

بِنْجِفَنْار

سخن ناشر

وقتی عبارت «تیزشیم» را می‌بینید؛ یعنی گوینده این عبارت که مشاوران آموزش باشد، چند اندیشه کلیدی را به عنوان فرض پذیرفته است:

۱. تیزشیم یعنی تیز بشویم؛ یعنی تیزه هوشی ناشی از رفتار و عملکرد و تلاش ماست نه ناشی از ژنتیک و وراثت.

۲. تیزشیم یعنی حتماً بدو! همین‌طور یک‌جا بمانی که تیز نمی‌شوی ...

۳. تیزشیم یعنی چاقوی ذهن‌ت را تیز کن! چاقوی ذهن چطور تیز می‌شود؟ با برخورد با تست‌هایی که به همین منظور برای شما آماده شده است. «تست‌های سطح بالا» برای تیزشدن شماست.

۴. تیزشیم یعنی کوتاه نیا! یعنی قبول نکن که اگر تا سال قبل در ذهن همکلاسی‌ها و معلم‌ها دانش‌آموز کُندی تصوّر می‌شدی، امسال هم همین‌طور قرار است باشد. نه! تیزشیم، یعنی جنگجو باش! کوتاه نیا!

۵. تیزشیم یعنی تا آخرین لحظه! یعنی تو خودت را کسی فرض کن که هر چه ضربه بخورد، بلند می‌شود. تیزشیم یعنی جنگجویی که همیشه دقیقه ۹۰ گل می‌زند و بعد از این که بازی تمام شد، غصه می‌خورد و در حین بازی همیشه می‌جنگد و به خودش اجازه نمی‌دهد که حین بازی غصه بخورد. چرا که می‌داند هر لحظه احتمال نتیجه گرفتن وجود دارد.

۶. تیزشیم یعنی همراه شما هستیم تا هر لحظه که خسته شدید از تیز کردن ذهن‌تان، با تست‌ها و پاسخ‌ها و درسنامه نقش «فلقلی را بازی کنیم» که شما می‌خورید و می‌دوید از بس می‌سوزاند تان! یادتان نرود که زیبایی در همین سوختن‌هاست!

در انتهای بگوییم که امیدوارم مجموعه کتاب‌های تیزشیم، برای شما دانش‌آموزان علوم انسانی که به دنبال بالا رفتن از سطح متوسط هستید و دلتان می‌خواهد قله را نه از تعریف دیگران، بلکه با حضور خودتان تجربه کنید، مفید باشد.

وحید تمنا



مقدمه

سال کنکور، سالی بسیار طلایی در زندگی تحصیلی هر دانشآموز است. درس ریاضی در رشته علوم انسانی از دروسی است که در تغییر در صدها و رتبه شما بسیار حائز اهمیت است. معمولاً دانش آموزان به دنبال کتابی هستند که تمام مباحث مهم را به صورت کاربردی و فشرده آموزش دهد. کتاب «تیزشیم» مشاوران بر این خواسته شما جامه عمل پوشانیده است.

کتابی که پیش روی شماست در ۸ فصل شامل ۲۹ درس و ۲۰ آزمون تنظیم شده است. در هر آزمون ۲۰ سؤال متنوع شامل سؤالات نسبتاً ساده؛ اما مهم و پر تکرار در کنکور تا سؤالات سطح دشوارتر آورده شده است و تمام مباحثی را در بر می گیرد که در امتحانات مدرسه و کنکور سراسری با آن مواجه می شوید. در پاسخنامه علاوه بر حل تشریحی سؤال، روش حل سؤال مورد نظر را نیز آورده ایم. همچنین با آوردن درسنامه ای کامل در ابتدای هر فصل، مطالب کتاب درسی، نکات مهم و روش های پاسخگویی به سؤالات هر مبحث را به صورت کاربردی و متفاوت نشان داده ایم.

بسیار امیدواریم با کتابی که نوشته ایم و با تلاشی که شما خواهید کرد، قدرت تست زنی و تسلط شما را در حل مسائل افزایش دهیم.

از دوستان واحد فنی و تولید مجموعه مشاوران که در تهیه این کتاب ما را باری کردند بسیار سپاسگزاریم.

گروه تأليف

فهرست

فصل اول: عبارت های جبری	۵
درس ۱ و ۲	۶
آزمون ۱ و ۲	۱۷
فصل دوم: معادله درجه دوم	۲۱
درس ۱ تا ۳	۲۲
آزمون ۱ و ۲	۳۸
فصل سوم: تابع	۴۲
درس ۱ تا ۷	۴۳
آزمون ۱، ۲، ۳ و ۴	۸۴
فصل چهارم: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی	۹۶
درس ۱ و ۲	۹۷
آزمون ۱ و ۲	۱۱۲
فصل پنجم: آمار	۱۱۹
درس ۱ تا ۸	۱۲۰
آزمون ۱، ۲، ۳ و ۴	۱۵۷
فصل ششم: شمارش و احتمال	۱۷۲
درس ۱ و ۲	۱۷۳
آزمون ۱ و ۲	۱۷۹
فصل هفتم: الگو و دنباله	۱۸۳
درس ۱ تا ۳	۱۸۴
آزمون ۱ و ۲	۱۹۰
فصل هشتم: ریشه ۱۱ ام، توان گویا و تابع نمایی	۱۹۴
درس ۱ و ۲	۱۹۵
آزمون ۱ و ۲	۲۰۴
پاسخنامه تشریحی	۲۰۹

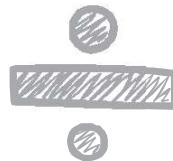
فصل چهارم



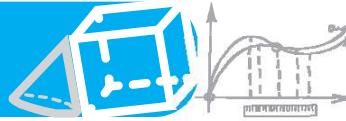
آشنايی با مذکو
و استدلال ریاضی

درس اول: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس دوم: استدلال ریاضی



درس اول: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها



یادآوری (منطق)

همانگونه که با تعریف منطق در سال دهم آشنا شدید: **منطق در لغت**: به معنی «آنچه به گفته درآمده» است و عموماً آن را به معنی «بررسی استدلال‌ها» تعبیر می‌کنند.

کاربرد منطق: تشخیص اعتبار استدلال‌ها است. امروزه علم منطق علاوه بر فلسفه، در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز کاربرد دارد.

مفهوم منطق: منطق، روش درست فکر کردن است و با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق دانان و افرادی که با منطق مأнос ترند بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباہ می‌کنند.

منطق ریاضی

اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، **منطق ریاضی**، دستور این زبان خواهد بود.

گزاره

در منطق ریاضی به هر جملهٔ خبری که بتوانیم در حال حاضر یا در آینده دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت دهیم، یک گزاره گفته می‌شود؛ هر چند علم به درستی و یا نادرستی آن عبارت نداشته باشیم، اما بدانیم که همواره درست و یا همواره نادرست است و اعمال نظر شخصی در درستی یا نادرستی عبارت دخیل نباشد. جمله‌های غیرخبری مانند «کجا می‌روی؟» یا «چه هوای دلگیری؟» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم مانند «درس ریاضی سخت‌تر از درس عربی است»، گزاره محسوب نمی‌شوند؛ زیرا نظر افراد مختلف در مورد ارزش آن متفاوت است، پس نمی‌توانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آن نسبت دهیم.

رابطه‌ای گزاره‌ای

در این فصل انواع ترکیب‌های زیر را در گزاره‌ها بررسی می‌کنیم که الفاظ متناسب با هر ترکیب را رابطه‌ای گزاره‌ای می‌نامیم.

(۱) «نقیض یک گزاره»: با رابط یا عبارت «چنین نیست که» و علامت «~»

(۲) «ترکیب عطفی دو گزاره»: با رابط یا حرف «و» و علامت «~۸» (در بعضی از کتاب‌ها از علامت «&» استفاده می‌کنند).

(۳) «ترکیب فصلی دو گزاره»: با رابط یا حرف «یا» و علامت «~۷»

(۴) «ترکیب شرطی دو گزاره»: با رابط یا حرف «اگر» و علامت «⇒»

(۵) «ترکیب دو شرطی دو گزاره»: با رابط یا حرف «اگر و فقط اگر» و علامت «↔»

جداول وضعیت ارزشی گزاره

می‌دانیم که ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. پس برای هر گزاره دلخواه دو حالت ارزشی می‌توانیم در نظر بگیریم. وقتی می‌خواهیم ارزش ترکیب‌های مختلفی از دو یا

چند گزاره را بررسی کنیم، یکی از راههای مطمئن و گاهی طولانی این است که جدول وضعیت ترکیبی و ارزشی گزاره‌ها را بنویسیم و تمام حالت‌های ممکن در ترکیب آن گزاره‌ها را بررسی کنیم. در زیر جدول وضعیت ارزشی و تمام حالت‌های ممکن ارزشی برای ۲، ۳ و ۴ گزاره، مشخص شده است.

جدول وضعیت ارزشی دو گزاره مانند p و q :

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

تعداد گزاره‌ها
 $2^2 = 4$

جدول وضعیت ارزشی سه گزاره مانند p , q و r :

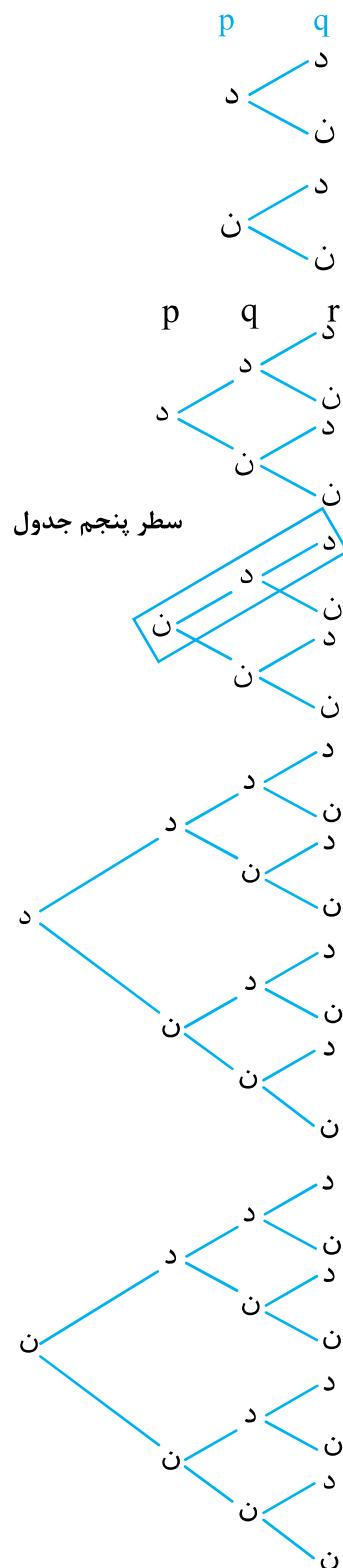
p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

تعداد گزاره‌ها
 $2^3 = 8$

جدول وضعیت ارزشی چهار گزاره مانند p , q , r و s :

p	q	r	s
د	د	د	د
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	د
ن	ن	ن	ن

تعداد گزاره‌ها
 $2^4 = 16$



نتیجه: جدول وضعیت ارزشی برای n گزاره، دارای 2^n حالت مختلف ارزشی است.

نقیض یک گزاره

اگر p یک گزاره باشد، آنگاه «چنین نیست که p » را «نقیض p » نامیده و با علامت « $\sim p$ » نشان می‌دهیم. چون هر گزاره جمله‌ای خبری است، پس حتماً دارای فعل است و برای بیان نقیض آن گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم.

واضح است که با این کار اگر گزاره داده شده یعنی p درست باشد، آنگاه نقیض p ($\sim p$) نادرست و اگر p نادرست باشد، آنگاه $\sim p$ (نقیض p) درست خواهد بود. به‌طور خلاصه در جدول رویه رو داریم:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

نکته بسیار مهم

باید توجه کرد که برای نوشتمن نقیض « x مثبت است» نمی‌توانیم از عبارت « x منفی یا صفر است.» استفاده کنیم. زیرا درست است که هر عدد می‌تواند فقط سه حالت «مثبت یا صفر یا منفی» را داشته باشد و از لحاظ معنا و مفهوم وقتی عدد مثبت نیست پس حتماً منفی یا صفر است؛ اما ما در منطق گزاره‌ها با معنا و مفهوم عبارت کاری نداریم و تنها صورت استدلال برایمان مهم است. پس نقیض گزاره « x مثبت است»، گزاره « x مثبت نیست» یا «چنین نیست که x مثبت است» خواهد بود. پس برای نوشتمن نقیض گزاره p فقط از دو عبارت زیر استفاده می‌کنیم:

«چنین نیست که p » یا «منفی کردن فعل گزاره p »

نتیجه: در منطق، نقیض گزاره « m عددی گویا است»، گزاره « m عددی گنگ است» نیست. در واقع گزاره « m عددی گنگ است.» نتیجه‌ای است که با معلومات علم ریاضی از «نقیض گزاره m عددی گویا است» یعنی « m عددی گویا نیست» به دست می‌آید.

تذکر

اگر p و q دو گزاره باشند و از لحاظ ارزشی مخالف یکدیگر باشند (یکی درست و دیگری نادرست باشد) آنگاه لزومی ندارد که حتماً نقیض یکدیگر باشند. اما اگر دو گزاره نقیض یکدیگر باشند آنگاه حتماً از لحاظ ارزشی مخالف یکدیگر هستند (یکی درست و دیگری نادرست است). برای درک بهتر به مثال بعد توجه کنید.

مثال: اگر p گزاره «۲ عددی اول است» و q گزاره «۳ عددی منفی است» باشد، آنگاه p یک گزاره درست و q یک گزاره نادرست است؛ اما p و q نقیض یکدیگر نیستند.

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند گزاره « p و q » را ترکیب عطفی p با q نامیده و آن را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهیم که علامت « \wedge » را عاطف و p و q را مؤلفه‌های عاطف می‌نامیم. وقتی گزاره‌ای از دو گزاره دیگر تشکیل شده باشد که بین آن دو گزاره، حرف ربط «و» قرار گرفته باشد لفظ «و» بین دو گزاره ایجاب می‌کند که برای درستی گزاره اولیه هر دو گزاره تشکیل شده درست باشند. مثلاً برای درستی گزاره «علی پسری ایرانی و ۱۲ ساله است» باید گزاره «علی پسری ایرانی است» و «علی ۱۲ سال دارد» هر دو با هم درست باشند و نادرستی حتی یکی از آنها نادرستی گزاره مركب «علی پسری ایرانی و ۱۲ ساله است» را موجب خواهد شد.

جدول ارزشی ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

نکته

(۱) پس ملاحظه شد که ترکیب عطفی دو گزاره مانند p و q ، یعنی « $p \wedge q$ » فقط در حالتی درست (راست) است که هر دو گزاره درست (راست) باشند.

(۲) از الفاظی که از نظر منطقی مترادف عاطف است لفظ «ولی = اما» است.

به عنوان مثال: گزاره «۲ زوج است ولی اول است.» به معنی «۲ زوج است و ۲ اول است.» خواهد بود که گزارهای راست (درست) است.

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره « p یا q » را ترکیب فصلی p با q نامیده و آن را با نماد « $p \vee q$ » نشان می‌دهیم که علامت « \vee » را فاصل و p و q را مؤلفه‌های فاصل می‌نامیم. وقتی گزاره‌ای از دو گزاره دیگر تشکیل شده باشد که بین آن دو گزاره، حرف ربط «یا» قرار گرفته باشد لفظ «یا» بین دو گزاره ایجاب می‌کند که برای درستی گزاره اولیه حداقل یکی از دو گزاره تشکیل شده درست باشند و این گزاره هنگامی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند (نادرستی یکی کافی نیست).

جدول ارزشی ترکیب فصلی دو گزاره

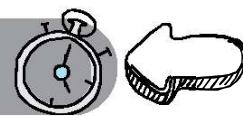
p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکته

پس ملاحظه شد که ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشند.

نکته مهم

باید توجه کنید که این «یا» که یا منطقی نامیده می‌شود با لفظ عادی «یا» که در استعمال عادی برای ترکیب گزاره‌ها به کار می‌رود تفاوت دارد. در استعمال عادی لفظ «یا» در گزاره ترکیب شده، فقط و فقط وقتی راست (درست) است که یکی از گزاره‌های تشکیل دهنده گزاره اصلی درست و گزاره تشکیل دهنده دیگری نادرست باشد، در واقع لفظ عادی «یا» دو گزاره را از یکدیگر جدا می‌کند و امکان با هم رخ دادن هر دو وجود ندارد که این نوع «یا» را یا مانع جمع می‌نامیم.

فصل چهارم
آزمون اول


۱۶۱. اگر از جدول ارزش گزاره‌ها، یک گزاره را کاهش دهیم، چه اتفاقی می‌افتد؟

- ۱) نفاوتی در ردیف‌های آن دیده نخواهد شد.
- ۲) تعداد ردیف‌های آن، یکی کمتر می‌شود.
- ۳) تعداد ردیف‌های آن بیشتر می‌شود.
- ۴) تعداد ردیف‌های آن نصف می‌شود.

۱۶۲. کدام گزینه دارای مثال نقض است؟ (سراسری ۱۰)

- ۱) حاصل ضرب هر دو عدد فرد متوالی، عددی فرد است.
- ۲) حاصل تفاضل هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
- ۳) حاصل جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
- ۴) حاصل جمع هر عدد اول با یک عدد فرد، عددی فرد است.

۱۶۳. چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- آ. تابع خطی می‌تواند منحنی باشد.
- ب. سهمی همان تابع درجه دوم است.
- پ. معادله درجه ۴ می‌تواند تنها دارای دو پاسخ حقیقی باشد.

ت. عبارت $\frac{3x - 6}{4x - 8}$ یک عبارت گویا است.
ث. ۴ عدد اول یک رقمی داریم.
ج. تعداد اعداد مرکب یک رقمی ۵ تا است.

۲

۳

۴

۵

۱۶۴. کدام هم‌ارزی درست نیست؟

- ۱) زوایای یک مثلث می‌تواند بیش از 180° باشد. \equiv شیب خط $y = 2x + 5$ برابر با ۲ است.
- ۲) زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۳ عضوی، ۸ تا است. \equiv مربع، نوعی مستطیل است.
- ۳) جذر هر عدد و ریشه آن عدد با هم برابراند. \equiv عدد ۱۲۱ مجدور کامل است.
- ۴) $!= \equiv$ وتر مثلث قائم‌الزاویه بزرگ‌تر از ضلع‌های دیگر است.

۱۶۵. چه تعداد از جملات خبری زیر گزاره نیستند؟

الف) عدد $1 - 4^{576}$ عددی اول است.

ب) در درس ریاضی مبحث تابع از معادله درجه ۲ آسان‌تر است.

پ) تخته را پاک کن.

ت) سیب قرمز از سیب زرد خوشمزه‌تر است.

ث) $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

ج) هر دانشمندی باهوش است.

۵

۶

۷

۸



۱۶۶. نقیض کدام گزاره درست نوشته شده است؟

۱ گزاره: «علی برادر زهرا نیست.»؛ نقیض گزاره: «زهرا خواهر علی است.»

۲ گزاره: «۲ عددی غیر اول نیست.»؛ نقیض گزاره: «۲ عددی اول است.»

۳ گزاره: «عدد ۷ زوج است.»؛ نقیض گزاره: «عدد ۷ فرد است.»

۴ گزاره: «دایره ضلع ندارد.»؛ نقیض گزاره: «چنین نیست که دایره ضلع ندارد.»

۱۶۷. کدام یک از گزینه‌های زیر با گزاره «۱۲۱ مضرب ۱۲ نیست و $\sqrt{3}$ مثبت است» هم ارزش است؟

۱ «اگر n عددی زوج باشد، آنگاه n^2 زوج است و اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است»

۲ «۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است.»

۳ «۲ عددی اول نیست و همه سوره‌های قرآن با بسم الله شروع نمی‌شوند.»

۴ «اگر عددی مثبت نباشد، یا منفی است یا صفر است و ارزش گزاره $p \sim$ همواره نادرست است.»

۱۶۸. در جای خالی کدام عبارت را می‌توان قرار داد تا گزاره حاصل یک گزاره نادرست باشد؟ « تمام سوره‌های قرآن با بسم الله شروع می‌شوند یا»

۱ کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد

۲ هر گزاره‌ای می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۱۶۹. حاصل هم ارزی زیر کدام است؟

$$\sim(q \wedge \sim q) \wedge \sim(p \vee \sim p) \equiv ?$$

F

T

q

p

۱۷۰. «اگر ۳ زوج باشد، آنگاه ۳۹ اول است»، هم ارز کدام گزاره نیست؟

۱ اگر ۳۹ اول نباشد، آن‌گاه ۳ زوج است.

۲ اگر ۳۹ اول نباشد، آن‌گاه ۳ زوج نیست.

۳ اگر ۳۹ اول باشد، آن‌گاه ۳ فرد است.

۴ اگر ۳۹ اول باشد، آن‌گاه ۳ فرد نیست.

۱۷۱. اگر p گزاره‌ای درست و q و r گزاره‌ای دلخواه باشند، در این صورت ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر قطعاً درست است؟

$$p \Rightarrow (\sim p \vee q) \quad (q \vee \sim r) \Rightarrow ((\sim p \wedge r) \Rightarrow q) \quad ۱$$

$$(r \vee p) \wedge ((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \quad (p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r) \quad ۲$$

۱۷۲. اگر p درست و q نادرست باشد، گزاره $(p \wedge q) \rightarrow [p \Rightarrow p] \wedge [p \Rightarrow r]$ با کدام گزاره، هم ارزش است؟

$$p \vee \sim r \quad \sim r \quad \sim q \wedge r \quad q \quad ۱$$

۱۷۳. نقیض گزاره «اگر a زوج باشد، آن‌گاه a بر ۲ بخش‌پذیر است.» کدام گزاره است؟

۱ نه a زوج است و نه a بر ۲ بخش‌پذیر است.

۲ هم a زوج است و هم a بر ۲ بخش‌پذیر است.

۳ زوج است و a بر ۲ بخش‌پذیر نیست.

۴ زوج نیست و a بر ۲ بخش‌پذیر است.

۱۷۴. هم ارز منطقی گزاره $[p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow p)] \wedge [p \wedge q] \Rightarrow p$ کدام است؟

۱ همیشه درست است.

$$\sim p \Rightarrow q \quad p \Rightarrow q \quad ۲$$



فصل پنجم



آمار

درس اول: گردآوری داده‌ها

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز

درس سوم: معیارهای پراکندگی

درس چهارم: نمودارهای یک متغیره

درس پنجم: نمودارهای چند متغیره

درس ششم: شاخصهای آماری

درس هفتم: سریهای زمانی

درس هشتم: چرخه آمار در حل مسائل



درس اول: گردآوری داده‌ها



«جامعه آماری و نمونه آماری»

جامعه آماری: مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء است که در مورد آنها موضوع یا موضوعاتی را مطالعه می‌کنیم.

نمونه آماری: هر زیر مجموعه از جامعه آماری که با روش مشخصی انتخاب شده باشد و در بررسی آماری، اعضای آن مورد بررسی قرار می‌گیرند یک نمونه آماری نامیده می‌شود. در چه مواردی نیاز به نمونه‌گیری داریم؟ زمانی که: ۱- جامعه بزرگ باشد؛ ۲- جامعه تنوع داشته باشد.

اندازه نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌گویند.

ویژگی‌های یک نمونه خوب:

- ۱- به اندازه کافی بزرگ باشد. (متناسب با اندازه جامعه باشد).
- ۲- تصادفی باشد.

۳- بیان گر ویژگی‌های جامعه باشد. (چون نمونه نماینده جامعه است).

- نمونه‌گیری مهمترین بخش آمار است.

گفتیم که یک نمونه خوب باید تصادفی باشد. یعنی:

- ۱- از قبل نتوانیم پیش‌بینی کنیم که کدام اعضا انتخاب می‌شوند.
- ۲- شانس حضور تمام اعضای جامعه در نمونه، یکسان باشد.

برای این که نمونه‌گیری ما این ویژگی‌ها را داشته باشد، باید به «روش تصادفی» نمونه‌گیری کنیم.

نمونه تصادفی: نمونه‌ای است که در آن همه واحدهای آماری «شانس انتخاب شدن یکسان» در نمونه را داشته باشند. اگر نمونه، به صورت تصادفی انتخاب شود، آن نمونه معرف جامعه خواهد بود.

سرشماری: اگر تمام اعضای جامعه آماری را مورد مطالعه قرار دهیم به این عمل سرشماری می‌گوییم. در واقع در سرشماری نمونه آماری همان جامعه آماری خواهد بود مانند سرشماری نفوس و مسکن که هر ۱۰ سال یک بار اطلاعات همه خانوارهای ساکن در ایران را جمع‌آوری می‌کند.

واحد آماری: به هر یک از افراد یا اعضای جامعه آماری یک واحد آماری می‌گویند. اگر نمونه آماری، تمام جامعه آماری نباشد آنگاه برخی از واحدهای آماری عضو نمونه آماری هستند و برخی از واحدهای آماری عضو نمونه آماری نیستند.

داده آماری: اطلاعات یا واقعیت‌هایی از واحدهای آماری که در محاسبات، استنباطها یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند داده آماری نامیده می‌شوند.

تیزشیم

اکون موارد فوق را در مثال زیر بررسی خواهیم کرد.

از یک مدرسه ۵۰۰ نفری، ۵ دانشآموز را به صورت تصادفی انتخاب کرده و طول قد آنها

را اندازه‌گیری می‌کنیم. در این گردآوری، داده آماری و واحد آماری به ترتیب کدام‌اند؟

- ۱ هر یک از دانشآموزانی که طول قد آنها اندازه‌گیری شده‌است - طول قد دانشآموزانی که اندازه‌گیری شده‌اند.

- ۲ طول قد دانشآموزانی که اندازه‌گیری شده‌اند - هر یک از دانشآموزانی که طول قد آنها اندازه‌گیری شده‌است.

- ۳ طول قد دانشآموزانی که اندازه‌گیری شده‌اند - هر یک از دانشآموزان مدرسه

- ۴ طول قد دانشآموزان مدرسه - هر یک از دانشآموزان مدرسه

پاسخ: با توجه به تعاریف گفته شده، هر یک از دانشآموزان مدرسه، حتی آنهایی که طول قد آنها اندازه‌گیری نشده است. یک واحد آماری هستند و اطلاعاتی که مورد بررسی قرار گرفته، یعنی طول قد دانشآموزانی که اندازه‌گیری شده‌اند و آنها را داریم، داده آماری در این مثال می‌باشند.

گزینه ۳ صحیح است.

کدام عبارت صحیح نیست؟

- ۱ نمونه زیرمجموعه جامعه است.

- ۲ نمونه از جامعه کوچک‌تر است.

- ۳ نمونه بیان‌گر خصوصیات جامعه است.

- ۴ می‌توان پیش‌بینی کرد کدام اعضاء در نمونه قرار خواهند گرفت.

پاسخ: نمونه زیرمجموعه جامعه است، پس از آن کوچک‌تر است. پس گزینه‌های یک و دو صحیح هستند.

نمونه خوب باید بیان‌گر ویژگی‌های جامعه باشد. پس گزینه سه نیز صحیح است.

نمونه باید تصادفی انتخاب شود. پس نمی‌توانیم از قبل در مورد آن پیش‌بینی کنیم.

گزینه ۴ صحیح است.

در «بررسی انواع محصولات کشاورزی منطقه شمال کشور» جامعه و نمونه را تعیین کنید.

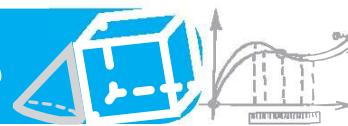
پاسخ: جامعه ← محصولات کشاورزی شمال کشور

نمونه ← محصولات کشاورزی مناطقی از شمال کشور که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند.

روش‌های گردآوری داده‌ها

در علم آمار به کسی که داده‌های آماری را جمع‌آوری می‌کند و کار آمارگیری را انجام می‌دهد «آمارگیر» می‌گویند. «آمارگیری» عمل جمع‌آوری داده‌های آماری است که معمولاً به یکی از روش‌های زیر انجام می‌شود.

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز



(\bar{x}) میانگین

گر x_1, x_2, \dots, x_n تا داده آماری باشند، میانگین آنها را با نماد \bar{X} نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\text{مجموع همة دادهها}}{\text{تعداد دادهها}}$$

10

میانگین اعداد x_1, x_2, \dots, x_n ، برابر ۱۵ شده است. دو عدد ۸ و ۶ را به آنها اضافه می‌کنیم. میانگین جدید چقدر خواهد شد؟

۱۴ / ۴

۱۴

۱۳/۴

15

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\text{مجموع همة دادها}}{\text{تعداد دادها}}$$

پاسخ:

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع همه دادهها}}{\text{تعداد دادهها}} = \bar{x} = 15$$

$$\text{مجموع همه دادهها} = 8 \times 15 = 120$$

حال به مجموع داده‌ها اعداد ۶ و ۸ و به تعداد داده‌ها دو واحد اضافه می‌کنیم:

$$\overline{X}_{جديد} = \frac{120+6+8}{8+2} = \frac{134}{10} = 13.4$$

میانگین جدید در صورت اضافه شدن ۶ و ۸ به دادهها

گزینه ۲ صحیح است.

میانگین موزون (وزن دار)

در مسائلی که هر کدام از داده‌ها یک ضریب (وزن یا تعداد) دارند، میانگین حاصل را میانگین وزن‌دار (موزون) می‌گوییم.

در حالت کلی اگر داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n به ترتیب دارای ضرایب (یا وزن یا دفعات تکرار) w_1, w_2, \dots, w_n باشند، میانگین داده‌ها با در نظر گرفتن ضرایب (یا وزن یا دفعات تکرار) مربوطه را میانگین موزون داده‌ها می‌گویند و آن را با \bar{x}_w نشان می‌دهند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

محاسبه میانگین در جدول فراوانی

منظور از فراوانی یک داده، همان تعداد تکرار داده مورد نظر در میان داده‌هایمان است.
همواره مجموع فراوانی‌ها برابر با تعداد کل داده‌ها است.

فصل پنجم

آزمون اول



۲۰۱. در یک کارخانه در هر ماه ۳۰۰۰ دستگاه یخچال تولید می‌شود. در یک بررسی ۱۰۰ دستگاه از یخچال‌ها را به تصادف انتخاب نموده و متوجه می‌شویم ۲۵ دستگاه از آن‌ها دارای مشکل هستند. اندازه جامعه چند برابر اندازه نمونه است؟

۷۵ ۴۰ ۳۰ ۲۵

۲۰۲. کدام موضوع زیر، متغیر محسوب نمی‌شود؟

- ۱ جرم سبیلهای یک درخت
 ۲ تعداد ساختمان‌های شهر بیرون
- ۳ شرکت کنندگان در المپیاد ریاضی
 ۴ دمای هوا در روزهای متفاوت

۲۰۳. در یک کشتی نشسته‌اید و صفحه نمایشگر برخی داده‌ها را در اختیار شما می‌گذارد. کدام یک از متغیرها از نوع کمی فاصله‌ای است؟

۱ سرعت وزش باد
 ۲ دمای محیط

۳ نام شام آن شب
 ۴ میزان سوخت باقی‌مانده

۲۰۴. شش کیلوگرم چای به بهای هر کیلوگرم ۱۲۰۰۰ تومان را با چند کیلوگرم چای به بهای هر کیلوگرم ۲۷۰۰۰ تومان مخلوط کنیم، تا بهای هر کیلوگرم چای مخلوط ۱۸۰۰۰ تومان شود؟

۹ ۶ ۵ ۴

۲۰۵. در هفت داده آماری x , ۱۱۰, ۹۰, ۱۰۰, ۸۵, ۸۰, ۷۵, ۶۰ اگر میانگین، میانه و مد برابر باشند، مقدار x کدام است؟
(خارج از کشور ۱۹)

۱ ۸۵
 ۲ ۹۰

۳ ۹۵
 ۴ نشدندی

۲۰۶. اگر واریانس قیمت کالاها در سال ۹۶ برابر ۲۵۰۰ باشد و امسال نیز ۲۰ درصد به ارزش کالاها افزوده شود، واریانس قیمت‌های جدید کدام است؟

۱ ۲۸۸۰
 ۲ ۳۰۰۰
 ۳ ۳۶۰۰
 ۴ ۴۰۰۰

۲۰۷. میزان خطای اندازه‌گیری درج شده بر روی محصولات مختلف کارخانجات کدام است؟

۱ ۳ برابر واریانس
 ۲ برابر انحراف معیار

۳ انحراف معیار
 ۴ برابر واریانس

۲۰۸. نمره‌های آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است، دقیق‌تر کدام فرد بیش‌تر است؟
(سراسری، ریاضی ۹۳)

A: ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹

B: ۱۶, ۱۴, ۱۷, ۱۴, ۱۷, ۱۸

۱ یکسان
 ۲ غیر قابل محاسبه

B
 A



آزمون ا - فصل چهارم

ریاضی و آمار
پاسخنامه تشریحی

- ث) درست: ۴ عدد اول یک رقمی
 (۷، ۵، ۳، ۲) داریم.
 ج) نادرست: ۴ عدد مرکب یک رقمی
 (۴، ۶، ۸، ۹) داریم.

تذکر: اعداد مرکب اعدادی هستند که بیش از دو مقسوم علیه دارند یا برابر بیش از دو عدد بخش پذیرند.

گزینه ۳^{۱۶۴}

«گزینه ۱»: شیب خط $y = \frac{y}{x} + 5$ برابر است با:

$$\frac{y}{x} = 2x + 5 \Rightarrow y = 6x + 15 \Rightarrow m = 6$$

مجموع زوایای یک مثلث نمی‌تواند بیش از 180° درجه باشد.

$$F \equiv F$$

«گزینه ۲»: مربع، نوعی مستطیل است.

زیر مجموعه‌های یک مجموعه 3 عضوی، 8 تاست.

$$n = 3 \Rightarrow 2^n = 2^3 = 8$$

$$T \equiv T$$

«گزینه ۳»: عدد 121 مجذور کامل است.

$$\sqrt{121} = 11$$

جذر هر عدد لزوماً با ریشه همان عدد برابر نیست. مثال:

$$\text{جذر } 25 = \pm 5 \quad \text{ریشه } 25 = \pm 5$$

$$T \not\equiv F$$

«گزینه ۴»: وتر مثلث قائم‌الزاویه بزرگ‌تر از ضلع‌های دیگر است.

$$! = 1$$

$$T \equiv T$$

گزینه ۱ جمله «الف» یک جمله خبری است و گزاره نیز هست، که ممکن است درستی یا نادرستی آن را ندانیم، جملات «ب» و «ت» جملات خبری هستند اما با توجه به نظر افراد مختلف در مورد آنها، نمی‌توانیم دقیقاً یکی از ارزش‌های درست یا نادرست را به آنها نسبت دهیم؛ پس گزاره نیستند. جمله «پ» اصلاً خبری نیست، پس گزاره نیست.

- گزینه ۴** هرگاه در جدول ارزش گزاره‌ها یک گزاره کم شود، تعداد ردیف‌های آن نصف می‌شود:

اگر جدول دارای n گزاره باشد:

$$2^n = \text{تعداد ردیف‌ها}$$

اگر جدول دارای $n - 1$ گزاره باشد (یکی کاهش یابد):

$$2^{n-1} = \text{تعداد ردیف‌ها}$$

$$2^{n-1} = 2^n \times 2^{-1} = 2^n \times \frac{1}{2} = \frac{2^n}{2}$$

گزینه ۴^{۱۶۲}

$$1) (2k-1)(2k+1) = \underline{\underline{4k^2}} - 1$$

فرد = فرد - زوج

$$2) (2k+1) - (2k'+1) = 2k+1 - 2k' - 1$$

$$\text{زوج } \underline{\underline{k+k'}} = \underline{\underline{2k''}}$$

$$3) (2k+1) + (2k'+1) = 2k+1 + 2k' + 1$$

$$\text{زوج } \underline{\underline{k+k'+1}} = \underline{\underline{2k''}}$$

یک عدد اول

$$4) 5 + 15 = 20$$

- گزینه ۲** آ) نادرست: تابع خطی یک

تابع درجه یک است و نمی‌تواند منحنی باشد.

ب) درست.

پ) درست: مثال:

$$\Rightarrow x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

تنها دارای دو پاسخ حقیقی است.

ت) درست:

$$\text{عبارت } \frac{3x-6}{4x-8} = \frac{3(x-2)}{4(x-2)} = \frac{3}{4} \text{ یک}$$

عبارت گویا است.

«گزینهٔ ۴»: یکی از راههای نوشتن نقیض گزاره این است که عبارت «چنین نیست که» به ابتدای گزاره اضافه شود. (درست)

۱۶۷. گزینهٔ ۱ چون گزاره‌های ۱۲۱

مضرب ۱۲ نیست» و « $\sqrt{3}$ مثبت است» هر دو گزاره‌های درستی هستند. (عددی بر ۱۲ بخش‌بذیر است که بر اعداد ۳ و ۴ بخش‌بذیر باشد و یا می‌توان با عمل تقسیم درستی عبارت را نشان داد، همچنین می‌دانیم که $\sqrt{3}$ عددی مثبت است (با گویا و گنج اشتباه نگیرید) زیرا از صفر بزرگ‌تر است). پس در بین گزینه‌ها، گزینه‌ای پاسخ صحیح است که دارای ارزش درست باشد، حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

بررسی گزینه‌ها:

«گزینهٔ ۱»: صحیح است، چون مریع هر عدد زوج عددی زوج است (هر عدد زوج را اگر در خودش ضرب کنیم دوباره یک عدد زوج به دست می‌آید). و همچنین اگر مریع عددی زوج باشد آنگاه خود آن عدد هم زوج خواهد بود. (اگر عدد زوجی، جذر کامل داشته باشد آنگاه حاصل جذر آن هم عددی زوج خواهد بود). پس گزینهٔ یک، ترکیب عطفی دو گزارهٔ صحیح است و مانند صورت سؤال گزاره‌ای درست است.

«گزینهٔ ۲»: صحیح نیست؛ زیرا گزارهٔ ۵ عددی فرد است» درست است و گزارهٔ ۴ عددی اول است» نادرست است (۴ مرکب است $= 2 \times 2$) پس ترکیب عطفی آنها گزاره‌ای نادرست است.

«گزینهٔ ۳»: صحیح نیست؛ زیرا ترکیب عطفی دو گزاره است که اولی نادرست (۲ عددی اول است (تنها عدد زوج و اول عدد ۲ است)) و دومی درست است (همه سوره‌های قرآن با بسم الله شروع نمی‌شوند). پس ترکیب عطفی آنها گزاره‌ای نادرست است.

جمله «ث» نیز یک جملهٔ خبری و یک گزاره است اما نادرست می‌باشد. جملهٔ «ج» یک جملهٔ خبری است (کتاب منطق سال دهم مشاوران آموزش صفحه ۸۷ چاپ دوم ۱۳۹۵) و ملاک باهوش بودن افراد سلیقه‌ای نیست و تعریف مشخصی دارد (امروزه می‌توان ضریب هوشی افراد را تعیین کرد) پس قابل صدق و کذب است پس یک گزاره است. (حتمًاً به کتاب منطق مراجعه کنید). پس از بین جملات خبری (الف، ب، ت، ث و ج) جملات «ب» و «ت» گزاره نیستند.

۱۶۸. گزینهٔ ۴ برای نقیض یک گزاره کافی

است « فعل جمله را منفی کنیم» پس کاری به درستی یا نادرستی آن گزاره نداریم، اما چون فعل آن را نفی کردیم، اگر ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش نقیض آن نادرست است و بالعکس.

بررسی گزینه‌ها:

«گزینهٔ ۱»: نقیض گزارهٔ «علی برادر زهرا نیست». گزارهٔ «علی برادر زهرا است». می‌باشد. برای نوشتن نقیض یک گزاره نباید جای موضوع و محمول جمله را تغییر دهیم (نادرست)

«گزینهٔ ۲»: نقیض گزارهٔ گزینهٔ دو نیز درست نوشته نشده است؛ زیرا درست است که فعل جمله را نفی کردیم ولی محمول جمله (غیر اول) را تغییر داده‌ایم. (نادرست)

«گزینهٔ ۳»: چون فعل جمله نفی نشده پس نقیض آن درست نوشته نشده است. توجه داشته باشید که گزارهٔ «عدد ۷ زوج است.» و گزارهٔ «عدد ۷ فرد است.» از لحاظ ارزشی مخالف یکدیگر هستند اما از نظر گزاره‌های منطقی نقیض یکدیگر نیستند، از نظر علم ریاضی نیز عددی می‌تواند زوج نباشد و فرد هم نباشد. مانند عدد ۳/۷۵. (نادرست)

گزینه ۲ مقياس فاصله‌ای: این مقياس

برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معنا است. در این مقياس صفر قراردادی است و به معنای نبود ویژگی نیست. داده‌هایی که مربوط به دمای محیط هستند هم قابل مرتب کردن هستند هم اختلاف بین دماهای مختلف با معنا است و دمای صفر به معنای نبود ویژگی نیست و نسبت مقادیر داده‌ها بی معنا است زیرا اگر دمای گرگان 20° درجه و دمای کاشان 1° درجه باشد، نمی‌توان نسبت $\frac{20}{1}$ را نوشت و گفت که دمای شهر گرگان دو برابر دمای شهر کاشان است، پس متغیر دمای محیط از نوع کمی فاصله‌ای است.

گزینه ۱ برای به‌دست آوردن بهای

هر کیلوگرم چای مخلوط باید از فرمول میانگین استفاده کنیم:

$$= \text{بهای هر کیلوگرم چای مخلوط} \\ (\text{جرم } 2 \times \text{بهای هر کیلو}) + (\text{جرم } 1 \times \text{بهای هر کیلو}) \\ \text{جرم مخلوط}$$

$$\Rightarrow 18000 = \frac{(12000 \times 6) + (27000 \times m)}{6 + m}$$

از طرفین و سطین داریم:

$$\Rightarrow 18000(6 + m) = 72000 + 27000m$$

$$\Rightarrow 108000 + 18000m = 72000 + 27000m$$

$$\Rightarrow 27000m - 18000m = 108000 - 72000$$

$$\Rightarrow 9000m = 36000 \Rightarrow m = 4$$

پس جرم چای 2 باید 4 کیلوگرم باشد.

گزینه ۲ همان‌طور که می‌بینیم از هر

داده تنها یکی وجود دارد پس باید x با یکی از داده‌ها برابر باشد تا مدد وجود داشته باشد ($m = x$) همچنین مدد با میانگین برابر است، بنابراین:

میانگین = مدد

«ب»: خطاب در مرحله (3) اتفاق افتاده است زیرا مجاز نیستیم دو طرف معادله را در عبارتی که غیر صفر بودن آن را نمی‌دانیم ضرب یا تقسیم کنیم.

«ج»: خطاب در مرحله (6) اتفاق افتاده است، زیرا وقتی دو طرف یک معادله را به توان 2 می‌رسانیم این کار باعث تولید جواب‌های اضافه می‌شود، بنابراین ما باید جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی جای‌گذاری کنیم و فقط جواب‌های مورد قبول را انتخاب کنیم. پس $x = -6$ غیر قابل قبول است.

«د»: خطاب در مرحله «۱» و «۴» رخداده است در مرحله «۱» عبارت $3X$ باید در -2 نیز ضرب شود و در مرحله «۴» باید می‌نوشت:

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

آزمون ا - فصل پنجم
گزینه ۲ کل تولید کارخانه، جامعه

آماری محسوب می‌شود که تولید یخچال‌ها در یک ماه را در بر می‌گیرد. نمونه تصادفی نیز به یخچال‌هایی می‌گویند که به روش شناسی انتخاب می‌شوند. بنابراین نمونه‌ها 100 دستگاه هستند. 25 دستگاه دارای مشکل در اندازه نمونه، اثری ندارد.

$$\frac{\text{اندازه جامعه}}{\text{اندازه نمونه}} = \frac{300}{100} = 3$$

گزینه ۳ هر ویژگی از اشخاص یا اشیاء

که قرار است بررسی شود متغیر نام دارد. در «گزینه ۱» جرم سیب‌ها، در «گزینه ۲» تعداد ساختمان‌ها و در «گزینه ۴» دمای هوا، به عنوان ویژگی، مورد بررسی قرار می‌گیرند ولی در «گزینه ۳» هیچ ویژگی ذکر نشده است. به عنوان مثال شرکت کنندگان در المپیاد ریاضی را می‌خواهیم از چه لحظات بررسی کنیم: «سن، مقطع تحصیلی، نوع مدرسه و ...».