خلاصه درس

فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک **ماتریس** نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را **درایهٔ** (عنصر) آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و... نمایش می‌دهیم.

برای نمونه:

$$B=\begin{bmatrix}\pi & -0/5\\ \frac{1}{3} & 7\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\\ \sqrt{2} & 0/1\end{bmatrix}$$

$$D=[2] \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم «A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) است.»

برای نمونه: ماتریس $A=\begin{bmatrix}7 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، بنابراین از مرتبهٔ 2×3 است.

> **توجه:** فرم کلی نمایش ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$، به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است، که a_{ij} (درایهٔ عمومی ماتریس) درایهٔ روی سطر i ام و ستون j ام است.

برای نمونه:

$$A_{2\times 2}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \qquad A_{3\times 2}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}$$

$$A_{3\times 3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

مثال اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$، به‌طوری‌که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$، در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید. (کتاب درسی)

پاسخ با توجه به صورت مثال، می‌توان نوشت:

$$a_{ij}=\begin{cases}i+j & ; \ i>j\\ 7 & ; \ i=j\\ i^2 & ; \ i<j\end{cases} \quad ; \quad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}$$

برای درایه‌های a_{11}، a_{22} و a_{33} داریم $i=j$، پس $a_{11}=a_{22}=a_{33}=7$.

هم‌چنین برای درایهٔ a_{12} داریم $i=1$ و $j=2$ $(i<j)$، پس $a_{12}=1^2=1$.

به همین ترتیب:

$a_{24}=2^2=4$ ، $a_{23}=2^2=4$ ، $a_{14}=1^2=1$ ، $a_{13}=1^2=1$

$a_{21}=2+1=3$ ، $a_{34}=3^2=9$ ، $a_{32}=3+2=5$ ، $a_{31}=3+1=4$

در نتیجه ماتریس A به‌صورت $A=\begin{bmatrix}7 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 4 & 4\\ 4 & 5 & 7 & 9\end{bmatrix}$ است.

مثال ماتریس $B=[b_{ij}]_{2\times 2}$ به‌صورت $b_{ij}=i-2j$ تعریف شده است. ماتریس B را با درایه‌هایش بنویسید.

پاسخ ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$ است. همچنین:

$b_{11}=1-2(1)=-1$ ، $b_{12}=1-2(2)=-3$

$b_{21}=2-2(1)=0$ ، $b_{22}=2-2(2)=-2$

بنابراین ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ است.

> **توجه:** اگر ماتریس A از مرتبهٔ 1×1 باشد، یعنی $A=[k]_{1\times 1}$، در این‌صورت این ماتریس را مساوی با عدد حقیقی k تعریف می‌کنیم. **برای نمونه:** $A=[2]_{1\times 1}=2$

■ معرفی چند ماتریس خاص

① **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد.

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 3\end{bmatrix}_{1\times 4}$

② **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد.

برای نمونه:

$$B=\begin{bmatrix}-1\\ \pi\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

③ **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. **برای نمونه:**

$$\bar{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad \bar{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

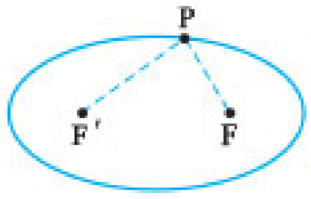
④ **ماتریس مربعی:** اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم.

برای نمونه: ماتریس A، ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ و B، ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۳ است.

$$B=\begin{bmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

درس سوم: بیضی و سهمی

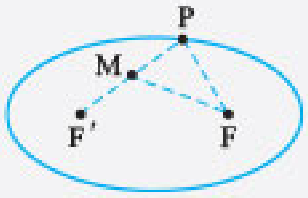
■ بیضی



تعریف: بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطهٔ ثابت، مقداری ثابت است. نقاط ثابت را **کانون‌های بیضی** می‌نامیم و با F و F' نمایش می‌دهیم.

همچنین مقدار ثابت را با $۲a$ نشان می‌دهیم. بنابراین اگر P نقطه‌ای دلخواه روی بیضی باشد، داریم:
$$PF+PF'=۲a$$

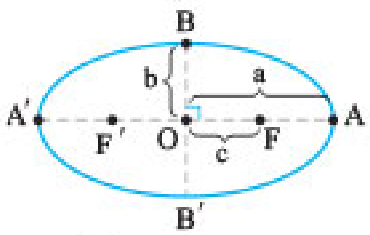
توجه: ما ادعا کردیم بیضی مکان هندسی است، بنابراین باید نشان دهیم اگر M نقطه‌ای دلخواه درون بیضی و N نقطه‌ای دلخواه خارج بیضی باشند، مجموع فواصل هر یک از نقاط M و N از F و F' برابر با $۲a$ **نیست**. برای این منظور $F'M$ را از طرف M امتداد می دهیم تا بیضی را در نقطهٔ P قطع کند، از P به F وصل می‌کنیم، داریم:



$$P\in \text{بیضی} \Rightarrow PF+PF'=۲a$$
$$\overset{\Delta}{PMF}: MF<PF+MP \xrightarrow{+MF'}$$
$$MF+MF'<PF+\underbrace{MP+MF'}_{PF'}$$
$$=PF+PF'=۲a$$

یعنی مجموع فواصل نقطهٔ دلخواه M (داخل بیضی) از F و F'، کوچک‌تر از $۲a$ است. به همین روش می‌توان نشان داد که مجموع فواصل نقطهٔ دلخواه N (خارج بیضی) از F و F'، بزرگ‌تر از $۲a$ است.

■ اجزای بیضی



① نقاط F، F' را **کانون‌های بیضی** و طول پاره‌خط $FF'=۲c$ را **فاصلهٔ کانونی بیضی** می‌گوییم.

② نقاط A و A' را **رأس‌های کانونی** (اصلی) و نقاط B و B' را **رأس‌های ناکانونی** (فرعی) می‌نامیم.

③ وسط پاره‌خط FF' که وسط پاره‌خط‌های AA' و BB' نیز هست را **مرکز بیضی** نامیده و با O نمایش می‌دهیم. $(OF=OF'=c)$.

④ AA' را **قطر بزرگ بیضی** می‌نامیم و طول آن برابر با $۲a$ است، پس $OA=OA'=a$.

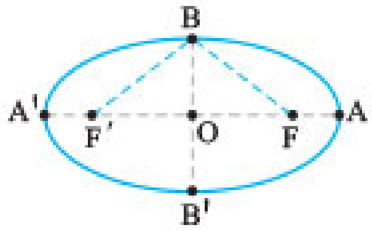
⑤ BB' را **قطر کوچک بیضی** می‌نامیم و طول آن برابر با $۲b$ است، پس $OB=OB'=b$.

⑥ بین a، b و c رابطهٔ فیثاغورس برقرار است: $a^۲=b^۲+c^۲$. بنابراین $a>c$ و $a>b$.

⑦ مقدار $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز** (کشیدگی) بیضی می‌نامیم که عددی بین صفر و یک است (زیرا $c<a$). هرچه‌قدر این عدد به ۰ نزدیک‌تر شود، بیضی کشیده‌تر و شکل آن به دایره نزدیک‌تر می‌شود و هرچه‌قدر این عدد به ۱ نزدیک‌تر شود، کشیدگی بیضی کمتر و شکل آن به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود (۰ شبیه دایره است و ۱ شبیه پاره خط).

درحالتی‌که $\frac{c}{a}=۰$ شود، بیضی به دایره تبدیل می‌شود و درحالتی‌که $\frac{c}{a}=۱$ شود، بیضی به پاره‌خط AA' تبدیل می‌شود.

مثال **در بیضی مقابل، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟**

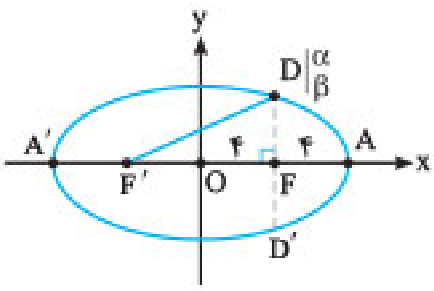


(کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم در بیضی طول قطر بزرگ $AA'=۲a$ و طول قطر کوچک $BB'=۲b$ است. بنابراین طبق فرض داریم:

$$AA'=۲BB'\Rightarrow ۲a=۲(۲b)\Rightarrow a=۲b$$
$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۴b^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۳b^۲=c^۲\Rightarrow \frac{c}{b}=\sqrt{۳}$$
$$\overset{\Delta}{BOF}:\tan O\hat{B}F=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}\Rightarrow \tan O\hat{B}F=\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow O\hat{B}F=۶۰^\circ \Rightarrow F\hat{B}F'=۲O\hat{B}F=۲(۶۰^\circ)=۱۲۰^\circ$$

مثال **مطابق شکل، مرکز بیضی زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن بر محورهای مختصات منطبق است. فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطهٔ F بر AA' عمود کرده‌ایم، بیضی را به‌ترتیب در نقاط D و D' قطع کند، مختصات D و D' را به‌دست آورید.**



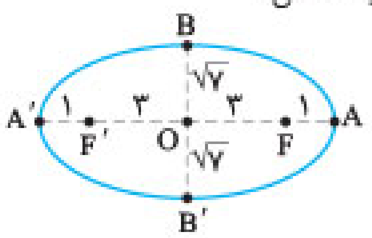
(کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم در بیضی $OF=OF'=c$ و $OA=a$، حال چون طبق فرض $OF=FA=۴$، داریم $\alpha=۴$، $a=۸$ و $c=۴$. از D به F' وصل می‌کنیم. طبق تعریف بیضی داریم $DF+DF'=۲a$، پس $DF+DF'=۱۶$ یا $\beta+DF'=۱۶$. بنابراین:

$$\overset{\Delta}{DFF'}: DF^۲=DF'^۲-FF'^۲\Rightarrow \beta^۲=DF'^۲-(۲c)^۲$$
$$\Rightarrow \beta^۲=DF'^۲-۸^۲\Rightarrow DF'^۲-\beta^۲=۸^۲$$
$$\Rightarrow (DF'-\beta)(DF'+\beta)=۸^۲$$
$$\xrightarrow{\beta+DF'=۱۶}(DF'-\beta)\times ۱۶=۸^۲\Rightarrow DF'-\beta=۴$$
$$\begin{cases}DF'-\beta=۴\\ DF'+\beta=۱۶\end{cases}\Rightarrow ۲\beta=۱۲\Rightarrow \beta=۶\Rightarrow D(۴,۶),\ D'(۴,-۶)$$

مثال **در یک بیضی $a=۴$ و $c=۳$ است. این بیضی را به‌طور تقریبی رسم کنید.**

پاسخ از آن‌جاکه $c=۳$، پس $FF'=۲c=۶$. بنابراین ابتدا پاره‌خطی به طول ۶ رسم می‌کنیم. می‌دانیم $A'F'=AF=OA-OF=a-c=۴-۳=۱$. حال FF' را یک‌بار از طرف F و بار دیگر از طرف F' به اندازهٔ یک واحد امتداد می‌دهیم تا نقاط A و A' به‌دست آیند. حال:



$$a^۲=b^۲+c^۲$$
$$\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=۱۶-۹=۷$$
$$\Rightarrow b=\sqrt{۷}$$

بنابراین:

$$OF=OF'=c=۳,\ OA=OA'=a=۴,\ OB=OB'=b=\sqrt{۷}$$

امتحان ۱

مهروماه

سؤالات شبیه‌ساز امتحانی نوبت اول

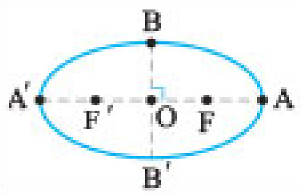
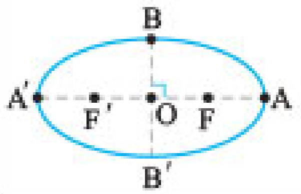
درس: هندسه ۳ (دوازدهم)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه	تاریخ:

ردیف	سؤالات	نمره
	فصل اول	
۱	**جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.** **الف) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....** **ب) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ....** **پ) یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان آن .... باشد.**	۰/۷۵
۲	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** **الف) اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & y \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه داریم: $x+y+z=13$.** ☐ درست ☐ نادرست **ب) اگر A، B و C سه ماتریس باشند و $AB=AC$، آن‌گاه $B=C$.** ☐ درست ☐ نادرست **پ) در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ آن‌گاه دستگاه جواب ندارد.** ☐ درست ☐ نادرست **ت) اگر $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر ۱ است.** ☐ درست ☐ نادرست	۱
۳	**اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times 3}$، به‌صورت زیر تعریف شوند، حاصل $AB+I$ را به‌دست آورید.** $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ 2 & i=j \\ i^2 & i<j \end{cases} \quad b_{ij}=\begin{cases} i-j & i\leq j \\ j-i & i>j \end{cases}$	۱/۵
۴	**اگر $A^3=I-2A$ باشد، نشان دهید $(A^2+I)^2=A+I$.**	۱
۵	**اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{1400}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $2a+b-c+3d$ را به‌دست آورید.**	۱/۲۵
۶	**اگر دترمینان ماتریس $A_{2\times 2}$ برابر $-\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه $\|-4A^{-1}\|$ چقدر است؟**	۰/۵
۷	**ثابت کنید وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در صورت وجود از رابطهٔ $A^{-1}=\frac{1}{\|A\|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید.**	۱/۲۵
۸	**اگر $\begin{bmatrix} 2 & x & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=14$ باشد، مقدار x را بیابید.**	۱
۹	**اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\|A\|+\|B\|$ را به‌دست آورید.**	۰/۷۵
۱۰	**دستگاه $\begin{cases} 3x+4y=10 \\ -3x+2y=-4 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.**	۱
	فصل دوم	
۱۱	**جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.** **الف) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع ℓ و ℓ' به یک فاصله‌اند، .... است.** **ب) رابطهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر ....** **پ) اگر در معادله تقاطع خط و دایره داشته باشیم $\Delta=0$، آن‌گاه خط و دایره ....** **ت) اگر صفحهٔ P هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این‌صورت سطح مقطع .... است.**	۱

مهروماه

سؤالات امتحانی دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور نوبت دوم

درس: هندسه ۳ (دوازدهم)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	تاریخ امتحان: دی ۱۴۰۰

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند، آن‌گاه: $\|AB\|=\|A\|\|B\|$ درست ☐ نادرست ☐ ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (ℓ) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل‌مشترک حاصل یک دایره خواهد بود. درست ☐ نادرست ☐ پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود. درست ☐ نادرست ☐ ت) نقطه با مختصات $(-2,3,-4)$ در ناحیهٔ (کنج) شمارهٔ ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است. درست ☐ نادرست ☐	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون .... نامیده می‌شود. ب) مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد. پ) اگر مجموع فواصل نقطهٔ A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در .... بیضی است. ت) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$، در این‌صورت زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.	۱
۳	اگر $A=\begin{bmatrix}2x & 5\\ z & 1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}3 & 2x+y\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ و $A=B$ باشد، در این‌صورت حاصل $x+2y+3z$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۴	اگر $A=[2i-3j]_{2\times2}$ و $B_{2\times2}=\begin{cases}-1 & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را به‌دست آورید. پرتکرار	۲
۵	اگـــر ماتریس A را ماتریـــس ضرایب و X را ماتریس مجهـــولات و B را ماتریس معلومات دســـتگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases}2x-y=4\\ -4x+3y=2\end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX=B$ ، ماتریس X را به‌دست آورید. پرتکرار	۱/۵
۶	اگر A ماتریس ۳×۳ باشد، $\|A\|=4$ باشد، آن‌گاه حاصل $\|\|A\|A\|$ را به‌دست آورید.	۰/۷۵
۷	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,3)$ بوده و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.	۱
۸	در نقطهٔ $A(2,3)$ روی دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x-2y=3$ ، مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به‌دست آورید.	۱/۵
۹	اگر در بیضی مقابل، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشـــد، اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟ 	۱/۲۵
۱۰	در بیضی روبه‌رو: $OA=OA'=a$ ، $OB=OB'=b$ ، $OF=OF'=c$. ثابت کنید: $b^2+c^2=a^2$. 	۱/۲۵
۱۱	سهمی $y^2=2x+4y$ را در نظر بگیرید. پرتکرار الف) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به‌دست آورید. ب) نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به‌دست آورید.	۲
۱۲	الف) در فضای سه‌بعدی، نقطهٔ A روی محور x ها به طول ۲ و نقطهٔ B در صفحه yoz با عرض ۳- و ارتفاع ۴ مفروض است. فاصلهٔ وسط پاره خط AB تا مبدأ مختصات را به‌دست آورید. ب) اگر طول، عرض و ارتفاع اتاقی به ترتیب ۴، ۵ و ۳ متر باشد، طول قطر اتاق که دو نقطهٔ مقابل را به هم وصل می‌کند را به‌دست آورید.	۲
۱۳	بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را در نظر بگیرید. پرتکرار الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.	۲
۱۴	بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $\|\vec{a}\|=3$ و $\|\vec{b}\|=26$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=72$ است. اگر زاویهٔ بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را به‌دست آورید.	۱/۵
	جمع نمره	۲۰

امتحان ۱۰ - خرداد ماه ۱۴۰۰ (نوبت دوم)

۱ الـف) ۸ (فصل ۱ / ماتریس اسکالر) (۰/۲۵) / ب) خط (فصل ۲ / مقاطع مخروطی) (۰/۲۵) / پ) دایره (فصل ۲ / خروج از مرکز بیضی) (۰/۲۵) / ت) ۶ (فصل ۳ / معرفی فضای $\mathbb{R}^3$) (۰/۲۵)

۲ الف) درست (فصل ۲ / ضرب عدد حقیقی در ماتریس) (۰/۲۵) / ب) نادرست (فصل ۲ / مکان هندسی) (۰/۲۵) / پ) درست (فصل ۲ / ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها) (۰/۲۵) / ت) نادرست (فصل ۳ / ضرب داخلی) (۰/۲۵)

۳

$$\begin{cases} m-2=0 \\ n+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 & (0/25) \\ n=-1 & (0/25) \end{cases}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix} (0/5)$$

(فصل ۱ / ضرب دو ماتریس)

۴

$$\underbrace{|2A|=(|A|^2+4)}_{(0/5)} \Rightarrow \underbrace{(|A|-2)^2=0}_{(0/25)} \Rightarrow |A|=2 \ (0/25)$$

$$\underbrace{|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}}_{(0/25)}=\frac{1}{2} (0/25)$$

(فصل ۱ / خواص دترمینان)

۵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\underbrace{\underbrace{\frac{1}{3+8}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{(0/5)}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}}_{(0/25)}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (0/25)$$

(فصل ۱ / حل دستگاه با استفاده از ماتریس وارون)

۶ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با:

$$r=\frac{|3(2)+4(1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{15}{5}=3 \ (0/5)$$

معادلهٔ دایره برابر است با: $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ (۰/۵)

(فصل ۲ / معادلهٔ دایرهٔ مماس بر خط)

۷

مرکز و شعاع دایرهٔ $x^2+y^2-6x-2y+9=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=1$ برابر است با: $O'=(3,1)\ ,\ r'=1$ (۰/۵)

فاصلهٔ دو مرکز برابر $d=OO'=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{10}$ (۰/۵) است و $d>r+r'=2$ (۰/۲۵). بنابراین دو دایره بیرون یکدیگرند (متخارج‌اند) (۰/۲۵)

(فصل ۲ / وضعیت نسبی دو دایره)

۸ نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد، در نتیجه:

$BF=BF'(1)$ (۰/۲۵)

فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

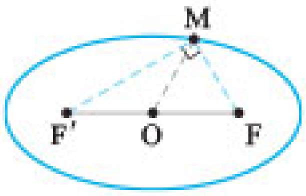
$$BF+BF'=2a \xrightarrow{(1)} BF=BF'=a \ (0/25)$$

بنا به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BOF، داریم:

$$OF^2+OB^2=BF^2 \xrightarrow{(0/25)} c^2+b^2=a^2 \ (0/25)$$

(فصل ۲ / اجزای بیضی)

۹ الف)



$$\begin{cases} 2a=10 \Rightarrow a=5 \\ 2b=6 \Rightarrow b=3 \end{cases} (0/25) \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=4 (0/25)$$

در مثلث MFF'، میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف ضلع روبه‌رو است $MO=\frac{1}{2}FF'=4$. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. (۰/۲۵)

ب)

$$MF+MF'=2a=10 \Rightarrow MF'=10-MF \ (0/25)$$

$$MF^2+MF'^2=FF'^2 \Rightarrow \underbrace{MF^2+(10-MF)^2=8^2}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow MF=5-\sqrt{7} (0/25)$$

(فصل ۲ / اجزای بیضی)

۱۰ الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات، خواهیم داشت: $a=-4$ (۰/۲۵)

دهانهٔ سهمی رو به پایین است و معادلهٔ آن برابر است با:

$(x-2)^2=4(-4)(y-3)$ (۰/۵) (فصل ۲ / معادلهٔ سهمی)

ب) مختصات کانون سهمی برابر است با: $F=(2,-1)$ (۰/۵)

(فصل ۲ / اجزای سهمی)

۱۱ اگر قطر دهانهٔ دیش را با $2b$ و گودی آن را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی برابر $a=\frac{4b^2}{16h}$ (۰/۲۵) است.

$h=9$ و $2b=60$. با جای‌گذاری در رابطهٔ فوق، داریم:

$$a=\frac{(2b)(2b)}{16h}=\frac{60\times 60}{16(9)}=25 \ (0/5)$$

(فصل ۲ / اجزای سهمی)

۱۲ الف) $b=-3$ (۰/۵) ب) محور z ها (۰/۵)

پ) نقطهٔ $A=(0,2,3)$ (۰/۲۵) و مختصات وسط AB برابر است با: $(-2,4,0)$، (۰/۲۵) (فصل ۳ / معرفی فضای $\mathbb{R}^3$)

۱۳

$$\vec{b}+\vec{c}=(2,-3,6) \ (0/5) \ ,\ \vec{a}'=\underbrace{\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^2}(\vec{b}+\vec{c})}_{(0/25)}$$

$$=\frac{35}{49}(2,-3,6) \ (0/75)$$

(فصل ۳ / تصویر قائم بردار)

۱۴

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{O}|^2 \ (0/25)$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=0 \ (0/5)$$

$$\Rightarrow 1+4+9+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=0 \ (0/25)$$

$$\Rightarrow (\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-7 \ (0/25)$$

(فصل ۳ / ضرب داخلی)