

فصل اول

تابع

۱

تابع یکی از اساسی‌ترین و مهم‌ترین مباحث حسابان می‌باشد و مقدمه و شروع بسیاری از مباحث مهم دیگر مثل حد و پیوستگی و مشتق است. هرچای دنیا هم که باشید وضعیت به همین شکل است و تابع و مفاهیم آن یکی از کاربردی‌ترین مباحث ریاضیات است. مثل این است که جمع و تفریق بلد نباشید. می‌توانید درک کنید که زندگی بدون جمع و تفریق چه قدر بی‌معنی است؟! ریاضیات بدون تابع هم به همین شکل است. این فصل یکی از فصل‌های مهم در حسابان می‌باشد که به صورت مستقیم و غیرمستقیم به کار می‌آید. یعنی هم می‌توان مستقیماً از خود فصل سوال مطرح کرد و هم از مطالب و نکاتی که در اینجا آموزش داده می‌شود در حل مسائل مباحث دیگر به‌کار می‌آیند. پس پیشنهاد می‌کنم که به مطالب این فصل خوب توجه کنید. در ضمن یاد گرفتن این فصل می‌تواند ۲ تا ۳ نمره در امتحان نهایی و درصد قابل توجهی در کنکور برایتان به ارمغان بیاورد.

بسته ۳



بسته ۲



بسته ۱



برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

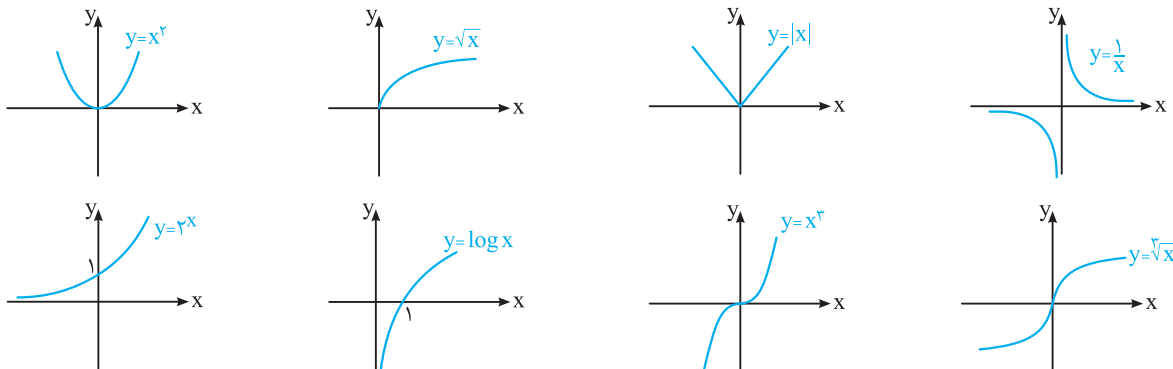
تبدیل نمودار توابع

صفحه ۲ تا ۱۲ کتاب درسی

بسته اول



نمودارها در ریاضی می‌تونن در یک نیم‌نگاه اطلاعات فوپی رو از ویژگی‌های تابع بهتون بدن. مثلاً دامنه، برد، تقاطع با محورها، افزایش یا کاهش، بودن تابع و فیلی چیزهای دیگه با یک نگاه کوچیک به نمودار تابع به دست میاد. پس فیلی مهمه که بتونیم رابطه فوپی بارسم نمودار توابع داشته باشیم. ما در این درسامه بهتون کمک می‌کنیم که بتونین نمودار توابع رو (البته در هر کتاب درسی تون) رسم کنید. **یادآوری** تعدادی از نمودارهای مهم و پایه‌ای را با هم مرور می‌کنیم:



اکنون می‌خواهیم با تبدیل نمودارهای بالا نمودار برخی توابع دیگر را رسم کنیم.

مثلاً هتماً از فودتون می‌پرسین (تبدیل نمودارها) یعنی چی؟

فب باید بهتون بگم که وقتی شما نمودار یه تابع مثل f رو داشته باشین، (هالا یا فودتون f رو رسم کرده باشین یا سوال نمودارش رو بهتون داده باشه) با انتقال یا انعکاس اون نسبت به محورها یا حتی انقباض و انقباض نمودار f ، نمودار دیگه‌ای به دست میاد که تبدیل یافته نمودار f هست.

الف انتقال نمودارها

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده باشد، انتقال‌های نمودار f به یکی از صورت‌های زیر است:

۱ انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ از روی نمودار $y = f(x)$ ؛

اگر $k > 0$ باشد، نمودار f را k واحد به بالا انتقال می‌دهیم. اگر $k < 0$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

۲ انتقال افقی: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ؛

اگر $k > 0$ باشد، نمودار f را k واحد به چپ منتقل می‌کنیم. اگر $k < 0$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به راست منتقل می‌کنیم.

👉 به توضیحات بالا به نگاهی بنده‌تر:

۱ در انتقال عمودی آنگاه $k > 0$ (مثبت) باشد، برای رسم $f(x) + k$ ، نمودار f ، k واحد به سمت بالا (y ‌های مثبت) میره. اما در انتقال افقی آنگاه $k > 0$ باشد، برای رسم $f(x + k)$ نمودار f ، k واحد به سمت چپ (x ‌های منفی) میره.

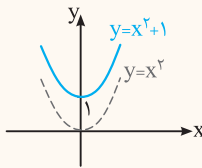
۲ در انتقال عمودی آنگاه $k < 0$ (منفی) باشد، برای رسم $f(x) + k$ ، نمودار f ، $|k|$ واحد به سمت پایین (y ‌های منفی) میره. اما در انتقال افقی آنگاه $k < 0$ (منفی) باشد، برای رسم $f(x) + k$ ، نمودار f ، $|k|$ واحد به سمت راست (x ‌های مثبت) میره.

مشابه تمرین صفحه ۱۱ کتاب درسی

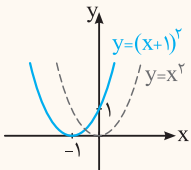
سؤال به کمک نمودار $y = x^2$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

- | | | |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|
| ۱ $y = x^2 + 1$ | ۲ $y = (x + 1)^2$ | ۳ $y = x^2 - 1$ |
| ۴ $y = (x - 1)^2$ | ۵ $y = (x - 1)^2 + 1$ | ۶ $y = (x + 1)^2 - 1$ |

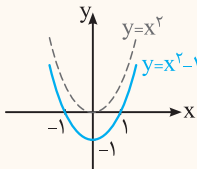
پاسخ ۱ برای رسم $y = x^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



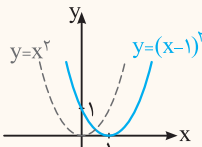
۲ برای رسم $y = (x + 1)^2$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم:



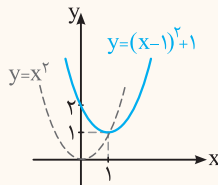
۳ برای رسم $y = x^2 - 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



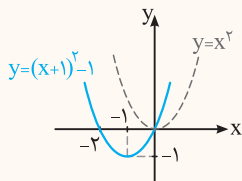
۴ برای رسم $y = (x - 1)^2$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم:



۵ برای رسم $y = (x - 1)^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۶ برای رسم $y = (x + 1)^2 - 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



حالا می‌فروایم ببینیم آگه نمودار به تابع رو نداشتیم باشیم یا حال نداشتیم باشیم رسمش کنیم، بطوری از روی دامنه و بردش، دامنه و برد تبدیل یافته‌اش رو پیدا کنیم.

نکته! اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[a, b]$ و $[c, d]$ باشد، آن‌گاه:

۱ دامنه تابع $y = f(x+h) + k$ با حل نامعادله زیر به دست می‌آید، زیرا باید $(x+h)$ در دامنه f باشد:
 $a \leq x+h \leq b \Rightarrow a-h \leq x \leq b-h$

۲ برد تابع $y = f(x+h) + k$ به صورت زیر به دست می‌آید، زیرا $f(x+h)$ در برد f قرار می‌گیرد:

$$c \leq f(x+h) \leq d \xrightarrow{+k} c+k \leq \underbrace{f(x+h)+k}_y \leq d+k \Rightarrow c+k \leq y \leq d+k$$

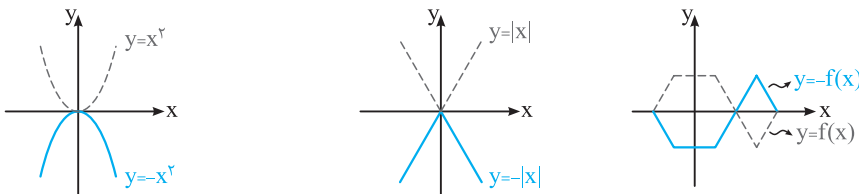
سؤال اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ برابر با $[-1, 3]$ و $(2, 5]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x) = f(x-2) - 3$ را بیابید.

پاسخ \Rightarrow دامنه g : $-1 \leq x-2 \leq 3 \xrightarrow{+2} -1+2 \leq x \leq 3+2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$

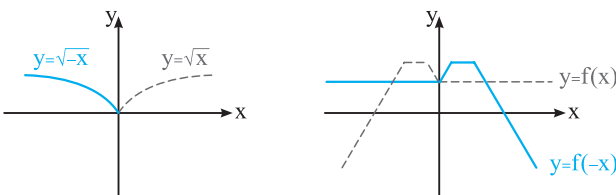
برد g : $2 < f(x-2) \leq 5 \xrightarrow{-3} -1 < \underbrace{f(x-2)-3}_{g(x)} \leq 2 \Rightarrow -1 < g(x) \leq 2$

ب انعکاس نمودارها

۱ برای رسم نمودار $y = -f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است y ها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



۲ برای رسم نمودار $y = f(-x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است x ها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.



یادتون میاد وقتی بچه بودین نصفه یک شکل رو بهتون می‌دادن و می‌گفتن تقارن یافته‌اش رو نسبت به خط چین رسم کن و انگار که اون خط چین آینه بوده و انعکاس اون شکل رو تو آینه بایر رسم می‌کردی.

این‌ها هم همونه بایر مثل بپگی‌ها انعکاس (تقارن) نمودار رو نسبت به محورهای مفتحات رسم کنید.

مشابه تمرین صفحه ۱۱ کتاب درسی

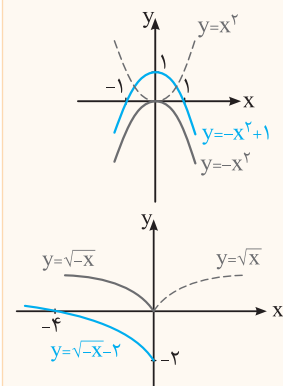
سؤال نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۴ $y = -(x-1)^2 + 1$

۳ $y = -\sqrt{-x+1}$

۲ $y = \sqrt{-x} - 2$

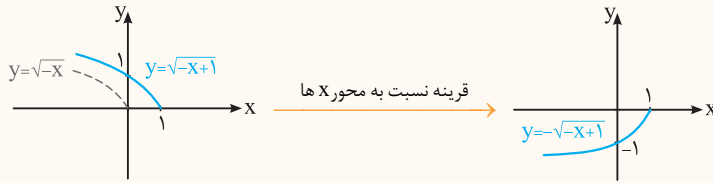
۱ $y = -x^2 + 1$



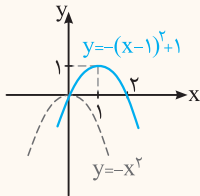
پاسخ ۱ ابتدا نمودار $y = x^2$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^2$ به دست آید، سپس نمودار $y = -x^2$ را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:

۲ ابتدا نمودار $y = \sqrt{-x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به دست آید. سپس نمودار $y = \sqrt{-x}$ را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

۳ ابتدا نمودار $y = \sqrt{-x}$ را ۱ واحد به راست منتقل می‌کنیم، تا نمودار $y = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{-x+1}$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



۴ نمودار $y = -x^2$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نکته اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[a, b]$ و $[c, d]$ باشد، آن‌گاه:

۱ دامنه تابع $y = f(-x)$ برابر با $[-b, -a]$ است:

$$a \leq -x \leq b \xrightarrow{\times(-1)} -b \leq x \leq -a$$

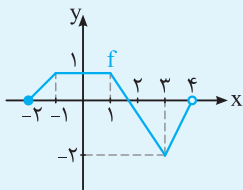
۲ برد تابع $y = -f(x)$ برابر با $[-d, -c]$ است:

$$c \leq f(x) \leq d \xrightarrow{\times(-1)} -d \leq -f(x) \leq -c$$

بازه‌های داده‌شده در دامنه و برد، می‌تونن باز یا نیم‌باز هم باشن. برای درک بهتر به مثال بینین:

مشابه کار در کلاس صفحه ۱۰ کتاب درسی

سؤال اگر نمودار زیر مربوط به تابع f باشد، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را بیابید.



۱ $g(x) = f(-x) + 1$

۲ $k(x) = -f(x + 1)$

۳ $h(x) = -f(-x + 1)$

دامنه: $D_f = [-2, 4]$ ، برد: $R_f = [-2, 1]$

پاسخ

۱ $\begin{cases} D_g: -2 \leq -x < 4 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq x > -4 \Rightarrow D_g = (-4, 2] \\ R_g: -2 \leq f(-x) \leq 1 \xrightarrow{+1} -1 \leq f(-x) + 1 \leq 2 \Rightarrow R_g = [-1, 2] \end{cases}$

۲ $\begin{cases} D_k: -2 \leq x + 1 < 4 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq x < 3 \Rightarrow D_k = [-3, 3) \\ R_k: -2 \leq f(x + 1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(x + 1) \geq -1 \Rightarrow R_k = [-1, 2] \end{cases}$

۳ $\begin{cases} D_h: -2 \leq -x + 1 < 4 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq -x < 3 \xrightarrow{\times(-1)} 3 \geq x > -3 \Rightarrow D_h = (-3, 3] \\ R_h: -2 \leq f(-x + 1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(-x + 1) \geq -1 \Rightarrow 2 \geq h(x) \geq -1 \Rightarrow R_h = [-1, 2] \end{cases}$

یاد تونه تو علوم ابتدایی یاد گرفتین که هر وقت جسم رو گرم کنین منبسط می‌شه یعنی طولش بیش تر می‌شه و اگر سرد کنین منقبض می‌شه یعنی طولش کم تر می‌شه. حالا این با هم می‌فوییم با نمودارها همین کار رو انجام بدیم یعنی در راستای محور x ها (افقی) یا در راستای محور y ها (عمودی) منبسط یا منقبض شون کنیم. حالا بگین پطوری؟ اینطوری!

پ انقباض و انبساط نمودارها

۱ انبساط و انقباض افقی

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، با شرط $k > 0$ طول نقاط نمودار تابع f را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم. در این صورت:

ا اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌گردد.

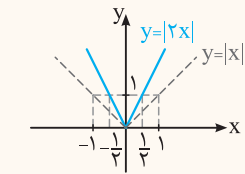
ب اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌گردد.

مشابه کار در کلاس صفحه ۷ کتاب درسی

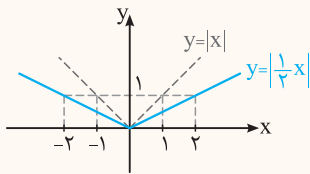
سؤال به کمک نمودار $y = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۲ $y = |\frac{1}{4}x|$

۱ $y = |2x|$



پاسخ ۱ برای رسم $y = |2x|$ ، نمودار $y = |x|$ در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ منقبض می‌گردد:



۲ برای رسم $y = |\frac{1}{4}x|$ ، نمودار $y = |x|$ در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{k} = 4$ منبسط می‌گردد:

۲ انبساط و انقباض عمودی

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، با شرط $k > 0$ عرض نقاط نمودار تابع f را در k ضرب می‌کنیم. در این صورت:

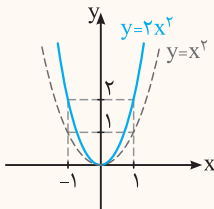
اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k منبسط می‌گردد.

اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k منقبض می‌گردد.

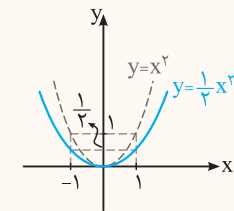
سؤال به کمک نمودار تابع $y = x^2$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۲ $y = \frac{1}{4}x^2$

۱ $y = 2x^2$



پاسخ ۱ نمودار $y = x^2$ با ضریب $k = 2$ در راستای قائم منبسط می‌گردد:



۲ نمودار $y = x^2$ با ضریب $k = \frac{1}{4}$ در راستای قائم منقبض می‌گردد:

باز هم توجه مفصل رو به این نکته جلب می‌کنم که:

نکته ۱ وقتی $k > 1$ ، برای رسم $(kf(x))$ ، نمودار f را با ضریب k منبسط می‌کنیم اما برای رسم $(f(kx))$ نمودار f را با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌کنیم، یعنی برعکس هم هستند.

وقتی $0 < k < 1$ ، برای رسم $(kf(x))$ ، نمودار f را با ضریب k منقبض می‌کنیم اما برای رسم $(f(kx))$ نمودار f را با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌کنیم.

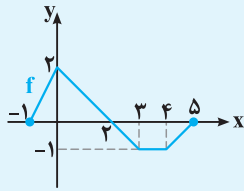
و باز هم برعکس هم هستند. یعنی در $y = kf(x)$ ، y ها واقعا k برابر می‌شود اما در $y = f(kx)$ ، x ها $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.

مثلاً در $y = 2f(x)$ ، y ها ۲ برابر می‌شود (انبساط عمودی با ضریب ۲) اما در $y = f(2x)$ ، x ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود (انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$).

۲ برای رسم نمودار توابع $y = f(ax + b)$ ابتدا باید از ضریب x داخل پرانتز فاکتور بگیریم تا در ترتیب تبدیلات اشتباه نکنیم (و ابتدا با ضریب $\frac{1}{a}$ ، انبساط یا انقباض افقی و سپس انتقال را انجام دهیم).
 $y = f(ax + b) = f(a(x + \frac{b}{a}))$

یه مثال برای نکته بالا ببینین تا بهتر درکش کنین.

سؤال اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.



مشابه مثال صفحه ۱۰ و تمرین ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی

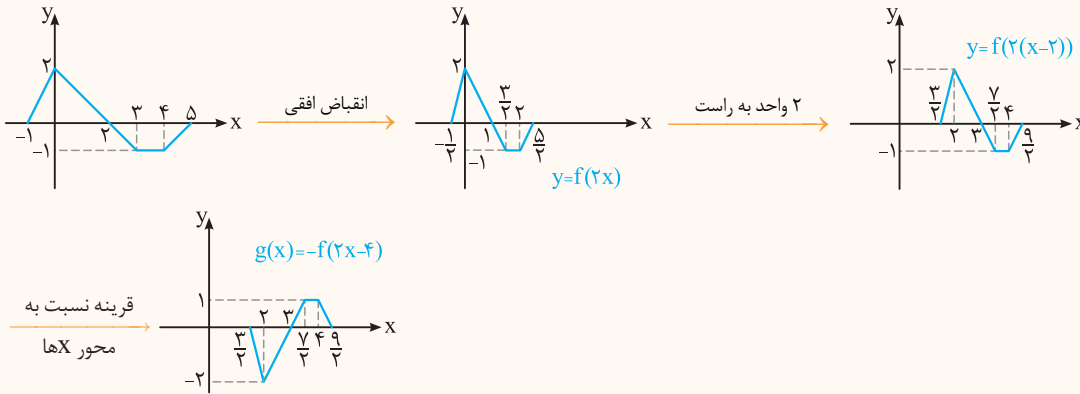
۱ $g(x) = -f(2x - 4)$

۲ $h(x) = 2f(-x + 1)$

$g(x) = -f(2(x-2))$

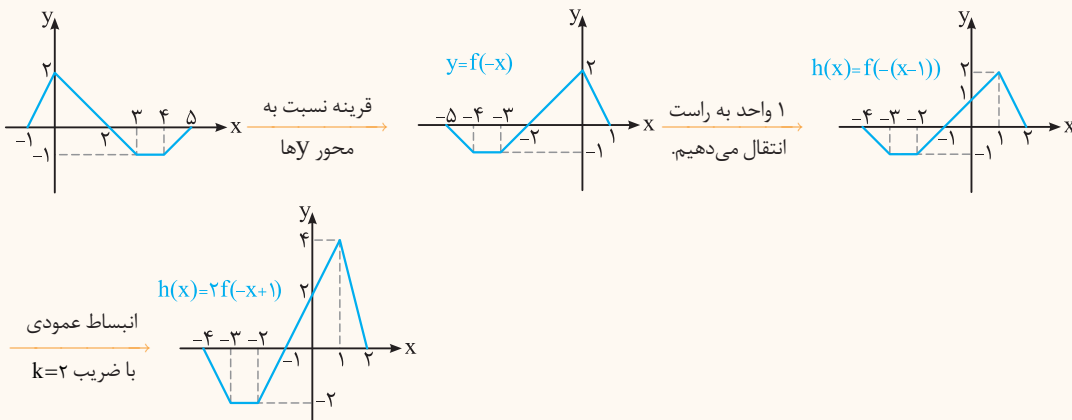
پاسخ ۱ ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:

بنابراین نمودار تابع f را ابتدا با ضریب $\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ منقبض و سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y = f(2(x-2))$ به دست آید، سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار g به دست آید:



$h(x) = 2f(-(x-1))$

۲ ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:



نتیجه اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[m \cdot n]$ و $[c \cdot d]$ باشد، آن‌گاه،

$m \leq ax + b \leq n$

۱ برای محاسبه دامنه تابع $y = kf(ax + b) + h$ کافی است نامعادله مقابل را حل کنیم:

۲ برای محاسبه برد تابع $y = kf(ax + b) + h$ ، طرفین نامعادله زیر را (با توجه به علامت k) برابر کرده، سپس طرفین نامعادله حاصل را با h جمع

می‌کنیم تا برد تابع y به دست آید. به طور مثال:

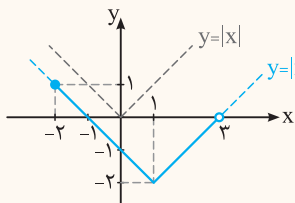
$$c \leq f(ax + b) \leq d \xrightarrow{\times k > 0} kc \leq kf(ax + b) \leq kd \xrightarrow{+h} kc + h \leq \underbrace{kf(ax + b) + h}_y \leq kd + h$$

در واقع برای محاسبه برد باید تابع جدید رو بسازیم و بینیم بین کدوم دو عدد قرار می‌گیره!

و باز هم می‌گم که، بازه‌های داده شده برای دامنه و برد می‌تونن باز یا نیم باز هم باشن.

سؤال تابع $f(x) = |x-1| - 2$ را در بازه $[-2, 3]$ در نظر بگیرید و دامنه و برد هریک از توابع زیر را پیدا کنید. **مشابه تمرین صفحه ۱۲ کتاب درسی**

۱ $g(x) = -f(2x-1) + 3$ ۲ $k(x) = 3f(2-x) - 1$



پاسخ ۱ ابتدا با رسم نمودار f ، برد تابع f را می‌یابیم. برای رسم نمودار f نیز کافی است نمودار $y = |x|$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم:

$\Rightarrow f_{\text{برد}} = R_f = [-2, 1]$

$R_g : -2 \leq f(2x-1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(2x-1) \geq -1 \xrightarrow{+3} 5 \geq \underbrace{-f(2x-1) + 3}_{g(x)} \geq 2 \Rightarrow R_g = [2, 5]$

دامنه تابع f بازه $[-2, 3]$ است، بنابراین:

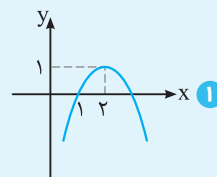
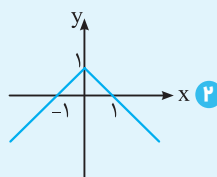
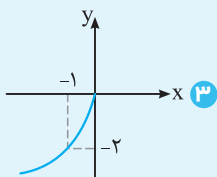
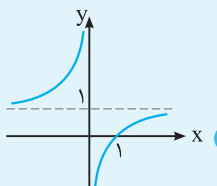
$D_g : -2 \leq (2x-1) < 3 \xrightarrow{+1} -1 \leq 2x < 4 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \leq x < 2 \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{2}, 2)$

$D_k : -2 \leq 2-x < 3 \xrightarrow{+(-2)} -4 \leq -x < 1 \xrightarrow{\times(-1)} 4 \geq x > -1 \Rightarrow D_k = (-1, 4]$

$R_k : -2 \leq f(2-x) \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -6 \leq 3f(2-x) \leq 3 \xrightarrow{+(-1)} -7 \leq 3f(2-x) - 1 \leq 2 \Rightarrow R_k = [-7, 2]$

هالا پند تا مثال متفاوت تر و امتحانی تر ببینین تا تجربه ای بشه که پر قدرت تر نمودار هر تابعی که بهتون بدن رو رسم کنین.

سؤال ضابطه هریک از توابع زیر را به کمک توابع $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$ ، $y = |x|$ و $y = \frac{1}{x}$ بنویسید. **مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۲ کتاب درسی**



پاسخ ۱ با مقایسه نمودار داده شده و نمودار $y = x^2$ ، درمی‌یابیم که نمودار $y = x^2$ نسبت به محور x ها قرینه و سپس ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$y = x^2$ قرینه نسبت به محور x ها $\rightarrow y = -x^2$ ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا $\rightarrow y = -(x-2)^2 + 1$

۲ با مقایسه نمودار داده شده و نمودار $y = |x|$ ، درمی‌یابیم که نمودار $y = |x|$ نسبت به محور x ها قرینه و سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

$y = |x|$ قرینه نسبت به محور x ها $\rightarrow y = -|x|$ ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم $\rightarrow y = -|x| + 1$

۳ نمودار $y = \sqrt{x}$ هم نسبت به محور x ها و هم محور y ها قرینه و سپس با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط شده است:

$y = \sqrt{x}$ قرینه نسبت به محور y ها $\rightarrow y = \sqrt{-x}$ قرینه نسبت به محور x ها $\rightarrow y = -\sqrt{-x}$ انبساط عمودی $\rightarrow y = -2\sqrt{-x}$

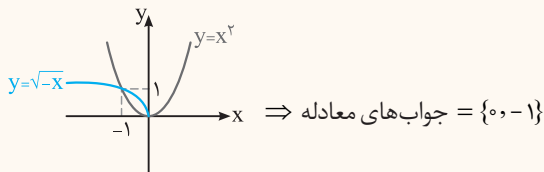
۴ نمودار $y = \frac{1}{x}$ نسبت به محور y ها (یا محور x ها) قرینه شده و سپس ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$y = \frac{1}{x}$ قرینه نسبت به محور y ها $\rightarrow y = -\frac{1}{x}$ ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم $\rightarrow y = -\frac{1}{x} + 1$

سؤال به کمک رسم نمودار، معادله $x^2 - \sqrt{-x} = 0$ را حل کنید. **مشابه خرداد ۹۱**

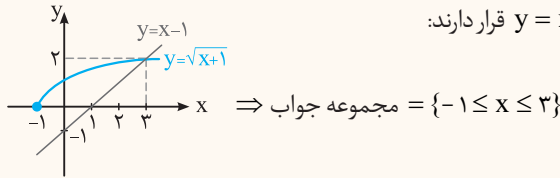
پاسخ برای حل معادله، نمودار توابع $y = \sqrt{-x}$ و $y = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقاط تقاطع، جواب‌های معادله اند:

$x^2 - \sqrt{-x} = 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt{-x}$



مشابه شهریور ۹۴ و خرداد و دی ۹۶

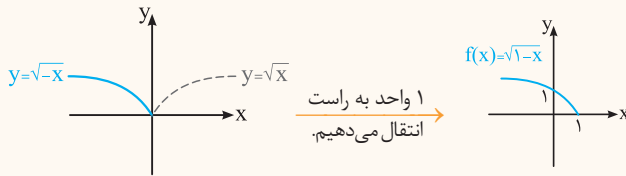
سؤال به روش هندسی، نامعادله $\sqrt{x+1} \geq x-1$ را حل کنید.



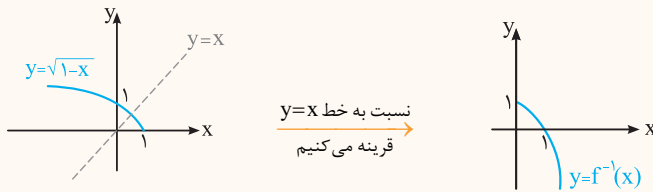
سؤال با رسم نمودار $f(x) = \sqrt{1-x}$ وارون پذیری تابع f را بررسی کنید. در صورت وارون پذیری، نمودار تابع وارون آن را رسم کنید.

مشابه شهریور ۹۵ و ۹۲

پاسخ نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x) = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{1-x}$ به دست آید.



با توجه به نمودار بالا، تابع f یک به یک و وارون پذیر است و برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.



تبدیل نمودار توابع

پرسش‌های تشریحی

بسته
۱

☆ درست یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

۱. برای رسم نمودار تابع $g(x) = -f(x)$ از روی نمودار تابع f ، کافی است نمودار f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرد. (خرداد ۹۷)
۲. نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = f(-x)$ ، نسبت به محور y ها قرینه‌اند. (مشابه دی ۹۹ خارج از کشور)
۳. برای رسم تابع $g(x) = |x+1| - 2$ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار f یک واحد روی محور طول‌ها به راست و ۲ واحد به پایین حرکت می‌کند. (دی ۹۶)
۴. اگر دامنه تابع f برابر $[-1, 3]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x)$ بازه $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]$ است. (دی ۹۵)
۵. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. (خرداد ۹۸)

☆ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۶. اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ باشد، برد این تابع مجموعه است. (شهریور ۹۵)
- | | |
|---------------------|--------------------|
| $[1, \sqrt{2}]$ (۱) | $[0, +\infty)$ (۲) |
|---------------------|--------------------|
۷. در رسم نمودار $y = f(ax)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در امتداد x ها می‌شود. (شهریور ۹۵)
- | | |
|-----------|-----------|
| منبسط (۱) | منقبض (۲) |
|-----------|-----------|
۸. تابع $y = f(x)$ را با دامنه $[-2, 1]$ در نظر بگیرید. دامنه تابع $g(x) = -f(2x) + 1$ بازه است. (خرداد ۹۴)
- | | |
|---------------|-------------------------|
| $[-4, 2]$ (۱) | $[-1, \frac{1}{2}]$ (۲) |
|---------------|-------------------------|
۹. در رسم نمودار $y = af(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار f در امتداد محور می‌گردد. (خرداد ۹۴)
- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| (۱) y ها، منبسط | (۲) x ها، منبسط | (۳) y ها، منقبض |
| | (۴) x ها، منقبض | |

۱۰. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید. (شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۹۸ خارج از کشور)

۱۱. اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x+1)$ برابر است. (شهریور ۹۹)

۱۲. نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور است. (شهریور ۹۸ و شهریور ۹۸ خارج از کشور)

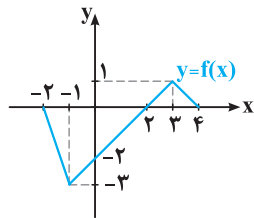
۱۳. اگر بازه $[-4, 2]$ دامنه تابع $f(2x+1)$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ برابر است. (دی ۹۸ خارج از کشور و مشابه دی ۹۹ خارج از کشور)

۱۴. ☆ نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید، سپس به کمک نمودار f ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و با نمودار f مقایسه کنید. (برگرفته از تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

ا $y = f(-x)$ ب $y = -f(x)$ پ $y = -f(-x)$ ت $y = 2f(x)$

ث $y = \frac{1}{2}f(x)$ ج $y = f(2x)$ د $y = -2f(\frac{x}{2})$ ز $y = \frac{1}{2}f(-2x)$

۱۵. ☆ نمودار تابع f داده شده است، به کمک آن نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. (برگرفته از تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

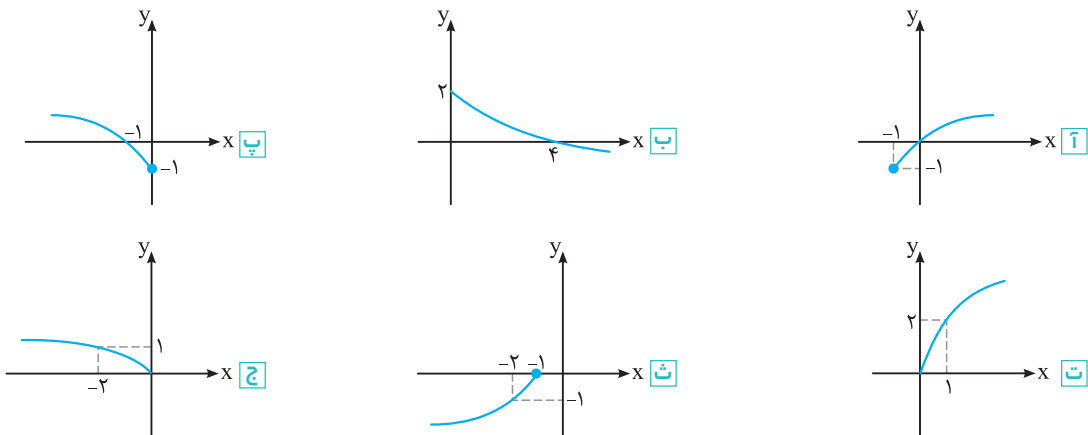


ا $y = f(-x)$ ب $y = -2f(x)$

پ $y = -f(x-1) + 1$ ت $y = f(2x-4)$

ث $y = f(2-x)$ د $y = 1 - \frac{1}{3}f(x)$

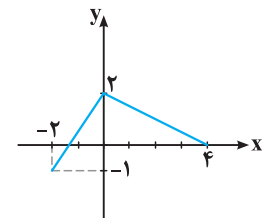
۱۶. ☆ نمودار هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ است. ضابطه هر یک را بنویسید. (برگرفته از تمرین ۱ صفحه ۱۱ کتاب درسی)



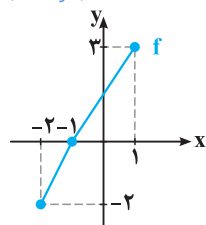
۱۷. ☆ نقطه $(-3, 1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. در تابع $g(x) = -f(2x)$ این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌گردد؟

(شهریور ۹۶ و مشابه خرداد ۹۹ خارج از کشور)

۱۸. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار $g(x) = -f(2x)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. (دی ۹۷)



(خرداد ۹۶)

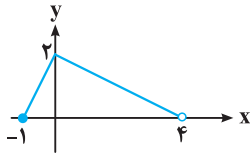


۱۹. نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است:

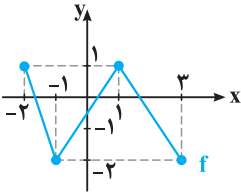
ا دامنه تابع $g(x) = f(\frac{x}{2})$ را تعیین کنید.

ب نمودار $h(x) = f(-x) + 1$ را رسم کنید.

۲۰. نمودار تابع $y = -2f(-\frac{x}{4}) + 1$ به صورت مقابل است. با رسم نمودار $y = f(x)$ دامنه و برد آن را بیابید.

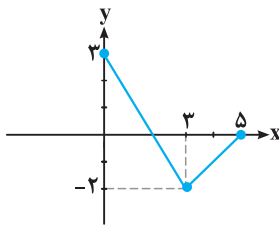


۲۱. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. با استفاده از تبدیل نمودار، نمودار تابع $y = f(\frac{1}{4}x) + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید. (شهریور ۹۴)



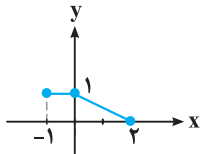
۲۲. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3-x)$ را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.

(شهریور ۹۸ و دی ۹۹ از کشور و مشابه دی ۹۸ خارج از کشور)

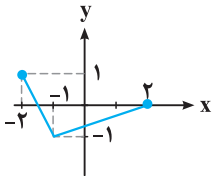


۲۳. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

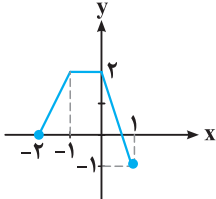
(دی ۱۴۰۰ و مشابه شهریور ۹۸ از کشور و خرداد ۹۹ خارج از کشور)



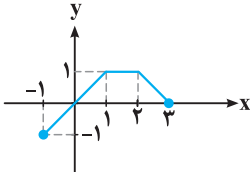
۲۴. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. (شهریور ۱۱۴۰۰)



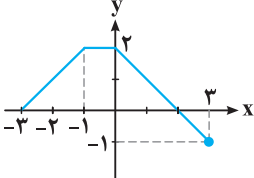
۲۵. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (خرداد ۹۸)



۲۶. نمودار تابع f به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x-1)$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید. (دی ۹۹)

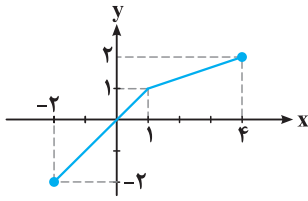


۲۷. نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (دی ۹۸)



۲۸. با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

(خرداد ۹۹ و خرداد ۹۸ خارج از کشور)



(شهریور ۹۳)

۲۹. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 1|$ را با دامنه $[0, 2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$ را رسم کرده و برد آن را بیابید.

(دی ۹۱)

۳۰. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 3|$ را در بازه $[2, 4]$ رسم کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم کنید.

(خرداد ۹۲)

۳۱. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کرده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید.

(برگرفته از کاردرکلاس صفحه‌های ۴ و ۵ کتاب درسی)

● نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

۳۵. $y = -2\sqrt{x+1}$ ☆

۳۴. $y = 2 - \sqrt{x-2}$ ☆

۳۳. $y = \frac{-1}{2}x^2 - 1$ ☆

۳۲. $y = 3x^2 + 1$ ☆

۳۹. $y = 1 - 2\cos x$ ☆

۳۸. $y = 1 + \sqrt{-x+1}$ ☆

۳۷. $y = 2\sqrt{-2x}$ ☆

۳۶. $y = -\sqrt{\frac{x}{2}}$ ☆

۴۳. $y = -\log(x+1)$ ☆

۴۲. $y = -2^{x-2} + 1$ ☆

۴۱. $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{2})$ ☆

۴۰. $y = 1 - \cos(2x)$ ☆

(خرداد ۹۷)

۴۴. به کمک رسم نمودار، تعداد ریشه‌های معادله $\sqrt{5-x} = |x-3|$ را بیابید.

(شهریور ۹۶ و شهریور ۹۲)

۴۵. با رسم نمودار، معادله $\sqrt{x+1} = x-1$ را حل کنید.

(دی ۹۴)

۴۶. معادله $|x| = \sqrt{2+x}$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

(خرداد ۹۱)

۴۷. معادله $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

(شهریور ۹۱ و مشابه دی ۸۹)

۴۸. معادله $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را با روش هندسی حل کنید.

(شهریور ۹۰)

۴۹. نامعادله $|x| \leq x^2$ را به روش هندسی حل کنید.

(شهریور ۹۴)

۵۰. نامعادله $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$ را با روش هندسی حل کنید.

(دی ۹۶ و مشابه خرداد ۹۶)

۵۱. نامعادله $|x| < x + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

۵۲. با رسم نمودار، نامعادله $|x+1| < x^2 - 1$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نمایش دهید.

۵۳. نامعادله $|x-1| \leq 2^x$ را به روش هندسی (رسم نمودار) حل کنید.

(مشابه خرداد ۹۷)

۵۵. نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ وارون پذیر است، سپس نمودار و ضابطه وارون آن را بنویسید.

(شهریور ۹۵)

۵۶. با رسم نمودار، وارون پذیری $y = \sqrt{x+2} - 3$ را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را بیابید.

(مشابه شهریور ۹۲)

۵۷. با رسم نمودار، وارون پذیری تابع $y = \sqrt{x+3} + 5$ را بررسی کنید و نمودار و ضابطه وارون آن را به دست آورید.

(دی ۹۶)

۵۸. وارون پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4$ را روی دامنه $\{x > 0\}$ بررسی کنید و ضابطه و نمودار تابع وارون را به دست آورید.

(خرداد ۹۱)

۵۹. ثابت کنید تابع $f(x) = (x-2)^2$ روی $x \geq 2$ وارون پذیر است. سپس ضابطه وارون آن را بیابید.

(شهریور ۹۶)

۶۰. وارون پذیری تابع $g(x) = \frac{2}{x+3}$ را با رسم شکل بررسی کنید.

(خرداد ۹۴)

۶۱. به کمک رسم نمودار وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

(خرداد ۸۹)

۶۲. نمودار تابع f را رسم کرده و به کمک آن وارون پذیری تابع را بررسی کنید. در صورت وارون پذیری، نمودار و ضابطه وارون f را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^3 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۱۳ | روش اول | x در بازه $[-۴, ۲]$ است، باید ببینیم $(۲x+۱)$ در چه بازه‌ای قرار دارد.

$$-۴ \leq x \leq ۲ \xrightarrow{\times ۲} -۸ \leq ۲x \leq ۴ \xrightarrow{+۱} -۷ \leq ۲x+۱ \leq ۵$$

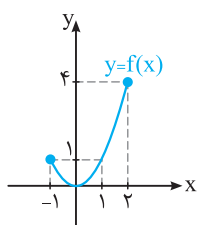
$$\Rightarrow D_f = [-۷, ۵]$$

روش دوم | از تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

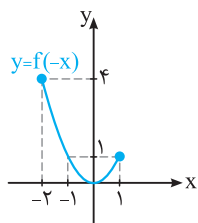
$$۲x+۱ = t \Rightarrow ۲x = t-۱ \Rightarrow x = \frac{t-۱}{۲}$$

$$\begin{cases} y = f(۲x+۱) \Rightarrow y = f(t) \\ -۴ \leq x \leq ۲ \Rightarrow -۴ \leq \frac{t-۱}{۲} \leq ۲ \Rightarrow -۸+۱ \leq t \leq ۴+۱ \Rightarrow -۷ \leq t \leq ۵ \end{cases}$$

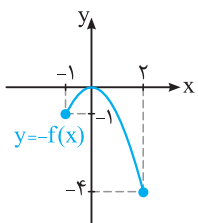
$$\Rightarrow D_f = [-۷, ۵]$$



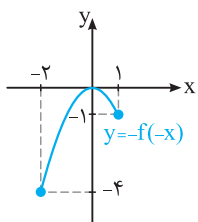
۱۴ | ابتدا نمودار $y = x^2$ را در بازه $[-۱, ۲]$ رسم می‌کنیم:



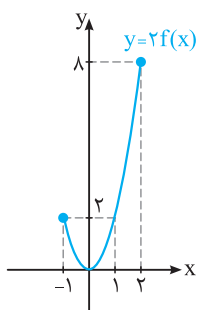
آ | برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



ب | برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



پ | برای رسم نمودار $y = -f(-x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها و y ها قرینه می‌کنیم:



ت | برای رسم نمودار $y = ۲f(x)$ ، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:

۱ | درست است. برای رسم $g(x) = -f(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار f را قرینه کنیم. بنابراین نمودار f را نسبت به محور x ها (طول‌ها) قرینه می‌کنیم.

۲ | درست است. چون x ها قرینه می‌شوند.

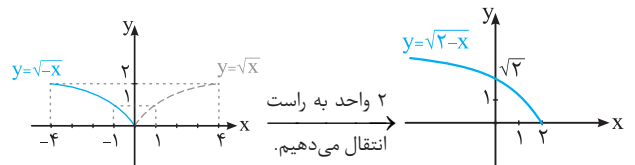
۳ | نادرست است. برای رسم نمودار g ، نمودار f را ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

۴ | درست است. زیرا ورودی f یعنی $۲x$ باید در بازه $[-۱, ۳]$ باشند، حالا ببینیم با این شرایط x ها در کدام بازه قرار می‌گیرند:

$$-۱ \leq ۲x \leq ۳ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲} \leq x \leq \frac{۳}{۲} \Rightarrow D_g = [-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}]$$

۵ | نادرست است، اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض نمودار f با ضریب $\frac{۱}{k}$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

۶ | با رسم نمودار تابع f داریم: $y = \sqrt{۲-x} = \sqrt{-(x-۲)}$



بنابراین برد تابع برابر با $[۰, +\infty)$ است.

۷ | اگر $۰ < a < ۱$ ، برای رسم $y = f(ax)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را با ضریب $\frac{۱}{a} > ۱$ در راستای محور x ها منبسط کنیم.

۸ | باید $(۲x)$ در دامنه تابع f قرار گیرد: $g(x) = -f(۲x) + ۱$

$$D_g: -۲ \leq ۲x \leq ۱ \xrightarrow{\div ۲} -۱ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_g = [-۱, \frac{۱}{۲}]$$

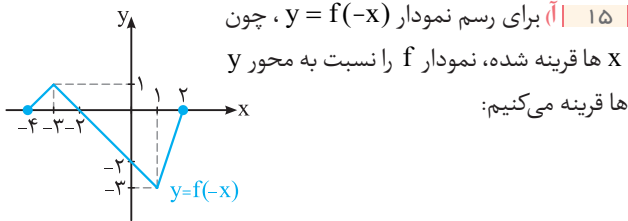
۹ | برای رسم $y = af(x)$ وقتی $۰ < a < ۱$ ، نمودار f را در راستای محور y ها منقبض می‌کنیم.

۱۰ | وقتی $k > ۱$ ، نمودار $f(kx)$ از انقباض نمودار f با ضریب $\frac{۱}{k}$ در راستای افقی به دست می‌آید.

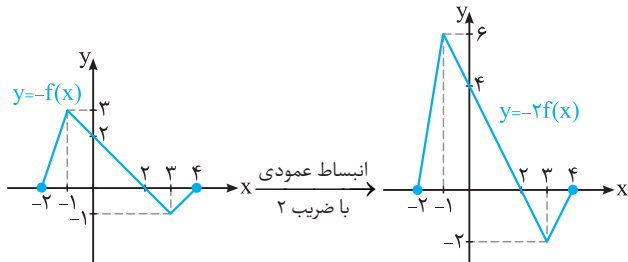
۱۱ | دامنه برابر با $[۰, ۱]$ است، زیرا:

$$-۲ \leq ۳x+۱ \leq ۱ \xrightarrow{+(-۱)} -۳ \leq ۳x \leq ۰ \xrightarrow{\div ۳} -۱ \leq x \leq ۰$$

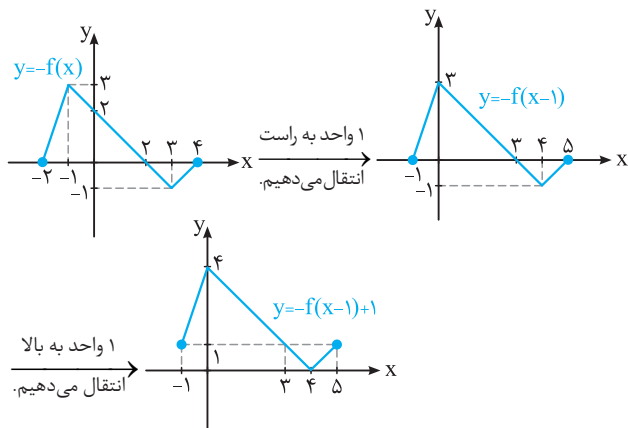
۱۲ | y ها قرینه شده، پس نمودار $y = -f(x)$ قرینه نمودار f نسبت به محور x ها است.



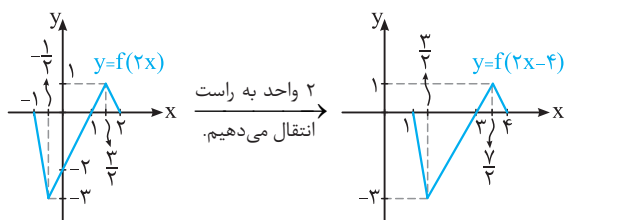
ب) برای رسم نمودار $y = -2f(x)$ ، ابتدا نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، سپس با ضریب ۲ در راستای محور y ها منبسط می‌کنیم:



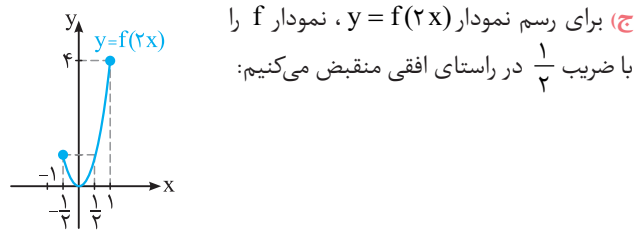
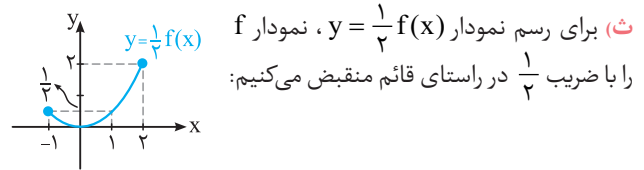
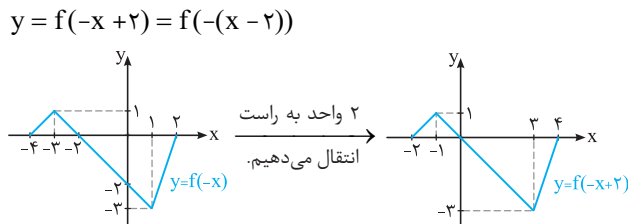
پ) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کرده تا نمودار $y = -f(x)$ به دست آید و سپس ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = -f(x-1)$ به دست آید و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



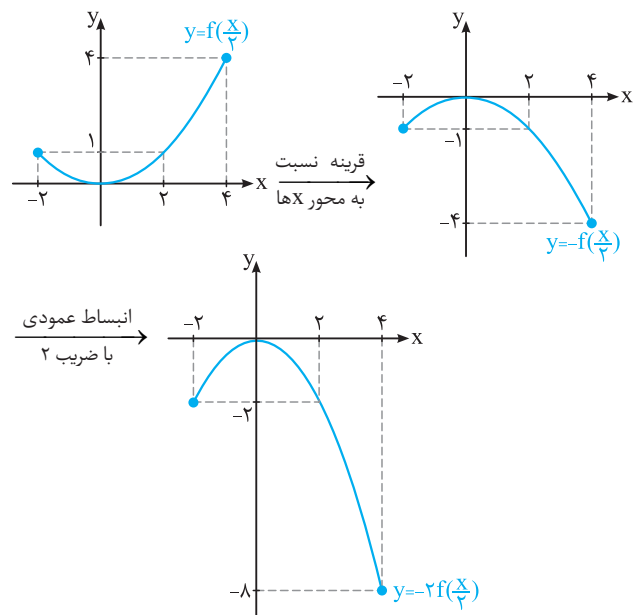
ت) نمودار f را در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض می‌کنیم تا نمودار $y = f(2x)$ به دست آید، سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم:



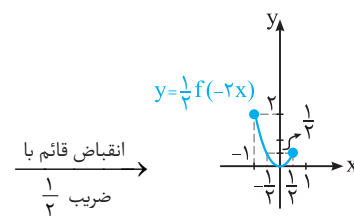
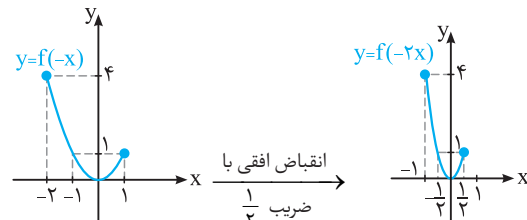
ث) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-x)$ به دست آید، سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم:

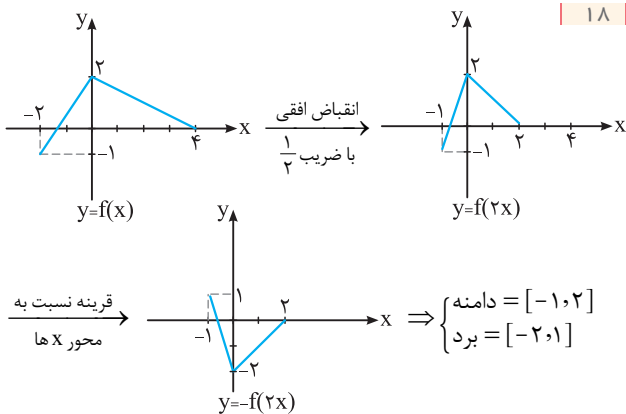


چ) برای رسم نمودار $y = -2f(\frac{x}{2})$ ، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط می‌کنیم، سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه و در نهایت با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:



ح) برای رسم نمودار $y = \frac{1}{4}f(-2x)$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم و با ضریب $\frac{1}{4}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم و در نهایت با ضریب $\frac{1}{4}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:

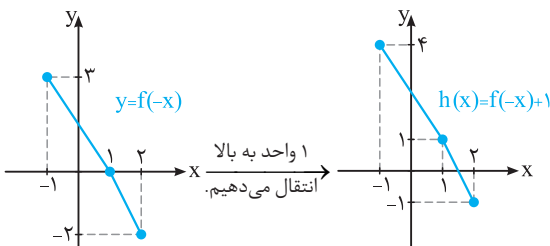




۱۹ | همان طور که از روی نمودار مشخص است، $D_f = [-2, 1]$. پس باید ورودی f در این بازه قرار گیرد:

$$-2 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [-4, -2]$$

۲۰ | برای رسم $h(x) = f(-x) + 1$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



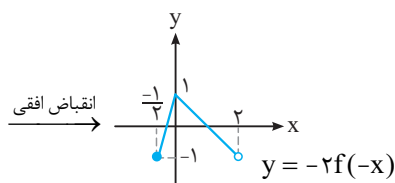
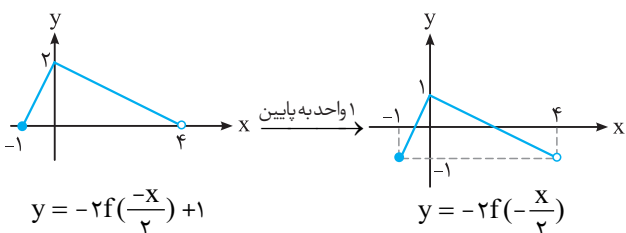
۲۱ | برای رسیدن به f از روی $y = -2f(-\frac{x}{2}) + 1$ برعکس حرکت می‌کنیم. یعنی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

$$y = -2f(-\frac{x}{2}) + 1 \xrightarrow{1 \text{ واحد به پایین}} y = -2f(-\frac{x}{2})$$

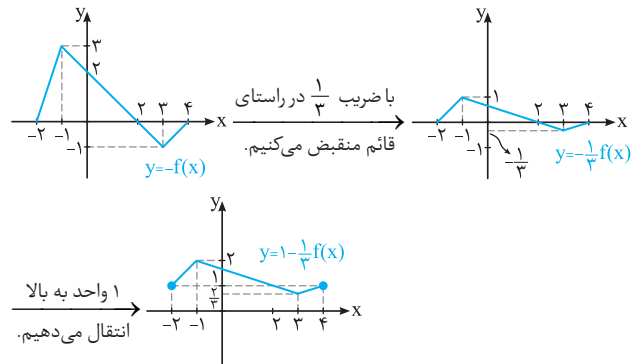
$$\xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ ضریب با ضریب } \frac{1}{2}]{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{2}} y = -2f(-x)$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}]{\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{1}{2}} y = -f(-x)$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = f(x)$$



۱۶ | نمودار $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



۱۷ | اگر نمودار f را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای قائم منقبض کنیم و در نهایت نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار g به دست می‌آید:

۱۸ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۱۹ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۰ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۱ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۲ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۳ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۴ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۵ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۶ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۷ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۸ | نمودار $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt{x} + 1$ ، $y = \sqrt{x} - 1$ و $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آوریم:

۲۹ | اگر نمودار f را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای قائم منقبض کنیم و در نهایت نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار g به دست می‌آید:

$$y = f(x) \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ ضریب}]{\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{1}{2}} h(x) = f(2x)$$

$$\xrightarrow[\text{به محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت}} g(x) = -f(2x)$$

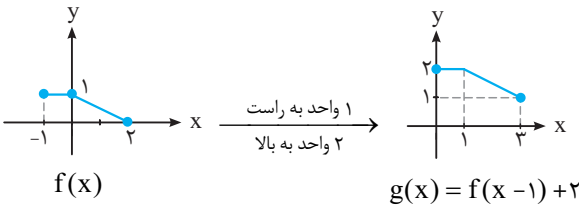
حالا همین کار را با نقطه $(-3, 1)$ می‌کنیم:

$$f(-3) = 1 \xrightarrow[\text{به محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت}} h(-\frac{3}{2}) = 1 \xrightarrow[\text{به محور } x \text{ ها}]{\text{انقباض افقی}} g(-\frac{3}{2}) = -1$$

بنابراین این نقطه به نقطه $(-\frac{3}{2}, -1)$ تبدیل می‌گردد.

۲۳ | $y = f(x) \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{واحد به راست}} g(x) = f(x-1) + 2$

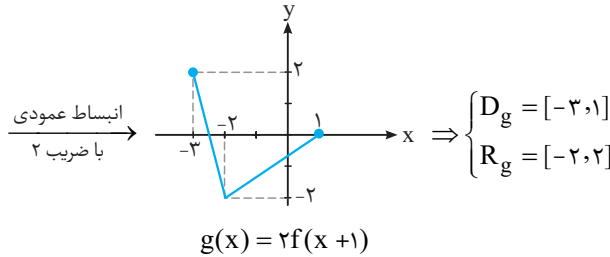
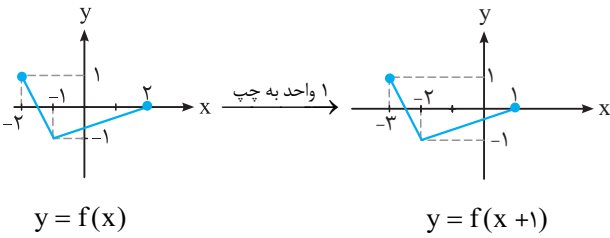
همین تبدیل‌ها را روی نمودار f اعمال می‌کنیم:



$\Rightarrow D_g = [0, 3]$

۲۴ | برای رسم $g(x) = 2f(x+1)$ ابتدا نمودار f را ۱ واحد به چپ

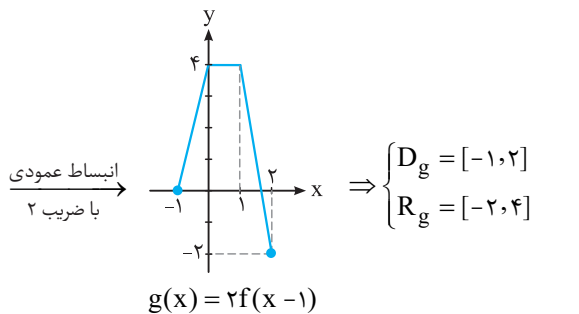
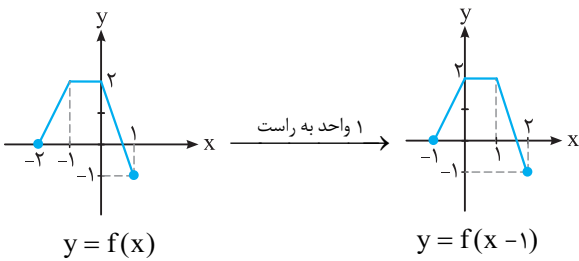
می‌بریم تا $f(x+1)$ به دست آید، سپس y ها را دو برابر می‌کنیم یعنی در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم:



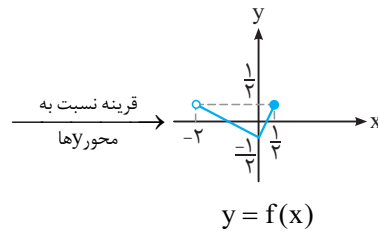
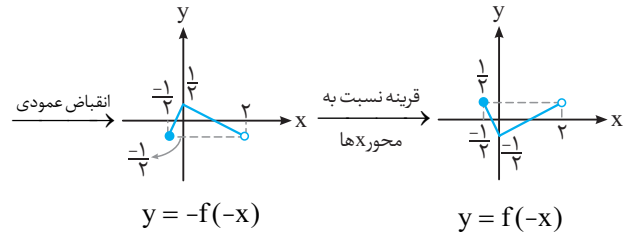
$\Rightarrow \begin{cases} D_g = [-3, 1] \\ R_g = [-2, 2] \end{cases}$

۲۵ | برای رسم $g(x) = 2f(x-1)$ ابتدا نمودار f را ۱ واحد به راست

می‌بریم سپس y ها را دو برابر می‌کنیم یعنی در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم.



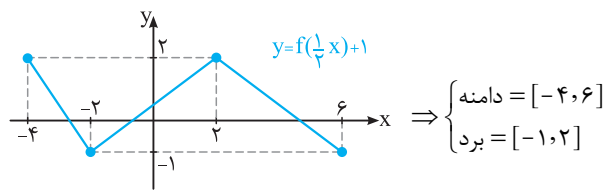
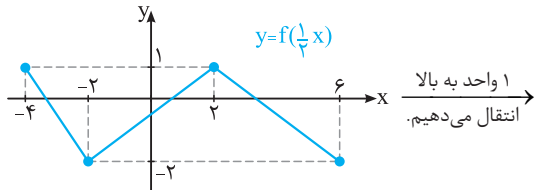
$\Rightarrow \begin{cases} D_g = [-1, 2] \\ R_g = [-2, 4] \end{cases}$



با توجه به نمودار به دست آمده برای f داریم:
دامنه: $D_f = (-2, \frac{1}{3}]$, برد: $R_f = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

۲۱ | برای رسم $y = f(\frac{1}{3}x) + 1$ ، نمودار f را در راستای افقی با ضریب ۲

منبسط می‌کنیم (x ها دو برابر شده)، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

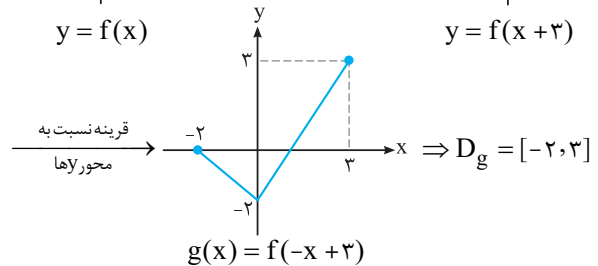
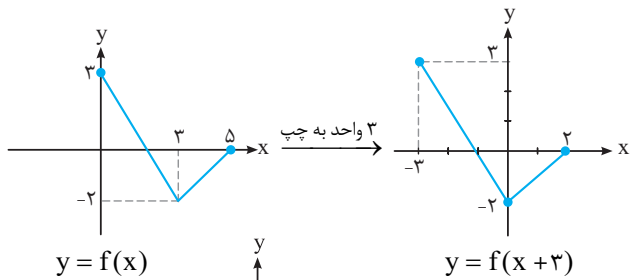


$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = [-4, 6] \\ \text{برد} = [-1, 2] \end{cases}$

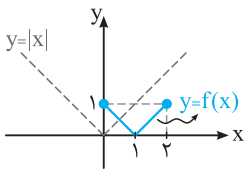
۲۲ | ابتدا ببینیم چه بلایی سر نمودار f آمده است:

$y = f(x) \xrightarrow[\text{محورهای}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x+3) \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{3}$

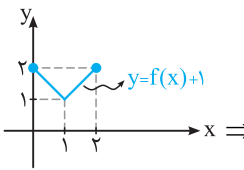
حالا همین تبدیل‌ها را روی نمودار f اعمال می‌کنیم.



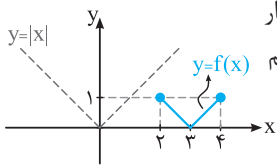
$\Rightarrow D_g = [-2, 3]$



۲۹ | برای رسم $f(x) = |x - 1|$ ابتدا نمودار را ۱ واحد به راست می‌بریم تا $f(x - 1) = |x - 1|$ به دست آید سپس x ها را $\frac{1}{3}$ برابر می‌کنیم. یعنی انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{3}$.

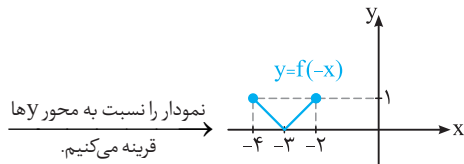


حال برای رسم $y = f(x) + 1$ کافی است نمودار f را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم.



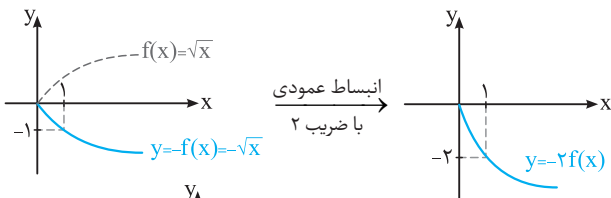
۳۰ | برای رسم $f(x) = |x - 3|$ نمودار $y = |x|$ را ۳ واحد به راست انتقال می‌دهیم و دامنه را به $[2, 4]$ محدود می‌کنیم:

و در نهایت برای رسم $y = f(-x)$ نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

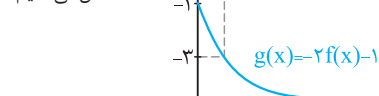


نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

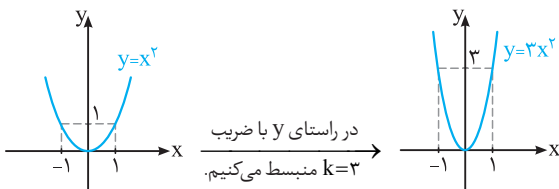
۳۱ | کافی است نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم تا نمودار $y = -\sqrt{x}$ به دست آید. سپس با ضریب ۲ در راستای عمودی منبسط می‌کنیم و در نهایت ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

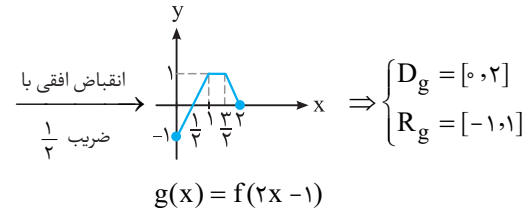
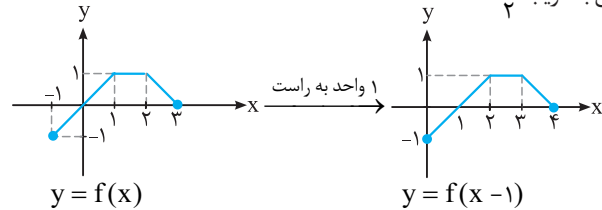


۳۲ | با استفاده از نمودار $y = x^2$ ابتدا y ها را ۳ برابر می‌کنیم (انبساط عمودی) و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

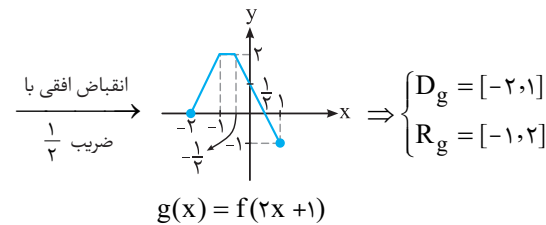
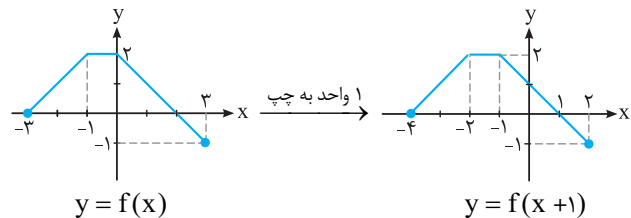


۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

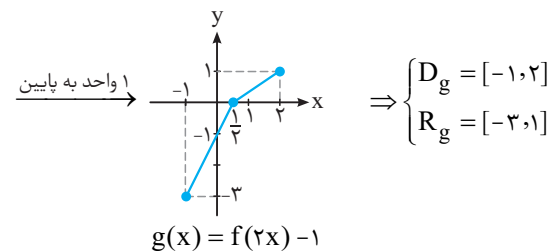
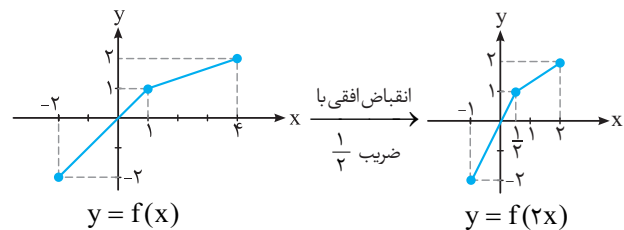
۲۶ | برای رسم $g(x) = f(2x - 1)$ ابتدا نمودار را ۱ واحد به راست می‌بریم تا $f(x - 1)$ به دست آید سپس x ها را $\frac{1}{3}$ برابر می‌کنیم. یعنی انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{3}$.



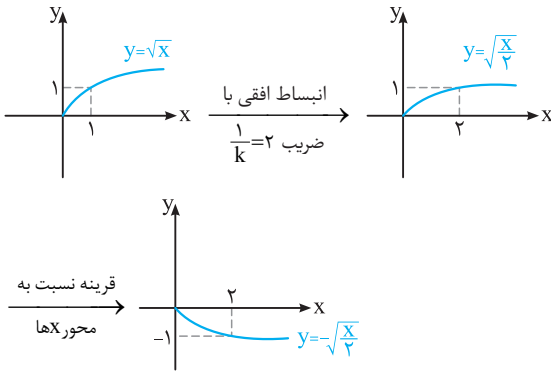
۲۷ | ابتدا نمودار f را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا $f(x + 1)$ به دست آید سپس x ها را $\frac{1}{3}$ برابر می‌کنیم تا $f(2x + 1)$ به دست آید یعنی انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{3}$:



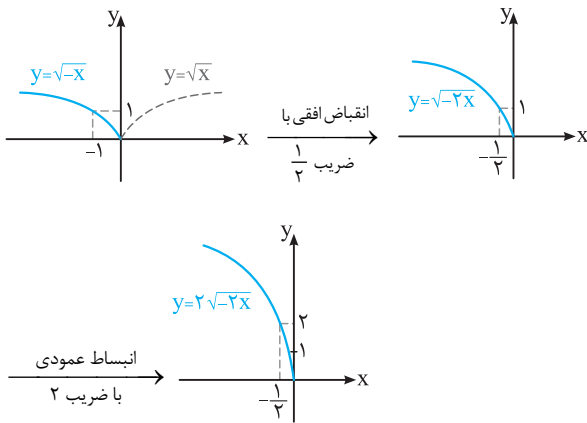
۲۸ | برای رسم $g(x) = f(2x) - 1$ ابتدا x ها را $\frac{1}{3}$ برابر می‌کنیم (انقباض افقی) و سپس نمودار را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



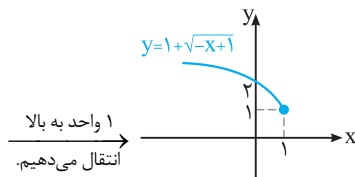
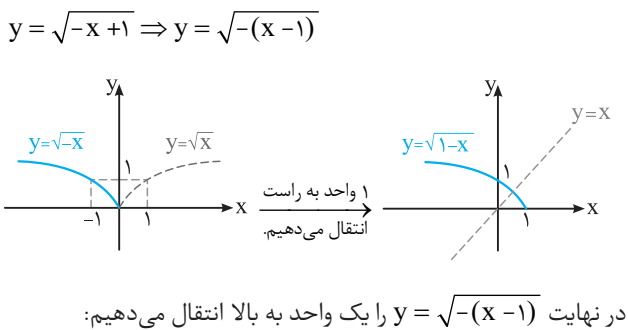
۳۶ | ابتدا در نمودار $y = \sqrt{x}$ ، x ها را ۲ برابر می‌کنیم (انبساط افقی) تا $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ به دست آید، سپس y ها را قرینه می‌کنیم یعنی تقارن نسبت به محور x ها:



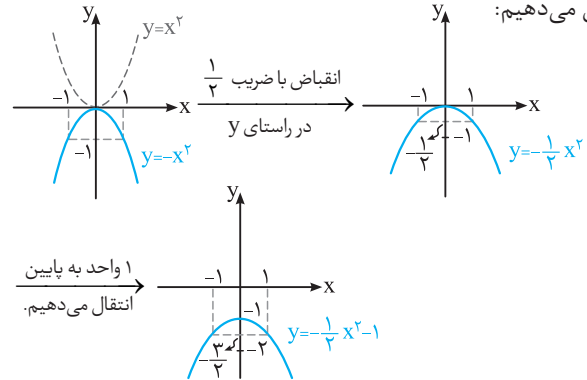
۳۷ | اول در نمودار $y = \sqrt{x}$ ، x ها را قرینه می‌کنیم (تقارن نسبت به محور y ها) بعد x ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم تا $y = \sqrt{-2x}$ به دست آید و در نهایت y ها را ۲ برابر می‌کنیم یعنی انبساط عمودی:



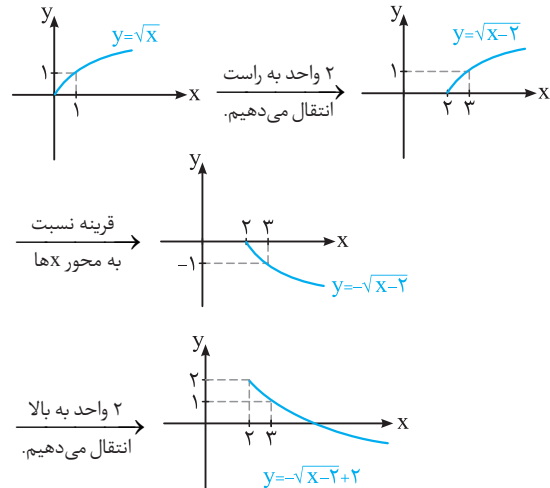
۳۸ | کافی است نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم تا x ها منفی شوند یعنی $y = \sqrt{-x}$ و سپس ۱ واحد به راست انتقال دهیم:



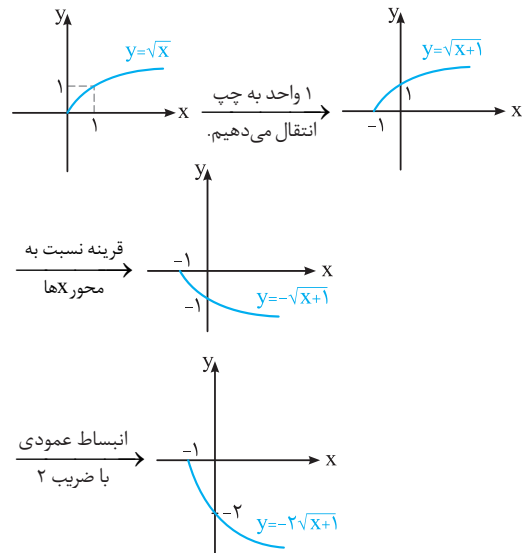
۳۳ | با استفاده از نمودار $y = x^2$ ، ابتدا y ها را منفی می‌کنیم، سپس y ها را $\frac{1}{4}$ برابر می‌کنیم (انقباض عمودی) و در نهایت ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

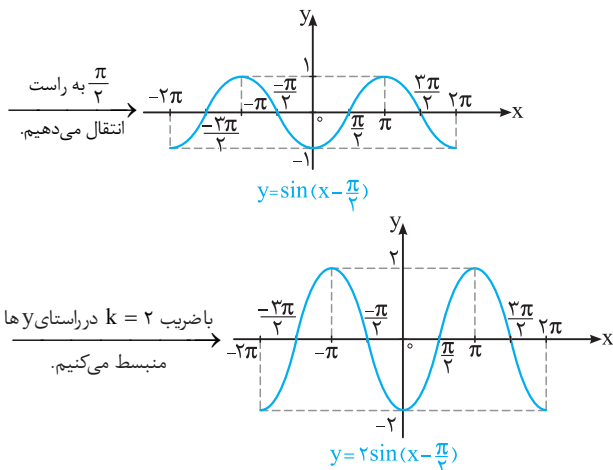


۳۴ | ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا $y = \sqrt{x-2}$ به دست آید سپس y ها را قرینه می‌کنیم ($y = -\sqrt{x-2}$) و در نهایت ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

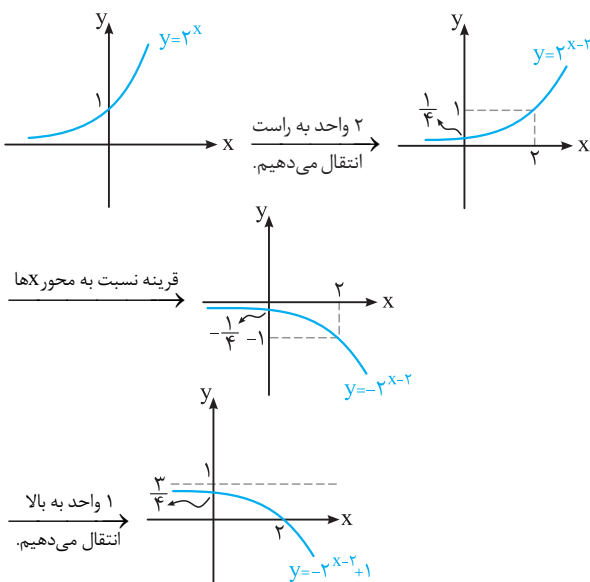


۳۵ | ابتدا $y = \sqrt{x}$ را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا $y = \sqrt{x+1}$ به دست آید. سپس y ها را قرینه و در نهایت y ها را ۲ برابر می‌کنیم:

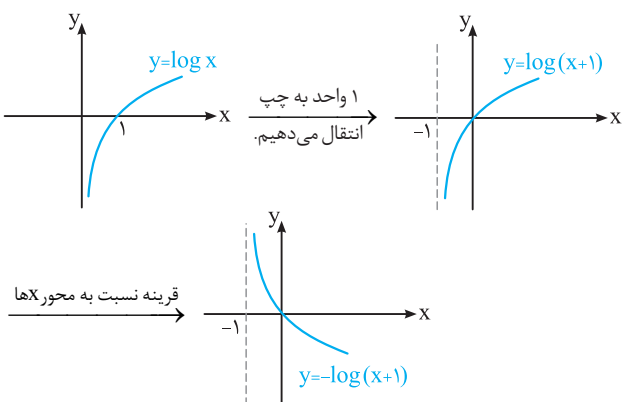




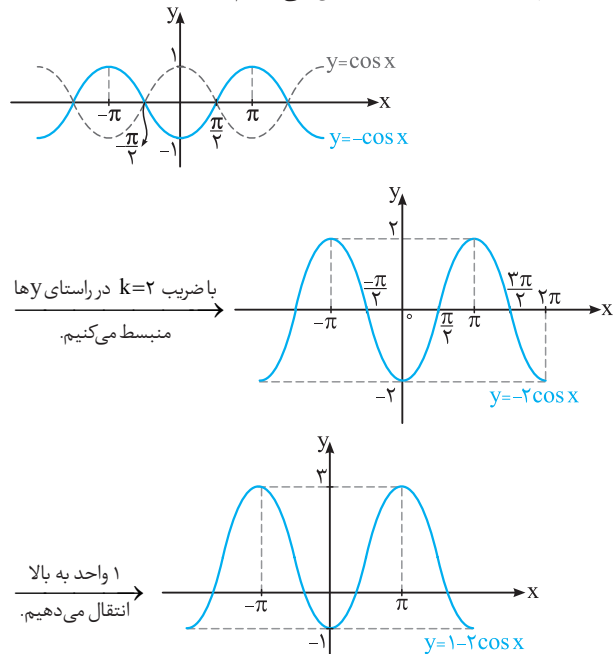
۴۲ | برای رسم نمودار $y = -2^{x-2} + 1$ ، کافی است نمودار $y = 2^x$ را ۲ واحد به راست برده تا $y = 2^{x-2}$ به دست آید. سپس برای رسم $y = -2^{x-2}$ نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا انتقال دهیم.



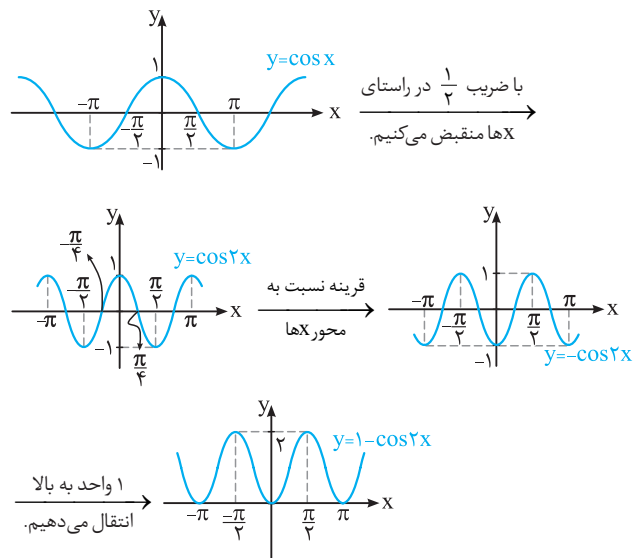
۴۳ | برای رسم $y = -\log(x+1)$ ابتدا نمودار $y = \log x$ را ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و در نهایت y ها را با تقارن نسبت به محور x ها، قرینه می‌کنیم.



۳۹ | نمودار $y = \cos x$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -\cos x$ به دست آید. سپس با ضریب ۲ در راستای y ها، منبسط کرده و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۴۰ | ابتدا در نمودار $y = \cos x$ ، x ها را $\frac{1}{2}$ برابر (انقباض افقی)، سپس y ها را قرینه می‌کنیم و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۴۱ | نمودار $y = \sin x$ را $\frac{\pi}{2}$ به راست انتقال می‌دهیم و سپس در راستای محور y ها، با ضریب $k = 2$ منبسط می‌کنیم.

