۲,۵,۸,...\}$ و $\{۳,۶,۹,...\}$ را در نظر بگیرید که هر سه نامتناهی‌اند و اشتراک هم ندارند. یک مثال دیگر مجموعه‌های اعداد طبیعی با رقم یکان ۱، رقم یکان ۲ و رقم یکان ۳ هستند.

۳ $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ را ببینید. هر دو زیرمجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند و $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}$ است.

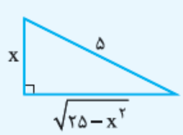
مثال دیگر می‌تواند مجموعهٔ اعداد زوج و اعداد مضرب ۶ باشد. (کدام زیرمجموعهٔ دیگری است؟!)

تست کدام متناهی است؟

۱) مجموعهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه با وتر ۵ ۲) مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت ۲

۳) مجموعهٔ اعداد ۸رقمی ۴) مجموعهٔ دایره‌ها به مرکز $(۱,۲)$

پاسخ گزینهٔ ۳ ۱ نامتناهی است. این مثلث‌ها به شکل روبه‌رو هستند:



و x می‌تواند هر عدد حقیقی از صفر تا ۵ باشد.

۲ نامتناهی است. چون این مجموعه به صورت $\{\frac{۲}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ بیان می‌شود و بی‌شمار عضو دارد.

۳ مجموعهٔ اعداد ۸رقمی از ۱۰۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹۹۹، محدود است. بعداً خواهید دید که تعداد آن‌ها ۹×۱۰^۷ تا است.

۴ دایره‌ها با مرکز $(۱,۲)$ می‌توانند شعاع‌های مختلف در فاصلهٔ $(۰,+\infty)$ داشته باشند؛ پس نامتناهی است!

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۲- کدام مجموعه متناهی است؟ (کتاب درسی)

۱) اعداد صحیح کم‌تر از ۱۰۰ ۲) اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰

۳) اعداد گویای بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ ۴) اعداد حقیقی بین ۱ و ۲

۵۳- کدام مجموعه نامتناهی است؟ (کتاب درسی)

۱) اتم‌های کرهٔ زمین ۲) درختان جنگل‌های ایران ۳) حشرات ساکن زمین ۴) تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز $(۱,۲)$

۵۴- کدام مجموعه متناهی است؟ (کتاب درسی)

۱) مثلث‌ها با مساحت ۶ ۲) مربع‌ها با مساحت ۶ و یک رأس روی مبدأ

۳) خط‌ها با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ ۴) خط‌های گذرنده از مبدأ

۵۵- کدام مجموعه غیرتهی و باپایان (متناهی) است؟ *(کتاب درسی)*

۱) مضارب ۶ ۲) مضارب مشترک ۷ و ۶ ۳) مقسوم‌علیه‌های مشترک ۷ و ۶ ۴) مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱

۵۶- تعداد اعضای کدام مجموعه کم‌تر است؟ *(کتاب درسی)*

۱) اعداد اول کم‌تر از ۲۰ ۲) اعداد طبیعی مربع کامل کم‌تر از ۷۰ ۳) مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶ ۴) کسرهای بین صفر و ۱ با مخرج ۷

۵۷- اگر $k \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه مجموعهٔ اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

۱) $۲k-۵$ ۲) $۲k+۶$ ۳) $۳k-۱$ ۴) $۳k+۱$

۵۸- کدام مجموعه دارای بزرگ‌ترین عضو است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $(۲,+\infty)$ ۳) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq ۴\}$ ۴) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < ۳\}$

۵۹- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A=\{x \mid x=۲n-۱, n\in\mathbb{N}\}$ ۲) $B=\{x \mid x=\frac{۱}{n}, n\in\mathbb{N}\}$ ۳) $C=\{x \mid x=\frac{(-۱)^n}{۲}, n\in\mathbb{N}\}$ ۴) $D=\{x \mid x=\frac{(-۱)^n}{n^۲}, n\in\mathbb{N}\}$

۶۰- کدام جمله نادرست است؟ *(کتاب درسی)*

۱) بین هر دو عدد طبیعی بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.
۲) بین هر دو عدد گنگ بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.
۳) بین هر دو عدد گنگ بی‌نهایت عدد صحیح وجود دارد.
۴) بین هر دو عدد صحیح بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

۶۱- مجموعهٔ A متناهی و مجموعهٔ B نامتناهی، دو زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ هستند. چندتا از مجموعه‌های زیر قطعاً نامتناهی‌اند؟

الف) $A \cup B$ ب) $A \cap B$ پ) $A-B$ ت) $B-A$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۶۲- کدام جمله درست است؟ ($\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع است.) *(کتاب درسی)*

۱) اگر A نامتناهی باشد، A' حتماً متناهی است.
۲) اگر $A \subseteq B$ و مجموعهٔ B نامتناهی باشد، A هم نامتناهی است.
۳) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، $A \cup B$ برابر با $\mathbb{N}$ است.
۴) اگر $A \subseteq B$ و مجموعهٔ A نامتناهی باشد، آن‌گاه B هم نامتناهی است.

۶۳- کدام جمله نادرست است؟

۱) اگر مجموعه‌های A و B هر دو نامتناهی باشند، اشتراک آن‌ها ممکن است متناهی باشد.
۲) می‌توان سه زیرمجموعهٔ نامتناهی از اعداد طبیعی یافت که هیچ‌کدام با هم اشتراک نداشته باشند.
۳) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، ممکن است B متناهی باشد.
۴) اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، حداقل یکی از A یا B نامتناهی بوده است.

۶۴- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و B مجموعهٔ اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A-(A \cup B)$

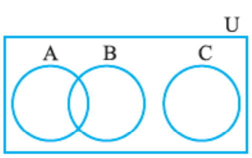
۶۵- اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح مضرب ۳ و B مجموعهٔ اعداد صحیح با قدرمطلق کم‌تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ باپایان است؟

۱) $A \cap B'$ ۲) $A' \cup B$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

۶۶- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}$ ۲) $(\mathbb{Q}-\mathbb{R})\cap(\mathbb{Q}'-\mathbb{Z})$ ۳) $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})\cap(\mathbb{Q}-\mathbb{Q}')$ ۴) $(\mathbb{N}-\mathbb{Q})'\cap\mathbb{Z}'$

درس ۴
مجموعهٔ مرجع و متمم

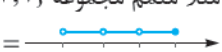


مجموعهٔ مرجع، مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های مسئله زیرمجموعهٔ آن باشند. اسمش را مجموعهٔ جهانی یا عام می‌گذاریم و با U نشان می‌دهیم. این شکل را ببینید:

می‌گوید A,B,C سه زیرمجموعه از مرجع هستند و C با A و با B اشتراک ندارد.

فایدهٔ اصلی مجموعهٔ مرجع، تعریف متمم مجموعهٔ A است. اگر $A \subseteq U$ باشد، $U-A$ را A' یا A^c می‌نامیم که متمم مجموعهٔ A است. احتمالاً این‌طوری راحت‌تر هستید که متمم یک مجموعه، شامل اعضایی از U است که آن مجموعه ندارد. به زبان ریاضی: $A'=\{x \in U \mid x \notin A\}$

مثلاً متمم مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ را نسبت به مرجع‌های مختلف می‌نویسیم:

$U=[۱,۴] \Rightarrow A'=[۱,۴]-\{۱,۲,۳\}=$ 

$U=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\} \Rightarrow A'=U-A=\{۰,۴,۵\}$

$U=\{۲,۴,۵,۶\} \Rightarrow$ A' وجود ندارد، چون $A \not\subset U$ نیست.

$U=\mathbb{N} \Rightarrow A'=\mathbb{N}-\{۱,۲,۳\}=\{۴,۵,۶,...\}$

خاصیت‌های مجموعهٔ متمم را با هم ببینیم:

۱) $(A')' = A$ ، $\varnothing' = U$ ، $U' = \varnothing$

۲) اگر $A \subseteq B$ باشد، $B' \subseteq A'$ است.

۳) متمم $A \cup B$ می‌شود $A' \cap B'$؛ یعنی تک‌تک مجموعه‌ها متمم می‌شوند و اجتماع به اشتراک تبدیل می‌شود.

۴) متمم $A \cap B$ می‌شود $A' \cup B'$؛ باز هم تک‌تک مجموعه‌ها متمم شده و علامت برعکس می‌شود.

اسم ۳ و ۴ قوانین دمورگان است.

۵) $A - B$ را به صورت $A \cap B'$ هم می‌توان نوشت (یادتان هست که $A - B$ یعنی در A هست و در B نیست).

۶) $B - A$ همان $B \cap A'$ است.

۷) A و A' اشتراکی ندارند $A \cap A' = \varnothing$ و اجتماعشان می‌شود $A \cup A' = U$.

۸) $A' - B'$ می‌شود $B - A$. خودتان بگید چرا!

مثال اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، متمم مجموعه‌های زیر را نشان دهید.

الف) $\mathbb{W}$ ب) $(-\infty, -۲]$ پ) $(۱, +\infty)$

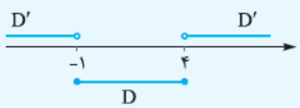
ت) $[-۱, ۴]$ ث) $\{-۲, ۵\}$

پاسخ الف) $\mathbb{W}'$ شامل اعداد حقیقی و غیرحسابی است:

ب) متمم بازهٔ نیم‌باز $(-\infty, -۲]$ به صورت $(-۲, +\infty)$ است:

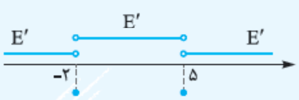
پ) متمم $(۱, +\infty)$ به صورت $(-\infty, ۱]$ بیان می‌شود:

ت) متمم بازهٔ $[-۱, ۴]$ به صورت اجتماعی از دو بازه است:



$D' = (-\infty, -۱) \cup (۴, +\infty)$

ث) متمم مجموعهٔ $\{-۲, ۵\}$ به صورت اجتماع ۳ بازه است:



$E' = (-\infty, -۲) \cup (-۲, ۵) \cup (۵, +\infty)$

مثال اگر $U = \{۰, \pm۱, \pm۲, ۳, ۴\}$ مجموعهٔ مرجع و $A = \{x \mid x^۲ \leq ۵\}$ و $B = \{x \mid ۱ \leq x \leq ۴\}$ دو زیرمجموعه از U باشند، مجموعه‌های A ، B ، A' و B' را با اعضا مشخص کرده و درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $(A' \cap B)' = B' \cup A$ ب) $A' - B' = (A - B)'$ پ) $A - B = A \cap B'$

پاسخ در مجموعهٔ A باید اعدادی باشند که مربع آن‌ها از ۵ کم‌تر یا مساوی است؛ پس $A = \{۰, \pm۱, \pm۲\}$. در مجموعهٔ B هم اعداد بین ۱ و ۴ و خود آن‌ها را داریم؛ پس $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$.

حالا با توجه به مجموعهٔ مرجع: $B' = U - B = \{۰, -۱, -۲\}$ $A' = U - A = \{۳, ۴\}$

و می‌توانیم روابط را کنترل کنیم:

الف) طرف چپ $= (A' \cap B)' = (\{۳, ۴\} \cap \{۱, ۲, ۳, ۴\})' = (\{۳, ۴\})' = \{۰, \pm۱, \pm۲\}$

طرف راست $= B' \cup A = \{۰, -۱, -۲\} \cup \{۰, \pm۱, \pm۲\} = \{۰, \pm۱, \pm۲\}$

دو طرف برابر شدند، پس رابطهٔ «الف» در این مسئله درست است. (همیشه درست است!)

ب) طرف چپ $= A' - B' = \{۳, ۴\} - \{۰, -۱, -۲\} = \{۳, ۴\}$

طرف راست $= (A - B)' = (\{۰, \pm۱, \pm۲\} - \{۱, ۲, ۳, ۴\})' = (\{۰, -۱, -۲\})' = (\{۰, -۱, -۲\})' = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

دو طرف مساوی نیستند پس این رابطه درست نیست.

پ) طرف چپ $= A - B = \{۰, -۱, -۲\}$

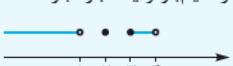
طرف راست $= A \cap B' = \{۰, \pm۱, \pm۲\} \cap \{۰, -۱, -۲\} = \{۰, -۱, -۲\}$

دو طرف برابرند. پس رابطهٔ «پ» در این مجموعه‌ها درست است. (همواره درست است.)

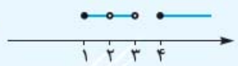
تست اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $(-\infty, ۱) \cup [۳, ۴) \cup \{۲\}$ به کدام شکل است؟

۱) دو بازهٔ نیم‌باز ۲) یک بازهٔ نیم‌باز و یک بازهٔ باز ۳) دو بازهٔ باز و یک بازهٔ نیم‌باز ۴) دو بازهٔ نیم‌باز و یک بازهٔ باز

پاسخ گزینهٔ ۴ خود این مجموعه روی محور به شکل روبه‌رو است:



پس متمم آن می‌شود:



که به صورت $[1,2)\cup(2,3)\cup[4,+\infty)$ بیان می‌شود و از دو بازهٔ نیم‌باز و یک بازهٔ باز ساخته شده است.

تست اگر $U=\{0,\pm1,\pm2,3\}$ ، $A=\{1,0,-1\}$ و $B=\{0,1,2,3\}$. حاصل $((A'-B)'\cup A)'$ کدام است؟

۱) $\{-2\}$ ۲) $\{-1\}$ ۳) $\{-3\}$ ۴) $\{\}$

پاسخ **گزینهٔ ۱** **راه اول** سعی می‌کنیم با خواص متمم و قواعدی که در بالا دیدیم عبارت را ساده کنیم.

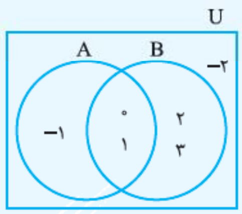
$$((A'-B)\cup A)' \underset{\text{تبدیل تفاضل به اشتراک}}{=} ((A'\cap B')'\cup A)' \underset{\text{دمورگان}}{=} (A'\cap B')\cap A' = A'\cap B' \underset{\text{دمورگان}}{=} (A\cup B)'$$

پس جواب متمم $A\cup B$ است. $A\cup B$ می‌شود $\{0,1,2,3,-1\}$ و متمم آن $\{-2\}$ است.

راه دوم مجموعه‌ها را بنویسیم: $A=\{1,0,-1\} \Rightarrow A'=\{2,-2,3\} \Rightarrow A'-B=\{2,-2,3\}-\{0,1,2,3\}=\{-2\} \xrightarrow{\text{متمم}} (A'-B)'=\{0,\pm1,2,3\}$

$$\Rightarrow (A'-B)'\cup A=\{0,\pm1,2,3\}\cup\{0,1,-1\}=\{0,\pm1,2,3\} \xrightarrow{\text{متمم}} ((A'-B)'\cup A)'=\{-2\}$$

این را هم ببینید:



اگر U متناهی باشد A و A' متناهی‌اند. اگر U نامتناهی باشد، A و A' هر دو متناهی نیستند! یا یکی نامتناهی است یا هر دو. مثلاً با مجموعهٔ مرجع $\mathbb{N}$، متمم هر مجموعهٔ متناهی، نامتناهی است اما متمم یک مجموعهٔ نامتناهی می‌تواند متناهی باشد یا نباشد. مثلاً متمم $\{3,4,5,\ldots\}$ می‌شود $\{1,2\}$ و متمم $\{1,3,5,7,\ldots\}$ می‌شود $\{2,4,6,\ldots\}$. دیدید؟!

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۷- در مورد کدام دو مجموعهٔ زیر، متمم A نسبت به B قابل تعریف است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $B=\{1,4\}\ ,\ A=\{1,2,3,4\}$ ۲) $B=\{1,2,3,4\}\ ,\ A=\{1,5\}$

۳) $B=\{1,5,6,9\}\ ,\ A=\{5,6\}$ ۴) $B=\{2,5,7,9,10\}\ ,\ A=\{1,3,5,7\}$

۶۸- فرض کنیم $U=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,4\}$. کدام عبارت نادرست است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $B'-A'=\{1,3\}$ ۲) $A'\cap B'=(A\cup B)'$ ۳) $A-(A\cap B)=\{1,3\}$ ۴) $A'\cup B'=\{5,2\}$

۶۹- اگر $U=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$ مجموعهٔ مرجع و $A=\{1,3,7,8\}$ ، $B=\{3,6\}$ و $C=\{5,9\}$ باشد، مجموعهٔ $(B'\cap C')\cap A$ چند عضو دارد؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۰- اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $A=\{2x+3 \mid -1\le x<7\}$ کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $(-\infty,1)\cup(17,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1]\cup[17,+\infty)$ ۳) $(-\infty,1)\cup[17,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)\cup(17,+\infty)$

۷۱- اگر $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $A=\{-1,-2,-3\}$ کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $\{\ldots,-6,-5,-4\}$ ۲) $\{\ldots,-5,-4,0,1,2,\ldots\}$ ۳) $\{0,1,2,\ldots\}$ ۴) $\{\ldots,-5,-4,1,2,\ldots\}$

۷۲- متمم مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ نسبت به مجموعهٔ مرجع $[\frac{1}{2},4]$ از اجتماع حداقل چند بازه ساخته شده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳- اگر $A'=[-2,3]$ و $B=(-1,5]$ و مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌های $A'\cup B$ و $A\cap B$ چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۷۴- اگر $U=\{2,+\infty)$ مجموعهٔ مرجع و $A=\{x \mid x\le 9, x\in U\}$ ، $B=(3,5]$ و $C=\{x \mid x\ge 7\}$ باشد، حاصل $(A-C')\cap B'$ کدام است؟

۱) $(7,9]$ ۲) $[7,9]$ ۳) $(5,7]$ ۴) $\varnothing$

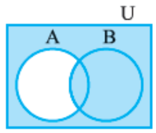
۷۵- اگر $U=\{0,\pm1,\pm2,3,4\}$ مجموعهٔ مرجع و $A=\{x \mid x^2\le 5\}$ و $B=\{x \mid \sqrt{5-\sqrt{x}}\in\mathbb{W}\}$. آن‌گاه مجموعهٔ $A'-(B-A)$ چندعضوی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۶- کدام نادرست است؟

۱) $A\subset B \Leftrightarrow B'\subset A'$ ۲) $A-B=\varnothing \Rightarrow A\subset B$ ۳) $A\cap C=B\cap C \Rightarrow A=B$ ۴) $A\cap B=A \Rightarrow A\subset B$

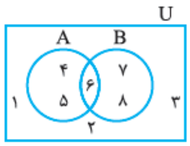
۷۷- نمودار ون مقابل مربوط به کدام مجموعه است؟



۱) $A'\cap B$ ۲) $A'\cup B$

۳) A' ۴) $A'\cup B'$

۷۸- با توجه به نمودار مقابل، $A'\cap(B-A)'$ کدام است؟



۱) $\{۱,۲,۳\}$ ۲) $\{۱,۲,۳,۶\}$

۳) $\{۱,۲,۳,۷,۸\}$ ۴) $\{۴,۵,۷,۸\}$

۷۹- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $(A\cap B')-(B-A)$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$

۸۰- متمم مجموعهٔ $(B-A)'-A$، کدام است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) A ۴) B

۸۱- مجموعهٔ $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'$ برابر کدام است؟

۱) $B-A$ ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) A'

۸۲- متمم مجموعهٔ $[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'$ کدام است؟

۱) A ۲) B' ۳) $A'\cup B'$ ۴) $\varnothing$

۸۳- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، مجموعهٔ $[A\cup(A\cap B)]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)]$ برابر کدام است؟

۱) $A'-B'$ ۲) $(A-B)'$ ۳) A' ۴) $\varnothing$

۸۴- متمم مجموعهٔ $C\cup A'\cup B'$، نسبت به مجموعهٔ جهانی با کدام مجموعه برابر نیست؟

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)$ ۳) $A\cap(B-C)$ ۴) $(A\cap B)-C$

۸۵- اگر $x\in(B-A)\cap(C\cup D)$، کدام گزاره می‌تواند نادرست باشد؟

۱) $x\notin A$ ۲) $x\in B$ ۳) $x\in D$ ۴) $x\notin C'\cap D'$

۸۶- اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع باشد، چندتا از عبارت‌های زیر درست است؟ (کتاب درسی)

الف) اگر مجموعهٔ A نامتناهی باشد، A' متناهی است. ب) اگر مجموعهٔ B متناهی باشد، B' نامتناهی است.

پ) اگر مجموعهٔ A نامتناهی و مجموعهٔ B متناهی باشد، مجموعهٔ $A'\cup B'$ نامتناهی است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۷- اگر مجموعهٔ A نامتناهی باشد و هر عضو B، عضوی از A نیز باشد، کدام دو مجموعهٔ زیر اشتراکی ندارند؟

۱) $A\cup B'$, $A\cap B$ ۲) B' , $A-B$ ۳) B' , A' ۴) B , $A'\cup B'$

۸۸- اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع و $A_1=\{۱\}$، $A_2=\{۲,۳\}$، $A_3=\{۴,۵,۶\}$ و $A_4=\{۷,۸,۹,۱۰\}$، مجموعهٔ A'_{10} چند عضو دورقمی و مضرب ۵ دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

درس ۵

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، تعداد اعضای $A\cup B$ معمولاً از جمع تعداد عضوهای A و B کم‌تر است! چون عضوهای مشترک A و B را در $A\cup B$ یک بار می‌نویسیم!

با کمی دقت داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

پس برای دو مجموعهٔ جدا از هم (که اشتراک ندارند) می‌توان نوشت:

$$n(A\cap B)=0 \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

در صورت سؤال $A\cup B$ به صورت «اعضایی که در A یا B هستند» یا «عضو حداقل یکی از دو مجموعه» می‌آید.

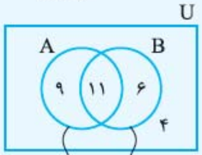
تست در یک کلاس ۳۰ نفری ۱۷ نفر در فیزیک، ۲۰ نفر در ریاضی و ۱۱ نفر در هر دو درس به کلاس تقویتی می‌روند. چند نفر در حداقل یکی از دو درس به کلاس تقویتی می‌روند؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

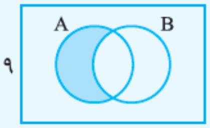
پاسخ گزینهٔ ۲ اگر ریاضی را با A و فیزیک را با B نشان دهیم، داریم:

$$\underbrace{n(A\cup B)}_{\text{حداقل یکی از دو درس}}=\underbrace{n(A)}_{\text{ریاضی}}+\underbrace{n(B)}_{\text{فیزیک}}-\underbrace{n(A\cap B)}_{\text{هر دو}} \Rightarrow n(A\cup B)=۲۰+۱۷-۱۱=۲۶$$

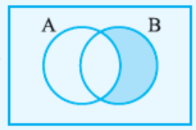
ون را ببینید:



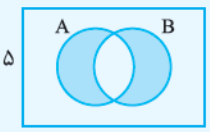
حالا به این‌ها دقت کنید:



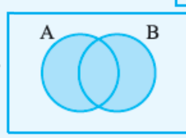
$n(A-B)=۲۰-۱۱=۹$:تعداد افرادی که فقط به کلاس ریاضی می‌روند.



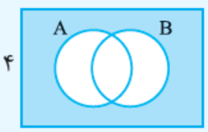
$n(B-A)=۱۷-۱۱=۶$:تعداد افرادی که فقط به کلاس فیزیک می‌روند.



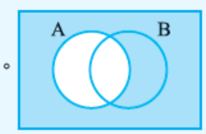
$\underbrace{n(A-B)}_{\text{فقط ریاضی}}+\underbrace{n(B-A)}_{\text{فقط فیزیک}}=۹+۶=۱۵$:تعداد افرادی که فقط به یک کلاس می‌روند.



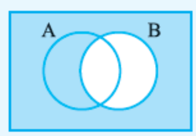
$n(A\cup B)=۲۶$:تعداد افرادی که حداقل به یک کلاس می‌روند.



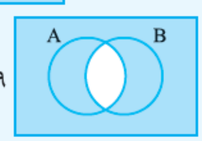
$n\underbrace{(A'\cap B')}_{\text{نه ریاضی و نه فیزیک}}=n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=۳۰-۲۶=۴$:تعداد افرادی که به هیچ کلاسی نمی‌روند.



$n(A')=n(U)-n(A)=۳۰-۲۰=۱۰$:تعداد افرادی که به کلاس ریاضی نمی‌روند.



$n(B')=n(U)-n(B)=۳۰-۱۷=۱۳$:تعداد افرادی که به کلاس فیزیک نمی‌روند.



$n\underbrace{(A\cap B)'}_{\text{به هردو کلاس نمی‌روند.}}=n(U)-n(A\cap B)=۳۰-۱۱=۱۹$:تعداد افرادی که حداکثر به یک کلاس می‌روند.

کیف کردید؟ تمام این سؤال‌ها را با نمودار ون جواب دادیم، ولی اگر دوست دارید حفظ کنید، این‌ها هم هست:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ $\qquad$ $n(A')=n(U)-n(A)$ $\qquad$ $n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$

تست **اگر A مجموعهٔ اعداد زوج دورقمی و B مجموعهٔ اعداد فرد کم‌تر از ۱۰۰ باشد، $A\cup B$ چند عضو دارد؟**

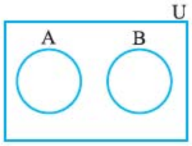
۱) ۹۰ $\qquad$ ۲) ۹۴ $\qquad$ ۳) ۹۵ $\qquad$ ۴) ۹۶

پاسخ گزینهٔ ۳ A دارای ۴۵ عضو است (کلاً ۹۰تا عدد دورقمی از ۱۰ تا ۹۹ داریم که ۴۵تای آن‌ها زوج‌اند). B دارای ۵۰ عضو است (از ۱ تا ۱۰۰ پنجاه‌تا عدد فرد داریم).

اما مهم‌تر از هر چیز، A و B عضو مشترکی ندارند، چون اعضای A زوج و اعضای B فرد هستند. پس دو مجموعهٔ مجزا داریم. پس:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=۴۵+۵۰=۹۵$

می‌شود از آن طرف هم به ماجرا نگاه کرد. اگر $A\cup B$ را بنویسیم اعداد زوج دورقمی و اعداد فرد کم‌تر از ۱۰۰ می‌آیند. پس از بین ۱ تا ۹۹، فقط اعداد زوج یک‌رقمی یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸ غایب هستند. بنابراین تعداد اعضای اجتماع می‌شود: $۹۹-۴=۹۵$



برای دو مجموعهٔ جدا از هم A و B داریم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ $\quad A\cap B=\varnothing$

هم‌چنین: $A-B=A\ ,\ B-A=B$

و نیز: $A\subseteq B'\ ,\ B\subseteq A'$

تست **اگر اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۳۰ عضو بوده و $۴n(A\cap B)=n(A)=n(B)+۵$ باشد. آن‌گاه چند عضو فقط به A تعلق دارند؟**

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینهٔ ۳** اگر تعداد اعضای $A\cap B$ را x بنامیم، داریم:

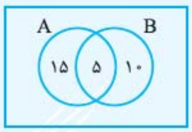
$$\begin{cases} n(A)=۴n(A\cap B)=۴x \\ n(B)+۵=۴x \Rightarrow n(B)=۴x-۵ \end{cases}$$

پس:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۳۰=۴x+۴x-۵-x \Rightarrow ۳۰=۷x-۵ \Rightarrow x=۵$$

پس مجموعهٔ A دارای $۲۰=۵\times۴$ عضو است که ۵تای آن‌ها با B مشترک‌اند و $n(A-B)=۲۰-۵=۱۵$.
یعنی ۱۵ عضو فقط به A تعلق دارند.



تست **اگر $n(U)=۱۰۰$ و $۳n(A\cap B)=۱۲=\dfrac{n(A')}{۳}=\dfrac{n(B)}{۲}$. آن‌گاه کدام نادرست است؟**

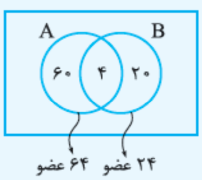
۱) $n(A'\cap B)=۲۰$ ۲) $n(B'\cap A)=۶۰$ ۳) $n(A'\cap B')=۱۶$ ۴) $n(A'\cup B')=۸۶$

پاسخ **گزینهٔ ۴** اول برویم سراغ رابطهٔ $۳n(A\cap B)=۱۲=\dfrac{n(A')}{۳}=\dfrac{n(B)}{۲}$، پس داریم:

$$n(B)=۲\times۱۲=۲۴$$

$$۳n(A\cap B)=۱۲ \Rightarrow n(A\cap B)=۴ \qquad \frac{n(A')}{۳}=۱۲ \Rightarrow n(A)=n(U)-n(A')=۱۰۰-۳۶=۶۴$$

اعداد را در نمودار ون می‌آوریم:

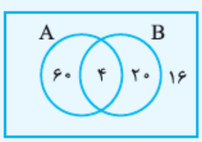


پس در $A\cup B$، جمعاً $۲۰+۴+۶۰$ یعنی ۸۴ عضو داریم. این‌جوری هم ببینید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶۴+۲۴-۴=۸۴$$

بنابراین متمم $A\cup B$ یعنی $A'\cap B'$ دارای $۱۶=۱۰۰-۸۴$ عضو است. $n(A'\cap B')=۱۶$

پس تا این‌جا فهمیدیم: $\underbrace{n(A'\cap B)}_{\text{همان } B-A}=۲۰$ و $\underbrace{n(B'\cap A)}_{\text{همان } A-B}=۶۰$



بنابراین حتماً ۴ نادرست است. ببینید: $n(A'\cup B')=n(U)-n(A\cap B)=۱۰۰-۴=۹۶$

در درس شما نیست، اما ببینید که: $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

و در حالتی که مجموعه‌ها دوبه‌دو مجزا هستند: $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$

تست **در میان دانش‌آموزان سال دهم ۲۸ نفر عضو تیم والیبال، ۱۶ نفر بسکتبال و ۳۰ نفر فوتبال هستند. اگر ۴ نفر در هر دو تیم بسکتبال و والیبال، ۳ نفر در فوتبال و والیبال و ۲ نفر در بسکتبال و فوتبال مشترک باشند و فقط ۱ نفر عضو هر سه تیم باشد، چند نفر عضو حداقل یک تیم هستند؟**

۱) ۷۴ ۲) ۶۷ ۳) ۶۶ ۴) ۶۵

پاسخ **گزینهٔ ۳** سؤال این را می‌خواهد:

$$n(F\cup V\cup B)=n(F)+n(V)+n(B)-n(F\cap V)-n(B\cap V)-n(F\cap B)+n(F\cap V\cap B)=۳۰+۲۸+۱۶-۳-۴-۲+۱=۶۶$$

حوصلهٔ چالش بیشتر دارید؟ به ون نگاه کنید:

به این سؤالات جواب دهید!

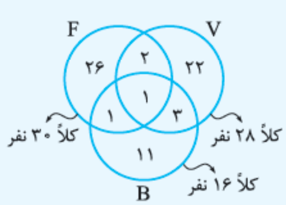
۱) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال‌اند؟ ۲۶

۲) چند نفر فقط عضو یک تیم‌اند؟ $۵۹=۱۱+۲۲+۲۶$

۳) چند نفر عضو تیم والیبال هستند و در فوتبال نیستند؟ $۲۴=۳+۲۱$

۴) چند نفر عضو دقیقاً ۲ تیم هستند؟ $۶=۳+۲+۱$

۵) چند نفر عضو حداقل ۲ تیم هستند؟ $۷=۲+۳+۱+۱$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۸۹- اگر $n(A)=۱۵$ ، $n(A\cap B)=۵$ و $n(A\cup B)=۳۰$ ، آن‌گاه $n(B)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۹۰- در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر از آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، چند نفر از دانش‌آموزان حداقل در یکی از دو گروه قرار دارند؟ (کتاب درسی)

۱) ۲۶ ۲) ۱۹ ۳) ۲۸ ۴) ۲۹

۹۱- اگر دو مجموعهٔ A و B دارای تعداد عضو مساوی باشند و تعداد اعضای A، چهار برابر تعداد اعضای مشترک A و B باشد، تعداد عضوهای $A\cup B$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۹۲- اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند و بدانیم که: $n(A)=۱۰$ ، $n(A')=۱۲$ و $n(B)=۷$ ، آن‌گاه $n(B')$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۹۳- اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به طوری که $n(U)=۱۰۰$ ، $n(A)=۶۰$ ، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$ ، تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ چه‌قدر بیشتر از تعداد اعضای مجموعهٔ $A'\cap B'$ است؟ (کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۹۴- اگر $۳n(A)=۲n(B)=۶n(A\cap B)$ باشد، حاصل $\dfrac{n(A-B)}{n(B\cap A')}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹۵- اگر $n(A)=۳۲$ ، $n(A-B)=۱۴$ و $n(A\cup B)=۶۰$ ، مقدار $n(B-A)$ چند برابر $n(A\cap B)$ است؟

۱) تقریباً ۱/۳۳ ۲) تقریباً ۱/۴۴

۳) تقریباً ۱/۵۵ ۴) تقریباً ۱/۶۶

۹۶- مجموعهٔ A دارای ۱۴ و مجموعهٔ B دارای ۱۷ و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۵ عضو است، چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه هستند؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۹۷- در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. هم‌چنین ۳۲ نفر از آنان نیز در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟ (کتاب درسی)

۱) ۶۳ ۲) ۷۷ ۳) ۹۵ ۴) ۱۰۳

۹۸- یک دورهٔ جشنوارهٔ فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. چند فیلم این جشنواره پویانمایی یا غیرطنز است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۳

۹۹- در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۰ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۸ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند. چند نفر عضو هیچ تیمی نیستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۰- در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟ (کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

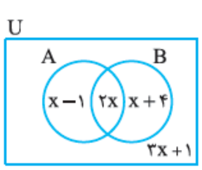
۱۰۱- در یک روز از بین ۱۰۴ مورد جرم گزارش‌شده به کلانتری، ۷۰ مورد در شب و ۶۱ مورد در حومهٔ شهر بوده است. حداقل چند مورد جرم در شب و درون شهر گزارش شده است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۲۱ ۴) ۲۹

۱۰۲- اگر $n(A\cup B)=۷۵$ ، $n(A)=۳x+۱۰$ ، $n(B)=۲y+۵$ ، $n(A\cap B)=x+y-۲۰$ و $۳y=۲x$. چند عضو از مجموعهٔ مرجع در A هست ولی در B نیست؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

۱۰۳- در نمودار ون مقابل تعداد اعضای هر قسمت درون آن نوشته شده است. اگر $n(A'-B)=۱۰$ باشد، چند عضو حداقل به یکی از مجموعه‌های A و B تعلق دارند؟



۱) ۹ ۲) ۸

۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۰۴- اگر ۳ = $n(A-B)$ و ۷ = $n(B-A)$ و تعداد اعضای B دقیقاً دو برابر تعداد اعضای A باشد، A و B چند عضو مشترک دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۵- اگر مجموعهٔ A دارای ۵ عضو، مجموعهٔ B دارای ۶ عضو و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۲ عضو باشد، مجموعهٔ $(A\cap B')\cup(A\cup B)'$ چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۰۶- سارا می‌خواهد هم‌کلاسی‌های خود در مدرسه و کلاس زبان را به تولدش دعوت کند. اگر در مدرسه ۲۴ هم‌کلاسی داشته باشد و در کل ۴۷ نفر مهمان داشته باشد، تعداد هم‌کلاسی‌های کلاس زبان او حتماً در کدام بازه است؟

۱) [۰,۲۳] ۲) [۰,۴۷]

۳) [۲۳,۴۷] ۴) [۲۳,۲۴]

۱۰۷- اگر مجموعهٔ مرجع دارای ۲۲ عضو و دو زیرمجموعهٔ A و B در آن دارای ۱۷ و ۱۲ عضو باشند، $A-B$ حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۷ ۴) ۷

۱۰۸- مجموعهٔ A دارای ۳۶ عضو و مجموعهٔ B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعهٔ A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعهٔ جدید با مجموعهٔ B، کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۱۰۹- اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌های اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ جدید، کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۱۱۰- در بیمارستانی با ۴۰۰ بیمار، بیماران ممکن است دارای سه بیماری A، B و C باشند. اگر ۱۶۰ نفر مبتلا به A، ۳۰۰ نفر مبتلا به B، ۸۰ نفر مبتلا به A و C، ۹۰ نفر مبتلا به B و C، ۱۰۰ نفر مبتلا به B و A و ۵۰ نفر مبتلا به A، B و C باشند، چند بیمار فقط بیماری C را دارند؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

۱۱۱- دو مجموعهٔ $A=\{۱,۴,۷\}$ و $B=\{x\in U \mid x<۳\}$ جدا از هم هستند. U کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $\mathbb{Q}'$ ۲) $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ ۳) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}$

۱۱۲- چند عدد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۱۰۰ بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیرند؟

۱) ۸۷ ۲) ۶۷ ۳) ۶۶ ۴) ۸۸

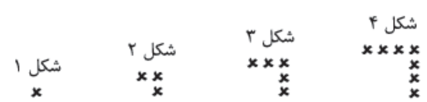
درس ۶

الگوی خطی

به عبارت‌هایی مثل a_1، a_2 و ... متغیر اندیس‌دار می‌گوییم. معمولاً وقتی چند مرحلهٔ متوالی از ۱ تا n داریم، سراغ متغیرهای اندیس‌دار می‌رویم.

به شکل‌های مقابل دقت کنید:

n: شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴
a_n: تعداد علامت‌ها	۱	۳	۵	۷



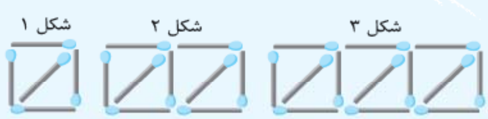
داریم:

$a_1=1 \quad a_2=3 \quad a_3=5 \quad a_4=7$

اگر دقت کنید می‌توانیم a_n را برای همهٔ nها از فرمول $a_n=2n-1$ حساب کنیم.

این عبارت a_n را جملهٔ عمومی الگو می‌نامند. مقدار a_n را جملهٔ nام الگو می‌نامند، مثلاً a_6 یعنی جملهٔ ششم الگو که با قراردادن $n=6$ به دست می‌آید.

تست در شکل بیستم چند چوب‌کبریت هست؟



۱) ۸۹ ۲) ۸۰

۳) ۸۱ ۴) ۸۴

پاسخ گزینهٔ ۳ به شکل‌ها دقت کنیم. شکل اول ۵تا چوب‌کبریت دارد، در شکل دوم ۴تا به آن‌ها افزوده می‌شود و در شکل سوم دوباره ۴تا افزوده می‌شود، پس در شکل بیستم $5+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{\text{نوزدتا}}$ یعنی $5+4\times19=81$ چوب‌کبریت هست.

۱- الگوی خطی

در الگوهای خطی اختلاف هر دو جملهٔ متوالی مقدار ثابتی است.

(پ) ۳,۵,۸,۱۲,...	(ب) ۲۵,۲۱,۱۷,۱۳,...	(الف) ۴,۷,۱۰,۱۳,...
اختلاف ۵ و ۳ برابر ۲ و اختلاف ۸ و ۵ برابر ۳ است، پس اختلاف ثابت نیست و این الگو خطی نیست.	اختلاف هر دو جملهٔ متوالی -۴ است، پس الگوی خطی است.	اختلاف هر دو جملهٔ متوالی ۳ است، پس الگوی خطی است.

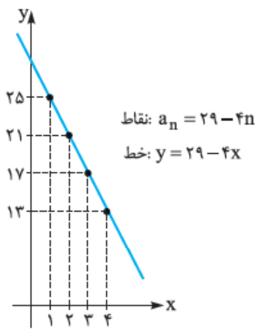
جملهٔ عمومی یک الگوی خطی $a_n = an + b$ است. a همان اختلاف جمله‌های متوالی است و b را با جای‌گذاری مقدار یکی از a_nها به دست می‌آوریم.

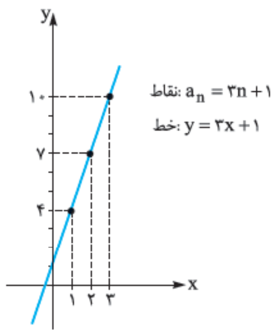
مثلاً در (الف) $a = ۳$ است و با قراردادن $a_۱ = ۴$ در عبارت $a_n = \underset{۳}{\underbrace{a}}n + b = ۳n + b$، داریم: $\xrightarrow{n=۱} a_۱ = ۳\times۱ + b = ۴ \Rightarrow b = ۱$

پس $a_n = ۳n + ۱$.

در (ب) هم داریم: $a = \text{اختلاف} = -۴ \Rightarrow a_n = an + b = -۴n + b \xrightarrow{a_۲ = ۲۱} ۲۱ = -۴(۲) + b \Rightarrow b = ۲۹ \Rightarrow a_n = ۲۹ - ۴n$

◀ اگر نقاط با طول n و عرض a_n یعنی (n, a_n) را در دستگاه مختصات رسم کنیم، همگی روی خط $y = ax + b$ قرار می‌گیرند. اصلاً به همین دلیل اسم این‌ها الگوی خطی است. ببینید:





◀ مقدار a یعنی همان اختلاف جملات متوالی، در واقع شیب خطی است که نقطه‌های دنبالهٔ خطی روی آن قرار می‌گیرند.

تست در یک الگوی خطی اگر جملهٔ سوم ۶ و جملهٔ دهم ۲۷ $= a_{۱۰}$ باشد، جملهٔ یازدهم کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

پاسخ گزینهٔ ۲ جملهٔ عمومی را $a_n = an + b$ می‌گیریم، پس صورت سؤال این‌ها را گفته:

$$\begin{matrix} \xrightarrow{n=۳} a_۳ = a(۳) + b = ۶ \\ \xrightarrow{n=۱۰} a_{۱۰} = a(۱۰) + b = ۲۷ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۳a + b = ۶ \\ ۱۰a + b = ۲۷ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۷a = ۲۱ \Rightarrow a = ۳ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} ۳(۳) + b = ۶ \Rightarrow b = ۶ - ۹ = -۳$$

پس: $a_n = \underset{a}{\underbrace{۳}}n \underset{b}{\underbrace{-۳}}$

و مقدار جملهٔ یازدهم می‌شود: $a_{۱۱} = ۳\times۱۱ - ۳ = ۳۰$

◀ در مورد الگوی خطی $a_n = ۳n - ۳$ به این سؤالات جواب می‌دهیم:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
a_n	۰	۳	۶	۹	۱۲	۱۵

الف) اولین جملهٔ مضرب ۵ آن چیست؟ خب به جملات a_n نگاه کنیم:

پس $a_۶ = ۱۵$ اولین جملهٔ مضرب ۵ است.

ب) اولین جملهٔ دورقمی آن کدام است؟ با توجه به جدول بالا $a_۵ = ۱۲$ اولین جملهٔ دورقمی است.

پ) کدام جمله برابر ۷۷۷ است؟ اگر $a_n = ۳n - ۳ = ۷۷۷$ باشد، داریم: $۳n = ۷۸۰ \Rightarrow n = \frac{۷۸۰}{۳} = ۲۶۰$

یعنی جملهٔ دویست و شصتم برابر ۷۷۷ است.

ت) آیا جمله‌ای از آن برابر ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ می‌شود؟ اگر $۳n - ۳$ را مساوی ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ بگذاریم برای n به جواب طبیعی نمی‌رسیم، پس جمله‌ای برابر ۱۰۰۰ یا ۱۰۰ نداریم.

این‌طوری به موضوع نگاه کنید که $۳n - ۳$ همیشه مضرب ۳ است و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ مضرب ۳ نیستند.

◀ دوباره یادآوری کنیم که جملهٔ عمومی الگوی خطی $a_n = an + b$ است، یعنی از درجهٔ اول است.

تست کدام جملهٔ عمومی الگوی خطی نیست؟

۱) $a_n = \frac{۴n^۲ - n}{n}$ ۲) $a_n = n^۲ - (n+۱)^۲$ ۳) $a_n = \sqrt{(۳n+۱)^۲}$ ۴) $a_n = |۳n - ۵|$

پاسخ گزینهٔ ۴ (۱) جملهٔ عمومی به صورت $a_n = ۴n - ۱$ ساده می‌شود، پس یک الگوی خطی و اختلاف جملاتش برابر ۴ است.

(۲) جملهٔ عمومی به صورت $n^۲ - (n^۲ + ۲n + ۱) = -۲n - ۱$ ساده می‌شود و این هم الگوی خطی با اختلاف جملات -۲ است.

(۳) حاصل a_n می‌شود $|۳n + ۱|$ که چون n طبیعی است، داریم: $a_n = ۳n + ۱$

(چون حاصل $۳n + ۱$ مثبت است) و این هم الگوی خطی با اختلاف ۳ است.

(۴) این الگوی خطی نیست. جملاتش را ببینید:

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۲	۱	۴	۷

اختلاف ثابت نیست.

گاهی اوقات باید جملهٔ عمومی را ساده کرد تا به الگوی خطی برسیم. مثلاً: $a_n = kn^۲ + ۲n + ۱$ خطی نیست مگر این‌که $k = ۰$ باشد (که $n^۲$ برود و به $۲n + ۱$ برسد).

$a_n = \frac{۴n^۲ - ۱}{۲n + k}$ هم خطی نیست مگر این‌که $k = \pm۱$ باشد (که ساده بشود و به $۲n \pm ۱$ برسد).

$a_n = \sqrt{۹n^۲ + ۶n + k}$ هم خطی نیست مگر این‌که $k = ۱$ باشد (تا زیر رادیکال مربع کامل شود و به $۳n + ۱$ برسد).

$a_n = kn^۲ + (۲n - ۱)^۲$ نیز فقط به شرط $k = -۴$ خطی است (که $n^۲$ها بروند و به $-۴n + ۱$ برسد).

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۱۳- جملهٔ عمومی یک الگوی خطی که جملهٔ اول و دوم آن به ترتیب ۱ و ۵ باشد، کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $t_n = ۴n + ۳$ ۲) $t_n = ۴n - ۳$ ۳) $t_n = ۴n - ۱$ ۴) $t_n = ۴n + ۱$

۱۱۴- دنبالهٔ $a_n = (۳k - ۱)n^۲ + kn + ۲$ خطی است. جملهٔ سوم آن چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۵- جملات دوم و سوم در یک الگوی خطی ۳ و ۷ هستند. جملهٔ هشتم چند برابر جملهٔ پنجم است؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۱/۹ ۲) ۱/۸ ۳) ۱/۷ ۴) ۱/۶

۱۱۶- یک الگوی خطی با جملهٔ عمومی $t_n = kn^۲ + ۲n + (k + ۱)$ مفروض است. جملهٔ اول را ۲ واحد زیاد و فاصلهٔ جملات را ۳ برابر می‌کنیم تا دنبالهٔ C_n به وجود بیاید. $C_{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۴ ۳) ۶۹ ۴) ۷۷

۱۱۷- اگر t_n جملهٔ عمومی یک الگوی خطی باشد، کدام گزینه برابر $t_{۱۱}$ است؟ $(t_۱ \neq t_۲)$

۱) $t_{۱۳} - t_۲$ ۲) $t_۵ + t_۶$

۳) $\frac{t_{۲۲}}{۲}$ ۴) $\frac{t_{۲۰} + t_۵ + t_۸}{۳}$

۱۱۸- در یک سالن سینما صندلی‌ها در ۱۱ ردیف قرار دارند. در الگوی مقابل افزایش صندلی‌ها در هر ردیف دیده می‌شود. در ردیف آخر چند صندلی هست؟

۱) ۲۹ ۲) ۲۵

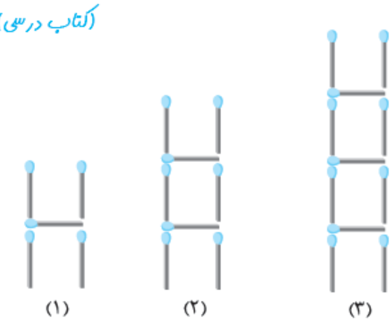
۳) ۲۷ ۴) ۲۶

۱۱۹- در الگوی مقابل، شکل دهم چند پاره‌خط دارد؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۳۰ ۲) ۴۰

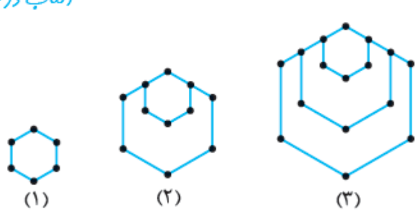
۳) ۳۹ ۴) ۳۱

۱۲۰- با توجه به الگوی مقابل، شکل کدام مرحله از ۵۳ تا چوب‌کبریت ساخته می‌شود؟ *(کتاب درسی)*



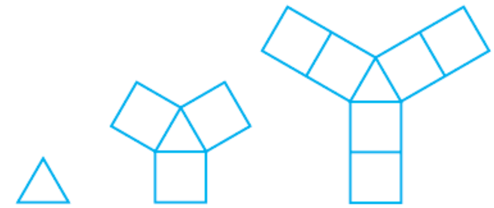
۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۷
۴) ۱۸

۱۲۱- با توجه به الگوی مقابل، در شکل پانزدهم چند رأس وجود دارد؟ *(کتاب درسی)*



۱) ۷۵
۲) ۷۶
۳) ۷۷
۴) ۷۸

۱۲۲- **با توجه به الگوی مقابل، در کدام مرحله اختلاف تعداد مربع‌ها و تعداد پاره‌خط‌ها، ۶۳ می‌شود؟**



مرحلهٔ (۳) مرحلهٔ (۲) مرحلهٔ (۱)

۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۲

۴) ۱۳

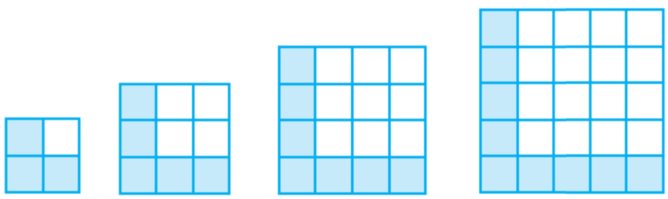
۱۲۳- **با توجه به الگوی مقابل، در مرحله‌ای که ۱۶ کاشی سفید استفاده شده، چند کاشی سیاه داریم؟** *(کتاب درسی)*

(۳) (۲) (۱)

۱) ۳۲ ۲) ۳۴

۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۱۲۴- **در شکل‌های روبه‌رو، با توجه به ادامهٔ روند شکل‌ها، اختلاف تعداد مربع‌های کوچک سفید و رنگی در شکل بیستم چه‌قدر است؟** *(کتاب درسی)*



شکل (۴) شکل (۳) شکل (۲) شکل (۱)

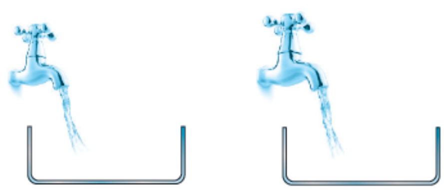
۱) ۳۶۱

۲) ۴۰۰

۳) ۳۵۹

۴) ۳۲۴

۱۲۵- **در ظرف‌های A و B در شروع به ترتیب ۱۰ و ۶ لیتر آب هست. شیرهای آب در هر دقیقه به ترتیب ۲ و ۳ لیتر آب وارد ظرف‌ها می‌کنند. اگر شیرها را با هم باز کنیم، پس از چند دقیقه مقدار آب دو ظرف مساوی می‌شود؟**

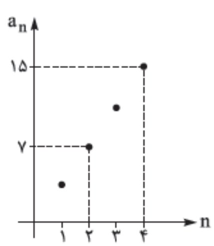


B A

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۳

۱۲۶- **شکل مقابل بخشی از نمودار یک الگوی خطی را نشان می‌دهد. جملهٔ عمومی دنباله‌ای که a_1 و a_2 جملات اول و دوم آن هستند، کدام است؟**



۱) $b_n = 4n + 3$

۲) $b_n = 8n - 5$

۳) $b_n = 4n - 1$

۴) $b_n = 8n + 3$

درس ۷

الگوی درجه دوم

اگر در یک الگو، اختلاف جملات ثابت نباشد، اما اختلاف اختلاف‌ها ثابت باشد، الگوی درجه‌دوم داریم. ببینید:

(پ)	(ب)	(الف)
۲ , ۳ , ۵ , ۹ , ۱۴ ,... اختلاف: ۱ ۲ ۴ ۵ اختلاف اختلاف: ۱ ۲ ۱	۵ , ۹ , ۱۵ , ۲۳ , ۳۳ ,... اختلاف: ۴ ۶ ۸ ۱۰ اختلاف اختلاف: ۲ ۲ ۲	۱ , ۲ , ۴ , ۷ , ۱۱ ,... اختلاف: ۱ ۲ ۳ ۴ اختلاف اختلاف: ۱ ۱ ۱
این درجه‌دوم نیست.	این هم الگوی درجه‌دوم است.	این الگو درجه‌دوم است.

پس در یک الگوی درجه‌دوم، اختلاف جملات متوالی، الگوی خطی می‌سازند.

جملهٔ عمومی الگوی درجه‌دوم $a_n = an^2 + bn + c$ است. اول به خاطر بسپارید که a (یعنی ضریب n^2)، نصف اختلاف اختلاف‌ها (همان مقدار ثابت) است. پس مثلاً در (الف) حتماً جملهٔ عمومی $\frac{1}{2}n^2 + bn + c$ است و در (ب) حتماً جملهٔ عمومی $n^2 + bn + c$ است.

برای پیداکردن مقادیر b و c هم باید دوتا از مقدارهای جملات را در $an^2 + bn + c$ جای‌گذاری و دستگاه را حل کنیم.

تست در دنبالهٔ درجه‌دوم ...,۱۸,۱۰,۵,۳ جملهٔ ششم کدام است؟

۱) ۳۳ ‏ ‏ ‏ ۲) ۳۷

۳) ۴۳ ‏ ‏ ‏ ۴) ۴۷

پاسخ گزینهٔ ۳ **راه اول** به اختلاف‌ها نگاه کنید:

$$\begin{array}{ccccccc} ۳ & , & ۵ & , & ۱۰ & , & ۱۸ \\ & +۲ & & +۵ & & +۸ & \\ & & +۳ & & +۳ & & \end{array}$$

اختلاف‌های ردیف دوم همیشه ۳+ است، پس ادامه می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccccccccccc} ۳ & , & ۵ & , & ۱۰ & , & ۱۸ & , & a_۵ & , & a_۶ \\ & +۲ & & +۵ & & +۸ & & +۱۱ & & +۱۴ & \\ & & +۳ & & +۳ & & +۳ & & +۳ & & \end{array}$$

و داریم:

$$a_۶ = ۱۸ + ۱۱ + ۱۴ = ۴۳$$

راه دوم با دقت، نوشتن جملهٔ عمومی درجهٔ ۲ را یاد بگیرید:

تفاضلِ تفاضل‌ها ۳ است، پس a، نصف آن یعنی $\frac{۳}{۲}$ خواهد بود و داریم:

$$a_n = an^۲ + bn + c = \frac{۳}{۲}n^۲ + bn + c$$

$$\begin{array}{ccccccc} ۳ & , & ۵ & , & ۱۰ & , & ۱۸ \\ & +۲ & & +۵ & & +۸ & \\ & & +۳ & & +۳ & & \end{array}$$

و برای رسیدن به b و c از دستگاه دو معادله دو مجهول می‌رویم:

$$\begin{cases} n=۱ \xrightarrow{a_۱=۳} \frac{۳}{۲}(۱)^۲ + b(۱) + c = ۳ \\ n=۲ \xrightarrow{a_۲=۵} \frac{۳}{۲}(۲)^۲ + b(۲) + c = ۵ \end{cases} \xrightarrow[\text{ها بروند.}]{\text{کم کنیم}} \frac{۳}{۲}(۴) - \frac{۳}{۲}(۱) + b = ۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲} + b = ۲ \Rightarrow b = -\frac{۵}{۲} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{در اولی}} \frac{۳}{۲} + (-\frac{۵}{۲}) + c = ۳ \Rightarrow c = ۴$$

پس $a_n = \frac{۳}{۲}n^۲ - \frac{۵}{۲}n + ۴$ و در نتیجه:

$$\xrightarrow{n=۶} a_۶ = \frac{۳}{۲}(۶)^۲ - \frac{۵}{۲}(۶) + ۴ = \frac{۳}{۲}(۳۶) - ۱۵ + ۴ = ۵۴ - ۱۱ = ۴۳$$

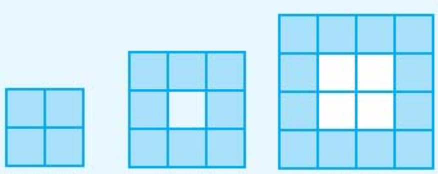
تست در الگوی مقابل کدام نادرست است؟

۱) تعداد مربع‌های رنگی در مرحلهٔ nاُم الگوی خطی دارد.

۲) در ۵ شکل، تعداد مربع‌های رنگی از سفید بیشتر است.

۳) شکلی که ۱۰۰ مربع سفید دارد، ۶۹ مربع رنگی خواهد داشت.

۴) اختلاف تعداد مربع‌های سفید و رنگی هرگز ۱۱۱ نیست.



شکل (۱) ‏ ‏ شکل (۲) ‏ ‏ شکل (۳)

پاسخ گزینهٔ ۳ به جدول توجه کنید.

مرحله	۱	۲	۳
تعداد مربع سفید	صفر	۱	۴
تعداد مربع رنگی	۴	۸	۱۲
تعداد کل مربع‌ها	۴	۹	۱۶

خب با کمی دقت، الگوی تعداد کل مربع‌ها به صورت $(n+۱)^۲$ است. الگوی تعداد مربع‌های سفید هم $(n-۱)^۲$ است و از اختلاف این‌ها الگوی تعداد مربع‌های رنگی می‌شود $(n+۱)^۲ - (n-۱)^۲ = ۴n$ پس ۱ درست است و تعداد مربع‌های رنگی الگوی خطی دارد.

در ۲ باید تعداد مربع سفید و رنگی را مقایسه کنیم. اولی $(n-۱)^۲$ و دومی $۴n$ است.

دوباره به عددها دقت کنید:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
سفید $((n-۱)^۲)$	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶
رنگی $(۴n)$	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸

می‌بینید که از مرحلهٔ ۶ و به بعد، تعداد مربع‌های سفید بیشتر است و فقط در ۵ مرحله تعداد مربع‌های رنگی بیشتر بود! یعنی ۲ هم درست است.

در ۳ دنبال شکلی هستیم که ۱۰۰ مربع سفید دارد؛ یعنی $(n-۱)^۲ = ۱۰۰$ و در نتیجه $n = ۱۱$ تعداد مربع‌های رنگی‌اش می‌شود $۴n = ۴ \times ۱۱ = ۴۴$ و ۳ غلط گفته.

۴ هم می‌گوید اختلاف تعداد مربع‌های سفید و رنگی یعنی $(n-۱)^۲ - ۴n$ هرگز ۱۱۱ نیست. ببینید:

$$(n-۱)^۲ - ۴n = n^۲ - ۶n + ۱ = ۱۱۱ \Rightarrow n^۲ - ۶n = ۱۱۰ \Rightarrow n(n-۶) = ۱۱۰$$

خب درست می‌گوید! این معادله جوابی برای n ندارد. حواستان هست که $(n \in \mathbb{N})$.

در الگوهای درجه‌دوم، دو شکل را زیاد می‌بینید و خوب است که جملهٔ عمومی آن‌ها را بلد باشید:

۱ دنبالهٔ مثلثی:

$a_۱=۱$ $\quad a_۲=۱+۲$ $\quad a_۳=۱+۲+۳$ $\quad a_۴=۱+۲+۳+۴$ $\quad a_n=۱+۲+\cdots+n$

جملهٔ عمومی آن $a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ است. این‌طوری هم یاد بگیرید که جمع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n+۱)}{۲}$.

تست حاصل $۲۰+\cdots+۹+۸+۷$ کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۹۰

۳) ۱۸۹ ۴) ۱۷۹

پاسخ گزینهٔ ۳ اگر از ۱ تا ۲۰ بود می‌شد $\frac{۲۰(۲۱)}{۲}=۲۱۰$، اما الان $۱+۲+۳+۴+۵+۶$ را ندارد، پس جواب می‌شود $۲۱۰-\underbrace{\frac{۶(۷)}{۲}}_{\text{جمع اعداد ۱ تا ۶}}$ یعنی $۲۱۰-۲۱=۱۸۹$.

تست جمع اعداد زوج از ۱۰۲ تا ۴۴۴ چه‌قدر است؟

۱) ۴۶۶۱۲ ۲) ۴۶۹۵۶

۳) ۴۶۷۸۴ ۴) ۴۶۸۵۴

پاسخ گزینهٔ ۲ از ۲ فاکتور بگیریم:

$$۱۰۲+۱۰۴+\cdots+۴۴۴=۲(۵۱+۵۲+\cdots+۲۲۲)$$

پس باید مجموع از ۱ تا ۲۲۲ را منهای مجموع از ۱ تا ۵۰ کنیم. یادمان نرفته که مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n می‌شود $\frac{n(n+۱)}{۲}$، پس داریم:

$$۲\left(\frac{۲۲۲\times۲۲۳}{۲}-\frac{۵۰(۵۱)}{۲}\right)=۲(۱۱۱\times۲۲۳-۲۵\times۵۱)=۲(۲۴۷۵۳-۱۲۷۵)=۴۶۹۵۶$$

گاه حفظ می‌کنند که:

$$\text{جمع اعداد طبیعی از ۱ تا } n=۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\text{جمع اعداد طبیعی زوج از ۲ تا } ۲n=۲+۴+۶+\cdots+۲n=n(n+۱)$$

$$\text{جمع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا } ۲n-۱=۱+۳+۵+\cdots+۲n-۱=n^۲$$

۲ دنبالهٔ مربعی:

$a_۱=۱$ $\quad a_۲=۴$ $\quad a_۳=۹$

جملهٔ عمومی آن $a_n=n^۲$ است.

تست در الگوی مقابل:

(۱) (۲) (۳)

تعداد نقطه‌های سفید شکل دهم چند برابر تعداد نقطه‌های رنگی شکل نهم است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰

۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ گزینهٔ ۳ **راه اول** دقت کنید که تعداد کل نقطه‌ها دنبالهٔ مربعی دارد اما در شکل (۱) مربع ۲×۲ داریم، پس $a_n=(n+۱)^۲$ تعداد کل نقطه‌ها را نشان می‌دهد.

در شکل‌ها به ترتیب ۲، ۳ و ۴ نقطهٔ رنگی داریم، پس $b_n=n+۱$ تعداد نقاط رنگی را می‌دهد و بنابراین $c_n=a_n-b_n=(n+۱)^۲-(n+۱)$ دنبالهٔ تعداد نقاط سفید است.

$$c_n=n^۲+۲n+۱-n-۱=n^۲+n$$

راه دوم در زیر و بالای نقاط رنگی، برای نقاط سفید دنبالهٔ مثلثی داریم، پس تعداد نقاط سفید دو برابر حاصل دنبالهٔ مثلثی است.

$$c_n=۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}=n^۲+n$$

بنابراین تعداد نقاط سفید شکل دهم $c_{۱۰}=۱۰^۲+۱۰=۱۱۰$ و تعداد نقاط رنگی شکل نهم $b_۹=۹+۱=۱۰$ است و نسبت آن‌ها می‌شود $\frac{c_{۱۰}}{b_۹}=\frac{۱۱۰}{۱۰}=۱۱$.

موافقید که همیشه $\frac{c_{n+۱}}{b_n}=\frac{(n+۱)^۲+(n+۱)}{(n+۱)}=n+۲$ برقرار است؟

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۲۷- اگر جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل به صورت $t_n = An^2 + B$ باشد، t_8 کدام است؟ $t_n : ۵,۱۴,۲۹,...$

۱) ۱۸۴ ۲) ۱۹۰ ۳) ۱۵۱ ۴) ۱۹۴ *(کتاب درسی)*

۱۲۸- جملهٔ عمومی دنبالهٔ درجه‌دوم مقابل به صورت $t_n = An^2 + Bn$ است. $A+B$ کدام است؟ ۶,۹,۱۴,۲۱,۳۰,...

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ *(کتاب درسی)*

۱۲۹- کدام‌یک از دنباله‌های زیر درجه‌دوم نیست؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۵,۸,۱۳,۲۰,۲۹,... ۲) ۵,۱۲,۲۲,۳۵,۵۱,... ۳) ۰,۳,۸,۱۵,۲۴,... ۴) ۲,۶,۱۲,۱۸,۳۰,...

۱۳۰- جملهٔ عمومی الگوی درجه‌دوم مقابل کدام است؟ $t_n : ۰,۸,۱۸,...$ *(کتاب درسی)*

۱) $t_n = n^2 + 3n + 4$ ۲) $t_n = n^2 + 3n - 4$

۳) $t_n = n^2 + 5n - 6$ ۴) $t_n = n^2 - 4n + 3$

۱۳۱- سه جملهٔ اول در یک دنبالهٔ درجه‌دوم ۱−، ۱ و ۷ هستند. جملهٔ ششم کدام است؟

۱) ۵۳ ۲) ۵۱ ۳) ۴۷ ۴) ۴۹

۱۳۲- چندتا از تساوی‌های زیر درست است؟ *(کتاب درسی)*

الف) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ب) $2+4+\cdots+2n=n(n-1)$ پ) $1+3+5+\cdots+(2n+1)=n^2$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هر سه تساوی نادرست است.

۱۳۳- اگر $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ باشد، آن‌گاه جملهٔ صدم این دنباله کدام است؟

۱) ۰/۰۰۲ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۵۰۵ ۴) ۰/۵

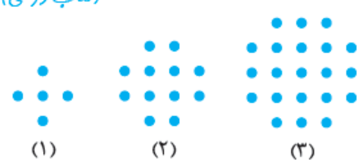
۱۳۴- حاصل عبارت ۹/۹+...+۴/۴+۳/۳+۲/۲+۱/۱ کدام است؟

۱) ۴۷/۵ ۲) ۴۸/۷۵ ۳) ۴۹/۵ ۴) ۵۱/۲۵

۱۳۵- مجموع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا ۹۹ کدام است؟

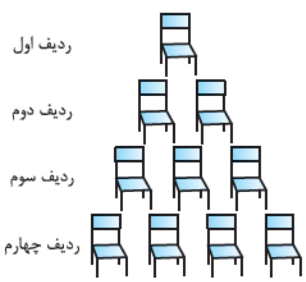
۱) ۱۰۰۰۰ ۲) ۲۵۰۰ ۳) ۲۵۲۵ ۴) ۲۵۲۴

۱۳۶- در الگوی زیر، شکل هفتم از چند نقطه تشکیل خواهد شد؟ *(کتاب درسی)*



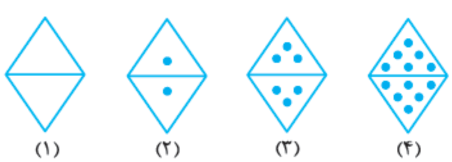
۱) ۷۹
۲) ۷۷
۳) ۷۵
۴) ۷۳

۱۳۷- صندلی‌های یک سالن به صورت روبه‌رو چیده شده‌اند. اگر سالن کلاً ۱۱ ردیف صندلی داشته باشد، تعداد کل صندلی‌ها کدام است؟ *(کتاب درسی)*



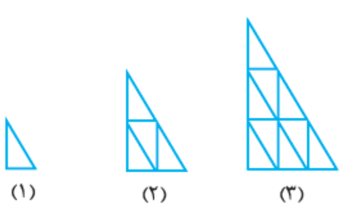
۱) ۵۵
۲) ۵۴
۳) ۶۶
۴) ۷۷

۱۳۸- با توجه به الگوی زیر تعداد نقطه‌های شکل نهم کدام است؟



۱) ۷۲
۲) ۹۰
۳) ۱۱۰
۴) ۵۶

۱۳۹- در الگوی مقابل، تعداد مثلث‌های کوچک شکل شمارهٔ (۸) چند برابر تعداد مثلث‌های کوچک در شکل شمارهٔ (۴) است؟



۱) ۴ ۲) ۲

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۸

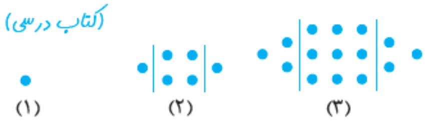
۱۴۰- در الگوی مقابل تعداد دایره‌های توپُر شکل نوزدهم چه‌قدر است؟

۱) ۹۹
۲) ۱۰۰
۳) ۱۱۰
۴) ۸۱

۱۴۱- در سؤال قبل تعداد دایره‌های خالی شکل شانزدهم کدام است؟

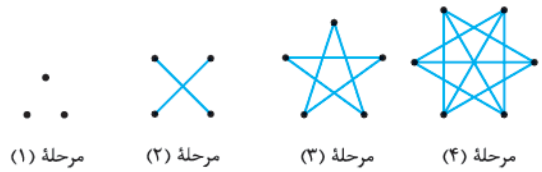
۱) ۷۲ ۲) ۸۸ ۳) ۸۰ ۴) ۶۴

۱۴۲- در الگوی زیر شکل دهم چند نقطه دارد؟ *(کتاب درسی)*



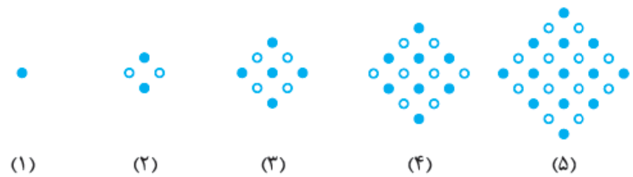
۱) ۱۹۰ ۲) ۱۹۸
۳) ۲۱۰ ۴) ۲۰۲

۱۴۳- در الگوی روبه‌رو، با چند نقطه تعداد پاره‌خط‌ها برابر ۲۰ است؟



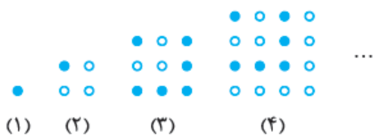
۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۱۴۴- در آرایهٔ لوزی مقابل، تعداد صفرهای توپر در جملهٔ یازدهم کدام است؟



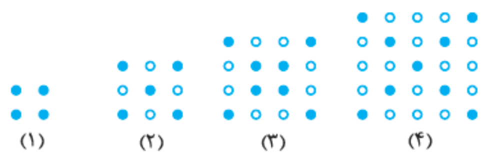
۱) ۶۱
۲) ۶۲
۳) ۶۳
۴) ۶۴

۱۴۵- در آرایهٔ مربعی مقابل، تفاضل دایره‌های توپُر در دو جملهٔ دهم و یازدهم کدام است؟



۱) صفر ۲) ۱۷
۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۱۴۶- با توجه به الگوی روبه‌رو، تعداد نقاط توخالی مرحلهٔ دوازدهم کدام است؟



۱) ۱۱۰
۲) ۱۱۸
۳) ۱۴۴
۴) ۱۱۹

درس ۸
دنباله و سایر الگوها

با الگوی خطی و درجه‌دوم که آشنا شدید!

حالا مفهوم عمومی‌تری را می‌بینیم:

هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند یک دنباله می‌نامیم. این اعداد جمله‌های دنباله هستند. مثلاً ۱۰,۲۰,۳,۱۵,۱۰۰۰,۶۰,۱۶ دنباله‌ای با ۷ عدد است که جملهٔ سوم آن $a_3 = ۳$ و جملهٔ دوم آن $a_2 = ۲۰$ است. اگر بتوانیم قانون a_n را برحسب n بنویسیم، می‌گوییم جملهٔ عمومی دنباله را نوشته‌ایم. کتاب درسی در تمرین از شما خواسته برای دنباله‌های زیر جملهٔ عمومی بگویید:

(الف) $۱,\sqrt{۳},\sqrt{۵},\sqrt{۷},\dots \xrightarrow[\text{رادیکال‌اند}]{\text{اعداد فرد زیر}} a_n = \sqrt{۲n-۱}$

(ب) $۰/۲, ۰/۰۲, ۰/۰۰۲,\dots \xrightarrow[\text{تقسیم می‌شود}]{\text{هر بار بر ۱۰}} a_n = \dfrac{۲}{۱۰^n}$

(پ) $۱,۸,۲۷,۶۴,\dots \xrightarrow{\text{اعداد مکعب کامل}} a_n = n^۳$

(ت) $-۱,+۱,-۱,+۱,\dots \xrightarrow[\text{منفی و مثبت}]{\text{یک‌درمیان}} a_n = (-۱)^n$

(ث) $\dfrac{۱}{۱},\dfrac{۱}{۲},\dfrac{۱}{۳},\dots \xrightarrow{\text{عکس اعداد طبیعی}} a_n = \dfrac{۱}{n}$

(ج) $۲,۱,۴,۱,۶,۱,\dots \xrightarrow[\text{جمله‌های فرد، اعداد زوج‌اند}]{\text{جمله‌ها شمارهٔ زوج، یک هستند}} a_n = \begin{cases} ۱ & n \text{ زوج} \\ n+۱ & n \text{ فرد} \end{cases}$

(چ) $۲,۳,۵,۷,۱۱,\dots \xrightarrow{\text{اعداد اول}}$ جملهٔ عمومی ندارد.

تست در دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{n-۷}{n+۱}$ مقدار جملهٔ نهم چه‌قدر کم‌تر از جملهٔ بیست و چهارم است؟

۱) $۰/۱۵$ ۲) $۰/۴۸$ ۳) $۰/۰۷$ ۴) $۰/۱۳$

پاسخ گزینهٔ ۲

$$a_n = \frac{n-۷}{n+۱} \begin{cases} \xrightarrow{n=۹} a_۹ = \frac{۹-۷}{۹+۱} = \frac{۲}{۱۰} = ۰/۲۰ \\ \xrightarrow{n=۲۴} a_{۲۴} = \frac{۲۴-۷}{۲۴+۱} = \frac{۱۷}{۲۵} \xrightarrow[\times ۴]{\times ۴} = ۰/۶۸ \end{cases}$$

پس جملهٔ نهم از جملهٔ بیست و چهارم به اندازهٔ $۰/۴۸$ کم‌تر است.

به سؤالات دیگری دربارهٔ این دنباله پاسخ دهید.

الف) آیا جمله‌ای با مقدار $\frac{۱}{۲}$ دارد؟

$$\frac{n-۷}{n+۱} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲n-۱۴ = n+۱ \Rightarrow n = ۱۵$$

بله، جملهٔ پانزدهم برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

ب) چند جمله بیشتر از $\frac{۲}{۳}$ دارد؟

$$\frac{n-۷}{n+۱} > \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳n-۲۱ > ۲n+۲ \Rightarrow n > ۲۳$$

پس برای $n > ۲۳$ یعنی از جملهٔ بیست و چهارم به بعد، بی‌شمار جملهٔ بیشتر از $\frac{۲}{۳}$ دارد.

پ) چند جملهٔ منفی دارد؟

می‌دانیم n عددی طبیعی است، پس $n+۱$ منفی نیست و $n-۷$ هم برای $n \geq ۷$ منفی نیست، پس فقط جملات اول تا ششم یعنی ۶ جمله منفی دارد.

ت) کم‌ترین مقدار در بین جملات آن کدام است؟

خب حتماً یکی از جمله‌های منفی (اول تا ششم) کم‌ترین است. ببینید:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
a_n	$-\frac{۶}{۲}$	$-\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۴}{۴}$	$-\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۲}{۶}$	$-\frac{۱}{۷}$

پس $a_۱ = -۳$ از همه کم‌تر است.

مثال در دنبالهٔ $a_۱ = ۱$ و $a_{n+1} = n + a_n$، جملهٔ ششم کدام است؟

پاسخ به این نوع از جملهٔ عمومی می‌گوییم «بازگشتی»، چون قانون مستقیم محاسبهٔ جملهٔ ششم را نداریم. ببینید:

$a_۱ = ۱ \ , \ a_{n+1} = n + a_n$

$n=۱ : a_۲ = ۱ + a_۱ = ۱+۱ = ۲$

$n=۲ : a_۳ = ۲ + a_۲ = ۲+۲ = ۴$

$n=۳ : a_۴ = ۳ + a_۳ = ۳+۴ = ۷$

$n=۴ : a_۵ = ۴ + a_۴ = ۴+۷ = ۱۱$

$n=۵ : a_۶ = ۵ + a_۵ = ۵+۱۱ = ۱۶$

تحقیق کنید که دنبالهٔ a_n در این سؤال درجه‌دوم و جملهٔ عمومی‌اش $a_n = \frac{۱}{۲}n^۲ - \frac{۱}{۲}n + ۱$ است!

تست اگر $a_{۲n-۱} = n^۲$ و $a_{۲n} = \frac{n}{۳}$، مقدار $a_{۱۴} + a_{۱۵}$ کدام است؟

۱) $۶۴/۷۷$ ۲) $۶۵/۳۳$ ۳) $۶۵/۶۶$ ۴) $۶۶/۳۳$

پاسخ گزینهٔ ۴ این دنباله دوتا جملهٔ عمومی دارد که یکی جملات شمارهٔ زوج و دیگری جمله‌های شمارهٔ فرد را تولید می‌کند.

$$a_{۲n} = \frac{n}{۳} \Rightarrow \overbrace{a_۲ = \frac{۱}{۳}}^{n=۱}, \overbrace{a_۴ = \frac{۲}{۳}}^{n=۲}, \overbrace{a_۶ = ۱}^{n=۳}$$

$$a_{۲n-۱} = n^۲ \Rightarrow \underbrace{a_۱ = ۱}_{n=۱}, \underbrace{a_۳ = ۴}_{n=۲}, \underbrace{a_۵ = ۹}_{n=۳}$$

برای رسیدن به $a_{۱۵}$ در $a_{۲n-۱}$ باید $n = ۸$ بگذاریم:

$$\xrightarrow{n=۸} a_{۱۵} = ۸^۲ = ۶۴$$

برای داشتن $a_{۱۴}$ هم باید در $a_{۲n}$ به جای n، ۷ بگذاریم:

$$\xrightarrow{n=۷} a_{۱۴} = \frac{۷}{۳}$$

و جمع این‌ها می‌شود:

$$a_{۱۴} + a_{۱۵} = \frac{۷}{۳} + ۶۴ \simeq ۶۶/۳۳$$

دنبالهٔ فیبوناتچی

این دنباله هم از نوع بازگشتی است. در آن $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۱$ است و جمله‌های بعدی به صورت مجموع دو جملهٔ قبل از خود هستند. این‌طوری:

$۱ \ , \ ۱ \ , \ ۲ \ , \ ۳ \ , \ ۵ \ , \ ۸ \ , \ \ldots$

$a_۳ = a_۱ + a_۲$

$a_۴ = a_۲ + a_۳$

$a_۵ = a_۳ + a_۴$

$a_۶ = a_۴ + a_۵$

به زبان خارجی: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

البته نوشتن جملهٔ عمومی آن خیلی ساده نیست!

تست در دنبالهٔ فیبوناتچی $a_1=a_2=1$ و هر جمله (از جملهٔ سوم به بعد) جمع دو جملهٔ ماقبل است. اولین جملهٔ مضرب ۷ و اولین جملهٔ ۳رقمی به ترتیب کدام جملات هستند؟

۱) هفتم و یازدهم ۲) هشتم و یازدهم ۳) هفتم و دوازدهم ۴) هشتم و دوازدهم

پاسخ گزینهٔ ۴ جمله‌ها را بنویسیم تا به مضرب ۷ و عدد سه‌رقمی برسیم:

$1,1,2,3,5,8,13,\underbrace{21}_{\text{اولیه جملهٔ مضرب ۷}=a_8=21},34,55,89,\underbrace{144}_{\text{اولیه جملهٔ سه‌رقمی}=a_{12}=144}$

پس به ترتیب جملات هشتم و دوازدهم هستند.

تست در دنبالهٔ $a_n=\frac{n}{n+1}$ حاصل‌ضرب جملات سوم تا نوزدهم چه‌قدر است؟

۱) $\frac{3}{19}$ ۲) $\frac{4}{19}$ ۳) $\frac{3}{20}$ ۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ گزینهٔ ۳ بیایید چندتا از جمله‌های سوم تا نوزدهم را کنار هم بنویسیم:

$\underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{سوم}}\times\underbrace{\frac{4}{5}}_{\text{چهارم}}\times\underbrace{\frac{5}{6}}_{\text{پنجم}}\times\cdots\times\underbrace{\frac{17}{18}}_{\text{هفدهم}}\times\underbrace{\frac{18}{19}}_{\text{هجدهم}}\times\underbrace{\frac{19}{20}}_{\text{نوزدهم}}$

خب مخرج هر کسر با صورت کسر بعدی ساده می‌شود:

$\frac{3}{4}\frac{4}{5}\frac{5}{6}\cdots\frac{17}{18}\frac{18}{19}\frac{19}{20}$

و فقط $\frac{3}{20}$ می‌ماند. یعنی:

$a_3a_4a_5\cdots a_{19}=\frac{3}{20}$

تست در الگوی زیر جملهٔ بعدی کدام است؟

$\frac{1^2}{2},\frac{2^2}{3},\frac{3^2}{4},\ldots$

۱) ۱/۶ ۲) ۳/۲ ۳) ۲/۴ ۴) ۴/۸

پاسخ گزینهٔ ۲ با کمی دقت الگوی جملات $\frac{n^2}{n+1}$ است و جملهٔ بعدی می‌شود $\frac{4^2}{5}$ یعنی $\frac{16}{5}$ یا ۳/۲.

تست اعداد طبیعی به شکل مقابل دسته‌بندی شده‌اند:

$\underbrace{(7,8,9,10)}_{\text{دستهٔ چهارم}}\ \underbrace{(4,5,6)}_{\text{دستهٔ سوم}}\ \underbrace{(2,3)}_{\text{دستهٔ دوم}}\ \underbrace{(1)}_{\text{دستهٔ اول}}$

مجموع اعداد دستهٔ nاُم کدام است؟

۱) $\frac{n^3+2n}{2}$ ۲) $\frac{n^3+n}{2}$ ۳) $\frac{n^3+n^2}{2}$ ۴) $\frac{n^3+2n^2}{2}$

پاسخ گزینهٔ ۲ به جمع اعداد دسته‌ها نگاه کنید:

شمارهٔ دسته	۱	۲	۳	۴
جمع اعداد	۱	۵	۱۵	۳۴

پس باید گزینهٔ درست به ازای $n=1,2,3$ به ترتیب ۱۵، ۵ و ۱ بدهد که فقط به ۲ می‌خورد.

اگر دوست دارید خودتان جملهٔ عمومی را بسازید. باید دقت کنید که عدد آخر دستهٔ nام می‌شود $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ و عدد آخر دستهٔ قبلی می‌شود: $1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۴۷- در دنبالهٔ $a_n=\frac{(-1)^n n}{3n-1}$، حاصل a_1+a_2 کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۱- ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۷-

۱۴۸- در دنبالهٔ $b_n=\frac{3n+1}{5n-3}$، جملهٔ چندم برابر $\frac{2}{3}$ است؟

۱) هفتم ۲) هشتم ۳) نهم ۴) دهم

۱۴۹- اگر جملهٔ هفتم از دنبالهٔ $a_n=\frac{An-5}{n^2+1}$ برابر ۰/۸۸ باشد، جملهٔ ششم این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{38}{37}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{39}{37}$ ۴) $\frac{41}{37}$

۱۵۰- اگر $a_n = \begin{cases} n^2-2 & n=2k \\ 3n+1 & n=2k+1 \end{cases}$، حاصل a_3+a_6 کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۳ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

۱۵۱- در یک دنبالهٔ اعداد $a_1=1$ و برای هر عدد $n \geq 1$ داریم: $a_{n+1}=2a_n+1$. جملهٔ هشتم کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۵۹ ۳) ۲۴۷ ۴) ۲۵۵

۱۵۲- جملات کدام دنباله همواره مثبت‌اند؟

۱) $a_n=(-1)^n$ ۲) $b_n=n^2-6n+7$ ۳) $c_n=n^2+4n-2$ ۴) $d_n=\frac{n-6}{2n-5}$

۱۵۳- در دنبالهٔ $a_n=\frac{5n-2}{2n+3}$ چند جملهٔ کوچک‌تر از ۲ داریم؟

۱) شش ۲) هفت ۳) هشت ۴) نه

۱۵۴- در دنبالهٔ $a_n=\frac{n}{3n-10}$ کم‌ترین جمله چه مقداری دارد؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -3 ۳) $-\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۵۵- بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جملهٔ دنبالهٔ $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۵۶- بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ $\frac{n^2}{2^n}$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۱ ۳) ۱/۱۲۵ ۴) ۱/۲

۱۵۷- اگر $t_{3n-1}=2n+1$، آن‌گاه جملهٔ بیستم دنبالهٔ t_n کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۵

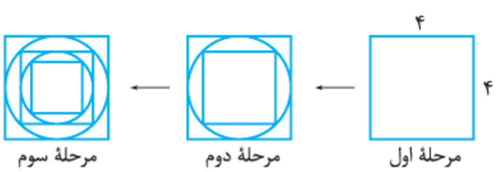
۱۵۸- اگر $a_{n+1}=3n-2$، جمع جملات سوم تا ششم دنبالهٔ a_n کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۷ ۳) ۳۴ ۴) ۳۲

۱۵۹- در دنبالهٔ اعداد روبه‌رو جملهٔ یازدهم کدام است؟ ۱,۱,۲,۳,۵,...

۱) ۸۸ ۲) ۳۴ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۱۶۰- در هر مرحله یک دایره و یک مربع درون مربع قبلی رسم می‌شود. مساحت دایرهٔ مرحلهٔ چهارم چه‌قدر است؟



۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) 2π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۶۱- بر طبق الگوی مقابل، حاصل سطر چهارم کدام است؟ (سراسری ۸۴)

$1^2-2^2+3^2$

$2^2-3^2+4^2$

$\vdots$

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۱۶۲- مجموع تمام جملات اول تا نود و نهم دنبالهٔ $b_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۱۶۳- در دنبالهٔ $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ مجموع جملات دوم تا نوزدهم کدام است؟

۱) ۰/۵۵ ۲) ۰/۹۵ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۸۵

۱۶۴- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جملهٔ هر دسته، مجذور کامل باشد؛ $(1),(2,3,4),(5,6,7,8,9),...$. اختلاف جملات اول و آخر در دستهٔ دهم کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

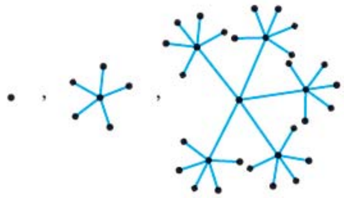
۱۶۵- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شمارهٔ آن باشد. مجموع جملات در دستهٔ دهم کدام است؟

(۱): دستهٔ اول (۳,۵): دستهٔ دوم (۷,۹,۱۱): دستهٔ سوم

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۷۲۹ ۳) ۱۳۳۱ ۴) ۱۲۹۶

۱۶۶- در دنبالهٔ اعداد $a_1=1$ ، $a_{n+1}=a_n+2n+1$. جملهٔ بیست و سوم کدام است؟

۱) ۴۸۴ ۲) ۵۱۷ ۳) ۵۲۹ ۴) ۵۷۶



۱۶۷- در الگوی مقابل در شکل پنجم، چند نقطه وجود دارد؟

۱) ۱۵۶

۲) ۲۲۵

۳) ۶۲۵

۴) ۷۸۱

مرحلهٔ دوم　　مرحلهٔ اول

۱۶۸- شعاع بزرگ‌ترین دایره a است. در هر مرحله دو دایرهٔ جدید درون هر یک از دایره‌های مرحلهٔ قبل رسم می‌شود. مجموع مساحت دایره‌های رسم شده در مرحلهٔ دهم کدام است؟

۱) $\frac{۱۰\pi a^۲}{۱۰۲۴}$　　۲) $\frac{\pi a^۲}{۵۱۲}$

۳) $\frac{\pi a^۲}{۱۰۲۴}$　　۴) $\frac{۵\pi a^۲}{۵۱۲}$

۱۶۹- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد: (۱),(۲,۳),(۴,۵,۶),... جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم کدام است؟

۱) ۱۹۰　　۲) ۲۱۰

۳) ۲۰۱　　۴) ۱۹۱

۱۷۰- در دنبالهٔ $a_n = \frac{n+1}{n+3}$، حاصل‌ضرب $a_1a_2a_3\dots a_{97}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵۰}$　　۲) $\frac{۳}{۱۰۰}$

۳) $\frac{۱}{۳۳۰۰}$　　۴) $\frac{۱}{۱۶۵۰}$

۱۷۱- اگر $a_n = \sqrt[1+n]{(n-7)^{n+1}}$، مجموع ۱۲ جملهٔ اول دنبالهٔ a_n کدام است؟

۱) ۳۶　　۲) ۶

۳) ۲۴　　۴) ۱۸

۱- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل، $۴ \in (A \cup B)$ و $A \subseteq C$ درست است، اما $۳ \subseteq A$ درست نیست؛ چون ۳ عضو است و در رابطهٔ $\subseteq$ باید مجموعه داشته باشیم و $۲ \in (A \cup B)$ هم درست نیست، چون ۲ خارج از A و B است؛ پس می‌شود ۲ گزارهٔ نادرست.

۲- گزینهٔ ۱ اگر گزینه‌ها را بررسی کنیم، می‌بینیم که $\{۱\} \subseteq A$ نادرست است؛ چون $\{۱\}$ عضوی از مجموعهٔ A است. درستی بقیهٔ گزینه‌ها را خودتان بررسی کنید!

۳- گزینهٔ ۱ (۱) B زیرمجموعهٔ C نیست، چون ۲ عضو مجموعهٔ B است که آن را در C نمی‌بینیم (به عنوان عضو نمی‌بینیم).

(۲) A زیرمجموعهٔ B است، چون تنها عضو A را در B می‌بینیم.

(۳) A عضو B هم هست، چون A را به صورت عضو در B داریم، ببینید:

$$B = \{۲, \underbrace{\{۲\}}_{\text{این A است}}\} = \{۲, A\}$$

(۴) B عضو C است، چون خود B را به طور کامل در C داریم:

$$C = \{\{۲\}, \{۲, \{۲\}\}\} = \{A, B\}$$

۴- گزینهٔ ۴ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) مجموعهٔ $A - B$ شامل عضوهایی از A است که در B نباشند. فقط عضو سوم یعنی $\{۱,۲,۳\}$ در مجموعهٔ A در B نیست (اعضای ۱ و ۲ از A، در B هم هستند)، پس $A - B = \{\{۱,۲,۳\}\}$ که با C مساوی نیست.

نکته در واقع $A - B = \{C\}$ و (۴) درست است.

(۲) $B - C$ مجموعهٔ اعضایی است که در B هستند و در C نیستند که $\{۱,۲\}$ این‌طور است، پس $B - C = \{\{۱,۲\}\}$ و تهی نیست.

(۳) همان‌طور که دیدیم $B - C = \{\{۱,۲\}\}$، پس (۴) درست شد!

۵- گزینهٔ ۲ **راه اول** کافی است $A \cup B$ و $A \cap B$ را پیدا کنیم:

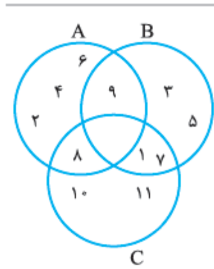
$$\begin{matrix} A = \{۱,۲,۳,۴\} \\ B = \{۲,۴,۶,۸\} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۶,۸\} \\ A \cap B = \{۲,۴\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{۱,۳,۶,۸\} \Rightarrow \text{چهار عضو}$$

راه دوم می‌دانیم $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$، پس:

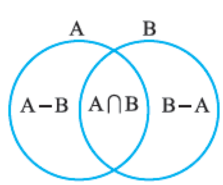
$$\begin{matrix} A - B = \{۱,۳\} \\ B - A = \{۶,۸\} \end{matrix} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{۱,۳,۶,۸\} \Rightarrow \text{چهار عضو}$$

۶- گزینهٔ ۱ بهتر است مجموعه‌ها را با نمودار ون نشان دهیم که بررسی گزینه‌ها راحت‌تر باشد:

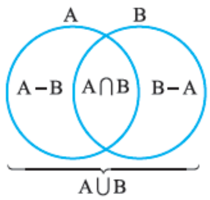


حالا برویم سراغ گزینه‌ها: در (۱)، $n((A \cup B) - C) = ۶$، پس (۱) نادرست است. درستی بقیهٔ گزینه‌ها را خودتان بررسی کنید.

۷- گزینهٔ ۲ $A - (A - B)$ همان $A \cap B$ است. $B - (B - A)$ نیز همان $A \cap B$ است. علتش هم این نمودار، پس در واقع اجتماع $A \cap B$ با خودش را می‌خواهیم که همان $A \cap B = \{۳,۶\}$ می‌شود که دو عضو دارد.



۸- گزینهٔ ۳ بیایید اول سؤال را با نمودار بررسی کنیم:



$A - (A \cap B)$ می‌شود $A - B$. حالا سؤال تفاضل $A \cup B$ و این مجموعه را می‌خواهد، یعنی $(A \cup B) - (A - B)$ که با توجه به شکل می‌شود B، پس:

$$(A \cup B) - [\underbrace{A - (A \cap B)}_{(A-B)}] = (A \cup B) - (A - B) = B = \{۲,۴,۵,۶\}$$

و دارای ۴ عضو است.

۹- گزینهٔ ۲ $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ یعنی اعداد صحیحی که طبیعی نیستند که می‌شود مجموعهٔ $\{۰,-۱,-۲,...\}$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$، یعنی اعداد صحیحی که حسابی نیستند که می‌شود مجموعهٔ $\{-۱,-۲,...\}$، پس حاصل $(\mathbb{Z} - \mathbb{N}) - (\mathbb{Z} - \mathbb{W})$ برابر است با مجموعهٔ $\{۰\}$ که یک عضو دارد.

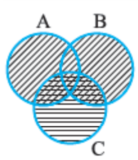
۱۰- گزینهٔ ۴ اعضای A عبارت‌اند از: $A = \{۱۰,۱۱,۱۲,...,۹۸,۹۹\}$

حالا B شامل ۷ برابر اعضای A است: $B = \{۷۰,۷۷,۸۴,...,\underbrace{۶۹۳}_{۷\times۹۹}\}$

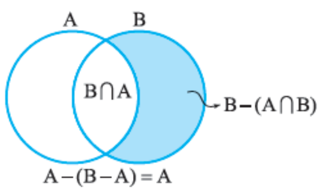
عضوهای مشترک A و B عبارت‌اند از اعداد دورقمی مضرب ۷ با شروع از ۷۰، یعنی ۷۰,۷۷,۸۴,۹۱,۹۸؛ یعنی $A \cap B$ پنج عضو دارد.

۱۱- گزینهٔ ۲ بدون شرح!

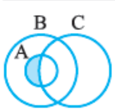
۱۲- گزینهٔ ۴ اگر $A \cup B$ را با هاشور (////) و C را با هاشور (☰) مشخص کنیم ناحیهٔ مشخص‌شده می‌شود: $(A \cup B) \cap C$.



۱۳- گزینهٔ ۱ طبق نمودار روبه‌رو $B - (A \cap B)$ همان $B - A$ است. پس $A - (B - A)$ را می‌خواهیم و چون A و $B - A$ اشتراکی ندارند، جواب تفاضل همان A می‌شود: $A - (B - A) = A$

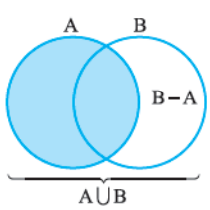


۱۴- گزینهٔ ۱ اول یک نمودار را با توجه به شرایط سؤال می‌کشیم:

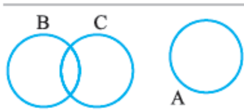


دقت کنید که A زیرمجموعهٔ B است و باید درون B قرار گیرد. حالا $A \cap (B - C)$ ناحیهٔ سایه‌زده از A است و $A \cap B \cap C$ ناحیهٔ سایه‌نخوردهٔ A است که اشتراکی ندارند، پس جواب می‌شود همان $A \cap (B - C)$ که با توجه به شکل $A \cap C'$ است (همان $A - C$).

۱۵- گزینهٔ ۱ $A \cup (B - A)$ همان $A \cup B$ است: پس سؤال گفته $A \cup B = B$ و در درس‌نامه دیدیم که این یعنی $A \subseteq B$.



۱۶- گزینهٔ ۳ A با هیچ‌کدام از مجموعه‌های B و C اشتراک ندارد. این‌شکلی:



پس A با اجتماع آن‌ها هم اشتراکی ندارد: $A \cap (B \cup C) = \varnothing$

در مورد اشتراک B و C نظری نمی‌توان داد (۱ و ۲ نیستند) و چون $B-C$ قسمتی از B است با A اشتراکی ندارد.

۱۷- گزینهٔ ۳ مجموعه‌های $A_۴$ و $A_۳$ را می‌نویسیم (به جای n اعداد ۳ و ۴ را می‌گذاریم): $A_۳=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\geq -۳, ۲^m\leq ۳\}=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\}$

$$A_۴=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\geq -۴, ۲^m\leq ۴\}=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

پس $A_۳\subseteq A_۴$ و اشتراک آن‌ها می‌شود، $A_۳$ که ۵ عضو و ۳۲ زیرمجموعه دارد.

۱۸- گزینهٔ ۳ $\sqrt{۲}$ را که می‌دانیم گنگ است، اما سایر اعداد که نمایش اعشاری با ارقام مشخص دارند گویا هستند.

۱۹- گزینهٔ ۲ درستی ۲ را در درس‌نامه دیدیم.

۲۰- گزینهٔ ۳ تمام اعداد حسابی، صحیح هم هستند، پس $\mathbb{W}-\mathbb{Z}$ تهی است. تمام اعداد طبیعی، گویا هستند پس $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}'$ عضوی ندارد. عدد صحیح بین ۲ و ۳ هم نداریم. اما در ۳ اعداد طبیعی بین ۲ و ۲− عبارت‌اند از: $\{۱,۲\}$

۲۱- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و هر کدام از مجموعه‌های داده‌شده درستی هر کدام از گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲ نادرست $\underbrace{\mathbb{W}-\mathbb{Z}}_{\varnothing}=\underbrace{\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'}_{\mathbb{Q}}$ ۱ نادرست $\underbrace{\mathbb{Z}\cap\mathbb{W}}_{\mathbb{W}}=\mathbb{N}$

نادرست $\underbrace{\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}}_{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ نادرست $\underbrace{\mathbb{W}\cap\mathbb{Q}}_{\mathbb{W}}=\mathbb{N}$

پس هر چهار گزاره نادرست‌اند.

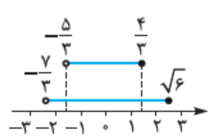
۲۲- گزینهٔ ۴ درستی هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲ درست $\underbrace{\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'}_{\varnothing}\subseteq\mathbb{Q}'$ ۱ درست $\underbrace{\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}}_{\mathbb{Q}'}\subseteq\mathbb{Q}'$

۴ نادرست $\underbrace{\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathbb{Q}$ ۳ درست $\underbrace{\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'}_{\mathbb{Q}}\not\subseteq\mathbb{Q}'$

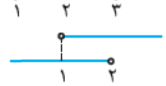
۲۳- گزینهٔ ۱ از بین گزاره‌های داده‌شده $\frac{۴}{۳}\in[\frac{۱}{۲},۲)$ و $\{۰,۱\}\subseteq[-۱,۲)$ درست‌اند. خودتان بگویید چرا بقیه نادرست‌اند!

۲۴- گزینهٔ ۲ $A-B$ شامل اعضایی است که در A هستند و در B نیستند. اگر محور را رسم کنیم، می‌بینیم اعداد ± ۲ در A هستند و در B قرار نیستند؛ بنابراین ۲ عدد صحیح در $A-B$ هست.

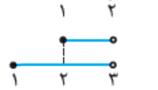


۲۵- گزینهٔ ۳ اول حاصل هرکدام از گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

۱ بازهٔ $[۲,۳)$ است:



۲ بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ یعنی کل $\mathbb{R}$ است:



۳ به صورت $[۱,۲]$ است:

۴ بازهٔ $(-۳,۲)$ است:

پس ۳ بسته است.

۲۶- گزینهٔ ۳ اول حاصل هر کدام از گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

۱ $(-۳,۱)\cup(-۲,۲)=(-۳,۲)$

۲ $(-۴,-۲)-(-۳,-۲)=(-۴,-۳]$

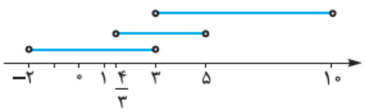
۳ $(۱,۵)-(۳,۴)=(۱,۳]\cup[۴,۵)$

۴ $(۱,۵)\cap(۳,۷)=(۳,۵)$

پس حاصل ۳ یک بازه نیست بلکه اجتماع دو بازه است.

۲۷- گزینهٔ ۴ $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح و $\mathbb{W}$ مجموعهٔ عددهای حسابی‌اند، پس $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ شامل اعداد صحیح منفی است و اشتراک آن با بازهٔ $[-۵,۴)$ به صورت $\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱\}$ است که ۵ عضو دارد.

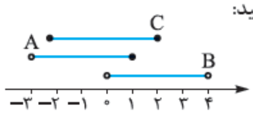
۲۸- گزینهٔ ۳ از محور اعداد کمک می‌گیریم:



داریم:

$$(-۲,۳)\cup[\underbrace{(\frac{۴}{۳},۵)\cap(۳,۱۰)}_{(۳,۵)}]=(-۲,۳)\cup(۳,۵)=(-۲,۵)-\{۳\}$$

۲۹- گزینهٔ ۲ بازه‌ها را روی محور ببینید:



پس $A\cup C$ به صورت بازهٔ $(-۳,۲]$ است و اگر از آن B را برداریم، تفاضل موردنظر $(-۳,۰]$ خواهد بود که ۳ عضو صحیح $\{-۲,-۱,۰\}$ را دارد.

۳۰- گزینهٔ ۳ اول محدودهٔ x را در هر مجموعه تعیین می‌کنیم:

$$A=\{x\,|\,۱<\frac{۲x+۱}{۳}\leq ۵, x\in\mathbb{Q}\}\Rightarrow ۱<\frac{۲x+۱}{۳}\leq ۵$$

$$\Rightarrow ۳<۲x+۱\leq ۱۵\Rightarrow ۲<۲x\leq ۱۴\Rightarrow ۱<x\leq ۷$$

$$\Rightarrow A=\{x\,|\,۱<x\leq ۷, x\in\mathbb{Q}\}$$

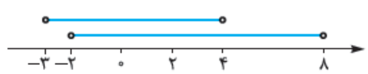
$$B=\{x\,|\,۱<\frac{x+۵}{۷}<۳, x\in\mathbb{N}\}\Rightarrow ۱<\frac{x+۵}{۷}<۳$$

$$\Rightarrow ۷<x+۵<۲۱\Rightarrow ۲<x<۱۶$$

$$\Rightarrow B=\{x\,|\,۲<x<۱۶, x\in\mathbb{N}\}=\{۳,۴,۵,\dots,۱۴,۱۵\}$$

حالا چون اعضای B اعداد طبیعی هستند، پس $A\cap B=\{۳,۴,\dots,۷\}$ حالا C را روی محور مشخص می‌کنیم و اشتراک $A\cap B$ و C را پیدا می‌کنیم:

$C=(-۲,۸)-(-۳,۴)\Rightarrow$

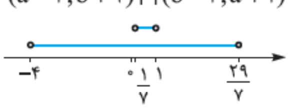


$\Rightarrow C=[۴,۸)$

پس $A\cap B=\{۳,۴,\dots,۷\}$ و $C=[۴,۸)$، پس $(A\cap B)\cap C=\{۴,۵,۶,۷\}$ یعنی ۴ عضو مشترک داریم.

۳۱- گزینهٔ ۱ اجتماع $(b,۲)\cup(۱,a)$ برابر $(-۲,\frac{۱۵}{۷})$ شده است، پس کوچک‌ترین عدد یعنی b باید برابر ۲− و بزرگ‌ترین عدد یعنی a باید برابر $\frac{۱۵}{۷}$ باشد. حالا مجموعهٔ خواسته‌شده را روی محور نشان می‌دهیم:

$$(a-۲,b+۳)\cap(b-۲,a+۲)=(\frac{۱}{۷},۱)\cap(-۴,\frac{۲۹}{۷})$$



پس اشتراک دو بازه برابر $(\frac{۱}{۷},۱)$ است که در ۱ نشان داده شد.

۳۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل داده‌شده در سؤال $A\cap B$ به صورت $(-\sqrt{۳},\sqrt{۵})$ است، پس داریم:

$$(A\cap B)-C=(-\sqrt{۳},\sqrt{۵})-(-۲,۲]=(۲,\sqrt{۵})$$

که شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۳۳- گزینهٔ ۴ اگر بخواهیم اجتماع دو بازهٔ $(-\infty,۲m-۱]$ و $(m+۲,+\infty)$ برابر $\mathbb{R}$ شود، باید طبق شکل‌های زیر:

یا $m+۲$ مساوی $۲m-۱$ باشد یا $m+۲$ کوچک‌تر از $۲m-۱$، پس می‌توانیم بنویسیم: $m+۲\le ۲m-۱ \Rightarrow -m\le -۳ \Rightarrow m\ge ۳$

۳۴- گزینهٔ ۲ x متعلق به بازهٔ $[۲x-۱,۳x+۲)$ است؛ بنابراین باید $۲x-۱\le x<۳x+۲$ باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} ۲x-۱\le x \Rightarrow x\le ۱ \\ x<۳x+۲ \Rightarrow ۲x>-۲ \Rightarrow x>-۱ \end{cases} \Rightarrow -۱<x\le ۱$$

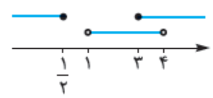
پس فقط دو مقدار صحیح صفر و ۱ داریم.

۳۵- گزینهٔ ۳ از $۳\in(b-۱,۲b+۱)$ نتیجه می‌گیریم: $b-۱<۳<۲b+۱$ و از $۲\notin(b-۱,۲b+۱)$ نتیجه می‌گیریم یا $۲\le b-۱$ یا $۲\ge ۲b+۱$، این نامعادله‌ها را حل می‌کنیم:

$$b-۱<۳<۲b+۱ \Rightarrow \begin{cases} b-۱<۳ \Rightarrow b<۴ \\ ۲b+۱>۳ \Rightarrow b>۱ \end{cases} \Rightarrow ۱<b<۴ \quad (I)$$

$$\begin{cases} ۲\le b-۱ \Rightarrow b\ge ۳ \\ \text{یا} \\ ۲\ge ۲b+۱ \Rightarrow b\le \frac{۱}{۲} \end{cases} \quad (II)$$

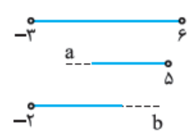
حالا اشتراک (I) و (II) را به دست می‌آوریم:



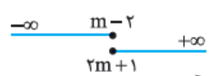
پس محدودهٔ قابل قبول b برابر است با: $[۳,۴)$

۳۶- گزینهٔ ۱ به شکل دقت کنید:

حاصل اجتماع تا ۶ رفته است، پس حتماً $b=۶$ است. از طرف دیگر اجتماع از -۳ شروع شده، پس $a=-۳$ است. بنابراین بازه‌های اولیه $B=(-۳,۵)$ و $A=(-۲,۶)$ هستند و داریم: $ab=-۱۸$



۳۷- گزینهٔ ۴ اشتراک این دو بازه، تک‌عضوی است، پس باید با توجه به محور مقابل، $m-۲=۲m+۱$ باشد:



$$\Rightarrow m=-۳ \Rightarrow m-۲=۲m+۱=a=-۵$$

و داریم: $a+m=-۸$

۳۸- گزینهٔ ۲ بازهٔ اشتراک دو بازهٔ $(a,b)\cap(-۱,۲]$ با عدد $a+۱$ شروع می‌شود، پس یا $a+۱=a$ است که ممکن نیست یا $a+۱=-۱$ است که در این صورت $a=-۲$. حالا به جای a می‌گذاریم -۲:

$(-۱,۲]\cap(-۲,b)=(-۱,۱)$

و چون آخر بازهٔ اشتراک ۱ است، پس باید $b=۱$ باشد، بنابراین:

$a+b=(-۲)+۱=-۱$

۳۹- گزینهٔ ۲ بیایید چند بازهٔ اول برای B را بنویسیم:

$n=۱ \Rightarrow B=(-۲,۲)\ ,\ n=۲ \Rightarrow B=(-۱,۳)$

$n=۳ \Rightarrow B=(۰,۴)\ ,\ n=۴ \Rightarrow B=(۱,۵)$

می‌بینیم پس از $n=۴$ و به بعد، شروع بازهٔ B عددی بعد از ۱ است و قطعاً با $A=[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$ اشتراک ندارد، پس فقط $n=۱,۲,۳$ قابل‌قبول‌اند و جمع مقادیر n می‌شود $۱+۲+۳=۶$.

۴۰- گزینهٔ ۱ بازهٔ A حتماً با $(-۱,۲)$ اشتراک دارد و حتماً قسمتی دارد که در $(-۱,۲)$ نیست. پس از بین گزینه‌ها فقط ۱ مناسب است.

۴۱- گزینهٔ ۳ مضرب‌های صحیح عدد ۴ که بزرگ‌تر از ۱۰ هستند، عبارت‌اند از $...,۱۲,۱۶,۲۰,۲۴$ و چون سه مضرب می‌خواهیم، پس $۱۲,۱۶,۲۰$ حالا باید بازهٔ $(۱۰,m)$ شامل هر سه عدد بالا باشد، پس $m>۲۰$. از طرف دیگر چون فقط ۳ مضرب می‌خواهیم باید $m\le ۲۴$ باشد، پس $۲۰<m\le ۲۴$ و در نتیجه مقدارهای صحیح m برابرند با $۲۱,۲۲,۲۳,۲۴$ که می‌شوند چهارتا.

۴۲- گزینهٔ ۱ اشتراک $(-\infty,۴]\cap(۳-a,+\infty)$ برابر تهی است، پس باید $۳-a\ge ۴$ باشد؛ یعنی $a\le -۱$، پس حداکثر طول بازهٔ $(-۱,a+۵)$ به ازای $a=-۱$ به دست می‌آید که می‌شود $(-۱,۴)$ که دارای اعداد طبیعی $۱,۲,۳$ یعنی ۳ عدد طبیعی است.

۴۳- گزینهٔ ۲ چون $(۴a-۲,a+۱)\subseteq(-۲,۲)$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۴a-۲\ge -۲ \Rightarrow a\ge ۰ \\ a+۱\le ۲ \Rightarrow a\le ۱ \end{cases} \Rightarrow ۰\le a\le ۱$$

حالا حدود عدد $\frac{۵a}{۲}+۱$ را پیدا می‌کنیم:

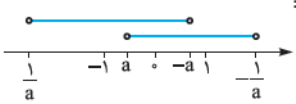
$$۰\le a\le ۱ \Rightarrow ۰\le \frac{۵}{۲}a\le \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۱\le \frac{۵a}{۲}+۱\le \frac{۷}{۲}$$

حالا با توجه به این‌که $۱\le \frac{۵a}{۲}+۱\le ۳/۵$ است، حتماً متعلق به بازهٔ $[۱,۴]$ هست.

۴۴- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که $-۱<a<۰$ است، داریم:

$۰<-a<۱,\ \frac{۱}{a}<-۱,\ -\frac{۱}{a}>۱$

بازه‌ها را روی محور مشخص می‌کنیم:



پس اشتراک دو بازه برابر است با $(a,-a)$.

۴۵- گزینهٔ ۱ چون $[-۲,۴)\cap[a+۲,۵)=[۳a-۱,۴)$ شده است، پس باید یا $۳a-۱$ برابر -۲ باشد و یا برابر $a+۲$، هر کدام را بررسی می‌کنیم:

$$۳a-۱=a+۲ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \Rightarrow [-۲,۴)\cap[\frac{۷}{۲},۵)=[\frac{۷}{۲},۴) \checkmark$$

$$۳a-۱=-۲ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow [-۲,۴)\cap[\frac{۵}{۳},۵)=[-۲,۴) \times$$

پس باید $a=\frac{۳}{۲}$ باشد و در نتیجه $(a-۲,a)=(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ و از بین گزینه‌ها فقط ۱ یعنی صفر، عضو این بازه است.

۴۶- گزینهٔ ۱ $(\frac{۲}{n+۱},\frac{۵}{۲n+۱})$ وقتی بازه است که $\frac{۲}{n+۱}<\frac{۵}{۲n+۱}$ باشد، پس وقتی بازه نیست که $\frac{۲}{n+۱}\ge \frac{۵}{۲n+۱}$ باشد، در نتیجه:

$$\frac{۲}{n+۱}\ge \frac{۵}{۲n+۱} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{n+۱}{۲}\le \frac{۲n+۱}{۵}$$

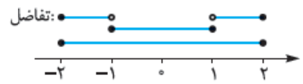
$$\Rightarrow ۵n+۵\le ۴n+۴ \Rightarrow n\le -۳$$

حالا چون $n\le -۳$ شده است، مقدار طبیعی برای n وجود ندارد.

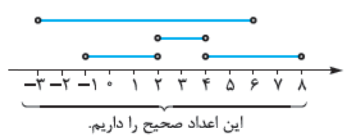
۴۷- گزینهٔ ۲ اول A_1، A_2 و A_3 را پیدا می‌کنیم. $A_i=(-i,i)$؛ پس:
$A_1=(-1,1)\,,\,A_2=(-2,2)\,,\,A_3=(-3,3)$
حالا حاصل عبارت خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:
$$\overbrace{(A_1\cup A_2)}^{(-2,2)}\cap\overbrace{A_3}^{(-3,3)}=(-2,2)$$

۴۸- گزینهٔ ۲

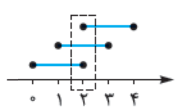
۴۹- گزینهٔ ۱ بازه‌های A_1، A_2، A_5 و A_7 را می‌نویسیم:
$$A_i=[-i,\frac{9-i}{2}]\Rightarrow A_1=[-1,4]\,,\,A_2=[-2,\frac{7}{2}]$$
$$A_5=[-5,2]\,,\,A_7=[-7,1]$$
پس: $A_2\cap A_5=[-2,\frac{7}{2}]\cap[-5,2]=[-2,2]$
$A_1\cap A_7=[-1,4]\cap[-7,1]=[-1,1]$
تفاضل آن‌ها برابر است با: $[-2,2]-[-1,1]=[-2,-1)\cup(1,2]$



۵۰- گزینهٔ ۳ بیایید ۴ بازهٔ اول را بنویسیم:
$$A_n=((-1)^n n,2n)\Rightarrow A_1=(-1,2),A_2=(2,4)$$
$$A_3=(-3,6)\,,\,A_4=(4,8)$$
اجتماع این‌ها می‌شود $(-3,8)$ که در آن اعداد صحیح $-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7$ هستند، یعنی ۱۰ عدد صحیح دارد.



۵۱- گزینهٔ ۳ بیایید مجموعه‌های A_1 تا A_4 را بنویسیم:
$$A_n=[n-1,n+1]$$
$$A_1=[0,2],A_2=[1,3],A_3=[2,4],A_4=[3,5]$$
اشتراک ۳تای اول برابر است با:
$$\bigcap_{n=1}^{3}A_n=\{2\}$$



اجتماع ۴تای اول هم برابر است با: $\bigcup_{n=1}^{4}A_n=[0,5]$
و تفاضل این‌ها $[0,5]-\{2\}$ است که در ۳ آمده است.

۵۲- گزینهٔ ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:
در ۱ اعداد صحیح کم‌تر از ۱۰۰ تا $-\infty$ می‌روند، پس نامتناهی است.
در ۳ اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ نامتناهی‌اند. چون بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، پس نامتناهی است. در ۴ هم بی‌شمار عدد حقیقی در $(1,2)$ وجود دارد، پس نامتناهی است؛ اما در ۲ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰، دقیقاً از ۱ تا ۹۹ هستند که مجموعه‌ای متناهی با ۹۹ عضو است.

۵۳- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ اتم‌ها، درختان یا حشرات قطعاً انتها دارد و تعداد اعضای آن‌ها عددی مشخص است (هر چه‌قدر بزرگ باشد باز هم محدود است)؛ اما تعداد تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز $(1,2)$ تا بی‌نهایت می‌رود و متناهی نیست.

۵۴- گزینهٔ ۴ فقط یک خط با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ وجود دارد. اما تعداد «مثلث‌ها با مساحت ۶»، «مربع‌ها با مساحت ۶ و رأس روی مبدأ» و «خط‌های گذرنده از مبدأ» نامتناهی است.

۵۵- گزینهٔ ۳ مضارب ۶، کلیهٔ اعداد به صورت $6k$ (هم مثبت و هم منفی) هستند. (نامتناهی)
مضارب مشترک ۶ و ۷، تمام اعداد به صورت $42k$ هستند. (نامتناهی)
مقسوم‌علیه‌های مشترک ۶ و ۷ اعداد ±1 هستند. (متناهی است)
مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱ هم تهی است. چون ۱ هیچ مقسوم‌علیه اولی ندارد.

۵۶- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ اعداد اول کم‌تر از ۲۰، هشت‌عضوی است:
$$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$
مجموعهٔ اعداد طبیعی مربع کامل و کم‌تر از ۷۰ نیز هشت‌عضوی است:
$$B=\{1,4,9,16,25,36,49,64\}$$
مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶ نیز هشت عضو دارد:
$$C=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$$
اما مجموعهٔ کسرهای بین صفر و ۱ با مخرج ۷ دارای شش عضو است:
$$D=\{\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\dots,\frac{6}{7}\}$$

۵۷- گزینهٔ ۱ اعداد $2k+6=2(k+3)$ همواره زوج‌اند. اعداد $3k+1$ یا $3k-1$ می‌توانند زوج یا فرد باشند. اما اعداد $2k-5$ همیشه فرد هستند، چون:
$$2k-5=2k-6+1=2(\overbrace{k-3}^{k'})+1=2k'+1$$

۵۸- گزینهٔ ۳ بزرگ‌ترین عدد صحیح یا بزرگ‌ترین عدد بازهٔ $(2,+\infty)$ وجود ندارد، پس ۱ و ۲ نادرست است. بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر از ۳ هم وجود ندارد، پس ۴ نادرست است. ۳ بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر یا مساوی ۴، برابر ۴ است و وجود دارد!

۵۹- گزینهٔ ۳ $A=\{x\,|\,x=2n-1,n\in\mathbb{N}\}$ یعنی مجموعهٔ اعداد فرد که نامتناهی است، پس ۱ نادرست است.
$B=\{x\,|\,x=\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}\}$ به صورت $B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\}$ و نامتناهی است، پس ۲ نادرست است. $C=\{x\,|\,x=\frac{(-1)^n}{2},n\in\mathbb{N}\}$ برابر است با $C=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$ که دو عضو دارد، پس متناهی است، یعنی جواب، ۳ است. در مورد ۴ هم خودتان بررسی کنید.

۶۰- گزینهٔ ۳ ۱ درست است، چون دو عدد طبیعی، دو عدد گویا هم هستند و بینشان بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. ۲ را هم در درس‌نامه دیدیم که درست است، یعنی بین دو هر عدد گنگ بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد. ۳ نادرست است. چون مثلاً بین دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد. در مورد درستی ۴ هم خودتان توضیح دهید!

۶۱- گزینهٔ ۲ A متناهی و B نامتناهی است. پس $A\cup B$ و $B-A$ نامتناهی‌اند چون اولی شامل تمام B می‌شود و دومی دقیقاً قسمتی از B را دارد که در A نیست. اما $A-B$ و $A\cap B$ حتماً متناهی‌اند چون قسمتی از A هستند.

۶۲- گزینهٔ ۴ ۱ نادرست است. مثلاً اگر A مجموعهٔ اعداد زوج باشد، A' مجموعهٔ اعداد فرد است و هر دو نامتناهی‌اند.
در ۲ اگر B نامتناهی باشد، زیرمجموعهٔ آن یعنی A می‌تواند متناهی باشد. مثلاً B اعداد فرد ولی $A=\{1\}$ زیرمجموعهٔ آن متناهی است.
۳ نیز نادرست است. مثلاً A مجموعهٔ مضارب ۵ و B مجموعهٔ اعداد اول است و هر دو نامتناهی‌اند و اجتماع آن‌ها $\mathbb{N}$ نیست.
۴ درست است. وقتی A نامتناهی می‌شود حتماً B هم نامتناهی است چون B تمام عضوهای A را دارد!

۶۳- گزینهٔ ۱ درست است، مثلاً مجموعهٔ $A=\{۰,۱,۲,۳,...\}$ و $B=\{۰,-۱,-۲,...\}$ هر دو نامتناهی‌اند، اما اشتراکشان برابر $\{۰\}$ و متناهی است.

۲ هم درست است، چون مجموعه‌های $A=\{۱,۴,۷,۱۰,...\}$، $B=\{۲,۵,۸,۱۱,...\}$ و $C=\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$ هر سه نامتناهی‌اند و هیچ‌کدام با هم اشتراک ندارند.

۳ نادرست است، چون اگر $A\subseteq B$ و A نامتناهی باشد، حتماً B هم نامتناهی است. در مورد درستی ۴ هم خودتان توضیح دهید.

۶۴- گزینهٔ مجموعهٔ A یعنی اعداد فرد برابر است با $A=\{۱,۳,۵,۷,...\}$ و مجموعهٔ B یعنی اعداد اول برابر است با $B=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$ حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $A-B=\{۱,۹,۱۵,...\}$ نامتناهی است، $B-A=\{۲\}$ که هم متناهی است و هم غیرتهی، پس جواب ۲ است. در مورد ۳ و ۴ هم خودتان توضیح دهید.

۶۵- گزینهٔ A شامل تمام اعداد صحیح صفر، ±۳، ±۶، ±۹ و... است و در B اعداد صحیح بین -۹۹ تا ۹۹ را داریم. پس $A\cap B$ شامل اعداد صحیح مضرب ۳ بین -۹۹ تا ۹۹ است که تعدادشان محدود می‌شود (۶۷تا هستند).

در بررسی گزینه‌ها، $A\cap B'$ نامتناهی است (مضارب بزرگ‌تر از ۱۰۰ عدد ۳ را دارد)؛ همچنین $A'\cup B$ نامتناهی است (اعداد صحیح خیلی بزرگ که مضرب ۳ نیستند و در A هستند)؛ $A\cup B$ نیز همین‌طور است.

۶۶- گزینهٔ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ نامتناهی

۲ $\overbrace{(\mathbb{Q}-\mathbb{R})}^{\varnothing}\cap\overbrace{(\mathbb{Q}'-\mathbb{Z})}^{\mathbb{Q}'}=\varnothing\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$ متناهی

۳ $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})\cap\overbrace{(\mathbb{Q}-\mathbb{Q}')}^{\mathbb{Q}}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰\}\cap\mathbb{Q}$
$=\{...,-۳,-۲,-۱,۰\}$ نامتناهی

۴ $\overbrace{(\mathbb{N}-\mathbb{Q})'}^{\varnothing'=U}\cap\mathbb{Z}'=U\cap\mathbb{Z}'=\mathbb{Z}'$ نامتناهی

حواستان باشد که ۲ برابر است با تهی و مجموعهٔ تهی صفر عضو دارد و متناهی است.

۶۷- گزینهٔ وقتی متمم مجموعهٔ A نسبت به مجموعهٔ B قابل تعریف است که $A\subseteq B$ باشد، که از بین گزینه‌ها فقط ۳ چنین است.

۶۸- گزینهٔ با توجه به $U=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۴\}$، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. $A'=\{۴,۵\}\,,\,B'=\{۱,۳,۵\}$

۱ $B'-A'=\{۱,۳\}$ ✓

۲ $A'\cap B'=(A\cup B)'$ $\Rightarrow$ همواره درست است ✓

۳ $A-(A\cap B)=A-B=\{۱,۳\}$ ✓

۴ $A'\cup B'=\{۱,۳,۴,۵\}$ نادرست

۶۹- گزینهٔ داریم: $U=\{۱,۲,۳,۵,۶,۷,۸,۹\}$، $A=\{۱,۳,۷,۸\}$، $B=\{۳,۶\}$ و $C=\{۵,۹\}$، پس:

$$\begin{cases}B'=\{۱,۲,۵,۷,۸,۹\}\\ C'=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸\}\end{cases}\Rightarrow B'\cap C'=\{۱,۲,۷,۸\}$$

حالا $(B'\cap C')\cap A$ را پیدا می‌کنیم:

$\{۱,۲,۷,۸\}\cap\{۱,۳,۷,۸\}=\{۱,۷,۸\}$ سه عضو دارد

۷۰- گزینهٔ اول محدودهٔ اعضای مجموعهٔ A را پیدا می‌کنیم.

$A=\{۲x+۳\,|\,-۱\le x<۷\}$

$-۱\le x<۷\Rightarrow -۲\le ۲x<۱۴\Rightarrow ۱\le ۲x+۳<۱۷\Rightarrow A=[۱,۱۷)$

پس A' برابر است با: $(-\infty,۱)\cup[۱۷,+\infty)$

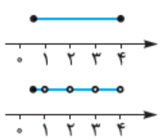
۷۱- گزینهٔ $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ برابر است با: $\{-۱,-۲,-۳,-۴,...\}$

پس متمم مجموعهٔ $A=\{-۱,-۲,-۳\}$ برابر است با: $\{-۴,-۵,...\}$

(حواستان باشد که نوع نوشتن $\{...,-۵,-۴\}$ یا $\{-۴,-۵,...\}$ با هم فرقی ندارد!)

۷۲- گزینهٔ اول بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۴]$، را رسم می‌کنیم:

اگر اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را حذف کنیم، داریم:

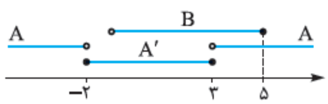


این مجموعه از اجتماع ۴ بازهٔ $(۳,۴)$، $(۲,۳)$، $(۱,۲)$ و $[\frac{۱}{۲},۱)$ ساخته شده است.

۷۳- گزینهٔ اول بازه‌ها را روی محور رسم می‌کنیم:

$A'\cup B=[-۲,۳]\cup(-۱,۵]=[-۲,۵]$, $A\cap B=(۳,۵]$

پس بزرگ‌ترین عنصر هر دو مجموعه، ۵ است و اختلاف آن‌ها صفر می‌شود.



۷۴- گزینهٔ اول با توجه به $U=(۲,+\infty)$، $B=(۳,۵]$، $A=\{x|x\le۹,x\in U\}=(۲,۹]$ و $C=\{x|x\ge۷\}=[۷,+\infty)$، مجموعه‌های B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$B'=(۲,۳]\cup(۵,+\infty)$

$C'=(۲,۷)$

پس حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$(A-C')\cap B'=((۲,۹]-(۲,۷))\cap((۲,۳]\cup(۵,+\infty))$
$=([۷,۹]\cap((۲,۳]\cup(۵,+\infty))=[۷,۹]$

۷۵- گزینهٔ عضوهای A، اعدادی هستند که مربعشان از ۵ بیشتر نباشد، پس با توجه به مجموعهٔ مرجع داریم: $A=\{۰,۱,-۱,۲,-۲\}$

در مجموعهٔ B هم باید xهای مثبت قرار دهیم که $۵-\sqrt{x}$ مربع کامل شود، پس: $B=\{۱\}$

بنابراین: $A'=U-A=\{۳,۴\}$

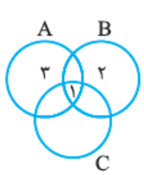
$B-A=\varnothing\Rightarrow A'-(B-A)=\{۳,۴\}-\varnothing=\{۳,۴\}$

یعنی دوعضوی است.

۷۶- گزینهٔ ۱ درست است. می‌دانیم اگر در رابطهٔ زیرمجموعه‌بودن، مجموعه‌ها را متمم کنیم جهت، برعکس می‌شود یعنی از رابطهٔ $A\subset B$ نتیجه می‌شود $B'\subset A'$. (خیلی هم مهم است، حتماً یادمان بماند!)

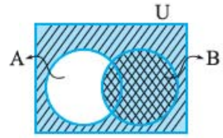
۲ درست است. اگر $A-B$ تهی باشد، تمام اعضای A در B هستند و در نتیجه A زیرمجموعهٔ B خواهد بود.

۳ نادرست است. اگر $A\cap C=B\cap C$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت A با B برابر است. مثلاً این را ببینید: $A\cap C=B\cap C=\{۱\}$ اما $A\neq B$



۴ درست است. اگر اشتراک A و B برابر A باشد یعنی تمام اعضای A با B مشترک‌اند، پس A زیرمجموعهٔ B است.

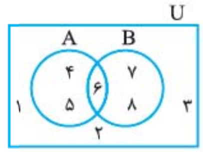
۷۷- گزینهٔ ۲ در شکل روبه‌رو A' با هاشور (////) و B را با هاشور (\\\\) مشخص کرده‌ایم، پس ناحیهٔ سایه‌خورده می‌شود $A'\cup B$.



در واقع این متمم $(A-B)$ است که می‌شود:

$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$$

۷۸- گزینهٔ ۱ **راه اول** در شکل مقابل $A'=\{۱,۲,۳,۷,۸\}$ و $B-A=\{۷,۸\}$، پس:



$$A'\cap(B-A)'=\{۱,۲,۳,۷,۸\}\cap(\{۷,۸\})'$$
$$=\{۱,۲,۳,۷,۸\}\cap\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{۱,۲,۳\}$$

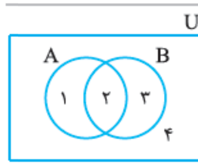
راه دوم اول از قوانین مجموعه استفاده می‌کنیم:

$$A'\cap(B-A)'=A'\cap(B\cap A')'=A'\cap(B'\cup A)$$
$$=A'\cap B'=(A\cup B)'$$

حالا از روی شکل $(A\cup B)'$ برابر است با: $\{۱,۲,۳\}$.

۷۹- گزینهٔ ۴ $A\cap B'$ همان $A-B$ است، پس $(A-B)-(B-A)$ را می‌خواهیم، چون $A-B$ و $B-A$ اشتراک ندارند، تفاضل آن‌ها همان $A-B$ خواهد بود.

۸۰- گزینهٔ ۱ **راه اول** اول نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



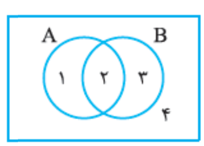
$B-A$ ناحیهٔ ۳ است؛ پس $(B-A)'$ نواحی ۱، ۲ و ۴ است؛ حالا $(B-A)'-A$ می‌شود $\{۱,۲,۴\}-\{۱,۲\}$، یعنی ۴.

صورت سؤال متمم این را می‌خواهد، متمم ناحیهٔ ۴ می‌شود نواحی ۱، ۲ و ۳ یعنی $A\cup B$.

راه دوم از روابط مجموعه‌ها داریم:

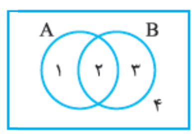
$$(B-A)'-A\xrightarrow{\text{تعریف تفاضل}}=(B\cap A')'\cap A'$$
$$\xrightarrow{\text{دمورگان}}=(B'\cup A)\cap A'$$
$$\xrightarrow{\text{پخشی}}=(B'\cap A')\cup\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}=B'\cap A'$$
$$\xrightarrow{\text{متمم}}=B\cup A$$

۸۱- گزینهٔ ۱ نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



$A-B$ ناحیهٔ ۱ است، پس $(A-B)'$ نواحی ۲، ۳ و ۴ است. $A\cup B$ نواحی ۱، ۲ و ۳ است و A' ناحیهٔ ۳ و ۴ است، بنابراین اشتراک این‌ها می‌شود ناحیهٔ ۳ که همان $B-A$ است.

۸۲- گزینهٔ ۴ طبق نمودار ون، $A-(A-B)$ همان $A\cap B$ است:

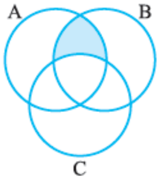


پس متمم $\underbrace{(A\cap B)\cup(A\cap B)'}_{\text{این برابر مجموعهٔ مرجع است}}$ را می‌خواهیم و جواب می‌شود $U'=\varnothing$.

۸۳- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $A\cup(A\cap B)$ همان A است. اجتماع $B\cap A$ و $B-A$ هم خود B است. پس $A'\cap B$ را می‌خواهیم که می‌شود $B-A$ یا $A'-B'$.

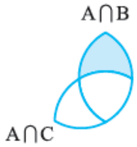
۸۴- گزینهٔ ۴ متمم $C\cup A'\cup B'$ می‌شود $(C\cup A'\cup B')'=C'\cap A\cap B$. حالا برویم سراغ نمودار:

(ناحیهٔ موردنظر در A و B هست و در C نیست.)

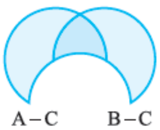


حالا گزینه‌ها:

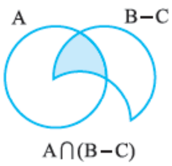
۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$



۲) $(A-C)\cup(B-C)$



۳) $A\cap(B-C)$



۴) $(A\cap B)-C$

۸۵- گزینهٔ ۴ باید x عضو هر دو مجموعهٔ $B-A$ و $C\cup D$ باشد، پس حتماً در B هست و در A نیست و در حداقل یکی از دو مجموعهٔ C و D هم هست و $x\in D$ می‌تواند نادرست باشد. در مورد ۴ دقت کنید که:

$$x\in C\cup D\Rightarrow x\notin(C\cup D)'=C'\cap D'$$

۸۶- گزینهٔ ۴ الف) نادرست است، چون مثلاً اگر A مجموعهٔ اعداد فرد باشد A' می‌شود مجموعهٔ اعداد زوج و A و A' هر دو نامتناهی‌اند.

ب) درست است، چون وقتی B متناهی است، یعنی تعداد اعضای B اعداد مشخص است (باپایان) پس از آن‌جا که $\mathbb{N}$ بی‌شمار عضو دارد، تعداد اعضای B' هم می‌شود بی‌شمار، یعنی B' نامتناهی است.

پ) درست است، چون ممکن است A نامتناهی و A' متناهی باشد، ولی B متناهی است، پس B' نامتناهی است و در نتیجه $A'\cup B'$ به علت نامتناهی‌بودن B'، حتماً نامتناهی است.

۸۷- گزینهٔ ۴ وقتی هر عضو B، عضوی از A هست، پس $B\subseteq A$.

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $A\cap B=B\,,\,A\cup B'=U\Rightarrow$ اشتراک دارند.

۲) $A-B=A\cap B'\,,\,B'\Rightarrow$ اشتراک دارند.

۳) $A',B'\xrightarrow{A'\subset B'}A'\Rightarrow$ اشتراک دارند.

۴) $A'\cup B'=(A\cap B)'=B'\,,\,B\Rightarrow$ اشتراک ندارند.

۸۸- گزینهٔ ۴ اگر به $A_۱=\{۱\}$، $A_۲=\{۲,۳\}$، $A_۳=\{۴,۵,۶\}$ و $A_۴=\{۷,۸,۹,۱۰\}$ توجه کنیم، می‌بینیم که مجموعهٔ A_n اولاً nعضو (عدد متوالی طبیعی) دارد و ثانیاً بزرگ‌ترین عضوش برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است، پس:

$$A_{۱۰}=\{۴۶,۴۷,\dots,۵۵\}$$

بنابراین $A'_{۱۰}$ برابر مجموعهٔ اعداد طبیعی است که با اعضای دورقمی‌اش کار

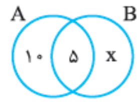
داریم. تعداد مضارب دورقمی ۵ برابر است با ۱۸، چون داریم $۱۰ \le ۵k \le ۹۵$ و در نتیجه $۲ \le k \le ۱۹$)؛ از این اعضا عدد ۵۰ و ۵۵، A هستند، پس A' دارای شانزده عدد دورقمی مضرب ۵ است.

۸۹- گزینهٔ ۴

راه اول می‌دانیم $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$، پس:

$$۳۰=۱۵+n(B)-۵ \Rightarrow n(B)=۲۰$$

راه دوم نمودار ون را رسم می‌کنیم:



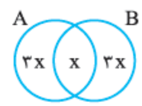
$$۱۰+۵+x=۳۰ \Rightarrow x=۱۵$$

$$n(B)=x+۵=۱۵+۵=۲۰$$

۹۰- گزینهٔ ۳ از نمودار ون استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=۱۴ \text{ سرود} \\ n(T)=۱۹ \text{ تئاتر} \\ n(S\cap T)=۵ \end{array}\right\} \Rightarrow n(T\cup S)=\text{عضو حداقل یکی از این گروه}=۱۴+۵+۹=۲۸$$

۹۱- گزینهٔ ۴ نمودار دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



تعداد اعضای A و B، برابر $n(A)=n(B)=۴x$ است و تعداد اعضای مشترک برابر x است. پس داریم:

$$n(AUB)=۳x+x+۳x=۷x$$

یعنی جواب، مضرب ۷ است که در بین گزینه‌ها فقط (۴) مناسب است.

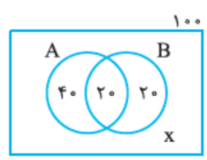
۹۲- گزینهٔ ۴ وقتی $n(A)=۱۰$ و $n(A')=۱۲$ است، چون A و A' هیچ عضو مشترکی ندارند، پس:

$$n(U)=n(A\cup A')=n(A)+n(A')=۱۰+۱۲=۲۲$$

پس حالا که $n(B)=۷$ است، در نتیجه:

$$n(B')=n(U)-n(B)=۲۲-۷=۱۵$$

۹۳- گزینهٔ ۴ نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

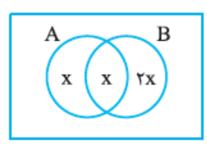


$$n(A)=۶۰, n(B)=۴۰, n(A\cap B)=۲۰$$

$$۴۰+۲۰+۲۰+x=۱۰۰ \Rightarrow x=۲۰$$

حالا تعداد اعضای $A-B$ برابر است با ۴۰ و تعداد اعضای $A'\cap B'=(A\cup B)'$ برابر است با ۲۰، پس تعداد اعضای $A-B$، ۲۰تا از تعداد اعضای $(A\cup B)'$ بیشتر است.

۹۴- گزینهٔ ۱ اول فرض می‌کنیم $n(A\cap B)=x$ و نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



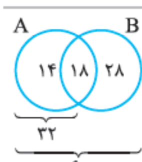
$$۳n(A)=۲n(B)=۶n(A\cap B)=۶x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(A)=۲x \\ n(B)=۳x \\ n(A\cap B)=x \end{cases}$$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\frac{n(A-B)}{n(B\cap A')}=\frac{n(A-B)}{n(B-A)}=\frac{x}{۲x}=\frac{۱}{۲}$$

۹۵- گزینهٔ ۲ تعداد عضوهای هر قسمت را در نمودار ون می‌نویسیم:



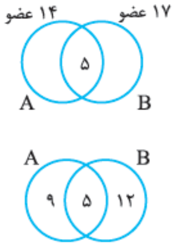
$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=۳۲-۱۴=۱۸$$

$$n(B-A)=۶۰-۳۲=۲۸$$

پس نسبت تعداد عضوهای $B-A$ به $A\cap B$ برابر است با:

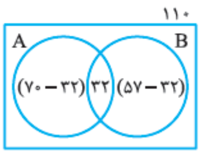
$$\frac{n(B-A)}{n(A\cap B)}=\frac{۲۸}{۱۸}=\frac{۱۴}{۹}\simeq ۱/۵۵$$

۹۶- گزینهٔ ۳ اول نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



۵ عضو در ناحیهٔ مشترک‌اند، پس $۱۴-۵=۹$ عضو فقط در A قرار دارند و $۱۷-۵=۱۲$ عضو فقط در B هستند؛ بنابراین $۹+۱۲=۲۱$ عضو فقط در یکی از دو مجموعه هستند.

۹۷- گزینهٔ ۱ نمودار ون دو مجموعهٔ A و B را رسم می‌کنیم:



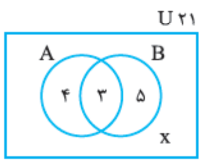
$$\text{دقیقاً یکی} \Rightarrow n(A-B)+n(B-A)$$

$$=۷۰-۳۲+۵۷-۳۲=۱۲۷-۶۴=۶۳$$

۹۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم A مجموعه فیلم‌های پویانمایی و B مجموعهٔ فیلم‌های طنز است. طبق داده‌های سؤال داریم:

$$n(A\cap B)=۳, n(B)=۸, n(A)=۷$$

حالا نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

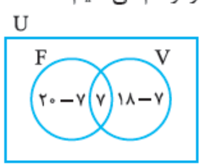


$$۴+۳+۵+x=۲۱ \Rightarrow x=۹$$

تعداد فیلم‌های پویانمایی یا غیرطنز می‌شود $n(A\cup B')$ که طبق شکل برابر است با:

$$۷+x=۷+۹=۱۶$$

۹۹- گزینهٔ ۴ **راه اول** نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



۱۱ نفر فقط در تیم والیبال، ۷ نفر در هر دو تیم و ۱۳ نفر فقط در تیم فوتبال هستند. جمع این‌ها می‌شود ۳۱ نفر. پس $۳۵-۳۱=۴$ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

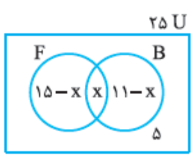
راه دوم تعداد دانش‌آموزانی که در هیچ تیمی نیستند برابر $n(F'\cap V')$ است:

$$n(F'\cap V')=n(U)-n(F\cup V)$$

$$=n(U)-(n(F)+n(V)-n(F\cap V))$$

$$=۳۵-(۲۰+۱۸-۷)=۳۵-۳۱=۴$$

۱۰۰- گزینهٔ ۱ نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم، داریم:



$$n(F)=۱۵, n(B)=۱۱, n(U)=۲۵$$

$$n(F\cup B)'=۵$$

$$۱۵-x+x+۱۱-x+۵=۲۵ \Rightarrow x=۶$$

۱۰۱- گزینهٔ ۱ اگر شب را با A و درون شهر را با B نشان دهیم، داریم:

$$n(A)=۷۰, n(B')=۶۱ \Rightarrow n(B)=n(U)-n(B')$$

$$=۱۰۴-۶۱=۴۳$$

حالا به $n(A\cup B)$ دقت کنید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷۰+۴۳-x=۱۱۳-x$$

این تعداد جرم‌هایی است که در شب یا درون شهر انجام شده و باید از ۱۰۴ بیشتر نباشد:

$$۱۱۳-x\le ۱۰۴ \Rightarrow x\ge ۹$$

یعنی تعداد جرم‌های درون شهر و در شب (مشترک A و B) حداقل ۹ است.

۱۰۲- گزینهٔ ۳ کافی است رابطهٔ زیر را بنویسیم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

و سپس با معادلهٔ $۳y=۲x$ در یک دستگاه حل کنیم:

$$۷۵=۳x+۱۰+۲y+۵-(x+y-۲۰)$$

$$\Rightarrow ۲x+y=۴۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+y=۴۰ \\ ۲x-۳y=۰ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۴y=۴۰$$

$\Rightarrow y=۱۰ \Rightarrow x=۱۵$

حالا داریم:

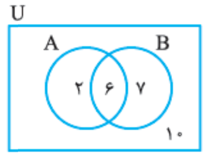
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=(۳x+۱۰)-(x+y-۲۰) \xrightarrow[y=۱۰]{x=۱۵} ۵۵-۵=۵۰$

۱۰۳- گزینهٔ «۴» $A'-B$ عضوهایی است که در A' هستند و در B نیستند. پس عضوهایی را می‌خواهیم که نه در A و نه در B باشند که تعداد آن‌ها $۳x+۱$ است. بنابراین:

$n(A'-B)=n(A'\cap B')=۳x+۱=۱۰ \Rightarrow x=۳$

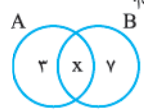
حالا $x=۳$ را قرار دهیم:



بنابراین تعداد عضوهایی که به حداقل یکی از دو مجموعه تعلق دارند، یعنی $n(A\cup B)$ برابر است با:

$n(A\cup B)=۲+۶+۷=۱۵$

۱۰۴- گزینهٔ «۱» نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



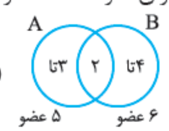
$n(A-B)=۳ \ , \ n(B-A)=۷$

$n(B)=۲n(A) \Rightarrow ۷+x=۲(۳+x) \Rightarrow x=۱$

۱۰۵- گزینهٔ «۱» نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم: پس $A-B$ دارای ۳ و $B-A$ دارای ۴ عضو است. حالا خواستهٔ سؤال:

$(A\cap B')\cup(A\cup B')'$

$=(A-B)\cup(\underbrace{A'\cap B}_{B-A})=(A-B)\cup(B-A)$



که با توجه به شکل، $۳+۴=۷$ عضو دارد.

۱۰۶- گزینهٔ «۳» مهمان‌های سارا، هم‌کلاسی‌های مدرسه یا زبان هستند، پس $n(A\cup B)=۴۷$ و $n(A)=۲۴$، پس داریم:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$۴۷=۲۴+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow n(B)-n(A\cap B)=۲۳$

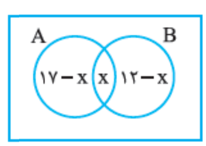
$\Rightarrow n(B)=n(A\cap B)+۲۳$

پس تعداد هم‌کلاسی‌های زبان حداقل ۲۳ نفر است.

از طرف دیگر چون تعداد هم‌کلاسی‌های مدرسه ۲۴ نفر بود، تعداد مهمان‌های مشترک یعنی $n(A\cap B)$ نمی‌توانند بیشتر از ۲۴ باشند. پس $n(B)$ حداکثر برابر است با: $n(B)=۲۴+۲۳=۴۷$

یعنی تعداد هم‌کلاسی‌های زبان حتماً در فاصلهٔ $[۲۳,۴۷]$ است.

۱۰۷- گزینهٔ «۲» $A-B$ یعنی عضوهایی از A که در B نباشند. برای این‌که تعداد عضوهای $A-B$ حداکثر شود باید تا حد امکان A و B کم‌ترین اشتراک را داشته باشند. اگر تعداد عضوهای مشترک را x بگیریم، داریم:



$۱۷-x+x+۱۲-x\le ۲۲$

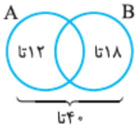
$\Rightarrow ۲۹-x\le ۲۲ \Rightarrow x\ge ۷$

یعنی حداقل ۷ عضو مشترک لازم است؛ پس $A-B$ حداکثر ۱۰ عضو دارد.

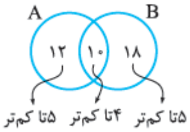
۱۰۸- گزینهٔ «۳» اجتماع دو مجموعه در حالت اول $۳۶+۲۸-۱۵=۴۹$ عضو دارد. حالا ۱۶ عضو از A کم شده که ۹تای آن‌ها از اشتراک حذف شده‌اند. پس الان A دارای $۳۶-۱۶=۲۰$ عضو است و اشتراک جدید هم $۱۵-۹=۶$ عضو دارد. مجموعهٔ B هم که به اندازهٔ تعداد کم‌شده از اشتراک A و B یعنی ۹ عضو، از دست می‌دهد، یعنی تعداد اعضای B برابر ۱۹تاست، پس تعداد اعضای اجتماع مجموعهٔ A جدید با B برابر است با:

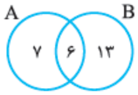
$۲۰+۱۹-۶=۳۳$

۱۰۹- گزینهٔ «۴» به نمودار دقت کنید: پس در ناحیهٔ وسط یعنی $A\cap B$ باید $۴۰-۱۲-۱۸=۱۰$ عضو باشد.



حالا از هر یک از مجموعه‌های A و B نه عضو برداشته شده و از اشتراک آن‌ها ۴تا کم شده است. پس از قسمت غیرمشترک هر کدام ۵تا کم می‌شود.

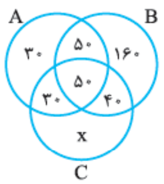




$\Rightarrow n(A\cup B)=۷+۶+۱۳=۲۶$

نکته اجتماع دو مجموعهٔ اولیه ۴۰تا عضو دارد. ما ۹+۹ یعنی ۱۸تا را برداشته‌ایم که ۴تایش مشترک بوده، پس $۴۰-۱۸+۴$ یعنی ۲۶تا می‌ماند.

۱۱۰- گزینهٔ «۴» نمودار ون سه مجموعه را رسم می‌کنیم و برای پرکردن ناحیه‌ها از اشتراک هر سه مجموعه شروع می‌کنیم:



برای پیداکردن تعداد بیمارانی که فقط بیماری C را دارند باید x را پیدا کنیم، پس:

$۳۰+۵۰+۵۰+۳۰+۴۰+۱۶۰+x=۴۰۰ \Rightarrow ۳۶۰+x=۴۰۰ \Rightarrow x=۴۰$

۱۱۱- گزینهٔ «۴» باید به ازای هر کدام از گزینه‌ها مجموعهٔ $B=\{x\in U \mid x<۳\}$ را پیدا کنیم و ببینیم آیا B و $A=\{۱,۴,۷\}$ جدا از هم هستند یا نه.

(۱) $\mathbb{Q}' \Rightarrow B=\{x\in\mathbb{Q}' \mid x<۳\}$

$\Rightarrow$ چون اعضای B همگی گنگ هستند A و B جدا از هم‌اند.

(۲) $\mathbb{Z}-\mathbb{W} \Rightarrow B=\{x\in \mathbb{Z}-\mathbb{W} \mid x<۳\}$

$=\{-۱,-۲,-۳,\dots\} \Rightarrow$ جدا از هم‌اند.

(۳) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z} \Rightarrow B=\{x\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z} \mid x<۳\}$

B شامل اعداد گویای غیرصحیح کوچک‌تر از ۳ است، پس A و B عضو مشترکی ندارند. با این حساب جواب (۴) است، اما بگذارید (۴) را هم بررسی کنیم:

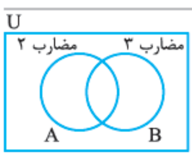
(۴) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N} \Rightarrow B=\{x\in \overbrace{\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \mid x<۳\}=\{۲,۱\}$

A و B عضو مشترک ۱ دارند و جدا از هم نیستند.

این‌طوری به موضوع نگاه کنید که شرط B، کم‌تر از ۳ را می‌پذیرد و در A فقط عضو ۱ این شرط را دارد، پس A و B وقتی جدا از هم هستند که در B عدد ۱ نباشد، پس مرجع B یعنی U شامل ۱ نیست.

$\mathbb{Q}'$، $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ و $\mathbb{Q}-\mathbb{N}$ خوب هستند اما $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}$ خوب نیست چون ۱ را دارد.

۱۱۲- گزینهٔ «۲» اگر A و B به ترتیب مجموعهٔ مضارب ۲ و مضارب ۳ باشند، تعداد عضوهای $A\cup B$ را می‌خواهیم:



$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=n(\text{مضارب ۲})+n(\text{مضارب ۳})-n(\text{مضارب مشترک ۲،۳})$

تعداد عضوهای A یعنی تعداد مضارب ۲ در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر است با:

$n(A)=۵۰$

تعداد عضوهای B یعنی تعداد مضارب ۳ برابر است با: $n(B)=۳۳$

مجموعه‌های A و B را ببینید: $A=\{۲,۴,۶,\dots,۱۰۰\}$

$B=\{۳,۶,۹,\dots,۹۹\}$

اعضای مشترک A و B، اعداد مضرب ۶ هستند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$A\cap B=\{\underbrace{۶}_{۶\times۱},۱۲,۱۸,\dots,\underbrace{۹۶}_{۶\times۱۶}\} \Rightarrow n(A\cap B)=۱۶$

پس داریم: $n(A\cup B)=۵۰+۳۳-۱۶=۶۷$

۱۱۳- گزینهٔ ۲ جملهٔ عمومی الگوی خطی $t_n = an+b$ است، پس:

$$\begin{cases} t_۱=۱ \Rightarrow a+b=۱ \\ t_۲=۵ \Rightarrow ۲a+b=۵ \end{cases} \xrightarrow{(-)} a=۴ \Rightarrow b=-۳$$

$$\Rightarrow t_n=۴n-۳$$

۱۱۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم دنبالهٔ خطی نباید $n^۲$ داشته باشد، پس $۳k-۱=۰$ و در نتیجه: $k=\frac{۱}{۳}$

پس داریم: $a_n=\frac{۱}{۳}n+۲$

و در نتیجه: $a_۳=۱+۲=۳$

۱۱۵- گزینهٔ ۲ راه اول می‌دانیم در یک الگوی خطی میزان افزایش جملات، مقدار ثابتی است:

$$a_۱ , ۳ , ۷ , a_۴ , a_۵ , a_۶ , a_۷ , a_۸ , a_۹ , a_{۱۰}$$

+۴ +۴ +۴ +۴ +۴ +۴ +۴ +۴ +۴

$a_۵=۷+۲\times۴=۱۵$

$a_۸=۷+۵\times۴=۲۷$

$\frac{a_۸}{a_۵}=\frac{۲۷}{۱۵}=\frac{۹}{۵}=۱/۸$

راه دوم با استفاده از $a_۲=۳$ و $a_۳=۷$ جملهٔ عمومی را پیدا می‌کنیم، داریم $a_n=an+b$، پس:

$$\begin{matrix} a_۲=۳ \Rightarrow \\ a_۳=۷ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} ۲a+b=۳ \\ ۳a+b=۷ \end{cases} \xrightarrow{(-)} a=۴$$

$$\Rightarrow b=-۵ \Rightarrow a_n=۴n-۵$$

حالا نسبت جملهٔ هشتم به پنجم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_۸}{a_۵}=\frac{۴(۸)-۵}{۴(۵)-۵}=\frac{۲۷}{۱۵}=\frac{۹}{۵}=۱/۸$$

۱۱۶- گزینهٔ ۱ اولاً چون $t_n=kn^۲+۲n+k+۱$ یک دنبالهٔ خطی است، پس نباید $n^۲$ داشته باشیم، یعنی $k=۰$ و در نتیجه $t_n=۲n+۱$.
جملهٔ اول این دنباله ۳ و فاصلهٔ بین جملاتش ۲ است پس باید الگوی خطی دیگری تشکیل دهیم که جملهٔ اولش $۳+۲=۵$ و فاصلهٔ جملاتش $۲\times۳=۶$ باشد:

$c_۱$	$c_۲$	$c_۳$	...
۵	۱۱	۱۷	...

$$c_n=an+b \Rightarrow c_۱=۵ \Rightarrow a+b=۵$$

$$c_۲=۱۱ \Rightarrow ۲a+b=۱۱$$

$$\xrightarrow{(-)} a=۶ \Rightarrow b=-۱ \Rightarrow c_n=۶n-۱$$

و حالا که داریم $c_n=۶n-۱$؛ پس $c_{۱۰}$ برابر است با: $۶(۱۰)-۱=۵۹$

۱۱۷- گزینهٔ ۴ اگر جملهٔ عمومی دنبالهٔ خطی را $t_n=an+b$ فرض کنیم، باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که حاصلش $t_{۱۱}=۱۱a+b$ باشد:

۱) $t_{۱۳}-t_۲=(۱۳a+b)-(۲a+b)=۱۱a$ ×

۲) $t_۵+t_۶=(۵a+b)+(۶a+b)=۱۱+۲b$ ×

۳) $\frac{t_{۲۲}}{۲}=\frac{۲۲a+b}{۲}=۱۱a+\frac{b}{۲}$ ×

۴) $\frac{t_{۲۰}+t_۵+t_۸}{۳}=\frac{۲۰a+b+۵a+b+۸a+b}{۳}$

$=\frac{۳۳a+۳b}{۳}=۱۱a+b$ ✓

۱۱۸- گزینهٔ ۳ اگر به الگوی صندلی‌ها نگاه کنیم می‌بینیم که در ردیف اول ۷ صندلی داریم $(a_۱=۷)$ و در هر ردیف ۲تا اضافه می‌شود $(d=۲)$، پس: $a_{۱۱}=a_۱+(۱۰\times۲)=۷+۲\times۱۰=۲۷$

۱۱۹- گزینهٔ ۴ راه اول در شکل اول ۴ پاره‌خط داریم، سپس در هر شکل ۳تا به آن اضافه می‌شود، پس در شکل دهم $۴+\underbrace{۳+۳+\cdots+۳}_{۹\text{تا}}$ یعنی ۳۱ پاره‌خط وجود دارد.

راه دوم مرحلهٔ اول را می‌نویسیم و سعی می‌کنیم جملهٔ عمومی را حدس بزنیم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳
تعداد پاره‌خط‌ها	۴	۷	۱۰
الگو	$۳(۱)+۱$	$۳(۲)+۱$	$۳(۳)+۱$

با این حساب جملهٔ عمومی دنباله برابر است با $a_n=۳n+۱$، پس در شکل دهم $a_{۱۰}=۳(۱۰)+۱=۳۱$ پاره‌خط داریم.

۱۲۰- گزینهٔ ۳ راه اول تعداد چوب‌کبریت‌ها را در هر شکل می‌نویسیم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳
تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱
الگو	$۳(۱)+۲$	$۳(۲)+۲$	$۳(۳)+۲$

با توجه به جدول جملهٔ عمومی دنبالهٔ $t_n=۳n+۲$ است، پس:

$$۳n+۲=۵۳ \Rightarrow ۳n=۵۱ \Rightarrow n=۱۷$$

راه دوم تعداد چوب‌کبریت‌ها در سه شکل داده‌شده برابر است با ...,۱۱ , ۸ , ۵ پس با یک الگوی خطی سروکار داریم، یعنی $t_n=an+b$ و:

+۳ +۳

$$\begin{cases} t_۱=۵ \Rightarrow a+b=۵ \\ t_۲=۸ \Rightarrow ۲a+b=۸ \end{cases} \xrightarrow{(-)} a=۳$$

$$\Rightarrow b=۲ \Rightarrow t_n=۳n+۲$$

و بقیهٔ راه‌حل هم مثل راه اول.

۱۲۱- گزینهٔ ۲ راه اول تعداد رأس‌ها در شکل‌ها می‌نویسیم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳
تعداد رأس T	۶	۱۱	۱۶
الگو	$۵(۱)+۱$	$۵(۲)+۱$	$۵(۳)+۱$

با توجه به جدول $t_n=۵n+۱$ است، پس تعداد رأس‌های شکل پانزدهم برابر است با: $t_{۱۵}=۵(۱۵)+۱=۷۵+۱=۷۶$

راه دوم تعداد رأس‌ها در سه شکل اول برابر است با ...,۱۶ , ۱۱ , ۶ پس با یک الگوی خطی سروکار داریم:

+۵ +۵

$$\begin{cases} t_۱=۶ \Rightarrow a+b=۶ \\ t_۲=۱۱ \Rightarrow ۲a+b=۱۱ \end{cases} \xrightarrow{(-)} a=۵ \Rightarrow b=۱ \Rightarrow t_n=۵n+۱$$

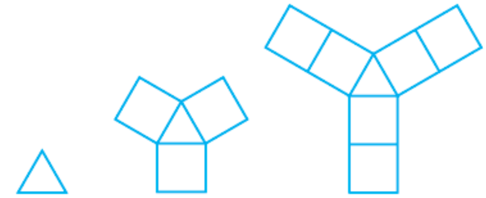
و بقیهٔ راه‌حل هم مثل راه اول.

۱۲۲- گزینهٔ ۲ راه اول اگر به شکل‌ها نگاه کنیم، می‌بینیم در هر مرحله، به شکل قبلی ۳ مربع و ۹تا پاره‌خط اضافه می‌شود. پس تعداد مربع‌ها $۳(n-۱)$ و تعداد پاره‌خط‌ها $۹(n-۱)+۳$ است که اختلاف این‌ها می‌شود:

$$(۹n-۶)-(۳n-۳)=۶n-۳$$

پس داریم: $۶n-۳=۶۳ \Rightarrow ۶n=۶۶ \Rightarrow n=۱۱$

یعنی در مرحلهٔ یازدهم این اتفاق می‌افتد.



راه دوم اختلاف بین تعداد مربع‌ها و تعداد پاره‌خط‌ها را در سه شکل اول می‌نویسیم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳
تعداد مربع‌ها	۰	۳	۶
تعداد پاره‌خط‌ها	۳	۱۲	۲۱
اختلاف	۳	۹	۱۵
الگو	$۶(۱)-۳$	$۶(۲)-۳$	$۶(۳)-۳$

با توجه به جدول الگوی اختلاف تعداد مربع‌ها و پاره‌خط‌ها برابر است با $t_n = ۶n - ۳$ و بقیهٔ راه‌حل هم مثل راه اول.

۱۲۳- گزینهٔ ۳ می‌بینیم که اگر تعداد کاشی‌های سیاه و سفید را در هر مرحله بنویسیم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	n
کاشی‌های سیاه	۶	۸	۱۰	$۲n+۴$
کاشی‌های سفید	۱	۲	۳	n

پس وقتی ۱۶ کاشی سفید داریم در مرحلهٔ $n=۱۶$ هستیم و تعداد کاشی‌های سیاه می‌شود $۲\times۱۶+۴=۳۶$.

۱۲۴- گزینهٔ ۳ تعداد مربع‌های سفید و سیاه را در هر مرحله می‌نویسیم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	$n^۲$
تعداد مربع‌های سفید	۱	۴	۹	۱۶	...	$\xrightarrow{\text{الگو}} n^۲$
تعداد مربع رنگی	۳	۵	۷	۹	...	$\xrightarrow{\text{الگو}} ۲n+۱$

پس اختلاف موردنظر برابر است با $n^۲-(۲n+۱)$ که در شکل بیستم می‌شود:

$$۲۰^۲-(۲\times۲۰+۱)=۴۰۰-۴۱=۳۵۹$$

۱۲۵- گزینهٔ ۳ اگر پس از n دقیقه، مقدار آب ظرف‌های A و B را به ترتیب a_n و b_n بنامیم، داریم:

$$a_n = ۱۰+۲n \qquad b_n = ۶+۳n$$

پس برای مساوی‌شدن مقدار آب دو ظرف باید $a_n = b_n$ باشد:

$$۱۰+۲n = ۶+۳n \Rightarrow n=۴$$

یعنی پس از ۴ دقیقه مقدار آب دو ظرف برابر می‌شود.

۱۲۶- گزینهٔ ۲ **راه اول** در شکل داده‌شده $a_۲=۷$ و $a_۴=۱۵$ است، پس:

$$\begin{cases} a_۲=۷ \Rightarrow ۲a+b=۷ \\ a_۴=۱۵ \Rightarrow ۴a+b=۱۵ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲a=۸ \Rightarrow a=۴$$

$$\Rightarrow b=-۱ \Rightarrow a_n=۴n-۱$$

پس $a_۱=۳$ و $a_۳=۱۱$ یعنی در دنبالهٔ b_n داریم $b_۱=۳$ و $b_۲=۱۱$، پس:

$$\begin{cases} b_۱=۳ \Rightarrow a+b=۳ \\ b_۲=۱۱ \Rightarrow ۲a+b=۱۱ \end{cases} \xrightarrow{(۱)} a=۸, b=-۵ \Rightarrow b_n=۸n-۵$$

۱۲۷- گزینهٔ ۴ همان‌طور که در درس‌نامه دیدیم در یک دنبالهٔ درجه‌دوم، ضریب جملهٔ $n^۲$ نصف عدد ثابتی است که به اختلاف جمله‌ها اضافه می‌شود، یعنی:

$۵\ ,\ ۱۴\ ,\ ۲۹ , \ldots$

$۹\quad ۱۵$

۶

در جملهٔ عمومی $t_n = An^۲+B$ ضریب $n^۲$ برابر است با $A=\frac{۶}{۲}=۳$.
حالا با استفاده از مقدار جملهٔ اول مقدار B را پیدا می‌کنیم:

$$t_n=۳n^۲+B\ ,\ t_۱=۵ \Rightarrow ۳(۱)^۲+B=۵ \Rightarrow B=۲$$

$$\Rightarrow t_n=۳n^۲+۲$$

پس $t_n=۳n^۲+۲$ و در نتیجه $t_۸$ برابر است با:

$$۳(۸)^۲+۲=۳(۶۴)+۲=۱۹۴$$

۱۲۸- گزینهٔ ۳ **راه اول** مثل سؤال قبل، مقدار A را از روی مقدار ثابت اضافه‌شده به اختلاف جمله‌ها پیدا می‌کنیم:

$۶\ ,\ ۹\ ,\ ۱۴\ ,\ ۲۱\ ,\ ۳۰ , \ldots$

$۳\quad ۵\quad ۷\quad ۹$

$۲\quad ۲\quad ۲$

پس $A=\frac{۲}{۲}=۱$ و در نتیجه:

$$A_n=n^۲+Bn\ ,\ A_۱=۶$$

$$\Rightarrow (۱)^۲+B=۶ \Rightarrow B=۵$$

پس مقدار $A+B$ برابر است با: $۱+۵=۶$

راه دوم چون $t_n=An^۲+Bn$؛ پس به ازای $n=۱$ داریم $t_۱=A+B$ و چون $t_۱=۶$، پس $A+B=۶$.

۱۲۹- گزینهٔ ۴ کافی است اختلاف جمله‌ها را در هر کدام از گزینه‌ها پیدا کنیم و ببینیم آیا اختلاف جمله‌ها یک الگوی خطی ایجاد می‌کنند یا نه:

(۱) $۵\ ,\ ۸\ ,\ ۱۳\ ,\ ۲۰\ ,\ ۲۹ , \ldots$ ✓

$۳\quad ۵\quad ۷\quad ۹$

$۲\quad ۲\quad ۲$

(۲) $۵\ ,\ ۱۲\ ,\ ۲۲\ ,\ ۳۵\ ,\ ۵۱ , \ldots$ ✓

$۷\quad ۱۰\quad ۱۳\quad ۱۶$

$۳\quad ۳\quad ۳$

(۳) $۰\ ,\ ۳\ ,\ ۸\ ,\ ۱۵\ ,\ ۲۴ , \ldots$ ✓

$۳\quad ۵\quad ۷\quad ۹$

$۲\quad ۲\quad ۲$

(۴) $۲\ ,\ ۶\ ,\ ۱۲\ ,\ ۱۸\ ,\ ۳۰ , \ldots$ ✗

$۴\quad ۶\quad ۶\quad ۱۲$

$۲\quad ۰\quad ۶$

۱۳۰- گزینهٔ ۳ با توجه به گزینه‌ها الگوی داده‌شده درجه‌دوم است، پس اگر فرض کنیم $t_n=an^۲+bn+c$، داریم:

$$۰\ ,\ ۸\ ,\ ۱۸ , \ldots \Rightarrow a=\frac{۲}{۲}=۱ \Rightarrow t_n=n^۲+bn+c$$

$۸\quad ۱۰$

۲

حالا از روی جملهٔ اول و دوم مقدار b و c را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix} t_۱=۰ \Rightarrow ۱+b+c=۰ \\ t_۲=۸ \Rightarrow ۴+۲b+c=۸ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b+c=-۱ \\ ۲b+c=۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)} b=۵ \Rightarrow c=-۶$$

پس جملهٔ عمومی دنباله برابر است با:

$$t_n=n^۲+۵n-۶$$

۱۳۱- گزینهٔ ۴ **راه اول**

$$\underset{+2\quad +6}{-1\ ,\ 1\ ,\ 7}\qquad \underset{+4}{}$$

گفتیم در دنباله‌های درجه‌دوم، میزان افزایش جملات، یک دنبالهٔ حسابی می‌سازد. پس ادامهٔ افزایش‌ها به صورت زیر است:

$$\underset{+2\quad +6\quad +10\quad +14\quad +18}{-1\ ,\ 1\ ,\ 7\ ,\ a_4\ ,\ a_5\ ,\ a_6}$$

و بنابراین:

$$a_6=7+10+14+18=49$$

راه دوم طبق درس‌نامه با توجه به سه جملهٔ اول اگر فرض کنیم $t_n=an^2+bn+c$؛ داریم:

$$\underset{2\quad 6\ \ (4)}{-1\ ,\ 1\ ,\ 7,\dots} \Rightarrow a=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow a_n=2n^2+bn+c$$

حالا می‌رویم سراغ جملهٔ اول و دوم که b و c را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} t_1&=-1 \Rightarrow 2+b+c=-1\\ t_2&=1 \Rightarrow 8+2b+c=1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} b+c=-3\\ 2b+c=-7 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} b=-4 \Rightarrow c=1$$

پس $a_n=2n^2-4n+1$ و در نتیجه: $a_6=2(6)^2-4(6)+1=49$

۱۳۲- گزینهٔ ۱ درستی رابطهٔ (الف) یعنی $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ را که در درس‌نامه دیدیم در مورد (ب) و (پ) که مجموع اعداد طبیعی زوج و فردند هم می‌توانیم بنویسیم:

$$2+4+6+\dots+2n=2(1+2+3+\dots+n)=\frac{2n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

$$1+3+5+\dots+(2n+1)=2-1+4-1+6-1+\dots+(2n+2)-1$$

$$=(2+4+6+\dots+2(n+1))-\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n+1\text{ تا}}$$

$$=2(1+2+3+\dots+(n+1))-(n+1)=\frac{2(n+1)(n+2)}{2}-(n+1)$$

$$=(n+1)(n+2-1)=(n+1)^2$$

پس (ب) و (پ) هر دو نادرست‌اند. برای این‌که این سؤال‌ها را راحت‌تر حل کنیم بهتر است هر سه رابطهٔ مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n و مجموع اعداد زوج از ۲ تا 2n و مجموع اعداد فرد از ۱ تا $(2n-1)$ را یاد بگیریم:

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n $=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

مجموع اعداد زوج از ۲ تا 2n $=2+4+\dots+2n=n(n+1)$

مجموع اعداد فرد از ۱ تا $(2n-1)$ $=1+3+\dots+(2n-1)=n^2$

۱۳۳- گزینهٔ ۴ در درس‌نامه گفتیم که:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

پس داریم:

$$a_n=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{n+1}{2n}\xrightarrow{n=100}S_{100}=\frac{101}{200}$$

$$\xrightarrow[\times5]{\times5}=\frac{505}{1000}=0/505$$

۱۳۴- گزینهٔ ۴ همهٔ اعداد داده‌شده مضرب ۱/۱ هستند، پس از ۱/۱ فاکتور می‌گیریم:

$$1/1+2/2+\dots+9/9=1/1(1+2+\dots+9)$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ داریم:

$$1/1(1+2+\dots+9)=1/1\times\frac{9\times10}{2}=\frac{99}{2}=49/5$$

۱۳۵- گزینهٔ ۲ **راه اول** در حل سه سؤال قبل‌تر دیدیم که $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$، پس:

$$1+3+\dots+99=1+3+\dots+(2\times50-1)=50^2=2500$$

راه دوم هر عدد طبیعی فرد به صورت $2n-1$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$1+3+\dots+99=2-1+4-1+\dots+100-1$$

$$=(2+4+\dots+100)-\underbrace{(1+1+\dots)}_{50\text{ تا}}=2(1+2+\dots+50)-50$$

$$=\frac{2(50)(51)}{2}-50=50(51)-50=50(51-1)=50\times50=2500$$

۱۳۶- گزینهٔ ۲ **راه اول** اگر تعداد نقطه‌ها را در هر شکل بنویسیم:

(۱) (۲) (۳) (۴)

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲

می‌بینیم که:

$$\underset{7\quad 9\quad 11\ \ (2\quad 2)}{5\ ,\ 12\ ,\ 21\ ,\ 32,\dots}$$

یک دنبالهٔ درجه‌دوم $t_n=an^2+bn+c$ داریم که در آن $a=\frac{2}{2}=1$، پس با استفاده از جملهٔ اول و دوم داریم:

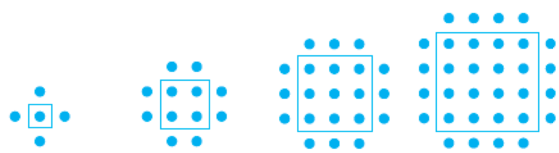
$$\begin{cases} t_1=5 \Rightarrow 1+b+c=5 \Rightarrow b+c=4\\ t_2=12 \Rightarrow 4+2b+c=12 \Rightarrow 2b+c=8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} b=4 \Rightarrow c=0$$

پس $t_n=n^2+4n$ و در نتیجه تعداد نقطه‌های شکل هفتم برابر است با:

$$t_7=7^2+4(7)=49+28=77$$

راه دوم از نقطه‌های هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کنیم:

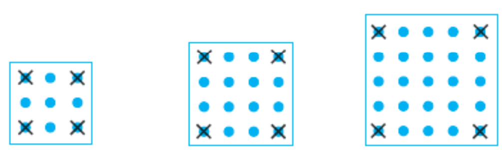


(۱) (۲) (۳) (۴)

$1^2+4(1)$ $\quad 2^2+4(2)$ $\quad 3^2+4(3)$ $\quad 4^2+4(4)$

می‌بینیم که در شکل nام n^2+4n نقطه داریم، پس در شکل هفتم $7^2+4(7)=77$ نقطه داریم.

راه سوم اگر نقطه‌های شکل‌ها به صورت زیر دسته‌بندی کنیم:



(۱) (۲) (۳)

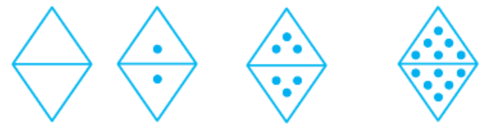
3^2-4 $\quad 4^2-4$ $\quad 5^2-4$

می‌بینیم که در شکل nام $(n+2)^2-4$ نقطه داریم. پس در شکل هفتم $(7+2)^2-4=81-4=77$ نقطه داریم.

۱۳۷- گزینهٔ ۳ در ردیف اول ۱، در ردیف دوم ۲، در ردیف سوم ۳ و ... و در ردیف یازدهم ۱۱ صندلی وجود دارد. پس مجموع ۱۱+...+۲+۱ را می‌خواهیم:

$$1+2+3+\cdots+11=\frac{11\times 12}{2}=11\times 6=66$$

۱۳۸- گزینهٔ ۱ تعداد نقطه‌های هر شکل را می‌نویسیم و سعی می‌کنیم یک الگو پیدا کنیم:



(۱) (۲) (۳) (۴)

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد نقطه‌ها	۰	۲	۶	۱۲
الگو	$2(0)$	$2(1)$	$2(1+2)$	$2(1+2+3)$

پس در شکل nام $2\times(0+1+2+\cdots+n-1)$ نقطه داریم. حالا با توجه به رابطهٔ مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n یعنی $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ داریم:

$$t_n=2(0+1+2+\cdots+(n-1))=2\times\frac{(n-1)n}{2}=(n-1)n$$

پس تعداد نقطه‌های شکل نهم برابر است با: $(9-1)(9)=8\times 9=72$

۱۳۹- گزینهٔ ۱ در شکل (۱) دقیقاً ۱ مثلث داریم. در شکل (۲) چهارتا مثلث کوچک داریم. در شکل (۳) نه‌تا مثلث کوچک داریم. الگوی این‌ها n^2 است. پس تعداد مثلث‌های کوچک در شکل‌های (۸) و (۴) به ترتیب $8^2=64$ و $4^2=16$ است و نسبت آن‌ها می‌شود ۴.

۱۴۰- گزینهٔ ۲ اگر تعداد دایره‌های توپر در شکل‌ها را به ترتیب بنویسیم می‌بینیم که ۱، ۱، ۳+۱، ۳+۱، ۵+۳+۱ و ... است، یعنی تعداد نقطه‌های توپر در دو شکل متوالی ثابت می‌ماند و سپس به اندازهٔ عدد بعدی اضافه می‌شود. پس برای شکل نوزدهم داریم:

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$1+\underset{\substack{\text{در شکل سوم}\\\text{اضافه}\\\text{می‌شود.}}}{\underline{3}}+\underset{\substack{\text{در پنجم}\\\text{اضافه}\\\text{می‌شود.}}}{\underline{5}}+\underset{\substack{\text{در هفتم}\\\text{اضافه}\\\text{می‌شود.}}}{\underline{7}}+9+\cdots+\underset{\substack{\text{در نوزدهم}\\\text{اضافه}\\\text{می‌شود.}}}{\underline{19}}$$

$$=\underbrace{1+19}_{20}+\underbrace{3+17}_{20}+\underbrace{5+15}_{20}+\underbrace{7+13}_{20}+\underbrace{9+11}_{20}=100$$

۱۴۱- گزینهٔ ۱ در شکل اول دایرهٔ خالی نداریم؛ در شکل دوم ۲تا اضافه می‌شود؛ شکل سوم همان قبلی است؛ در شکل چهارم ۴تا اضافه می‌شود و ... پس در شکل شانزدهم $2+4+6+8+10+12+14+16$ دایرهٔ توخالی داریم که مجموع آن‌ها می‌شود:

$$(2+16)+(4+14)+(6+12)+(8+10)=4\times 18=72$$

۱۴۲- گزینهٔ ۱ **راه اول** اگر به تعداد نقطه‌ها در شکل‌ها دقت کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

(۱) (۲) (۳) (۴)

$1^2+2(0)$ $\quad 2^2+2(1)$ $\quad 3^2+2(1+2)$ $\quad 4^2+2(1+2+3)$

پس در شکل nام $n^2+2(1+2+\cdots+(n-1))$ نقطه داریم و چون $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$، پس در شکل nام $n^2+2\frac{(n-1)n}{2}=n^2+n^2-n=2n^2-n$ نقطه داریم، یعنی تعداد نقطه‌های شکل دهم برابر است با: $2(10)^2-10=200-10=190$

راه دوم اگر تعداد نقطه را در چهار شکل اول بنویسیم:

$$1\ ,\ 6\ ,\ 15\ ,\ 28,\ldots$$
$$5\quad 9\quad 13$$
$$4\quad 4$$

می‌بینیم با یک الگوی درجه‌دوم سروکار داریم، پس $t_n=an^2+bn+c$ و $a=\frac{4}{2}=2$ حالا می‌رویم سراغ جملهٔ اول و دوم تا b و c را پیدا کنیم:

$$t_n=2n^2+bn+c$$

$$\begin{matrix} t_1=1 \Rightarrow 2+b+c=1 \\ t_2=6 \Rightarrow 8+2b+c=6\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b+c=-1 \\ 2b+c=-2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} b=-1 \Rightarrow c=0$$

پس جملهٔ عمومی دنباله برابر است با $t_n=2n^2-n$ و بقیهٔ راه‌حل مثل راه اول.

۱۴۳- گزینهٔ ۲ اول تعداد پاره‌خط‌های شکل‌ها را می‌نویسیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴
تعداد نقطه‌ها	۳	۴	۵	۶
تعداد پاره‌خط	۰ , ۲ , ۵ , ۹ (+۲ +۳ +۴ ؛ ۱ ۱)			

پس تعداد نقطه‌ها در مرحلهٔ nام برابر است با $a_n=n+2$ و تعداد پاره‌خط‌ها هم یک الگوی درجه‌دوم دارند. اگر الگوی تعداد پاره‌خط‌ها $b_n=an^2+bn+c$ باشد، داریم $a=\frac{1}{2}$ و با استفاده از $b_1=0$ و $b_2=2$ مقدار b و c را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix} b_1=0 \Rightarrow \frac{1}{2}+b+c=0 \\ b_2=2 \Rightarrow 2+2b+c=2\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ 2b+c=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} b=\frac{1}{2} \Rightarrow c=-1$$

پس جملهٔ عمومی تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با $b_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$، حالا تعداد پاره‌خط‌ها را برابر ۲۰ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1=20 \Rightarrow \frac{1}{2}(n)(n+1)=21 \Rightarrow n(n+1)=42$$
$$\Rightarrow n=6$$

حالا چون $n=6$ شده است، پس تعداد نقاط برابر است با: $a_6=6+2=8$

راه دوم اگر جدول را به همین ترتیب ادامه دهیم:

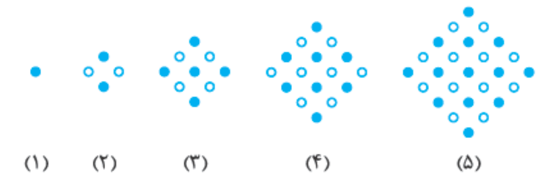
مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد نقطه‌ها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد پاره‌خط	۰ , ۲ , ۵ , ۹ , ۱۴ , ۲۰ (+۲ +۳ +۴ +۵ +۶)						

می‌بینیم که وقتی ۲۰ پاره‌خط داریم که تعداد نقطه‌ها برابر ۸ است.

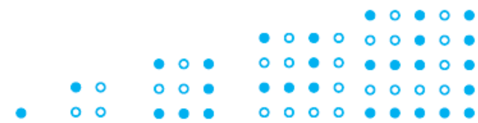
۱۴۴- گزینهٔ در شکل‌های شمارهٔ فرد (یعنی اولی و سومی) تعداد نقطه‌های توپر یکی بیشتر از توخالی است و در شکل‌های شمارهٔ زوج تعداد نقطه‌های پر و خالی مساوی‌اند. پس با توجه به الگوی مربعی برای تعداد کل نقاط داریم:

$$\text{شکل زوج}\begin{cases}\text{تعداد پر} = \dfrac{n^۲}{۲}\\[2mm] \text{تعداد خالی} = \dfrac{n^۲}{۲}\end{cases}\qquad \text{شکل فرد}\begin{cases}\text{تعداد پر} = \dfrac{n^۲+۱}{۲}\\[2mm] \text{تعداد خالی} = \dfrac{n^۲-۱}{۲}\end{cases}$$

پس در شکل یازدهم تعداد صفرهای توپر برابر است با: $۶۱ = \dfrac{۱۲۲}{۲} = \dfrac{۱۱^۲+۱}{۲}$



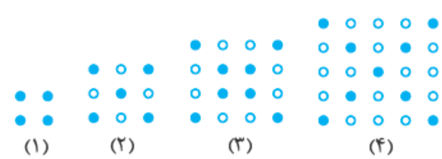
۱۴۵- گزینهٔ در این آرایش، شکل nاُم دارای $n^۲$ دایره است. شکل‌های فرد نسبت به شکل قبل از خود، به اندازهٔ یک طول و عرض بیشتر دایرهٔ توپر دارند:



شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تفاضل دایره‌های توپر	—	۰	۵	۰	۹
الگو	—	۰	$۲(۳)-۱$	۰	$۲(۵)-۱$

پس در شکل یازدهم نسبت به دهم، به تعداد $۱-۱۱\times۲$ یعنی ۲۱ دایرهٔ توپر بیشتر دارد. توجه کنید که تعداد دایره‌های توخالی شکل‌های دهم و یازدهم برابر است.

۱۴۶- گزینهٔ در هر مرحله یک مربع $(n+۱)\times(n+۱)$ داریم که دو قطر آن رنگ شده‌اند. از بین کل $(n+۱)^۲$ نقطه، برای nهای فرد، $۲(n+۱)$ تا رنگ می‌شوند و برای nهای زوج، یک نقطه در وسط قرار دارد که دو بار به حساب می‌آید، پس $۲n+۱$ تا رنگ شده است. در مرحلهٔ دوازدهم $۱۴۴ = ۱۳^۲-(۲\times۱۲+۱)$ یعنی ۱۴۴ نقطهٔ توخالی داریم.



۱۴۷- گزینهٔ برای پیداکردن $a_۱$ و $a_۲$ کافی است به جای n بگذاریم ۱ و ۲:

$$a_n = \frac{(-۱)^n n}{۳n-۱} \Rightarrow a_۱ = \frac{(-۱)^۱\times۱}{۳(۱)-۱} = -\frac{۱}{۲}$$

$$a_۲ = \frac{(-۱)^۲\times۲}{۳(۲)-۱} = \frac{۲}{۵}$$

پس: $a_۱+a_۲ = -\dfrac{۱}{۲}+\dfrac{۲}{۵} = \dfrac{-۵+۴}{۱۰} = -۰/۱$

۱۴۸- گزینهٔ جملهٔ عمومی دنباله یعنی $b_n = \dfrac{۳n+۱}{۵n-۳}$ را برابر $\dfrac{۲}{۳}$ قرار می‌دهیم و n را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۳n+۱}{۵n-۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۹n+۳ = ۱۰n-۶ \Rightarrow n = ۹$$

۱۴۹- گزینهٔ اول با استفاده از $a_۷ = ۰/۸۸$ مقدار A را در $a_n = \dfrac{An-۵}{n^۲+۱}$ پیدا می‌کنیم: $\dfrac{۷A-۵}{۷^۲+۱} = \dfrac{۷A-۵}{۵۰} = \dfrac{۸۸}{۱۰۰} = \dfrac{۴۴}{۵۰}$

$$\Rightarrow ۷A-۵ = ۴۴ \Rightarrow ۷A = ۴۹ \Rightarrow A = ۷$$

حالا جملهٔ ششم را پیدا می‌کنیم:

$$A = ۷ \Rightarrow a_n = \frac{۷n-۵}{n^۲+۱} \xrightarrow{n=۶} a_۶ = \frac{۷\times۶-۵}{۶^۲+۱} = \frac{۳۷}{۳۷} = ۱$$

۱۵۰- گزینهٔ در دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} n^۲-۲ & n=۲k \\ ۳n+۱ & n=۲k+۱\end{cases}$ باید $a_۳$ را از ضابطهٔ پایینی و $a_۶$ را از ضابطهٔ بالایی پیدا کنیم، پس:

$$\begin{cases} a_۳ = ۳(۳)+۱ = ۱۰ \\ a_۶ = ۶^۲-۲ = ۳۴\end{cases} \Rightarrow a_۳+a_۶ = ۱۰+۳۴ = ۴۴$$

۱۵۱- گزینهٔ اگر چند جملهٔ دنباله را بنویسیم:

$$a_۱ = ۱,\ a_{n+۱} = ۲a_n+۱$$

$$\Rightarrow ۱ \xrightarrow[+۱]{\times۲} ۳ \xrightarrow[+۱]{\times۲} ۷ \xrightarrow[+۱]{\times۲} ۱۵ \xrightarrow[+۱]{\times۲} ۳۱$$

می‌بینیم که هر کدام از جمله‌ها به شکل $۲^n-۱$ است، یعنی $a_n = ۲^n-۱$،

حالا جملهٔ هشتم را پیدا می‌کنیم: $a_۸ = ۲^۸-۱ = ۲۵۶-۱ = ۲۵۵$

۱۵۲- گزینهٔ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) تکلیف $a_n = (-۱)^n$ که مشخص است. جمله‌ها یک‌درمیان مثبت و منفی‌اند. در (۲) جملهٔ عمومی را به صورت $b_n = n^۲-۶n+۷ = (n-۳)^۲-۲$ می‌نویسیم، جملهٔ دوم، سوم و چهارم دنباله منفی‌اند. در (۳) جملهٔ عمومی برابر است با $c_n = n^۲+۴n-۲ = (n+۲)^۲-۶$ و چون $n \geq ۱$ است، پس $(n+۲)^۲ \geq ۹$ و در نتیجه تمام جمله‌های دنباله مثبت‌اند. پس جواب، (۳) است. (۴) را هم خودتان بررسی کنید.

۱۵۳- گزینهٔ جملهٔ عمومی دنباله یعنی $a_n = \dfrac{۵n-۲}{۲n+۳}$ را کوچک‌تر از ۲ قرار می‌دهیم و حدود n را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۵n-۲}{۲n+۳} < ۲ \xrightarrow{(۲n+۳)>۰} ۵n-۲ < ۴n+۶ \Rightarrow n < ۸$$

چون n عدد طبیعی است، پس از $n<۸$ نتیجه می‌گیریم $n = ۱,۲,\dots,۷$ یعنی هفت جملهٔ کوچک‌تر از ۲ داریم.

۱۵۴- گزینهٔ صورت کسر $a_n = \dfrac{n}{۳n-۱۰}$ همیشه مثبت و مخرج کسر به ازای $n = ۱,۲,۳$ منفی و از آن به بعد مثبت است، پس از جملهٔ چهارم به بعد، مقادیر a_n مثبت هستند؛ پس کم‌ترین جمله در بین ۳ جملهٔ اولی است:

$$a_۱ = \frac{۱}{۳-۱۰} = -\frac{۱}{۷}$$

$$a_۲ = \frac{۲}{۶-۱۰} = \frac{۲}{-۴} = -\frac{۱}{۲} \qquad a_۳ = \frac{۳}{۹-۱۰} = -۳$$

و از بین این سه جمله -۳ از همه کوچک‌تر است.

۱۵۵- گزینهٔ اول چند جملهٔ اول دنباله را می‌نویسیم:

$$\frac{-۱}{۱}, \frac{+۱}{۲}, \frac{-۱}{۳}, \frac{+۱}{۴}, \dots$$

می‌بینیم با زیادشدن n در جملات بعدی، مقادیر اعداد کم می‌شوند؛ پس بیشترین مقدار (مثبت‌ترین و کم‌ترین مقدار (منفی‌ترین) در همین جملات اول هستند: $\text{حداکثر} = +\dfrac{۱}{۲}\ ,\ \text{حداقل} = -\dfrac{۱}{۱}\ ,\ \text{اختلاف} = \dfrac{۱}{۲}-(-\dfrac{۱}{۱}) = \dfrac{۳}{۲}$

۱۵۶- گزینهٔ ۳ بیایید چند جملهٔ اول دنباله را بنویسیم:

$$\frac{1}{2},\frac{4}{4},\frac{9}{8},\frac{16}{16},\frac{25}{32},...$$

از جملهٔ پنجم به بعد، در هر جمله مخرج دو برابر می‌شود ولی صورت دو برابر نمی‌شود؛ پس جمله‌ها کاهش می‌یابند و حتماً از ۱ کم‌تر هستند، یعنی داریم:

$$\frac{1}{2}\nearrow\frac{4}{4}\nearrow\frac{9}{8}\searrow\frac{16}{16}\searrow\frac{25}{32}\searrow$$

پس بیشترین جمله در بین همین جمله‌ها است، یعنی $a_3=\frac{9}{8}$ که برابر است با ۱/۱۲۵.

۱۵۷- گزینهٔ ۴ چون t_{3n-1} را داریم، پس برای پیداکردن t_{20} باید در عبارت t_{3n-1} به جای n، ۷ قرار دهیم:

$$t_{3n-1}=2n+1\xrightarrow{n=7}t_{20}=2\times7+1=15$$

۱۵۸- گزینهٔ ۳ برای به دست آوردن a_3، a_4، a_5 و a_6 باید در $a_{n+1}=3n-2$ به جای n مقادیر ۲، ۳، ۴ و ۵ را قرار دهیم:

$$\xrightarrow{n=2}a_3=3\times2-2=4$$
$$\xrightarrow{n=3}a_4=3\times3-2=7$$
$$\xrightarrow{n=4}a_5=3\times4-2=10$$
$$\xrightarrow{a=5}a_6=3\times5-2=13$$

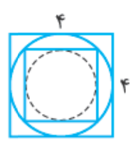
پس جمع جملات سوم تا ششم برابر است با: $4+7+10+13=34$

۱۵۹- گزینهٔ ۳ اگر به جمله‌ها دقت کنیم: ...,۱,۱,۲,۳,۵ می‌بینیم که بعد از دو جملهٔ اول، هر جمله برابر جمع دو جملهٔ قبلی‌اش است، پس جمله‌ها را با همین الگو می‌نویسیم تا به جملهٔ یازدهم برسیم:

$$\underset{t_1}{1},\underset{t_2}{1},\underset{t_3}{2},\underset{t_4}{3},\underset{t_5}{5},\underset{t_6}{8},\underset{t_7}{13},\underset{t_8}{21},\underset{t_9}{34},\underset{t_{10}}{55},\underset{t_{11}}{89},...$$

بد نیست بدانیم به این دنباله که در آن $a_1=a_2=1$ و بعد از آن $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ است می‌گوییم دنبالهٔ فیبوناتچی! (فیبوناتچی اسم یک ریاضی‌دان ایتالیایی است!)

۱۶۰- گزینهٔ ۳ اندازهٔ قطر مربع و قطر دایره‌های رسم‌شده برابر است و در مرحلهٔ اول به دوم داریم:



۴ = قطر مربع $\Rightarrow$ ۴ = قطر دایره

پس اگر ضلع مربع دوم را a فرض کنیم:

$$\text{قطر}=a\sqrt{2}=4\Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

پس قطر دایرهٔ دوم برابر است با $\frac{4}{\sqrt{2}}$ یعنی در هر مرحله از مرحلهٔ دوم به بعد قطر دایرهٔ قبلی در $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ضرب می‌شود، پس قطر دایرهٔ مرحلهٔ چهارم برابر است با:

شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	۴
قطر دایره	۴	۴	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	۲

پس قطر دایرهٔ مرحلهٔ چهارم برابر ۲ و شعاعش برابر ۱ و در نتیجه مساحتش برابر $\pi(1)^2=\pi$ است.

۱۶۱- گزینهٔ ۱ در سطر سوم $3^2-4^2+5^2$ داریم و در سطر چهارم $4^2-5^2+6^2$ خواهیم داشت که می‌شود $16-25+36=27$.

$$1^2-2^2+3^2$$
$$2^2-3^2+4^2$$
$$\vdots$$

۱۶۲- گزینهٔ ۲ جمله‌های اول تا نود و نهم را می‌نویسیم:

$$b_1=\sqrt{2}-\sqrt{1}$$
$$b_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$b_3=\sqrt{4}-\sqrt{3}$$
$$\vdots$$
$$b_{98}=\sqrt{99}-\sqrt{98}$$
$$b_{99}=\sqrt{100}-\sqrt{99}$$

حالا اگر این‌ها را جمع کنیم، رادیکال اول در هر جمله با رادیکال دوم در جملهٔ بعدی حذف می‌شود:

$$(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}})$$
$$+\cdots+(\sqrt{99}-\sqrt{98})+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=-1+10=9$$

۱۶۳- گزینهٔ ۳ مثل سؤال قبل، اول جمله‌ها را می‌نویسیم:

$$S=u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{18}+u_{19}$$
$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{18}-\frac{1}{19})+(\frac{1}{19}-\frac{1}{20})$$

کسر سمت راست هر پرانتز با کسر سمت چپ پرانتز بعدی ساده می‌شود:

$$=\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{18}-\cancel{\frac{1}{19}}+\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{20}$$

پس فقط $\frac{1}{2}-\frac{1}{20}$ باقی ماند: $S=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}=0/45$

۱۶۴- گزینهٔ ۳ اگر دسته‌بندی داده‌شده را بنویسیم:

$$(\underset{1^2}{\underset{\downarrow}{1}}),(\underset{1^2+1}{\underset{\downarrow}{2}},\underset{2^2}{\underset{\downarrow}{3}},4),(\underset{2^2+1}{\underset{\downarrow}{5}},6,7,8,\underset{3^2}{\underset{\downarrow}{9}})$$

می‌بینیم اعداد دستهٔ nام عبارت‌اند از $(n-1)^2+1$ تا n^2، پس دستهٔ دهم عبارت است از $(9^2+1,...,10^2)$ یعنی $(82,83,...,100)$، پس اختلاف جملهٔ اول و آخر دستهٔ دهم برابر است با $100-82=18$.

۱۶۵- گزینهٔ ۱ **راه اول** بیایید مجموع جملات ۴ دستهٔ اول را حساب کنیم:

$$\underbrace{(1)}_{1}\underbrace{(3,5)}_{8}\underbrace{(7,9,11)}_{27}\underbrace{(13,15,17,19)}_{64}$$

پس به نظر می‌آید مجموع جملات دستهٔ nام برابر n^3 باشد. یعنی مجموع جملات دستهٔ دهم ۱۰۰۰ است.

راه دوم تا پایان دستهٔ دهم به تعداد $1+2+3+\cdots+10=55$ تا عدد فرد نوشته شده است. پس آخرین عدد در دستهٔ دهم، پنجاه و پنجمین عدد فرد یعنی ۱۰۹ است و داریم:

$$\text{جمع دستهٔ دهم}=109+107+105+103+101+99+97+95+93+91$$

در این مجموع، جمع اعداد اول و آخر برابر ۲۰۰ است و داریم:

$$200+200+200+200+200=1000$$

۱۶۶- گزینهٔ ۳ داریم $a_1=1$ و $a_{n+1}=a_n+2n+1$. چند جملهٔ اول دنباله را می‌نویسیم:

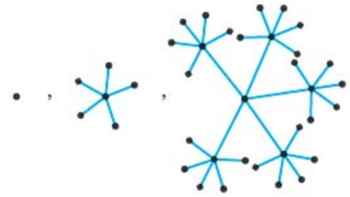
$$a_2=a_1+3=1+3=4=2^2$$
$$a_3=a_2+5=4+5=9=3^2$$
$$a_4=a_3+7=9+7=16=4^2$$

می‌بینیم که مقدار هر جمله، برابر مربع شمارهٔ آن است، یعنی $a_n=n^2$، پس:

$$a_{23}=23^2=529$$

۱۶۷- گزینهٔ

تعداد نقطه‌های هر کدام از شکل‌ها را می‌نویسیم تا الگو را حدس بزنیم:

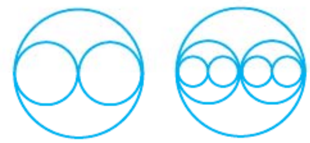


شمارهٔ شکل	۱	۲	۳
تعداد نقطه‌ها	۱	۶	۳۱
الگو	۱	۱+۵	۱+۵+۲۵

پس در شکل nاُم به تعداد $a_n = ۱+۵^۱+۵^۲+\cdots+۵^{n-۱}$ نقطه داریم، بنابراین تعداد نقطه‌های شکل پنجم برابر است با:

$$a_۵ = ۱+۵^۱+۵^۲+۵^۳+۵^۴ = ۱+۵+۲۵+۱۲۵+۶۲۵ = ۷۸۱$$

۱۶۸- گزینهٔ



مرحلهٔ دوم　　مرحلهٔ اول

در مرحلهٔ اول دو دایره رسم می‌شود که شعاع هر کدام $\frac{a}{۲}$ است. در مرحلهٔ دوم ۴ دایره رسم می‌شود که شعاع هر کدام $\frac{a}{۴}$ است. پس با توجه به دنباله، در هر مرحله تعداد دایره‌ها دو برابر می‌شود و شعاع هر دایره نصف می‌شود. بنابراین در مرحلهٔ nاُم، ۲^n دایره رسم می‌شود که شعاع هر کدام $\frac{a}{۲^n}$ است. در مرحلهٔ دهم $۲^{۱۰}$ دایره رسم می‌شود که شعاع هر کدام $\frac{a}{۲^{۱۰}}$ است و مجموع مساحت این دایره‌ها برابر است با:

$$S = ۲^{۱۰} \times (\pi(\frac{a}{۲^{۱۰}})^۲) = ۲^{۱۰} \times \pi \frac{a^۲}{۲^{۲۰}} = \frac{\pi a^۲}{۱۰۲۴}$$

۱۶۹- گزینهٔ در دسته‌بندی $(۱),(۲,۳),(۴,۵,۶),\ldots$ در هر دسته به تعداد شمارهٔ دسته عدد داریم، پس:

$$(\underset{\underset{۱}{\uparrow}}{۱}),(۲,\underset{\underset{۱+۲}{\uparrow}}{۳}),(۴,۵,\underset{\underset{۱+۲+۳}{\uparrow}}{۶}),(۷,۸,۹,\underset{\underset{۱+۲+۳+۴}{\uparrow}}{۱۰}),\ldots$$

پس عدد آخر دستهٔ nاُم برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+n$، بنابراین عدد آخر دستهٔ بیستم برابر است با: $۱+۲+۳+\cdots+۲۰ = \frac{۲۰\times ۲۱}{۲} = ۲۱۰$

۱۷۰- گزینهٔ اول جمله‌های دنباله را می‌نویسیم:

$$a_۱ = \frac{۲}{۴}, a_۲ = \frac{۳}{۵}, a_۳ = \frac{۴}{۶}, \ldots, a_{۹۶} = \frac{۹۷}{۹۹}, a_{۹۷} = \frac{۹۸}{۱۰۰}$$

با کمی دقت، جملات فرد به صورت $\frac{۲}{۴},\frac{۴}{۶},\frac{۶}{۸},\ldots,\frac{۹۸}{۱۰۰}$ و جملات زوج هم به صورت $\frac{۳}{۵},\frac{۵}{۷},\frac{۷}{۹},\ldots,\frac{۹۷}{۹۹}$ هستند. در هر قسمت با ساده‌کردن اعداد از صورت و مخرج هر کسر با کسر بعدی، فقط صورت کسر اول و مخرج کسر آخر می‌مانند. پس:

$$\begin{cases} \text{ضرب جملات زوج} = \frac{۲}{۱۰۰} \\ \text{ضرب جملات فرد} = \frac{۳}{۹۹} \end{cases} \Rightarrow \text{جواب} = \frac{۲}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۹۹} = \frac{۱}{۵۰\times ۳۳} = \frac{۱}{۱۶۵۰}$$

۱۷۱- گزینهٔ بیایید جمله‌ها را بنویسیم:

$$a_۱ = \sqrt[۲]{(-۶)^۲} = ۶ , a_۲ = \sqrt[۳]{(-۵)^۳} = -۵ , a_۳ = \sqrt[۴]{(-۴)^۴} = ۴$$

$$a_۴ = \sqrt[۵]{(-۳)^۵} = -۳ , a_۵ = \sqrt[۶]{(-۲)^۶} = ۲ , a_۶ = \sqrt[۷]{(-۱)^۷} = -۱$$

$$a_۷ = \sqrt[۸]{۰^۸} = ۰ , a_۸ = \sqrt[۹]{۱^۹} = ۱ , a_۹ = \sqrt[۱۰]{۲^{۱۰}} = ۲$$

$$a_{۱۰} = \sqrt[۱۱]{۳^{۱۱}} = ۳ , a_{۱۱} = \sqrt[۱۲]{۴^{۱۲}} = ۴ , a_{۱۲} = \sqrt[۱۳]{۵^{۱۳}} = ۵$$

و جمع آن‌ها برابر است با: ۱۸.