Bertrand Russell
1872-1970

Matrix $_{m\times n}$

CHAPTER 1

درس اول — ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

صفحه ۱۰ تا ۲۱ کتاب درسی

تعریف ماتریس و مفاهیم اولیهٔ آن

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و تعدادی ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در این ماتریس، یک درایه یا عنصر نامیده می‌شود. ماتریس‌ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند A , B , C و ... نشان می‌دهند.

ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون	ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون	ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون
$C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ سطر اول C	$B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ سطر دوم B	$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ ۷ & \sqrt{۲} & -۲ \end{bmatrix}$ ستون سوم A، درایه

اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، به‌صورت $A_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نوشته می‌شود و A را ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (یا به‌طور خلاصه m در n) می‌گویند.

$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ ماتریس ۲ در ۳ ۲ سطر و ۳ ستون

$B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$ ماتریس ۱ در ۳

هر درایهٔ ماتریس را با دو اندیس نشان می‌دهیم. اندیس اول شمارهٔ سطر و اندیس دوم شمارهٔ ستون را نشان می‌دهد، یعنی a_{ij} درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم است.

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$D=\begin{bmatrix} d_{۱۱} & d_{۱۲} & d_{۱۳} \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$ درایهٔ سطر اول و ستون سوم

Test تعداد درایه‌های کدام ماتریس از بقیه بیشتر است؟

۱) $[a_{ij}]_{۳\times ۴}$ ۲) $[a_{ij}]_{۲\times ۶}$

۳) $[a_{ij}]_{۶\times ۲}$ ۴) هر سه گزینه برابر است.

۴ تعداد درایه‌ها در یک ماتریس $m\times n$ برابر با $m\times n$ است، بنابراین همهٔ ماتریس‌های داده شده در گزینه‌ها ۱۲ درایه دارند.

۱. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) در هر سطر ۳ درایه وجود دارد. ۲) تعداد ستون‌ها برابر ۳ است.

۳) تعداد سطرها برابر ۲ است. ۴) در هر ستون ۳ درایه وجود دارد.

۲. اگر تعداد سطرها و ستون‌ها در ماتریس $A=[a_{ij}]_{(n-۱)\times ۳}$ با هم برابر باشد، تعداد درایه‌های کدام ماتریس از سایرین کمتر است؟

۱) $[a_{ij}]_{n\times ۳}$ ۲) $[a_{ij}]_{(n+۱)\times ۲}$

۳) $[a_{ij}]_{۶\times (n-۲)}$ ۴) $[a_{ij}]_{۵\times (n-۱)}$

۳. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $a_{ii}=۱$ ۲) $a_{۲۱}=۲$

۳) $a_{۳۱}=۲$ ۴) $a_{۲۳}=۱$

۴. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ درایه‌های به‌صورت $a_{۲j}$ معرف درایه‌های ..... است و دامنهٔ j به‌صورت ..... می‌باشد.

۱) درایه‌های سطر دوم - $۱\le j\le ۳$ ۲) درایه‌های ستون دوم - $۱\le j\le ۳$

۳) درایه‌های ستون دوم - $۱\le j\le ۲$ ۴) درایه‌های سطر دوم - $۱\le j\le ۲$

۵. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x & ۵ \\ ۳ & -۱ & ۴ & y \\ ۷ & ۸ & ۹ & x-۲ \end{bmatrix}$ اگر درایهٔ سطر اول و ستون سوم از درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگتر باشد، حاصل $\sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۷

۳) ۳۴ ۴) ۳۵

۶. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $\sum_{j=۱}^{۳} a_{۲j}$ چقدر از $\sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}$ کمتر است؟

۱) ۷ ۲) ۶

۳) ۵ ۴) ۴

بیان درایه‌ها برحسب i و j

در بعضی از ماتریس‌ها، درایه‌ها را به‌طور مستقیم معرفی نمی‌کنند و آن‌ها را برحسب تابعی از اندیس‌های سمت چپ و سمت راست درایه بیان می‌کنند. در این موارد ممکن است تابع چندضابطه‌ای نیز باشد که برای پیدا کردن درایه‌ها باید به شرط‌های گفته شده دقت کنید.

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ اگر به ازای هر $۱\le i\le ۲$ و هر $۱\le j\le ۲$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ ⇐ جمع درایه‌ها $=۲۰$

در ماتریس $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ اگر به ازای هر $۱\le i\le ۲$ و هر $۱\le j\le ۳$ داشته باشیم: $b_{ij}=i+j$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

$b_{۱۱}$ $b_{۱۲}$ $b_{۱۳}$

$B=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱+۲ & ۱+۳ \\ ۲+۱ & ۲+۲ & ۲+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$ ⇐ جمع درایه‌ها $=۲۱$

$b_{۲۱}$ $b_{۲۲}$ $b_{۲۳}$

در ماتریس $C=[c_{ij}]_{۲\times۲}$ اگر $c_{ij}=\begin{cases} i\times j & ; i\ge j \\ ۷ & ; i<j \end{cases}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

$i\ge j$ $i<j$

$C=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱\times۱ & ۷ \\ ۲\times۱ & ۲\times۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ⇐ جمع درایه‌ها $=۱۴$

Test در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۲j & ; i\ne j \\ i+j & ; i=j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱

۳) ۳- ۴) ۲

۲

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱^۲-۲\times۲ \\ ۲^۲-۲\times۱ & ۲+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ⇐ جمع درایه‌های ستون دوم $=-۳+۴=۱$

۷. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ اگر درایهٔ واقع در سطر i ام و ستون j ام از رابطهٔ $a_{ij}=i^{۲}-j$ به دست آید، مجموع درایه‌های ماتریس کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸. در ماتریس $A=[۲i-j^{۲}]_{۳\times۳}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های واقع بر سطر دوم چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۴-

۹. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$ با کدام گزینه برابر است؟ [i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون]

۱) $[i^{۲}+j]_{۲\times۲}$ ۲) $[i+j]_{۲\times۲}$

۳) $[۲i-j]_{۲\times۲}$ ۴) $[ij]_{۲\times۲}$

معرفی ماتریس مربعی

اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n (یا $n\times n$) می‌نامیم.

a_{ij} روی قطر اصلی $\Leftarrow i=j$	a_{ij} روی قطر فرعی $\Leftarrow i+j=n+۱$
$B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰/۲ & ۰ & ۴\end{bmatrix}_{۳\times۳}$	$C=\begin{bmatrix}۹ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۱ & ۴\\ ۷ & ۵ & ۲\end{bmatrix}_{۳\times۳}$

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه بر اساس رابطهٔ بین i و j می‌توان موقعیت درایه را نسبت به قطر اصلی تشخیص داد:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & & \cdots & a_{۲n}\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

i<j [بالای قطر اصلی]

i>j [پایین قطر اصلی]

i=j [روی قطر اصلی]

Test در ماتریس $A=[۳i+j]_{۳\times۳}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲ لازم نیست همهٔ درایه‌های A را پیدا کنید یافتن درایه‌های زیر قطر اصلی کافیست [در ضمن $a_{ij}=۲i+j$]:

$$A=\begin{bmatrix}\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc\\ a_{۲۱} & \bigcirc & \bigcirc\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & \bigcirc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc\\ ۷ & \bigcirc & \bigcirc\\ ۱۰ & ۱۱ & \bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow$$ جمع درایه‌های زیر قطر اصلی $=۷+۱۰+۱۱=۲۸$

۱۰. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ کدام درایه بالای قطر اصلی قرار دارد؟

۱) $a_{۱۱}$ ۲) $a_{۲۲}$ ۳) $a_{۳۱}$ ۴) $a_{۱۳}$

۱۱. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با فرض $a_{ij}=\begin{cases}i-j & ; i<j\\ i+j & ; i=j\\ ij & ; i>j\end{cases}$ مجموع درایه‌های ستون سوم چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲. در ماتریس $A=[۴i-j]_{۳\times۳}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۳. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i-jx & ; i>j\\ ij & ; i=j\\ ۲ix+j & ; i<j\end{cases}$ اگر مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی با مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی برابر باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

گاهی اوقات یک ماتریس از ماتریس‌های کوچکتر [زیر ماتریس] تشکیل شده است، که چندین بار در کنکور مورد سؤال قرار گرفته است.

نمونه‌ای از این ماتریس‌ها به صورت زیر است:

$M_1=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ $\quad M_2=[A\ \vdots\ B]$ $\quad M_3=\left[\begin{array}{cc:c} a & b & c\\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{A} & \begin{matrix}d\\e\end{matrix}\end{array}\right]$ $\quad M_4=\left[\begin{array}{c:c} A & B\\ \hdashline C & D\end{array}\right]$

در چنین مواردی یا موارد مشابه آن‌ها باید، درایه‌های هر زیر ماتریس را مطابق نظمی که در ماتریس اصلی قرار گرفته، در آن قرار دهیم. مخصوصاً اگر زیرماتریس‌ها بر حسب تابعی از i و j داده شوند، ابتدا باید هر زیر ماتریس را تشکیل دهیم و سپس آن را در ماتریس اصلی قرار دهیم.

اگر $A=[1\ \ 2\ \ 3]$, $B=\begin{bmatrix}2&1&4\\5&0&7\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس C را بنویسید. جمع درایه‌های قطر اصلی C کدام است؟

$C=\begin{bmatrix}2&1&4\\5&0&7\\1&2&3\end{bmatrix}$ ⇐ جمع درایه‌های قطر اصلی $=2+0+3=5$

در مثال فوق، اگر ماتریس C را به‌صورت $C=\left[\begin{array}{c:c}2&1\ \ 4\\ \hdashline 5&\\1&D\end{array}\right]$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس D کدام است؟

با توجه به ماتریس C، خواهیم داشت: $D=\begin{bmatrix}0&7\\2&3\end{bmatrix}$ ⇐ جمع درایه‌های قطر فرعی $=2+7=9$

اگر $A=[i+j]_{1\times3}$, $B=[i\times j]_{1\times3}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، ماتریس $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ را بنویسید.

ابتدا باید ماتریس‌های A و B را تشکیل دهیم و سپس زیر هم بنویسیم:

$A=[1+1\ \ 1+2\ \ 1+3]$
$B=[1\times1\ \ 1\times2\ \ 1\times3]$
$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&3\end{bmatrix}$

بعضی‌ها ممکن است ماتریس C را به‌صورت $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&1+2&1+3\\2\times1&2\times2&2\times3\end{bmatrix}$ تشکیل دهند که کاملاً اشتباه است و اشتباه آن در درایه‌های سطر دوم است.

Test اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\1&4&5&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&5&1&4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشد و ماتریس C را به صورت $C=\left[\begin{array}{c:c}\ddots&3\\ \hdashline E&\end{array}\right]$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر اصلی E کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۲

۱

$C=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\ \hdashline 1&4&5&2\\1&1&2&1\\0&5&1&4\end{array}\right]\Rightarrow E=\begin{bmatrix}1&4&5\\1&1&2\\0&5&1\end{bmatrix}\Rightarrow$ جمع درایه‌های قطر اصلی $=3$

۱۴. اگر $A=[i+j]_{1\times3}$ و $B=[i^2+j^2]_{2\times3}$ و ماتریس C به‌صورت $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس C کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۵
۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۵. اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$, $a_{ij}=\begin{cases}1 & ; i>j\\ i+j & ; i=j\\ 3 & ; i<j\end{cases}$ را به‌صورت $A=\left[\begin{array}{c:c}2\ \ 3&3\\ \hdashline B&3\\6\end{array}\right]$ نشان دهیم، در ماتریس B مجموع درایه‌های قطر فرعی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

اگر در یک ماتریس مربعی درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشد، ماتریس را بالا مثلثی و اگر درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشد، ماتریس را پایین مثلثی می‌نامند.

$B=\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۲&۱&۰\\۳&۲&۴\end{bmatrix}$ پایین مثلثی $A=\begin{bmatrix}۵&۲&۱\\۰&۱&۳\\۰&۰&۴\end{bmatrix}$ بالا مثلثی

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&a+۱&a+b\\a&۳&b-۱\\b&a&۴\end{bmatrix}$ پایین مثلثی باشد.

باید درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشد، بنابراین:

$\begin{cases}a+۱=۰\Rightarrow a=-۱\\b-۱=۰\Rightarrow b=۱\end{cases}$ $a+b=۰$

بنابراین درایهٔ سطر اول و ستون سوم یعنی a+b خود به خود صفر می‌شود و نیازی به صفر گذاشتن آن نیست.

اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند، این ماتریس را ماتریس قطری می‌نامند.

$C=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}_{۳\times۳}$ $B=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۴\end{bmatrix}_{۳\times۳}$ $A=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۳\end{bmatrix}_{۲\times۲}$

درایه‌های قطر اصلی در ماتریس‌های قطری می‌تواند صفر هم باشد.

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a-۱&b+۲\\a+۱&b-۱\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

برای این‌که یک ماتریس قطری باشد باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد:

$\begin{cases}b+۲=۰\Rightarrow b=-۲\\a+۱=۰\Rightarrow a=-۱\end{cases}$

اگر در یک ماتریس مربعی درایه‌های زیر قطر فرعی یا بالای قطر فرعی صفر باشد، ماتریس را شبه مثلثی می‌نامند و اگر تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر فرعی صفر شود، ماتریس را شبه‌قطری می‌نامند.

به ازای کدام مقدار a و b ماتریس $A=\begin{bmatrix}a-۲&a+۱\\b+۲&b+۱\end{bmatrix}$ یک ماتریس شبه قطری است؟

باید درایه‌های خارج از قطر فرعی صفر باشد، بنابراین:

$\begin{cases}a-۲=۰\Rightarrow a=۲\\b+۱=۰\Rightarrow b=-۱\end{cases}$

اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابر باشند، آن ماتریس را یک ماتریس اسکالر می‌نامند.

$C=[۴]_{۱\times۱}$ $B=\begin{bmatrix}-۴&۰&۰\\۰&-۴&۰\\۰&۰&-۴\end{bmatrix}_{۳\times۳}$ $A=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{bmatrix}_{۲\times۲}$

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&a-۲\\۰&b\end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد و درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند:

$\begin{cases}a-۲=۰\Rightarrow a=۲\\a=b\Rightarrow b=۲\end{cases}$

اگر در یک ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های قطر اصلی برابر «۱» باشند، آن را ماتریس واحد (ماتریس همانی) می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

$I=[۱]_{۱\times۱}$ $I=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ $I=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}_{۳\times۳}$

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a-۱&c+۱\\d-۲&b-۲\end{bmatrix}$ یک ماتریس واحد باشد، مقادیر a, b, c, d را به دست آورید.

باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد و درایه‌های روی قطر اصلی برابر با ۱ باشد.

1 $a-۱=۱\Rightarrow a=۲$ 2 $b-۲=۱\Rightarrow b=۳$

3 $c+۱=۰\Rightarrow c=-۱$ 4 $d-۲=۰\Rightarrow d=۲$

اگر ماتریسی فقط دارای یک سطر باشد، آن را **ماتریس سطری** می‌نامند. [به‌طور کلی ماتریس‌هایی که تعداد ستون‌های آن‌ها بیشتر از تعداد سطرهای آن‌هاست ماتریس افقی نامیده می‌شوند. ماتریس سطری یک حالت خاص از ماتریس‌های افقی محسوب می‌شود.]

$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰/۵ & ۷ \end{bmatrix}_{۱\times۳}$ $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}_{۱\times۲}$ $C=\begin{bmatrix} ۵ \end{bmatrix}_{۱\times۱}=۵$

اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{(n-۲)\times n}$ و $a_{ij}=i^۲-۲j$ یک ماتریس سطری باشد، مجموع درایه‌های A را پیدا کنید.

باید ماتریس A دارای یک سطر باشد، بنابراین:

$n-۲=۱\Rightarrow n=۳\Rightarrow A=[a_{ij}]_{۱\times۳}=[a_{۱۱}\ \ a_{۱۲}\ \ a_{۱۳}]=[۱^۲-۲\times۱\ \ ۱^۲-۲\times۲\ \ ۱^۲-۲\times۳]=[-۱\ \ -۳\ \ -۵]$ مجموع درایه‌های A $=-۹$

اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد، آن را **ماتریس ستونی** می‌نامند. [به‌طور کلی ماتریس‌هایی که تعداد سطرهای آن‌ها بیشتر از تعداد ستون‌های آن‌هاست ماتریس قائم نامیده می‌شوند. ماتریس ستونی یک حالت خاص از ماتریس‌های قائم محسوب می‌شود.]

$A=\begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{۲} \\ ۵ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$ $B=\begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۱}$ $C=\begin{bmatrix} ۹ \end{bmatrix}_{۱\times۱}=۹$

اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times(n-۱)}$ و $a_{ij}=۲i+۳j$ یک ماتریس ستونی باشد، مجموع درایه‌های A را پیدا کنید.

باید ماتریس دارای یک ستون باشد، بنابراین:

$n-۱=۱\Rightarrow n=۲\Rightarrow A=[a_{ij}]_{۲\times۱}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times۱+۳\times۱ \\ ۲\times۲+۳\times۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های A برابر ۱۲ است.

ماتریسی که همهٔ درایه‌های آن صفر باشد را **ماتریس صفر** می‌نامند و با $\bar{o}$ نشان می‌دهند.

$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$ $C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۱\times۳}$

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-۱ & b^۲-۱ \\ b+۱ & a^۲-۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس صفر باشد، $a+b$ را به دست آورید.

باید تمام درایه‌های ماتریس برابر صفر باشد:

$\begin{cases} a-۱=۰ \\ a^۲-۱=۰ \end{cases}\Rightarrow a=۱$ ، $\begin{cases} b+۱=۰ \\ b^۲-۱=۰ \end{cases}\Rightarrow b=-۱$ $\Rightarrow a+b=۰$

Test اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-۱ & a-۲ \\ b+۳ & b-۲ \end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱

۳) ۳ ۴) ۵

برای این‌که A یک ماتریس قطری باشد، باید تمام درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی:

$\begin{cases} a-۲=۰\Rightarrow a=۲ \\ b+۳=۰\Rightarrow b=-۳ \end{cases}\Rightarrow a+b=-۱$

۱۶. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ باشد $a_{ij}=\begin{cases} ۳ & ; i=j \\ ۰ & ; i\neq j \end{cases}$ یک ماتریس ..... است.

۱) قطری و غیر اسکالر ۲) اسکالر غیر همانی

۳) قطری و همانی ۴) همانی و غیر اسکالر

۱۷. در ماتریس واحد درایه‌های ..... برابر یک و درایه‌های خارج ..... برابر صفر است.

۱) قطر اصلی - قطر اصلی ۲) قطر اصلی - قطر فرعی

۳) قطر فرعی - قطر اصلی ۴) قطر فرعی - قطر فرعی

۱۸. درایه‌های ..... در ماتریس قطری ..... صفر باشد.

۱) قطر اصلی - نمی‌تواند
۲) قطر فرعی - باید
۳) خارج قطر اصلی - باید
۴) خارج قطر فرعی - نمی‌تواند

۱۹. ماتریس ..... نوعی ماتریس ..... است.

۱) قطری - اسکالر
۲) واحد - اسکالر
۳) اسکالر - واحد
۴) قطری - واحد

۲۰. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases} i+j & ; \quad i=j \\ ۰ & ; \quad i\neq j \end{cases}$ یک ماتریس ..... است.

۱) قطری و غیر اسکالر
۲) اسکالر غیر همانی
۳) قطری و همانی
۴) همانی غیر اسکالر

۲۱. ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times(n-۱)}$ هم ماتریس سطری است و هم ماتریس ستونی، ماتریس $B=[b_{ij}]_{n\times m}$ چه نوع ماتریسی است؟

۱) سطری
۲) ستونی
۳) مربع
۴) قطری غیر همانی

۲۲. کدام ماتریس اسکالر است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۲۳. کدام ماتریس قطری نیست؟

۱) $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$
۲) $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$
۳) $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$
۴) $D=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۲۴. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a+b & ۱-a \\ b+۲ & a-b \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی چقدر است؟

۱) -۳
۲) ۲
۳) -۱
۴) ۱

۲۵. ماتریس اسکالر $A=\begin{bmatrix} ۲x-۱ & z-۱ \\ ۲+y & ۵-x \end{bmatrix}$ داده شده است. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $x=-۲$
۲) $A=۲I$
۳) $y=z$
۴) $A=۳I$

۲۶. اگر ماتریس $\begin{bmatrix} a-b & a \\ d & d+c \end{bmatrix}$ ماتریس واحد باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲

۲۷. اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر قطری است؟

۱) $A=[i^۲-j^۲]_{۲\times۲}$
۲) $B=[i-j]_{۲\times۲}$
۳) $C=[i+j-۳]_{۲\times۲}$
۴) $D=[i^۲-۲j]_{۲\times۲}$

۲۸. اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، کدام یک از ماتریس‌های ۲×۲ داده شده اسکالر است؟

۱) $A=[i+j-۵]$
۲) $B=[|۳-i+j|]$
۳) $C=[||i-۳|-j|]$
۴) $D=[i^۲+j^۲-۵]$

۲۹. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} x+۱ & x^۲-۱ \\ ۱-x^۲ & ۲ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری غیر اسکالر باشد، x کدام است؟

۱) ±۱
۲) ۱
۳) -۱
۴) صفر

ماتریس متقارن و پاد متقارن [تک رقمی‌ها بدانند]

ماتریس‌هایی به شکل مقابل که درایه‌های طرفین قطر اصلی آن‌ها با هم برابر است را ماتریس‌های متقارن می‌نامند. هر چند که نام این ماتریس به طور مستقیم در کتاب درسی نیامده است، اما می‌توان آن‌ها را به صورت $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ، $a_{ij}=a_{ji}$ تعریف کرد. بدون این که اشارهٔ مستقیم به نام این ماتریس شود.

$$A=\begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{bmatrix}$$

ماتریس‌هایی به شکل مقابل که درایه‌های قطر اصلی آن‌ها صفر و درایه‌های طرفین قطر اصلی آن‌ها قرینه است را ماتریس‌های پاد متقارن می‌نامند، هر چند که نام این ماتریس به طور مستقیم در کتاب درسی نیامده است، اما می‌توان آن‌ها را به صورت $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ، $a_{ij}=-a_{ji}$ تعریف کرد. بدون این که اشاره مستقیم به نام این ماتریس شود.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -x & y \\ x & ۰ & -z \\ -y & z & ۰ \end{bmatrix}$$

Test در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & x-۱ \\ ۵ & ۳+x \end{bmatrix}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد و به ازای هر $۱\le i , j\le ۲$ رابطهٔ $a_{ji}=a_{ij}$ برقرار باشد، x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۶- ۴) ۴-

۱ a_{ij} ، a_{ji} درایه‌های طرفین قطر اصلی هستند، بنابراین باید:

$a_{۱۲}=a_{۲۱}\Rightarrow x-۱=۵\Rightarrow x=۶$

۳۰. اگر در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & m-۱ & m \\ ۲ & ۲ & a+m \\ ۳a & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ همواره به ازای هر i و j دلخواه رابطهٔ $a_{ij}=a_{ji}$ برقرار باشد، مجموع درایه‌های قطر فرعی کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۳

۳۱. اگر در ماتریس $A=\begin{bmatrix} n-۱ & m+۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ به ازای هر i و j رابطهٔ $a_{ij}=-a_{ji}$ برقرار باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۴ ۴) ۳

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\forall i,j \ , \ a_{ij}=b_{ij}\Leftrightarrow[a_{ij}]=[b_{ij}]$$

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ برابر باشند، آنگاه داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\Rightarrow x=۱ , y=۲ , z=۴ , t=۵$$

Test اگر دو ماتریس $A=[i+mj]$ و $B=\begin{bmatrix} m+۱ & ۳ \\ ۳ & x \end{bmatrix}$ برابر باشند، $m+x$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۳ ابتدا ماتریس A را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم، سپس درایه‌های نظیر در دو ماتریس را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۱+m & ۱+۲m \\ ۲+m & ۲+۲m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m+۱ & ۳ \\ ۳ & x \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} ۱+۲m=۳\Rightarrow m=۱ \\ ۲+۲m=x\Rightarrow x=۴ \end{cases}\Rightarrow m+x=۵$$

۳۲. اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & n \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ برابر باشند، مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

۳۳. اگر ماتریس‌های $A=[x-۱ \ \ ۲y \ \ ۳]$ و $B=[۱ \ \ ۴ \ \ -z]$ برابر باشند، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ باشد، به طوری‌که $b_{ij}=a_{ji}$ و دو ماتریس A و B برابر باشند، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۳-

۳۵. اگر $A=\begin{bmatrix} m-۱ & x \\ ۴ & n+۲ \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ باشد، به طوری‌که $b_{ij}=-a_{ji}$ و دو ماتریس A و B برابر باشند، $\frac{x-n}{m}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۱-

جمع و تفریق دو ماتریس

برای محاسبهٔ جمع یا تفریق دو ماتریس، کافی است درایه‌های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع یا تفریق کنیم:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$

فقط دو ماتریس هم‌مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۶ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} ۲+۴ & ۱+۲ \\ ۳+۶ & ۵+۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

Test اگر $A=[i+j]_{۲\times۲}$ و $B=[۲i-j]_{۲\times۲}$ باشد، در ماتریس A+B مجموع درایه های سطر اول کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۶ & ۶ \end{bmatrix}$ ⇐ ۶=جمع درایه‌های سطر اول

راه کوتاه‌تر این است که به جای تشکیل A و B ماتریس $A+B=[(i+j)+(۲i-j)]=[۳i]=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۶ & ۶ \end{bmatrix}$ را تشکیل دهیم.

۳۶. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ باشد، برای این‌که بتوانیم ماتریس B را با آن جمع کنیم، ماتریس B باید ..... باشد.

۱) ۲×۳ ۲) ۳×۲ ۳) ۳×۳ ۴) ۲×۲

۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ x & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & y \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) صفر

۳۸. اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۹. اگر ماتریس $A_n=\begin{bmatrix} ۱ & n \\ n & ۲ \end{bmatrix}$ داده شده باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A_۳+A_۴$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۲ ۳) ۲۰ ۴) ۱۲

۴۰. اگر ماتریس $A_n=\begin{bmatrix} ۲ & ۱-n \\ n & -۲ \end{bmatrix}$ داده شده باشد، در ماتریس $B=A_۱+A_۲+\cdots+A_{۱۰۰}$ مجموع درایه‌ها چقدر است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۹ ۴) صفر

۴۱. اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون و $A=[۲i+j]_{۲\times۲}$ و $B=[i-۲j]_{۲\times۲}$ کدام گزینه درست است؟

۱) $A+B=[۲i+۳j]_{۲\times۲}$ ۲) $A-B=[i-۳j]_{۲\times۲}$

۳) $A+B=[۳i-j]_{۲\times۲}$ ۴) $A-B=[i-j]_{۲\times۲}$

۴۲. اگر $A=\begin{bmatrix} x & x^۲ \\ x-۱ & x \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱-x & x \\ ۱-x & x \end{bmatrix}$ و ماتریس A+B قطری باشد، x کدام است؟

۱) صفر، ۱- ۲) فقط ۱

۳) فقط ۲ ۴) ۲-، ۳

۴۳. اگر مجموع ماتریس اسکالر $A=\begin{bmatrix} x+2 & 0 \\ y+1 & 5 \end{bmatrix}$ و ماتریس $B=\begin{bmatrix} 3 & a-1 \\ b & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) صفر

۴۴. اگر $A=[2\ \ 1\ \ 3]$ و $B=[0\ \ 1\ \ 4]$ و $C=[0\ \ 1\ \ -1]$ باشد، مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $D=\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۷ ۴) ۹

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد در یک ماتریس، کافی است آن عدد را در تمام درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}, r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\Rightarrow 2A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

در حالت خاصی که عدد -1 را در ماتریس A ضرب کنیم، ماتریس $-A$ به‌دست می‌آید که آن را قرینهٔ ماتریس A می‌نامند و همواره داریم:

$$A+(-A)=\bar{0}$$

Test اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times 2}$ به‌طوری که $b_{ij}=i^2+j^2$ حاصل $2A-B+I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

۱ ابتدا ماتریس B را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم:

$$B=\begin{bmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\Rightarrow 2A-B+I=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

۴۵. اگر $a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

۴۶. اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $2A+3B+C=I$، سطر اول ماتریس C کدام است؟

۱) $[-3\ \ 1]$ ۲) $[1\ \ 2]$ ۳) $[2\ \ -1]$ ۴) $[1\ \ 3]$

۴۷. اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $2A+B=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس B کدام است؟

۱) -12 ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۴

۴۸. اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & x+1 \\ 2x & 7 \end{bmatrix}$ برابر صفر باشد، حاصل $2A-\begin{bmatrix} 3 & x \\ 1-x & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$

۴۹. اگر $2A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ و $a_{ij}=4i-2j$ و رابطهٔ $A+3B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ بین ماتریس‌های A و B برقرار باشد، مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

اگر A, B, C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعداد حقیقی باشند، آنگاه خواص زیر همواره برقرار است:

ماتریس صفر عضو بی‌اثر جمع در ماتریس‌ها است.	جمع ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است.	جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.
$A+\bar{o}=\bar{o}+A=A$	$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A+B=B+A$
توزیع‌پذیری ماتریس روی جمع اعداد	توزیع‌پذیری عدد روی جمع ماتریس‌ها	وجود عضو قرینه
$(r\pm s)A=rA\pm sA$	$r(A\pm B)=rA\pm rB$	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{o}$
قابلیت ضرب عدد در طرفین تساوی ماتریسی	قابلیت حذف عدد غیر صفر از طرفین تساوی	جابه‌جایی عدد و ماتریس
$A=B\Rightarrow rA=rB$	$rA=rB\xrightarrow{r\neq 0}A=B$	$(r)(A)=(A)(r)$

Test اگر A, B, C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، کدام درست است؟

۱) $A-(B-C)=(A-B)-C$
۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$
۳) $A-(B+C)=(A-B)+C$
۴) $A+(B-C)=(A-B)+C$

۲ تنها گزینهٔ ۲ درست است که معرف خاصیت شرکت‌پذیری جمع در ماتریس‌هاست. [تفاضل ماتریس‌ها شرکت‌پذیر نیست!]

۵۰. اگر A یک ماتریس مربع باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $A+\bar{O}=\bar{O}$
۲) $A+(-A)=\bar{O}$
۳) $A+I=A$
۴) $(A-B)+C=A-(B+C)$

اگر $A=[a_{1j}]_{1\times m}$ یک ماتریس سطری و $B=[b_{i1}]_{m\times 1}$ یک ماتریس ستونی به‌صورت‌های زیر باشند، آنگاه ضرب دو ماتریس A و B یعنی $A\times B$ یک عدد حقیقی است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$AB=[a_{11}\ \ a_{12}\ \ \dots\ \ a_{1m}]\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \vdots\\ b_{m1}\end{bmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1m}b_{m1}$$

اگر $A=[۲\ \ ۴\ \ ۰]$ و $B=\begin{bmatrix}۳\\ ۷\\ ۵\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$AB=[۲\ \ ۴\ \ ۰]\begin{bmatrix}۳\\ ۷\\ ۵\end{bmatrix}=(۲\times ۳)+(۴\times ۷)+(۰\times ۵)=۶+۲۸+۰=۳۴$$

Test اگر $[x\ \ m]\begin{bmatrix}n\\ y\end{bmatrix}=۵x-y$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۱
۴) ۲-

۲ مطابق الگوی گفته شده عمل می‌کنیم:

$$[x\ \ m]\begin{bmatrix}n\\ y\end{bmatrix}=۵x-y\Rightarrow nx+my=۵x-y\Rightarrow\begin{cases}n=۵\\ m=-۱\end{cases}\Rightarrow m+n=۴$$

۵۱. حاصل $[a\ \ b\ \ c]\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}ax & ay & az\\ bx & by & bz\\ cx & cy & cz\end{bmatrix}$
۲) $[ax\ \ by\ \ cz]$
۳) $ax+by+cz$
۴) $\begin{bmatrix}ax & bx & cx\\ ay & by & cy\\ az & bz & cz\end{bmatrix}$

۵۲. اگر $[x \quad a]\begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} = ۲x+y$ حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲-

۵۳. اگر $[x \quad ۱ \quad ۳]\begin{bmatrix} x \\ ۱ \\ x \end{bmatrix} = x$ مقدار x چقدر است؟

۱) ۱ یا ۲- ۲) فقط ۱- ۳) صفر یا ۲ ۴) ۱ یا صفر

۵۴. دو ماتریس $A=[۲ \quad -۱ \quad ۱]$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند، کدام گزینه درست است؟

۱) $AB=۰$ ۲) $BA=۰$ ۳) $AB=-۲$ ۴) $BA=-۲$

۵۵. اگر $A=[۲ \quad ۱ \quad x]$ و $B=\begin{bmatrix} x \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $AB=۳$ مقدار x کدام است؟

۱) ۱- ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) صفر

محاسبهٔ حاصل‌ضرب دو ماتریس

برای محاسبهٔ ماتریس $A\times B$ کافی است ماتریس A را به‌صورت سطری و ماتریس B را به‌صورت ستونی دسته‌بندی کنیم و هریک از سطرهای ماتریس اول را در ستون‌های ماتریس دوم مطابق آن‌چه گفتیم ضرب کنیم. یعنی درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم از ماتریس $A\times B$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس AB = [سطر iاُم A] $\begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{jاُم} \\ B \end{bmatrix}$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$، آنگاه:

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳-۴ & ۱-۲ \\ ۶+۴ & ۲+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

همواره دقت کنید که برای دو ماتریس A و B، تنها زمانی ماتریس $A\times B$ قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد. یعنی اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ باشد، ماتریس $A\times B$ قابل تعریف و محاسبه است: [همین نکتهٔ ساده یک بار سؤال کنکور بود!!]

$$A_{m\times n}\times B_{n\times p}=(AB)_{m\times p}$$

Test به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $x=۱, y=-۷$ ۲) $x=۲, y=-۷$ ۳) $x=۲, y=-۵$ ۴) $x=۱, y=-۵$

۲ می‌دانیم در ماتریس قطری، درایه‌های بیرون قطر اصلی باید صفر باشد، بنابراین به جای این که همهٔ درایه‌ها را پیدا کنیم کافیست فقط درایه‌های خارج قطر اصلی را پیدا کنیم:

$$\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bigcirc & -۲x+۴ \\ ۷+y & \bigcirc \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۲x+۴=۰ \Rightarrow x=۲ \\ ۷+y=۰ \Rightarrow y=-۷ \end{cases}$$

۵۶. اگر $A_{۲\times ۳}$ و $B_{۳\times ۵}$ باشد، ماتریس AB یک ماتریس ..... است.

۱) ۲×۵ ۲) ۵×۲ ۳) ۳×۳ ۴) ۵×۵

۵۷. اگر $A_{۳\times۴}$ و B یک ماتریس ..... باشد، ماتریس BA قابل محاسبه است.

۱) ۴×۴ ۲) ۳×۳ ۳) ۳×۴ ۴) ۴×۵

۵۸. در ضرب ماتریسی $[A]_{m\times۳}\times[B]_{n\times۴}=[C]_{۲\times p}$ حاصل $m+n+p$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

۵۹. در حاصل‌ضرب $A=[b_{ij}]_{۲\times۳}\times[c_{ij}]_{۳\times۴}\times[d_{ij}]_{۴\times۲}$ مرتبهٔ ماتریس A به کدام صورت است؟

۱) ۴×۳ ۲) ۲×۲ ۳) ۳×۴ ۴) ۳×۳

۶۰. حاصل ضرب ماتریسی $\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) aI ۲) abI ۳) $(a+b)I$ ۴) $\bar{O}$

۶۱. اگر $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}+A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\times A$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$

۶۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم از ماتریس AB کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۶۳. اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشند و $C=BA$ باشد، کدام گزینه در مورد درایه‌های ماتریس C درست است؟

۱) $c_{۱۱}=۴$ ۲) $c_{۲۳}=۲$ ۳) $c_{۲۱}=۵$ ۴) $c_{۳۲}=۸$

۶۴. اگر $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=C$ باشد، سطر دوم ماتریس C کدام است؟

۱) $[۱\ \ -۱]$ ۲) $[۱\ \ -۲]$ ۳) $[۱\ \ ۵]$ ۴) $[۲\ \ -۱]$

۶۵. اگر $A=[i-j]_{۲\times۳}$ و $B=[i+j]_{۴\times۲}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، سطر اول ماتریس BA کدام است؟

۱) $[-۳\ \ ۲\ \ ۵]$ ۲) $[۲\ \ ۵\ \ ۱]$ ۳) $[۱\ \ -۱\ \ ۴]$ ۴) $[۳\ \ -۲\ \ -۷]$

۶۶. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & ; \ i<j \\ ۱ & ; \ i=j \\ ۲ & ; \ i>j \end{cases}$ باشد، سطر دوم ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ A & & ۳ \\ & & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & & A \\ ۰ & & \\ ۳ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $[۵\ \ ۲\ \ -۱]$ ۲) $[۱۱\ \ ۴\ \ -۳]$ ۳) $[۵\ \ ۳\ \ -۱]$ ۴) $[۱۰\ \ ۵\ \ -۲]$

۶۷. در معادلهٔ $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}$ حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۶۸. در تساوی $[۱\ \ ۲]\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۲ & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ حاصل $x-y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۶۹. در معادلهٔ $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ x & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ y \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۳ \end{bmatrix}$ حاصل $x+y$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) صفر

۷۰. اگر حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۲

خواص ضرب ماتریس‌ها

اگر A یک ماتریس مربعی و I ماتریس واحد (همانی) هم‌مرتبه با A باشد، آنگاه ماتریس I عضو بی‌اثر (خنثی) در عمل ضرب ماتریس‌های مربع است:

$$AI=IA=A$$

در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی نیست؛ یعنی به فرض این‌که حاصل‌ضرب‌های AB و BA برای دو ماتریس A و B انجام‌پذیر باشد، حاصل AB و BA الزاماً با هم برابر نیست:

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BA=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۱۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \\ AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow AB \neq BA$$

ضرب ماتریس‌ها روی جمع یا تفریق ماتریس‌ها توزیع‌پذیر است، یعنی اگر $A_{m\times p}$ ، $B_{p\times n}$ ، $C_{p\times n}$ سه ماتریس دلخواه باشند، آنگاه داریم:

$$A\times(B\pm C)=(A\times B)\pm(A\times C)$$

عکس قانون پخشی (توزیع‌پذیری) نیز همواره برقرار است. یعنی می‌توان یک ماتریس را از سمت راست یا از سمت چپ دو عبارت ماتریسی فاکتور گرفت:

- $BA+CA=(B+C)\times A$
- $BA+BC=B\times(A+C)$
- $ABC+ADC=A\times(B+D)\times C$
- $AC+CB$ ⇐ فاکتور ندارند.

دقت کنید که در هنگام فاکتورگیری، ماتریس مورد نظر باید در یک سمت دو عبارت (یا چند عبارت) واقع باشد، در ضمن اگر بعد از فاکتورگیری از یک ماتریس مانند A از یکی از عبارت‌ها، اعدادی مانند ۱,۲,۳,... باقی بماند، به‌جای آن باید از I,۲I,۳I,... استفاده کنید:

- $AB+A=AB+AI=A\times(B+I)$
- $BA+۲A=BA+۲IA=(B+۲I)\times A$
- $ABC-۳AB=AB(C-۳I)$
- $ABC+CBA$ ⇐ فاکتور ندارند.

Test اگر A , B , C ماتریس‌های ۲×۲ باشند و $BC=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل $(AB+۲B)(CA+C)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۴ \\ ۱۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$

۴ راه حرفه‌ای این است که در پرانتز اول از ماتریس B از سمت راست و در پرانتز دوم از C از سمت چپ فاکتور بگیریم و با توجه به این که $BC=۲I$ است، خواهیم داشت:

$$(AB+۲B)(CA+C)=(A+۲I)BC(A+I)=(A+۲I)(۲I)(A+I)=۲(A+۲I)(A+I)$$

$$=۲\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)=۲\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

۷۱. اگر A , B , C , D چهار ماتریس مربعی و هم‌مرتبه و I ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن‌ها باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $ABC+ADC=A(B+D)C$ ۲) $AC+C=(A+I)C$

۳) $BA+AC=A(B+C)$ ۴) $BC-۲B=B(C-۲I)$

۷۲. ماتریس $AB-B$ با ماتریس ..... برابر است.

۱) $(A-۱)B$ ۲) $(A-I)B$

۳) $B(A-۱)$ ۴) $B(A-I)$

۷۳. در کدام ردیف از جدول زیر محاسبات ماتریسی به درستی انجام شده است؟

a	$A + AB = A(B + ۱)$
b	$AC + CB = (A + B)C$
c	$ABC - ۳AB = AB(C - ۳I)$

۱) a
۲) c , b
۳) c
۴) b , a

۷۴. کدام گزینه درست است؟

۱) $BA + AC = A(B + C)$
۲) $ABC + ADC = A(B + D)C$
۳) $BAC + CAB = ۲BAC$
۴) $ABC + AC = A(B + ۱)C$

۷۵. اگر $ABC = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A(B+D)C = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس ADC کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۷۶. اگر $B + I = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس AB مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱) ۲۰
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۱۲

۷۷. اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ بوده به طوری‌که $AB + ۲I = \bar{O}$ و هم‌چنین $A - B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، جمع درایه‌های $A(B - A)B$ کدام است؟

۱) ۴
۲) -۴
۳) ۲
۴) -۲

۷۸. اگر $A + I = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B + I = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ قرینهٔ ماتریس $A + BA + B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} -۳ & -۱ \\ -۳ & -۱ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۷۹. اگر A, B, C ماتریس‌هایی ۲×۲ و $CB = ۲I$ و $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ساده شدهٔ عبارت ماتریسی $(AB + ۲B)(CA + C)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۴ \\ ۱۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$

۸۰. اگر A, B دو ماتریس مربعی ۲×۲ باشند که $AB = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ حاصل $A\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۷ \end{bmatrix}B + A\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

NOTE

انسان‌ها نادان به دنیا می‌آیند، نه احمق!!!
احمق شدن نیاز به آموزش دارد...
«پروفسور برتراند راسل»

همان‌طور که دیدیم ضرب دو ماتریس در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست، اما در بعضی موارد خاص ضرب دو ماتریس تعویض‌پذیر است، یعنی $AB=BA$ است. این موارد عبارتند از:

۱) ضرب ماتریس واحد I_n (ماتریس همانی $n\times n$) و ماتریس اسکالر kI_n با هر ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ تعویض‌پذیر است، یعنی:

$$A(kI)=(kI)A=kA$$

۲) ضرب دو ماتریس قطری همواره تعویض‌پذیر است (در واقع برای ضرب ماتریس‌های قطری در هم، درایه‌های قطر اصلی دو ماتریس نظیربه‌نظیر در هم ضرب می‌شوند و به‌همین دلیل جابه‌جایی به‌وجود می‌آید).

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & by & 0 \\ 0 & 0 & cz \end{bmatrix}$$

۳) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ دو ماتریس مربعی 2×2 با درایه‌های غیرصفر باشند، ضرب این دو ماتریس در صورتی تعویض‌پذیر است که رابطهٔ مقابل برقرار باشد و برعکس:

$$\frac{a-d}{x-t}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

یعنی نسبت درایه‌های قطر فرعی نظیر در دو ماتریس با نسبت تفاضل درایه‌های قطر اصلی برابر شود [در واقع باید دو بردار $v=(a-d,b,c)$ و $u=(x-t,y,z)$ موازی باشند].

اگر در این نسبت‌ها صورت یا مخرج کسر اول صفر باشد، باید این کسر را به صورت صفر، صفرام یعنی $\frac{0}{0}$ در نظر گرفت تا بتواند با کسرهای دیگر برابر باشد.

دو ماتریس به شکل $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ دارای خاصیت جابه‌جایی هستند، چون: $\frac{a-a}{c-c}=\frac{b}{d}=\frac{b}{d}$

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 5 & y \end{bmatrix}$ در تساوی $AB=BA$ صدق کنند، آنگاه مقدار $x+y$ کدام است؟

باید نسبت تفاضل اعداد قطر اصلی با نسبت اعداد قطر فرعی برابر شود:

$$\frac{3-3}{1-y}=\frac{-4}{x}=\frac{4}{5}\Rightarrow\begin{cases} x=-5 \\ 1-y=0\Rightarrow y=1 \end{cases}\Rightarrow x+y=-4$$

Test اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ b & 3 \end{bmatrix}$ در شرایط $AB=BA$ صدق کنند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۳ به جای محاسبهٔ AB و BA و گیرافتادن در باتلاق محاسبات کافیست نسبت تفاضل اعداد قطر اصلی دو ماتریس را با نسبت اعداد قطر فرعی برابر قرار دهیم:

$$\underbrace{\frac{a-2}{7-3}}_{1}=\overbrace{\frac{3}{6}}^{2}=\frac{5}{b}\Rightarrow\begin{cases} 1\ 2a-4=4\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4 \\ 2\ 3\times b=30\Rightarrow b=10 \end{cases}\Rightarrow a+b=14$$

۸۱. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ کدام تساوی برقرار است؟

۱) $AB=BA$ ۲) $AC=CA$

۳) $AD=DA$ ۴) $CD=DC$

۸۲. اگر $A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} e & -k \\ k & e \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه کدام تساوی همواره درست است؟

۱) $BCA=BAC$ ۲) $ABC=ACB$

۳) $CAB=CBA$ ۴) هر سه گزینه

۸۳. اگر ضرب دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & x\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}6 & -2\\ y & 2\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، حاصل $x+y$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۸۴. اگر ضرب دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & x+1\\ y-2 & 2\end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، حاصل $x+y$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

ضرب چند ماتریس

اگر A, B, C سه ماتریس باشند، به‌طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها تعریف شده باشد، آنگاه برای محاسبهٔ $A\times B\times C$ ترتیب ضرب کردن هیچ اهمیتی ندارد؛ یعنی می‌توان اول $A\times B$ را حساب کرد و سپس حاصل را از چپ در C ضرب کرد و یا ابتدا $B\times C$ را حساب کرد و سپس A را از چپ در حاصل $B\times C$ ضرب کرد. این خاصیت در ریاضیات به‌خاصیت شرکت‌پذیری مشهور است:

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

باید دقت کنید که در هنگام محاسبهٔ $A\times B\times C$ جای ماتریس‌ها را نمی‌توان با هم عوض کرد و مثلاً $A\times C\times B$ یا $B\times A\times C$ یا ... نوشت؛ چون شرکت‌پذیری به‌معنی لغزش (SHIFT) پرانتزها است نه جابه‌جایی مکان ماتریس‌ها!!!

$$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}=-10$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\ 2\end{bmatrix}=-10$$

Test از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x & 2x & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}=0$ عدد غیرصفر x، کدام است؟ (داخل ـ ۹۸)

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۱ هیچ راه میانبُری وجود ندارد و ناچاریم ماتریس‌ها را در هم ضرب کنیم بنابراین ابتدا ماتریس سمت چپ را در ماتریس وسطی ضرب کرده و سپس حاصل را از چپ در ماتریس سمت راست ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}x & 2x & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}11x-1 & -x-2 & -3x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\underbrace{x(11x-1)+(-x-2)(2x)-1(-3x)}_{9x^2-2x}=0\Rightarrow x=0,\frac{2}{9}$$

۸۵. کدام گزینه معرف خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌هاست؟

۱) $B(AC)=A(BC)$ ۲) $A(BC)=(BC)A$

۳) $(AC)B=(AB)C$ ۴) $C(AB)=(CA)B$

۸۶. حاصل $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-2 & 2\end{bmatrix}$ ۳) -2 ۴) -6

۸۷. جواب معادلهٔ $\begin{bmatrix}1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 3\end{bmatrix}=0$ کدام است؟

۱) ۱,۰ ۲) ۰,−۲ ۳) −۲,۲ ۴) ۲,۰

۸۸. در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ 0\end{bmatrix}=0$ مقدار x کدام است؟

۱) −۳,−۱ ۲) −۳,۱ ۳) ۳,۱ ۴) ۳,−۱

اگر $D=ABC$ باشد و بخواهیم درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم از ماتریس D را پیدا کنیم، نیازی به ضرب کامل هر سه ماتریس نیست و کافیست به صورت زیر عمل کنیم:

$$d_{ij}=[A\ \text{سطر}\ i\ \text{اُم}][B]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\ \text{اُم}\\ C\end{bmatrix}$$

اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\1&1&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&1\\1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&4&0\end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر سوم و ستون دوم از ماتریس ABC کدام است؟

اگر $D=ABC$ باشد، باید d_{32} را پیدا کنیم، بنابراین:

$$d_{32}=[A\ \text{سطر سوم}][B]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ \text{دوم}\\ C\end{bmatrix}=[1\ \ 1\ \ 3]\begin{bmatrix}3&1\\1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=[1\ \ 6]\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=1+24=25$$

Test اگر $A=[i+j]_{3\times3}$, $B=\begin{bmatrix}3&x\\x&1\\2&-1\end{bmatrix}$, $C=[ij]_{2\times2}$ و i شمارهٔ سطر و j شماره ستون باشد و درایهٔ سطر سوم و ستون اول از ماتریس $D=ABC$ برابر -4 باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

۲

$$d_{31}=[A\ \text{سطر سوم}][B]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ \text{اول}\\ C\end{bmatrix}=[4\ \ 5\ \ 6]\begin{bmatrix}3&x\\x&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=[24+5x\ \ \ 4x-1]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=24+5x+8x-2=-4\Rightarrow13x=-26\Rightarrow x=-2$$

۸۹. اگر $A=[2i-j]_{2\times3}$, $B=[i^2+j]_{3\times2}$, $C=[ij]_{2\times2}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، درایه‌های سطر دوم و ستون اول از ماتریس ABC کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۷۰ ۴) ۱۰۰

۹۰. اگر $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&-2\\0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ و $B=[i+j]_{2\times2}$ و $C=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$ در ماتریس ABC درایهٔ سطر دوم و ستون اول کدام است؟

۱) ۳ ۲) -2 ۳) ۲ ۴) -3

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه توان‌های صحیح و نامنفی برای آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^0=I\ ,\ A^1=A\ ,\ A^2=A\times A\ ,\ \dots\ ,\ A^n=A^{n-1}\times A$$

ضرب توان‌های یک ماتریس تعویض‌پذیر است، یعنی:

$$A^nA^m=A^mA^n=A^{m+n}$$

اگر بعضی از درایه‌های ماتریس‌های $A^2, A^3, A^4, \dots$ خواسته شود، کافیست فقط روی همان درایه‌های خواسته شده تمرکز کنیم و نیازی به پیدا کردن سایر درایه‌ها نیست. [در این تیپ تست‌ها که توان ۲، ۳، ... و به طور کلی توان‌های کوچک از یک ماتریس را می‌خواهد، ممکن است از ترکیب زیر ماتریس‌ها نیز استفاده شود]

اگر توان چهارم ماتریس خواسته شود کافیست A^2 را پیدا کرده و در خودش ضرب کنیم. [در این موارد فقط سرعت عمل در کار انجام محاسبات مهم است]

Test در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases}2\ ; & i\neq j\\ 1\ ; & i=j\end{cases}$ باشد، ماتریس A^2-4A برابر با کدام است؟ (خارج - ۹۴)

۱) $3A$ ۲) A^3 ۳) $3I$ ۴) $5I$

۴ می‌دانیم $A^2-4A=A(A-4I)$ بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A(A-4I)=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}=5I$$

۹۱. اگر مجموع دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & x \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & y \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، مربع ماتریس $C=[xi+yj]_{۲\times۲}$ که i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است، از کدام نوع است؟

۱) واحد
۲) صفر
۳) قطری غیر اسکالر
۴) اسکالر غیر واحد

۹۲. اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس $A^۳$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) A
۲) I
۳) $-A$
۴) $-I$

۹۳. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۴$ کدام است؟

۱) $۴I$
۲) $۴A$
۳) $A+I$
۴) $A-I$

۹۴. اگر $A+B=I$ حاصل $A^۲+AB+B$ کدام است؟

۱) I
۲) $\bar{O}$
۳) $-I$
۴) AB

۹۵. اگر A ، B ، C سه ماتریس مربعی هم مرتبه باشند به طوری‌که $A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $CB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، جمع درایه‌های $CAB+CB^۲$ برابر با کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۸

۹۶. اگر $BA=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های A و B مربعی باشند، مجموع درایه‌های $B(AB)^۳A$ کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۴۸
۳) ۵۴
۴) ۳۶

۹۷. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۶ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس C به صورت $C=\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ باشد، جمع درایه‌های سطر اول ماتریس $C^۲$ کدام است؟

۱) ۲۷۰
۲) ۸۱
۳) ۲۷
۴) ۲۴۳

۹۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۴$ کدام است؟ (خارج - ۹۲)

۱) قطری غیر اسکالر
۲) اسکالر غیر همانی
۳) همانی
۴) قطری غیر همانی

۹۹. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی $C^۲$ کدام است؟ (داخل - ۹۷)

۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۴

1 ٤ در ماتریسی که به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نشان داده می‌شود، m معرف تعداد سطرها و n معرف تعداد ستون‌هاست؛ بنابراین در این ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

۲ سطر و ۳ ستون وجود دارد، یعنی در هر سطر ۳ درایه و در هر ستون ۲ درایه وجود دارد.

---

2 ۲ باید $n-۱=۳$ باشد، در نتیجه $n=۴$ است، بنابراین:

۱) $[a_{ij}]_{۴\times ۳}$ ← ۱۲ درایه
۲) $[a_{ij}]_{۵\times ۲}$ ← ۱۰ درایه
۳) $[a_{ij}]_{۶\times ۲}$ ← ۱۲ درایه
۴) $[a_{ij}]_{۵\times ۳}$ ← ۱۵ درایه

---

3 ۳ در این ماتریس $a_{۱۱}=a_{۲۲}=a_{۳۳}=۱$ است، بنابراین $a_{ii}=۱$ است در ضمن در سایر گزینه‌ها، گزینهٔ ۳ نادرست است چون $a_{۳۱}$ یعنی درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون اول که برابر ۱ است.

$$\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ ۲ & \bigcirc & ۱ \\ ۱ & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$$

$a_{۲۱}$ ، $a_{۳۱}$ ، $a_{۲۳}$

---

4 ٤ چون شمارهٔ سطر ثابت و برابر ۲ است این درایه‌ها در سطر دوم واقع‌اند: $a_{۲j}$ ، $۱\le j\le ۲$

$$A=\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$$

---

5 ٤ درایهٔ سطر اول و ستون سوم همان x و درایهٔ سطر سوم و ستون دوم عدد ۸ است، بنابراین $x=۸+۵=۱۳$ است، حال منظور از $\sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j}$ مجموع درایه‌های سطر سوم است، زیرا اگر j از ۱ تا ۴ تغییر کند، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j}=a_{۳۱}+a_{۳۲}+a_{۳۳}+a_{۳۴}=۷+۸+۹+۱۱=۳۵$$

---

6 ۲ عبارت $\sum_{j=۱}^{۳} a_{۲j}$ معرف مجموع درایه‌های سطر دوم و عبارت $\sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}$ معرف جمع کل درایه‌های ماتریس است، بنابراین اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$\sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}-\sum_{j=۱}^{۳} a_{۲j}=۸-۲=۶$$

---

7 ۲ به‌جای هر کدام از درایه‌ها با توجه به تابع داده شده برحسب i و j مقدار عددی آن‌ها را قرار می‌دهیم، مثلاً در محاسبهٔ $a_{۱۲}$ به‌جای $i=۱$ و به‌جای $j=۲$ قرار می‌دهیم در نتیجه درایه‌ها به‌صورت زیر خواهند بود:

$$A=\begin{bmatrix} ۱^۲-۱ & ۱^۲-۲ & ۱^۲-۳ \\ ۲^۲-۱ & ۲^۲-۲ & ۲^۲-۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=۳$$

---

8 ۲ کافیست فقط درایه‌های سطر دوم را پیدا کنیم، یعنی $i=۲$ است:

$$A=\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ ۳ & ۰ & -۵ \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=۳+۰+(-۵)=-۲$$

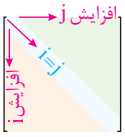
$i=۲$ ، $j=۱$

---

9 ٤ در ماتریس داده شده $a_{۱۱}=۱$ است که تنها گزینه‌های ۳ و ۴ به ازای $i=۱$ و $j=۱$ برابر ۱ می‌شوند، در ضمن $a_{۲۲}=۴$ است که تنها گزینهٔ ۴ به ازای $i=۲$ و $j=۲$ برابر ۴ می‌شود، بنابراین $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ که $a_{ij}=i\times j$ باشد به‌صورت $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ است.

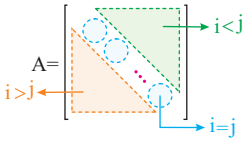
---

10 ٤ در درایه‌های بالای قطر اصلی باید شمارهٔ ستون بزرگتر از شمارهٔ سطر باشد، یعنی گزینهٔ ۴ تنها درایهٔ بالای قطر اصلی است و گزینه‌های ۱ و ۲ روی قطر اصلی و گزینهٔ ۳ زیر قطر اصلی واقع است.



---

11 ۲ می‌دانیم درماتریس‌های مربعی اگر درایه‌ها را با a_{ij} نشان دهیم روی قطر اصلی $i=j$ و بالای قطر اصلی $i<j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است:



$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱-۲ & ۱-۳ \\ ۲\times ۱ & ۲+۲ & ۲-۳ \\ ۳\times ۱ & ۳\times ۲ & ۳+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & -۲ \\ \bigcirc & \bigcirc & -۱ \\ \bigcirc & \bigcirc & ۶ \end{bmatrix}$$

مجموع = ۳

---

12 ۲ درایه‌های زیر قطر اصلی به شکل زیر هستند:

$$A=\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ a_{۲۱} & \bigcirc & \bigcirc \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & \bigcirc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ ۷ & \bigcirc & \bigcirc \\ ۱۱ & ۱۰ & \bigcirc \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌های زیر قطر اصلی}=۲۸$$

---

13 ۳

$$A=\begin{bmatrix} \bigcirc & ۲x+۲ \\ ۲-x & \bigcirc \end{bmatrix} \Rightarrow ۲x+۲=۲-x \Rightarrow x=۰$$

---

14 ۳ ابتدا باید ماتریس‌های A و B را تشکیل می‌دهیم و سپس آن‌ها را در یک ماتریس زیر هم بنویسیم (یعنی A بالا و B پایین)

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱+۲ & ۱+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱+۴ & ۱+۹ \\ ۴+۱ & ۴+۴ & ۴+۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۱۰ \\ ۵ & ۸ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۱۰ \\ ۵ & ۸ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های ستون دوم برابر است با: $۳+۵+۸=۱۶$

---

15 ۳

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۲+۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۳+۳ \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌های قطر فرعی}=۱+۴=۵$$

---

16 ۲ این ماتریس به‌صورت $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ است که اسکالر غیرهمانی است.

17 ۱ در ماتریس واحد درایه‌های قطر اصلی برابر یک و درایه‌های خارج قطر اصلی برابر صفر است.

18 ۳ درایه‌های خارج از قطر اصلی درماتریس قطری باید صفر باشد.

19 ۲ ماتریس واحد نوعی ماتریس اسکالر و ماتریس اسکالر نوعی ماتریس قطری و ماتریس قطری نوعی ماتریس مربعی است.

20 ۱ این ماتریس به‌صورت $A=\begin{bmatrix}۲&۰&۰\\۰&۴&۰\\۰&۰&۶\end{bmatrix}$ است که قطری غیر اسکالر است.

21 ۲ تنها ماتریسی که هم سطری و هم ستونی است، ماتریس ۱×۱ است، بنابراین:

$$\begin{cases}m=۱\\n-۱=۱\Rightarrow n=۲\end{cases}\Rightarrow B=[b_{ij}]_{۲\times۱}\Rightarrow$$ ماتریس ستونی

22 ۲ ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که اعداد واقع بر قطر اصلی با هم برابرند.

23 ۱ در ماتریس‌های قطری باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد، بنابراین گزینهٔ ۱ قطری نیست.

24 ۱ در ماتریس‌های قطری درایه‌های خارج از قطر اصلی باید صفر باشند، بنابراین:

$$\begin{cases}۱-a=۰\Rightarrow a=۱\\b+۲=۰\Rightarrow b=-۲\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&۳\end{bmatrix}$$

بنابراین حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر ۳- است.

25 ۴ می‌دانیم در ماتریس‌های اسکالر درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند.

$$\begin{cases}۲x-۱=۵-x\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲\\z-۱=۰\Rightarrow z=۱\\۲+y=۰\Rightarrow y=-۲\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}=۳I$$

26 ۱ می‌دانیم در ماتریس واحد یا همانی درایه‌های قطر اصلی برابر ۱ و سایر درایه‌ها صفر است، بنابراین $a=d=۰$ و همچنین داریم:

$$\begin{cases}a-b=۱\\c+d=۱\end{cases}\xrightarrow[d=۰]{a=۰}b=-۱,\ c=۱\Rightarrow a+b+c+d=۰$$

27 ۳ باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر شود، حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ $A=\begin{bmatrix}۰&-۳\\۳&۰\end{bmatrix}$ ۲ $B=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ ۳ $C=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ ۴ $D=\begin{bmatrix}-۱&-۳\\۲&۰\end{bmatrix}$

28 ۳ باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی برابر باشد حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ $A=\begin{bmatrix}-۳&-۲\\-۲&-۱\end{bmatrix}$ ۲ $B=\begin{bmatrix}۳&۴\\۲&۳\end{bmatrix}$ ۳ $C=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ ۴ $D=\begin{bmatrix}-۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}$

29 ۳ به جای این‌که درایه‌های خارج قطر اصلی را صفر قرار دهیم و درگیر محاسبات شویم بهتر است عددی را انتخاب کنیم که درایه‌های خارج قطر اصلی را صفر کند ولی به ازای آن درایه‌های قطر اصلی یکسان نشود، بنابراین تنها $x=-۱$ قابل قبول است، چون به ازای $x=۱$ ماتریس تبدیل به یک ماتریس قطری و اسکالر می‌شود.

30 ۳ باید درایه‌های طرفین قطر اصلی نظیر به نظیر با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}m-۱=۲\Rightarrow m=۳\\a+m=۴\Rightarrow a=۱\end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر فرعی برابر است با:

$$m+۲+۳a=۳+۲+۳=۸$$

31 ۱ ماتریس A پاد متقارن است، بنابراین باید:

۱ درایه‌های قطر اصلی صفر باشد: $n-۱=۰\Rightarrow n=۱$

۲ درایه‌های طرفین قطر اصلی نظیر به نظیر قرینه باشند:

$$m+۱=-۴\Rightarrow m=-۵$$

بنابراین $m+n=-۴$ خواهد بود.

32 ۲ برای این که دو ماتریس بتوانند برابر شوند، باید ابعاد آن‌ها با هم برابر باشد، یعنی اگر یکی از آن‌ها ۳×۲ است باید دیگری نیز ۳×۲ باشد، در نتیجه:

$$\begin{cases}m=۲\\n=۳\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲&۱&۴\\۲&۰&۳\end{bmatrix}\Rightarrow$$ جمع درایه‌ها $=۱۲$

33 ۴ در دو ماتریس برابر، تمام درایه‌های نظیر در دو ماتریس باید با هم برابر باشند؛ بنابراین:

$$\begin{cases}x-۱=۱\Rightarrow x=۲\\۲y=۴\Rightarrow y=۲\\-z=۳\Rightarrow z=-۳\end{cases}\Rightarrow x+y+z=۱$$

34 ۱ ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&a_{۲۱}\\a_{۱۲}&a_{۲۲}\end{bmatrix}$ است، یعنی:

$$B=\begin{bmatrix}۲&۳\\m+۱&۴\end{bmatrix}\Rightarrow m+۱=۳\Rightarrow m=۲$$

35 ۲ ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix}-a_{۱۱}&-a_{۲۱}\\-a_{۱۲}&-a_{۲۲}\end{bmatrix}$ است، یعنی:

$$B=\begin{bmatrix}۱-m&-۴\\-x&-n-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m-۱&x\\۴&n+۲\end{bmatrix}$$

حال درایه‌های نظیر در دو ماتریس را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}۱-m=m-۱\Rightarrow m=۱\\x=-۴\\-n-۲=n+۲\Rightarrow n=-۲\end{cases}\Rightarrow\frac{x-n}{m}=\frac{-۴+۲}{۱}=-۲$$

36 ۲ تنها دو ماتریس هم مرتبه را می‌توان جمع و تفریق کرد، یعنی باید B هم ۳×۲ باشد.

37 ۴ برای جمع دو ماتریس باید درایه‌های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع کنیم:

$$A+B=\begin{bmatrix}3&1\\x+1&y+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\4&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+1=4\Rightarrow x=3\\y+3=0\Rightarrow y=-3\end{cases}\Rightarrow x+y=0$$

38 ۴ از جمع دو ماتریس $A+B$ و $A-B$ ماتریس $2A$ به‌دست می‌آید:

$$2A=(A+B)+(A-B)=\begin{bmatrix}4&0\\4&4\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&0\\2&2\end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های A برابر ۶ است.

39 ۳

$$A_3+A_4=\begin{bmatrix}1&3\\3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&4\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&7\\7&4\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=20$$

40 ۲

$$A_1+A_2+\cdots+A_{100}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&0\\1&-2\end{bmatrix}}_{\text{جمع درایه‌ها}=1}+\underbrace{\begin{bmatrix}2&-1\\2&-2\end{bmatrix}}_{\text{جمع درایه‌ها}=1}+\cdots+\underbrace{\begin{bmatrix}2&-99\\100&-2\end{bmatrix}}_{\text{جمع درایه‌ها}=1}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ۱۰۰ ماتریس برابر ۱۰۰ است.

41 ۳ برای جمع و تفریق دو ماتریس حتماً باید دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، در این صورت مجموع آن‌ها نیز ماتریسی هم‌مرتبه با آن‌ها خواهد بود، بنابراین:

$$A-B=[(2i+j)-(i-2j)]_{2\times2}=[i+3j]_{2\times2}$$

$$A+B=[(2i+j)+(i-2j)]_{2\times2}=[3i-j]_{2\times2}$$

42 ۱ در ماتریس قطری درایه‌های خارج از قطر اصلی باید صفر باشد:

$$A+B=\begin{bmatrix}1&x^2+x\\0&2x\end{bmatrix}\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=-1 \text{ یا } 0$$

43 ۱ ماتریس A اسکالر است، بنابراین درایه‌های خارج قطر اصلی باید صفر باشد و درایه‌های روی قطر اصلی باید با هم یکسان باشد:

$$\begin{cases}y+1=0\Rightarrow y=-1\\x+2=5\Rightarrow x=3\end{cases}$$

حال باید مجموع A و B قطری باشد:

$$A+B=\begin{bmatrix}8&a-1\\b&9\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\Rightarrow a+b=1$$

44 ۴

$$D=\begin{bmatrix}0&1&4\\2&1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1&3\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&7\\2&2&2\end{bmatrix}$$

$\downarrow$ جمع $=9$

45 ۲ می‌دانیم اگر یک عدد در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود، بنابراین داریم:

$$a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a\\2a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2b\\-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+2b\\2a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

$$2\times\begin{cases}a+2b=4\\2a-b=3\end{cases}\Rightarrow 5a=10\Rightarrow a=2,\ b=1\Rightarrow a+b=3$$

46 ۱ از تساوی $2A+3B+C=I$ ماتریس C را بر حسب A و B و I می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$C=I-2A-3B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&2\\0&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-3\\3&-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\ \bigcirc&\bigcirc\end{bmatrix}$$

47 ۳

$$2A+B=\begin{bmatrix}4&4\\2&0\end{bmatrix}\Rightarrow 2\times\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}+B=\begin{bmatrix}4&4\\2&0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}4&4\\2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&6\\-4&-8\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع}=6$$

48 ۴ ابتدا x را محاسبه می‌کنیم:

$$x+(x+1)+2x+7=0\Rightarrow 4x+8=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-2&-1\\-4&7\end{bmatrix}$$

$$2A-\begin{bmatrix}3&x\\1-x&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-2\\-8&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0\\-11&10\end{bmatrix}$$

49 ۳ ابتدا ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$2A=\begin{bmatrix}2&0&-2\\6&4&2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&2&1\end{bmatrix}$$

حال به سراغ پیدا کردن B می‌رویم:

$$A+3B=\begin{bmatrix}4&0&5\\6&-1&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&2&1\end{bmatrix}+3B=\begin{bmatrix}4&0&5\\6&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$3B=\begin{bmatrix}3&0&6\\3&-3&-3\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=2$$

50 ۲

۱) $A+\bar{O}=A$ ✗ ۲) $A+(-A)=\bar{O}$ ✓

۳) $A+I=A+I$ ✗ ۴) $(A-B)+C=A-(B-C)$ ✗

51 ۳ برای ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی، درایه‌های نظیر مطابق الگوی زیر در هم ضرب و سپس با هم جمع می‌شوند:

$$[a\ \ b\ \ c]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=ax+by+cz$$

52 ۲

$$[x\ \ a]\begin{bmatrix}b\\y\end{bmatrix}=2x+y\Rightarrow bx+ay=2x+y\Rightarrow\begin{cases}b=2\\a=1\end{cases}\Rightarrow a-b=-1$$

53 ۲

$$[x\ \ 1\ \ 3]\begin{bmatrix}x\\1\\x\end{bmatrix}=x\Rightarrow x^2+1+3x=x\Rightarrow x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0\Rightarrow x=-1$$

54 ۳ ماتریس $A_{1\times 3}$ و ماتریس $B_{3\times 1}$ است بنابراین AB یک ماتریس ۱×۱ یا به‌عبارت دیگر یک عدد است:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=2-3-1=-2$$

55 ۲

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\2\end{bmatrix}=2x+1+2x=3\Rightarrow 4x=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

56 ۲

$$A_{2\times 3}\times B_{3\times 5}=(AB)_{2\times 5}$$

57 ۲

$$B_{3\times 3}\times A_{3\times 4}=(BA)_{3\times 4}$$

58 ۳

$$[A]_{m\times 3}\times\underbrace{[B]_{n\times 4}}_{n=3}=[C]_{2\times p}$$

از طرفی ماتریس AB یک ماتریس m×۴ است بنابراین باید داشته باشیم:

$$m\times 4=2\times p\Rightarrow\begin{cases}m=2\\p=4\end{cases}\Rightarrow m+n+p=2+3+4=9$$

59 ۲ در ضرب چند ماتریس تعداد سطرها از اولین ماتریس سمت چپ و تعداد ستون‌ها از آخرین ماتریس سمت راست گرفته می‌شود بنابراین A یک ماتریس ۲×۲ است

60 ۴

$$\begin{bmatrix}a & a\\b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -b\\-b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\bar{O}$$

61 ۴ ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\-2 & 3\end{bmatrix}$$

حال با معلوم شدن A حاصل‌ضرب خواسته شده قابل محاسبه است:

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\-2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5\\1 & -2\end{bmatrix}$$

62 ۳ کافی است سطر اول ماتریس اول (یعنی A) را در ستون دوم ماتریس دوم (یعنی B) ضرب کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow 2\times 1+1\times(-1)=1$$

63 ۴

$$C=BA=\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}_{3\times 2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}c_{11} & \bullet & \bullet\\c_{21} & \bullet & c_{23}\\\bullet & c_{32} & \bullet\end{bmatrix}$$

۱ $c_{11}=\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=5$

۲ $c_{23}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=0$

۳ $c_{21}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=3$

۴ $c_{32}=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=8$

64 ۴ کافی است سطر دوم ماتریس سمت چپ را در ماتریس سمت راست ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix}0 & 4\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet\\2 & -1\end{bmatrix}$$

65 ۴ برای محاسبهٔ سطر اول از ماتریس BA باید سطر اول از ماتریس B را در تمام ستون‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 3\\\bullet & \bullet\\\bullet & \bullet\\\bullet & \bullet\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2 & -7\\\bullet & \bullet & \bullet\\\bullet & \bullet & \bullet\\\bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

66 ۲ ماتریس A به‌صورت $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$ است، بنابراین:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & 3\\2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet\\11 & 4 & -3\\\bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

67 ۴

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2=5\Rightarrow a=3\\3a+b=6\Rightarrow 9+b=6\Rightarrow b=-3\end{cases}$$

$$a+b=0$$

68 ۴

$$\begin{bmatrix}1 & x\\2 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & x\\2 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 2a\\b & 2b\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a=1\Rightarrow x=2a=2\\b=2\Rightarrow y=2b=4\end{cases}\Rightarrow x-y=-2$$

69 ۱

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\x & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\y\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\-3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2+3y\\2x+y-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}3y+2=8\Rightarrow y=2\\2x+y-5=-3\end{cases}\Rightarrow 2x+2-5=-3\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

بنابراین $x+y=2$ خواهد بود.

70 ۳ در ماتریس‌های قطری باید درایه‌های بیرون از قطر اصلی صفر باشند:

$$\begin{bmatrix}a & 1\\-1 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-1 & a+2\\-1-b & -1+2b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2=0\Rightarrow a=-2\\-1-b=0\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

بنابراین $a+b=-3$ خواهد بود.

71 ۳ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ ابتدا ماتریس A را از سمت چپ فاکتور می‌گیریم:

$$ABC+ADC=A(BC+DC)$$

حال ماتریس C را از سمت راست از ماتریس‌های درون پرانتز فاکتور می‌گیریم:

$$A(BC+DC)=A(B+D)C$$

۲ می‌توان به‌جای ماتریس C ماتریس $I\times C$ قرار داد (چون I عضو بی‌اثر ضرب است) و از ماتریس C از سمت راست فاکتور گرفت:

$$A\times C+C=A\times C+I\times C=(A+I)\times C$$

۳ در ماتریس BA ماتریس A در سمت راست و در ماتریس AC ماتریس A در سمت چپ واقع شده، بنابراین نمی‌توان از A فاکتور گرفت.

۴ اگر به‌جای ماتریس $2B$ ماتریس $2BI$ را قرار دهیم، آنگاه داریم:

$$BC-2B=BC-2BI=BC-B(2I)=B\times(C-2I)$$

72 ۲ ماتریس B را از سمت راست می‌توان فاکتور گرفت:

$$AB-B=(A-I)B$$

73 ۳ تک‌تک محاسبات را بررسی می‌کنیم و داریم:

a $A+AB=A(I+B)$ ×

b $AC+CB=$ فاکتور ندارد ×

سمت چپ سمت راست

c $ABC-3AB=AB(C-3I)$ ✓

74 ۲ در گزینهٔ ۲ ماتریس A را از سمت چپ و ماتریس C را از سمت راست می‌توان فاکتور گرفت.

75 ۳ با استفاده از خاصیت پخشی ماتریس $A(B+D)C$ را باز می‌کنیم:

$$A(B+D)C=(AB+AD)C=ABC+ADC$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}+ADC=\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ADC=\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2\\-2&3\end{bmatrix}$$

76 ۲ کافیست از حاصل‌ضرب دو ماتریس داده شده ماتریس A را برداریم:

$$AB=\underbrace{A(B+I)}_{AB+A}-A=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&1\\11&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\9&4\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=16$$

77 ۱

$$A(B-A)B=(AB-A\times A)B$$

$$=\underbrace{AB}_{-2I}\times B-A\times\underbrace{AB}_{-2I}=(-2B)+2A=2(A-B)=\begin{bmatrix}4&0\\2&-2\end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌ها برابر ۴ است.

78 ۴

$$(B+I)(A+I)=BA+B+A+I$$

$$\Rightarrow A+BA+B=(B+I)(A+I)-I$$

$$=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\-2&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3\\-1&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-3\\-1&-3\end{bmatrix}$$

حال قرینهٔ این ماتریس گزینهٔ ۴ است.

79 ۴ در پرانتز اول از ماتریس B از راست و در پرانتز دوم از ماتریس C از چپ فاکتور می‌گیریم؛ درضمن می‌توان نشان داد که اگر $AB=KI$ باشد، $BA=KI$ است:

$$(AB+2B)(CA+C)=(A+2I)\underbrace{BC}_{2I}(A+I)$$

$$=2(A+2I)(A+I)=2\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=2\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}7&5\\5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&10\\10&14\end{bmatrix}$$

80 ۲ از ماتریس A از سمت چپ و از ماتریس B از سمت راست فاکتور می‌گیریم:

$$A\begin{bmatrix}2&-1\\-3&7\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-1&1\\3&-6\end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix}2&-1\\-3&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1\\3&-6\end{bmatrix}\right)B$$

$$=A\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}B=AIB=AB$$

81 ۱ ضرب دو ماتریس قطری با هم و هم‌چنین ضرب ماتریس اسکالر و هر ماتریس مربع دلخواه دارای خاصیت تعویض‌پذیری است. بنابراین $AB=BA$ هم‌چنین ضرب دو ماتریس شبه اسکالر مانند $\begin{bmatrix}0&k\\k&0\end{bmatrix}$ نیز با هم جابه‌جایی دارد.

82 ۱ ماتریس‌های A و C دارای خاصیت جابه‌جایی هستند چون نسبت تفاضل اعداد قطر اصلی آن‌ها با نسبت اعداد قطر فرعی آن‌ها برابر است. [دقت کنید که $\frac{0}{0}$ با هر نسبتی برابر در نظر گرفته می‌شود.]

83 ۲ باید نسبت تفاضل اعداد قطر اصلی دو ماتریس با نسبت اعداد قطر فرعی برابر شود:

$$\frac{6-2}{1-3}=\frac{-2}{x}=\frac{y}{1}\Rightarrow -2=\frac{-2}{x}=y\Rightarrow x=1\ ,\ y=-2$$

بنابراین $x+y=-1$ خواهد بود.

84 ۲ ضرب یک ماتریس قطری فقط با یک ماتریس قطری دیگر جابه‌جایی دارد؛ بنابراین باید B نیز قطری باشد:

$$\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\ y-2=0\Rightarrow y=2\end{cases}\Rightarrow x+y=1$$

85 ۴ در شرکت‌پذیری ترتیب ماتریس‌ها درضرب نباید تغییر کند بنابراین تنها گزینهٔ ۴ معرف شرکت‌پذیری است.

86 ۴ برای محاسبهٔ ضرب سه ماتریس می‌توانیم ابتدا اولی را در دومی ضرب کنیم، سپس حاصل را در ماتریس سوم ضرب کنیم:

$$[2\ \ -1]\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=[2\ \ -4]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-6$$

87 ۴

$$[1\ \ x]\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\3\end{bmatrix}=[1-2x\ \ x]\begin{bmatrix}x\\3\end{bmatrix}=x-2x^2+3x=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x=0\Rightarrow 2x(x-2)=0\Rightarrow x=0\ ,\ 2$$

88 ۱

$$[x\ \ 1\ \ 2]\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\0\end{bmatrix}=[3\ \ x+4\ \ 2x+2]\begin{bmatrix}1\\x\\0\end{bmatrix}=0$$

با ضرب دو ماتریس و حل معادله خواهیم داشت:

$$3+x^2+4x+0=0\Rightarrow x^2+4x+3=0\Rightarrow(x+3)(x+1)=0\Rightarrow x=-3,-1$$

89 ۲ اگر فرض کنیم $D=ABC$ باشد، باید $d_{۲۱}$ را پیدا کنیم:

$$d_{۲۱}=[\text{سطر دوم } A][B]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ \text{اول}\\ C\end{bmatrix}=[۳\quad ۲\quad ۱]\begin{bmatrix}۲&۳\\۵&۶\\۱۰&۱۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$$

$$d_{۲۱}=[۲۶\quad ۳۲]\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}=۲۶+۶۴=۹۰$$

90 ۱

$$ABC=(\begin{bmatrix}\bigcirc&\bigcirc\\-۱&-۲\\\bigcirc&\bigcirc\\\bigcirc&\bigcirc\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۳\\۳&۴\end{bmatrix})\begin{bmatrix}۱&\bigcirc&\bigcirc\\-۱&\bigcirc&\bigcirc\end{bmatrix}$$

$$=[-۸\quad -۱۱]\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}=-۸+۱۱=۳$$

91 ۴

$$A+B=\begin{bmatrix}۲&x-۱\\۰&y+۳\end{bmatrix}=\text{اسکالر}\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\y+۳=۲\Rightarrow y=-۱\end{cases}$$

بنابراین $C=[i-j]_{۲\times۲}$ است و داریم:

$$C^۲=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$$

این ماتریس اسکالر و غیر واحد است.

92 ۲

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۳&-۲\end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

93 ۱ برای محاسبهٔ ماتریس $A^۴$ کافی است ماتریس $A^۲$ را در خودش ضرب کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{bmatrix}=۲I$$

$$A^۴=(A^۲)^۲=(۲I)^۲=۴I^۲=۴I$$

94 ۱

$$A^۲+AB+B=A(A+B)+B=AI+B=A+B=I$$

95 ۲

$$CAB+CB^۲=CAB+CBB=C(A+B)B$$

$$=(C)(۲I)(B)=۲CB=\begin{bmatrix}۲&۴\\۰&۶\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=۱۲$$

96 ۲

$$B(AB)^۳A=B(AB)(AB)(AB)A$$

$$=(BA)(BA)(BA)(BA)=(BA)^۴$$

$$(BA)^۲=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۰&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۰&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲&۲\\۰&۰&۰\\۲&۲&۲\end{bmatrix}$$

$$(BA)^۴=\begin{bmatrix}۸&۸&۸\\۰&۰&۰\\۸&۸&۸\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=۶\times۸=۴۸$$

97 ۳

$$C^۲=\begin{bmatrix}۱&۲&۶\\\frac{۱}{۲}&۱&۳\\\frac{۱}{۶}&\frac{۱}{۳}&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۶\\\frac{۱}{۲}&۱&۳\\\frac{۱}{۶}&\frac{۱}{۳}&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۶&۱۸\\\bigcirc&\bigcirc&\bigcirc\\\bigcirc&\bigcirc&\bigcirc\end{bmatrix}$$

$$\text{جمع درایه‌های سطر اول } C^۲=۳+۶+۱۸=۲۷$$

98 ۳

$$A^۲=\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}$$

$$A^۴=A^۲\times A^۲=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=I$$

99 ۱ درایه‌های هر سطر معکوس درایه‌های ستون نظیر آن است، بنابراین، از ضرب هر سطر در ستون نظیر خودش (که درایه‌های قطر اصلی $C^۲$ را می‌دهد) عدد ۴ به‌وجود می‌آید:

$$C^۲=\begin{bmatrix}۱&۳&۶&۲۴\\\frac{۱}{۳}&۱&۲&۸\\\frac{۱}{۶}&\frac{۱}{۲}&۱&۴\\\frac{۱}{۲۴}&\frac{۱}{۸}&\frac{۱}{۴}&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳&۶&۲۴\\\frac{۱}{۳}&۱&۲&۸\\\frac{۱}{۶}&\frac{۱}{۲}&۱&۴\\\frac{۱}{۲۴}&\frac{۱}{۸}&\frac{۱}{۴}&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&\bigcirc&\bigcirc&\bigcirc\\\bigcirc&۴&\bigcirc&\bigcirc\\\bigcirc&\bigcirc&۴&\bigcirc\\\bigcirc&\bigcirc&\bigcirc&۴\end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های قطر اصلی $C^۲$ برابر ۱۶ است.

100 ۲ ابتدا طرفین را به توان ۵۰ می‌رسانیم، سپس طرفین را در A ضرب می‌کنیم:

$$(A^۲=I)^{۵۰}\Rightarrow A^{۱۰۰}=I\xrightarrow{\times A}A^{۱۰۱}=A$$

101 ۱ طرفین را به توان ۵۰۰ می‌رسانیم:

$$A^۲=I\Rightarrow(A^۲=I)^{۵۰۰}\Rightarrow A^{۱۰۰۰}=I$$

102 ۱

$$(A^۲=\bar{O})^۵\Rightarrow A^{۱۰}=\bar{O}\xrightarrow{\times A}A^{۱۱}=\bar{O}$$

103 ۱

$$(A^۲=-I)^۹\Rightarrow A^{۱۸}=-I\xrightarrow{\times A}A^{۱۹}=-A$$

104 ۱

$$A^۲=-A\Rightarrow A^{۲۳}=(-۱)^{۲۲}A\Rightarrow A^{۲۳}=A$$

105 ۲

$$A^۲=۲A\Rightarrow A^۶=۲^۵A=۳۲A$$

106 ۲

$$A^۳=-I\Rightarrow(A^۳=-I)^{۱۱}\Rightarrow A^{۳۳}=-I\xrightarrow{\times A}A^{۳۴}=-A$$

107 ۳

$$(A^۳=۲I)^۵\Rightarrow A^{۱۵}=۳۲I\xrightarrow{\times A^۲}A^{۱۷}=۳۲A^۲$$