مجموعه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی (۲) پایه‌ی یازدهم

(ویژه‌ی دکترها)

مؤلفان:

محمدامین نباخته، محمدمصطفی ابراهیمی

انتشارات خوشخوان

تقدیم به:

مادر عزیزم

محمدامین نباخته

تقدیم به محمدامین نباخته که بیشترین زحمات
تالیف را کشید تا کتاب به دست شما برسد.

محمد مصطفی ابراهیمی

پیشگفتار ناشر

یادم باشد

حرفی نزنم که به کسی بر بخورد

نگاهی نکنم که دل کسی بلرزد

راهی نروم که بی‌راه باشد

خطی ننویسم که آزار دهد کسی را

یادم باشد که روز و روزگار خوش است

همه چیز رو به راه و بر وفق مراد است و خوب!

تنها! ... دل ما، دل نیست.

"مجتبی معظمی"

شاید چند سال دیگه وقتی این مقدمه رو بخونیم خیلی چیزا تغییر کرده باشه.

مثلاً هزینه‌های چاپ کم شده باشه و یا رسانه‌های دیجیتال جای هزینه‌های سنگین چاپ رو گرفته باشن. البته می‌دونم هیچ چی جای کتابای چاپی رو نمی‌گیره. لذت گرفتن کتاب تو دست و یا پهن کردن کتابای درسی و کمک درسی روی زمین، دست گرفتن ماژیک فسفری، خط کشیدن زیر جملات مهم و یا حل کردن مسائل گوشه‌ی کتاب یه چیزی دیگه‌اس. هر چند که الان حتی می‌شه با گوشی جملات فایل متن رو هایلایت کرد یا این‌که کنار یه پاراگراف نوت نوشت.

شده خاطره یا دلنوشته‌هاتونو کنار کتاب بنویسید؟ آره، همون کتاب می‌شه یه دنیا خاطره برای سال‌های آینده.

یه روزی یادمه شعار یکی از همکاران این بود "کم‌رنگ‌ترین مدادها از قوی‌ترین حافظه‌ها ماندگارترن" واقعا همین‌طوره.

بگذریم!

شاید خیلی‌ها تو این دوران با توجه به شرایط اقتصادی کشور روزگار سختی داشته باشن، که مقدمه‌ی این کتاب جای این حرفا نیست. شاید تهیه‌ی یه کتاب با این قیمت برای همه‌ی دانش‌آموزان مقدور نباشه، ولی ما سعی می‌کنیم با تغییر شرایط باز هم در کنار شما باشیم و تا حد امکان قیمت‌ها رو کاهش بدیم تا بتوونیم لذت حل کردن مسائل رو تو روزهایی که علاقه به تحصیل کم شده تو شما زنده نگهداریم.

واقعا تو این دوران باید دست‌به‌دست هم بدیم تا بتوونیم شرایط رو برای همدیگه تغییر بدیم. باید امیدوار باشیم، گام‌های آینده رو محکم‌تر برداریم. به ردپاهایی که روی برفای خاطره‌هامون مونده توجه کنیم. ردپاها روی برف، عمر کوتاهی دارن، و همون قدر خاطره‌ها و تجربیات تو ذهن ما موندگارن. اگر به موقع تصویر اون خاطره و تجربه رو تو ذهنمون حک نکنیم فراموشش می‌کنیم. یادمون باشه با اولین تابش پرتو خورشید جای ردپاها پاک می‌شه.

یادمون باشه که می‌شه از سختی به موفقیت رسید. این روزها که به مرز پنجاه سالگی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شم و به فراز و نشیب‌های گذشته نگاه می‌کنم می‌بینم در تک‌تک نشیب‌ها درسی بوده برای یادگیری و در تمام فرازها امتحانی بوده که با موفقیت از پسش براومدم، و وقتی به آینده نگاه می‌کنم می‌دونم این فراز و نشیب‌ها ادامه خواهند داشت و در پس روزای سخت روزای آروم و در پس هر غم شادی می‌رسه.

لازم می‌دونم قبل از هر چیز از تک‌تک عزیزانی که برای این کتاب زحمت کشیدن تشکر کنم. تشکر ویژه از دو دوست جوون آقایان محمدامین نباخته و محمدمصطفی ابراهیمی که کتاب پیش رو به رشته‌ی تحریر درآوردن و در تالیف کتاب سعی کردن تا گامی کوچک جهت رفع نیازهای شما دوست تجربی بردارن.

کتاب حاضر برای دانش‌آموز علاقه‌مند به ریاضی رشته‌ی تجربی تألیف شده، و سعی شده تا با آخرین ویرایش کتاب درسی منطبق باشه. این کتاب با نگاه ویژه به دانش‌آموزان ممتاز تألیف شده، پس از دوستان عزیز خواهشمندم این موضوع را در معرفی کتاب به دانش‌آموزان در نظر بگیرن.

امیدوارم در این سال‌های چیزی نگفته باشم که به کسی برخورده باشه و چیزی ننوشته باشم که کسی رو آزرده باشه، که این موضوع کار خیلی سختیه و از عهده‌ی هر کسی برنمیاد، پس لازم می‌دونم از شما دوست عزیز به خاطر نواقص و کمبودها در تمامی این موارد طلب عفو داشته باشم.

رسول حاجی‌زاده
مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفین

به نام خدا

خدا را شاکریم که فرصتی برای تألیف این کتاب به ما داد. کتاب حاضر، شامل بخش‌های زیر است:

۱- درس‌نامه

درس‌نامه‌های کتاب مختصر و مفیدند و کاملاً رویکرد تستی دارند. مختصر و مفید به این معنی که خواننده نباید تصور کند با مطالعه‌ی آن همه‌ی مطالب را یاد می‌گیرد در حالی که کاملاً با موضوعی ناآشناست. درس‌نامه‌ها در واقع مرور و طبقه‌بندی مطالبی هستند که دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم سرکلاس درس از دبیر خود کم و بیش آموخته‌اند. گفتیم رویکرد درس‌نامه تستی است. این به معنی نکته‌گویی صرف نیست. در خیلی از موارد، تا جایی که حجم کتاب اجازه داده است، دلایل، نکات و یا اثبات آن‌ها را گفته‌ایم و غرق در منجلاب نکات کنکوری نشده‌ایم.

۲- تست‌ها

تست‌ها مهم‌ترین بخش کتاب هستند و چند ویژگی مهم دارند:

- بیش از نیمی از تست‌ها تألیفی هستند.
- تست‌های کنکورهای سراسری سال‌های اخیر پوشش داده شده‌اند.
- تست‌ها روند علمی دارند و تا جای ممکن سعی شده خواننده‌ی کتاب با حل یک تست، راه‌حلی برای تست‌های بعدی هم بیابد.
- تقریباً تست‌ها به شکل ساده به سخت چیده شده‌اند و تست‌های اولیه مفاهیم اولیه و بنیادی هر موضوع هستند. بنابراین، اگر در حل تست‌های اولیه هر موضوع (یا زیرموضوع) مشکل دارید حتماً مطالب آن موضوع را خوب یاد نگرفته‌اید و نیاز است جزوه‌ی درس یا درس‌نامه‌ی کتاب را مجدداً عمیق‌تر مطالعه کنید.
- چون بخشی از رسالت خود را پرورش استعدادهای برتر و ورزش مغز می‌دانیم تست‌های سطح بالاتر از کتاب و کنکور هم آورده‌ایم و آن‌ها را با علامت (گوشی پزشکی) مشخص کرده‌ایم که حل آن‌ها برای همه‌ی مخاطبان توصیه نمی‌شود.
- پاسخ‌های تشریحی را سعی کردیم یک دست بنویسیم و از کلی‌گویی پرهیز کرده‌ایم.
- در بعضی فصول (تابع، مثلثات و ...) تعدادی تست برای مرور مطالب ریاضی دهم آورده‌ایم.

۳- آزمون‌ها

در پایان هر فصل ۳ آزمون ۱۰ تایی تستی قرار داده‌ایم که خود را محک بزنید. این آزمون‌ها استاندارد هستند. یعنی توزیع سوالات ساده، متوسط و سخت در بین آن‌ها منطقی است.

از آقایان علی ذوالفقاری و کوشا مولوی که ما را در ویرایش کتاب همراهی کردند کمال تشکر را داریم.

در پایان از حمایت‌های همه جانبه‌ی آقای حاجی‌زاده، مدیریت نشارات تشکر ویژه داریم. همچنین، از آقای محمد وزیرزاده که زحمات زیادی را برای به نتیجه رسیدن کتاب متحمل شدند تشکر می‌کنیم.

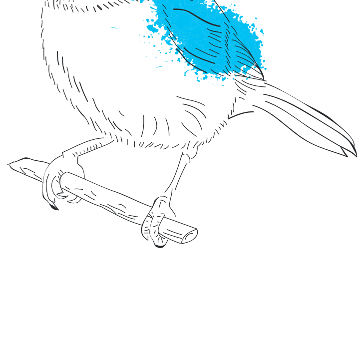
زمستان ۱۳۹۷

محمدامین نباخته، محمدمصطفی ابراهیمی

فهرست مطالب

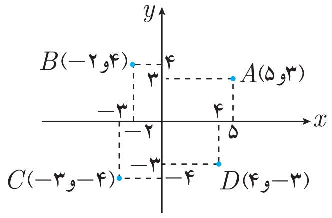
فصل اول

هندسه‌ی تحلیلی و جبر



هندسه تحلیلی

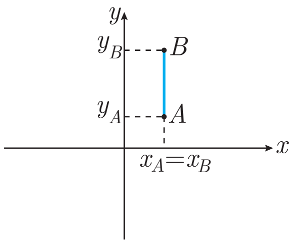
می‌دانیم هر نقطه در دستگاه مختصات با یک زوج مرتب نمایش داده می‌شود که مؤلفه‌ی اول آن طول آن نقطه و مؤلفه‌ی دوم آن عرض آن نقطه است. محور افقی در دستگاه مختصات محور طول‌ها (xها) و محور قائم در دستگاه مختصات محور عرض‌ها (y ها) نامیده می‌شود. نقاط روبه‌رو را در دستگاه مختصات ببینید:



فاصله‌ی دو نقطه از هم

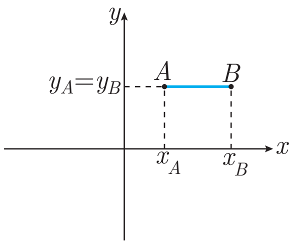
اگر دو نقطه هم‌طول باشند، فاصله‌ی آن‌ها از هم قدرمطلق تفاضل عرض آن‌هاست:

$$AB = |y_B - y_A|$$



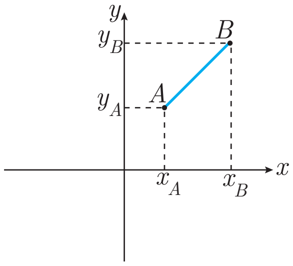
اگر دو نقطه هم‌عرض باشند، فاصله‌ی آن‌ها از هم قدرمطلق تفاضل طول آن‌هاست:

$$AB = |x_B - x_A|$$



فاصله‌ی دو نقطه در حالت کلی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$



تست ۱. مثلث ABC با رئوس $A(۱,۴)$ ، $B(-۱,۳)$ و $C(۰,۶)$ چگونه است؟

۱) متساوی‌الاضلاع　　۲) متساوی‌الساقین　　۳) قائم‌الزاویه　　۴) متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴**

فاصله‌ی هر دو نقطه از هم طول اضلاع مثلث است:

$$AB = \sqrt{((-۱)-۱)^۲ + (۳-۴)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

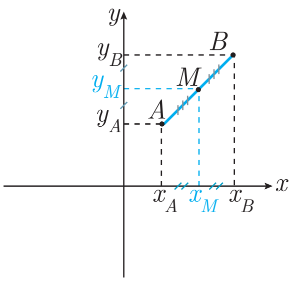
$$AC = \sqrt{(۰-۱)^۲ + (۶-۴)^۲} = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵}$$

$$BC = \sqrt{(۰-(-۱))^۲ + (۶-۳)^۲} = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰}$$

دو ضلع از مثلث با هم برابرند پس مثلث متساوی‌الساقین است. ضمناً اضلاع مثلث در رابطه‌ی فیثاغورس نیز صدق می‌کنند، پس مثلث قائم‌الزاویه هم هست ($\sqrt{۵}^۲ + \sqrt{۵}^۲ = \sqrt{۱۰}^۲$)، بنابراین مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

نقطه‌ی وسط دو نقطه

نقطه‌ی میانی دو نقطه، همان وسط پاره‌خط واصل دو نقطه است. مختصات آن نقطه را از مختصات دو سر پاره‌خط می‌توان به‌دست آورد:



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{۲} \end{cases}$$

تست ۲. در مثلث ABC با رئوس $A(۲,۷)$، $B(۳,۵)$ و $C(-۵,۱)$، طول میانه‌ی AM چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: ۱

نقطه‌ی M وسط ضلع BC است، پس از مختصات B و C به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{۳+(-۵)}{۲} = -۱ \\ y_M &= \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۵+۱}{۲} = ۳ \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(-۱,۳)$$

حال طول پاره‌خط AM را با مختصات A و M به‌دست می‌آوریم:

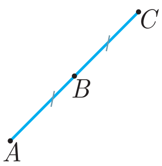
$$\left.\begin{aligned} A(۲,۷) \\ M(-۱,۳) \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM = \sqrt{((-۱)-۲)^۲ + (۳-۷)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

تست ۳. اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A(\alpha,۲)$ نسبت به نقطه‌ی $B(۳\beta,\beta^۲+۲)$، نقطه‌ی $C(۴,\alpha^۲)$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی $D(\alpha,\beta)$ از مبدأ چقدر است؟ $(\alpha,\beta > ۰)$

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۴۰}$

پاسخ: ۱

قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B، نقطه‌ی C است، پس نقطه‌ی B، وسط پاره‌خط AC است. بنابراین مختصات آن از مختصات نقاط A و C به‌دست می‌آید:



$$x_B = \frac{\alpha+۴}{۲} = ۳\beta \Rightarrow \alpha = ۶\beta - ۴$$

$$y_B = \frac{۲+\alpha^۲}{۲} = \beta^۲+۲ \Rightarrow \alpha^۲+۲ = ۲\beta^۲+۴$$

$$\Rightarrow (۶\beta-۴)^۲+۲ = ۲\beta^۲+۴ \Rightarrow ۳۶\beta^۲+۱۶-۴۸\beta+۲ = ۲\beta^۲+۴$$

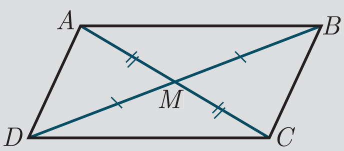
$$\Rightarrow ۳۴\beta^۲-۴۸\beta+۱۴=۰ \Rightarrow ۱۷\beta^۲-۲۴\beta+۷=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=۱ \Rightarrow \alpha=۲ \\ \beta=\dfrac{۷}{۱۷} \Rightarrow \alpha=\dfrac{-۲۶}{۱۷} \end{cases}$$

با توجه به این‌که در صورت سؤال ذکر شده، $\alpha,\beta > ۰$، پس $\alpha=۲$ و $\beta=۱$ صحیح است. فاصله‌ی نقطه‌ی $D(۲,۱)$ از مبدأ برابر است با:

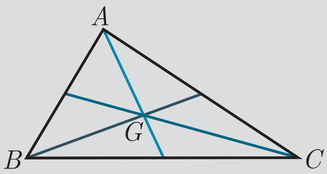
$$OD = \sqrt{(۲-۰)^۲+(۱-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

نکته می‌دانیم اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یک‌دیگرند. پس مختصات آن را با استفاده از هر دو نقطه‌ی C و A و همچنین D و B می‌توان به‌دست آورد:



$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A+x_C}{۲} = \frac{x_B+x_D}{۲} \\ y_M &= \frac{y_A+y_C}{۲} = \frac{y_B+y_D}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_C = x_B+x_D \\ y_A+y_C = y_B+y_D \end{cases}$$

نکته محل برخورد میانه‌های مثلث را مرکز ثقل آن می‌نامند. مختصات مرکز ثقل مثلث (G) با استـفاده از رئوس مثلث ABC به شـکل زیر به دست می‌آید:



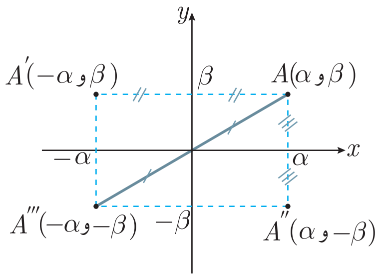
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{۳} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{۳} \end{cases}$$

قرینه‌ی یک نقطه نسبت به محورها و مبدأ مختصات

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(\alpha , \beta)$ نسبت به محور x ها نقطه‌ی $A''(\alpha , -\beta)$ است.

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(\alpha , \beta)$ نسبت به محور y ها نقطه‌ی $A'(-\alpha , \beta)$ است.

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(\alpha , \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ی $A'''(-\alpha , -\beta)$ است.



تست ٤. اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۲\alpha + ۱, \alpha - ۲)$ نسبت به محور x ها نقطه‌ی $B(۶ - \beta , \beta)$ باشد، فاصله‌ی این دو نقطه از هم چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم طول نقاط A و B یکسان و عرض آن‌ها قرینه هم هستند، پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۲\alpha + ۱ = ۶ - \beta \Rightarrow ۲\alpha + \beta = ۵ \\ \alpha - ۲ = -\beta \Rightarrow \alpha + \beta = ۲ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۳ \\ \beta = -۱ \end{cases}$$

می‌دانیم فاصله‌ی دو نقطه که طول یکسان دارند، اختلاف عرض آن‌هاست:

$$AB = |\alpha - ۲ - \beta| = |۳ - ۲ - (-۱)| = ۲$$

معادله‌ی خط

معادله‌ی هر خط به شکل $y = ax + b$ است که در آن a شیب و b عرض از مبدأ آن خط است.

می‌دانیم a (شیب) برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد. هم‌چنین b (عرض از مبدأ) محل برخورد خط با محور y ها است.

معادله‌ی خط را می‌توان با داشتن شیب و عرض از مبدأ به سادگی نوشت.

برای نوشتن معادله‌ی خط **با شیب و مختصات یک نقطه روی آن** به شکل زیر عمل می‌کنیم.

اگر شیب خط، m باشد و از نقطه‌ی $A(x_A , y_A)$ بگذرد، معادله‌ی آن به شکل روبه‌رو است:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

برای نوشتن معادله‌ی خط **با داشتن مختصات دو نقطه روی آن** ابتدا از رابطه‌ی زیر شیب خط را محاسبه می‌کنیم و سپس با شیب و مختصات یکی از نقاط به شکل بالا معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$A(x_A , y_A) , B(x_B , y_B) \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

تست ۵. خطی که از دو نقطه‌ی $A(۱,۴)$ و $B(۳,۲)$ می‌گذرد، محور x ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا شیب خط را به‌دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۲ - ۴}{۳ - ۱} = \frac{-۲}{۲} = -۱$$

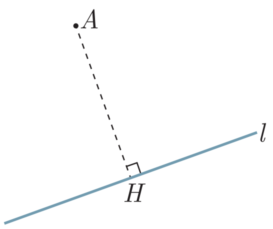
حال معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۴ = -۱\,(x - ۱) \Rightarrow y = -x + ۵$$

حال برای پیدا کردن نقطه‌ی تقاطع با محور x ها، مقدار y را برابر صفر می‌گذاریم:

$$y = ۰ \Rightarrow -x + ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

فاصله‌ی یک نقطه از یک خط



فاصله‌ی یک نقطه از یک خط، در واقع کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقاط خط از نقطه‌ی مذکور است. برای پیدا کردن این فاصله، طول پاره‌خط عمود بر خط از نقطه‌ی موردنظر را می‌یابیم:

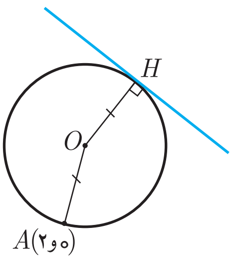
اگر معادله‌ی خط به شکل $ax+by+c=0$ و مختصات نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ باشد، فاصله‌ی AH برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تست ۶. دایره‌ای که مرکز آن روی خط $y=x$ قرار دارد، از نقطه‌ی $(2,0)$ می‌گذرد و بر خط $x+y=4$ مماس است. قطر این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



می‌دانیم اگر خطی بر دایره مماس باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از آن خط در واقع شعاع دایره است. بنابراین فاصله‌ی مرکز دایره از خط داده شده $(x+y=4)$ برابر با فاصله‌ی مرکز دایره از نقطه‌ی $(2,0)$ است.

(چون فاصله‌ی مرکز دایره از هر نقطه روی محیط دایره، شعاع دایره است.)

چون مرکز دایره روی خط $y=x$ است، مختصات آن را به شکل $O(\alpha,\alpha)$ در نظر می‌گیریم:

$$OA=\sqrt{(\alpha-2)^2+(\alpha-0)^2}$$
$$OH=\frac{|\alpha+\alpha-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(a-2)^2+\alpha^2}=\frac{|2\alpha-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,|\alpha-2|$$

معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\alpha-2)^2+\alpha^2=2(\alpha^2-4\alpha+4)\Rightarrow 2\alpha^2-4\alpha+4=2\alpha^2-8\alpha+8\Rightarrow \alpha=1$$

پس با قرار دادن $\alpha=1$ در یکی از روابط OH یا OA داریم:

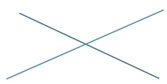
$$R=OH=OA=\sqrt{2}$$

پس قطر دایره $2\sqrt{2}$ است.

وضعیت نسبی دو خط

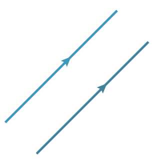
دو خط ممکن است با هم متقاطع، موازی و یا منطبق باشند، اگر معادله‌ی دو خط را به شکل $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ در نظر بگیریم، شرط هر یک از ۳ حالت مذکور به شکل زیر است:

الف) متقاطع در یک نقطه:



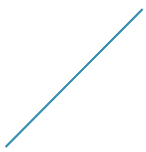
$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

ب) موازی:



$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

ج) منطبق:



$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

تست ۷. **اگر دو خط $۲x-a^{۲}y=a-۱$ و $ax+۴y=۳$ تقاطعی نداشته باشند، a کدام است؟**

۱) -۲ ۲) ±۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴**

دو خط تقاطع ندارند اگر با هم موازی باشند. شرط توازی دو خط را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\frac{a}{۲}=\frac{۴}{-a^{۲}}}\neq\frac{۳}{a-۱}$$

$$\downarrow$$

$$-a^{۳}=۸\Rightarrow a^{۳}=-۸\Rightarrow a=-۲$$

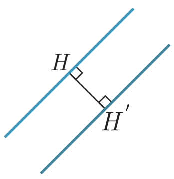
اگر $a=-۲$ باشد، نامساوی تبدیل به مساوی می‌شود:

$$\frac{۴}{-a^{۲}}=-۱ \text{ و } \frac{۳}{a-۱}=-۱$$

پس امکان ندارد این دو خط موازی باشند.

فاصله‌ی دو خط موازی

معادله‌ی دو خط موازی را می‌توان به شکل $\begin{cases}ax+by+c=۰\\ax+by+c'=۰\end{cases}$ نوشت. در این صورت فاصله‌ی دو خط از هم طول پاره‌خطی است که بر هر دو خط عمود است:



$$HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

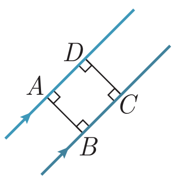
تذکر دقت کنید که در معادله‌ی دو خط ضرایب x و ضرایب y برابرند.

تست ۸. **دو رأس مجاور یک مربع روی دو خط $x-۲y+۳=۰$ و $۲x-۴y+۷=۰$ قرار دارند. مساحت کوچک‌ترین مربع با این ویژگی کدام است؟**

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۲

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

کوچک‌ترین مربع (کوچک‌ترین مساحت) مربوط به کوچک‌ترین ضلع است. ضلع مربع کوچک‌ترین مقدار ممکن می‌شود، اگر بر دو ضلع موازی که در صورت سؤال آمده است عمود باشد، یعنی طول ضلع مربع فاصله بین دو خط موازی است.



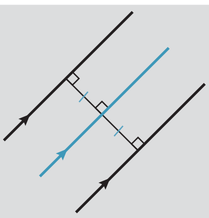
چون ضرایب x و y در معادله‌ها یکسان نیستند، معادله‌ی اول را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}x-۲y+۳=۰\\۲x-۴y+۷=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x-۴y+۶=۰\\۲x-۴y+۷=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله‌ی دو خط}=\frac{|۶-۷|}{\sqrt{۲^{۲}+(-۴)^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۴+۱۶}}=\frac{۱}{\sqrt{۲۰}}$$

پس طول ضلع مربع $\frac{۱}{\sqrt{۲۰}}$ است و مساحت آن $(\frac{۱}{\sqrt{۲۰}})^{۲}=\frac{۱}{۲۰}$ است.

نکته معادله‌ی خطی که با دو خط $\begin{cases}ax+by+c=۰\\ax+by+c'=۰\end{cases}$ موازی است، و از آن‌ها به یک فاصله قرار دارد، به شکل $ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$ است.



تذکر

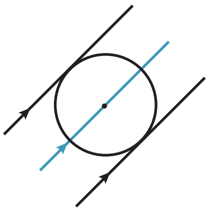
دقت کنید که در معادله‌ی خط‌ها، ضرایب x و ضرایب y با هم برابرند.

تست ۹. دایره‌ای بر هر دو خط $۳x-۲y+۵=۰$ و $۲y-۳x+۱۱=۰$ مماس است. مرکز این دایره روی کدام خط قرار دارد؟

۱) $۳x-۲y=۳$ ۲) $۳x-۲y=-۳$ ۳) $۲x-۳y=۳$ ۴) $۲x-۳y=-۳$

پاسخ: ۱

دو خط داده شده موازی هستند. بنابراین مرکز دایره روی خط موازی با آن‌ها و با فاصله‌ی برابر از آن‌ها قرار دارد. ضرایب x و ضرایب y را یکی می‌کنیم:

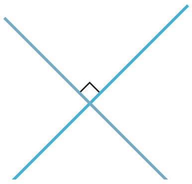


$$\begin{cases} ۳x-۲y+۵=۰ \\ ۲y-۳x+۱۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۲y+۵=۰ \\ ۳x-۲y-۱۱=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{خط موازی با آن‌ها}: ۳x-۲y+\frac{۵-۱۱}{۲}=۰ \Rightarrow ۳x-۲y-۳=۰$$

خطوط متعامد

یکی از حالات تقاطع دو خط، آن است که دو خط بر هم عمود باشند، در این صورت شیب‌ها آن‌ها، معکوس و قرینه‌ی هم‌دیگر هستند و یا حاصل‌ضرب شیب آن‌ها ۱- است. یعنی اگر دو خط با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، داریم: $mm'=-۱$



تست ۱۰. در مثلث ABC با رئوس $A(-۱,۵)$، $B(۲,۳)$ و $C(۴,۲)$، امتداد ارتفاع AH از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۲,۱۳)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(۱,۹)$ ۴) $(-۲,۳)$

پاسخ: ۳

می‌دانیم ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. پس با استفاده از شیب ضلع BC می‌توانیم شیب ارتفاع AH را محاسبه می‌کنیم:

$$B(۲,۳),C(۴,۲) \Rightarrow m=\frac{۳-۲}{۲-۴}=\frac{۱}{-۲}$$

چون شیب BC برابر $-\frac{۱}{۲}$ است، پس شیب ارتفاع AH، ۲ است. هم‌چنین ارتفاع AH از رأس A می‌گذرد. پس معادله‌ی آن به شکل زیر است:

$$y-۵=۲(x+۱) \Rightarrow y=۲x+۷$$

خط مذکور از نقطه‌ی $(۱,۹)$ می‌گذرد.

تست ۱۱. مساحت مثلث ABC با رئوس $A(۱,۴)$، $B(۲,۳)$ و $C(-۱,۱)$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: ۲

برای محاسبه‌ی مساحت مثلث باید ارتفاع AH و قاعده‌ی BC را محاسبه کنیم. هم‌چنین برای محاسبه‌ی ارتفاع AH باید فاصله‌ی رأس A را از خط BC بیابیم:

$$B(۲,۳),C(-۱,۱) \Rightarrow m=\frac{۳-۱}{۲-(-۱)}=\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{معادله خط } BC} y-۳=\frac{۲}{۳}(x-۲)$$

$$\Rightarrow ۳y-۹=۲x-۴ \Rightarrow ۳y-۲x-۵=۰$$

فاصله‌ی رأس A از خط BC:

$$A(۱,۴)\ ,\ BC: ۳y-۲x-۵=۰ \Rightarrow AH=\frac{|۳(۴)-۲(۱)-۵|}{\sqrt{۳^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$$

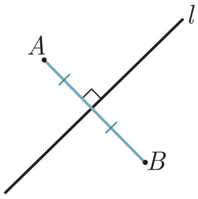
هم‌چنین طول ضلع BC را محاسبه می‌کنیم:

$$B(۲,۳),C(-۱,۱)\rightarrow BC=\sqrt{(۲-(-۱))^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۱۳}$$

پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}\times\sqrt{۱۳}=\frac{۵}{۲}$$

قرینه‌ی نقطه نسبت به خط



قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط l، نقطه‌ی B است، اگر خط AB عمود بر l باشد و فاصله‌ی نقاط A و B از خط l یکسان باشد.

تست ۱۲. **قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱,۳)$ نسبت به خط $x+y=۶$ نقطه‌ی $B(\alpha,\beta)$ است. در این صورت $۲\alpha+\beta$ کدام است؟**

۱) ۱۳　　۲) ۱۱　　۳) ۷　　۴) ۹

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

باید خط AB عمود بر l باشد، پس شیب آن‌ها معکوس و قرینه هم هستند. شیب خط داده شده **۱-** است.

شیب خط AB برابر است با:

$$A(۱,۳),B(\alpha,\beta)\Rightarrow m=\frac{\beta-۳}{\alpha-۱}$$

شیب خط AB برابر ۱ است، پس:

$$\frac{\beta-۳}{\alpha-۱}=۱\Rightarrow\beta-۳=\alpha-۱\Rightarrow\beta-\alpha=۲$$

هم‌چنین، فاصله‌ی نقاط A و B از خط داده شده برابر است:

$$\begin{matrix} x+y-۶=۰ \\ A(۱,۳),B(\alpha,\beta)\end{matrix}\Rightarrow\frac{|۱+۳-۶|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{|\alpha+\beta-۶|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}\Rightarrow|\alpha+\beta-۶|=۲$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta-۶=\pm۲\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=۸\\ \alpha+\beta=۴\end{cases}$$

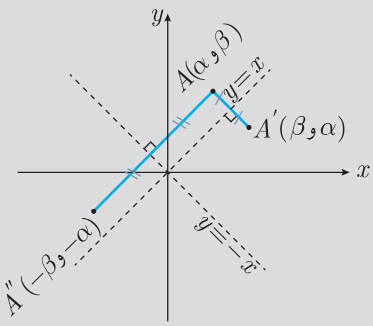
با حل دو معادله دو مجهول داریم:

$$\begin{cases}\beta-\alpha=۲\\ \alpha+\beta=۸\end{cases}\Rightarrow\alpha=۳,\beta=۵ \qquad \begin{cases}\beta-\alpha=۲\\ \alpha+\beta=۴\end{cases}\Rightarrow\alpha=۱\ ,\ \beta=۳$$

پس نقطه‌ی $B(۱,۳)$ یا نقطه‌ی $B(۳,۵)$ است. دقت کنید که مختصات $B(۱,۳)$ صحیح نیست، چون قرینه‌ی یک نقطه نسبت به خط همان نقطه نمی‌تواند باشد، مگر آن‌که آن نقطه روی خط باشد، پس $B(۳,۵)$ صحیح است.

$$۲\alpha+\beta=۶+۵=۱۱$$

نکته در حالت خاص قرینه‌ی نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) نقطه‌ی $A'(\beta,\alpha)$ است. هم‌چنین، قرینه‌ی نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ نسبت به خط $y=-x$ (نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم) نقطه‌ی $A''(-\beta,-\alpha)$ است.



تست ۱۳. **قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۲,-۳)$ نسبت به محور y ها نقطه‌ی A' و قرینه‌ی A' نسبت به خط $y=-x$ نقطه‌ی A'' است. فاصله‌ی A' از خط $۴x-۳y+۴=۰$ کدام است؟**

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) ۱/۵   ۴) ۲/۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

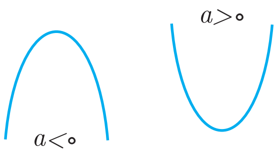
مختصات نقطه‌ی A' به شکل $A'(-۲,-۳)$ است و مختصات نقطه‌ی A'' به شکل $A''(۳,۲)$ است. فاصله‌ی A'' از خط مذکور برابر است با:

$$\begin{array}{l} A''(۳,۲) \\ ۴x-۳y+۴=۰ \end{array} \Rightarrow \frac{|۴(۳)-۳(۲)+۴|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

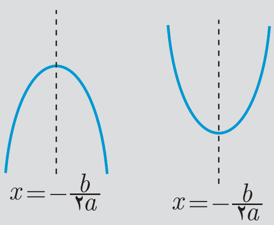
تابع و معادله‌ی درجه دوم

تابع درجه‌ی دوم در واقع همان چندجمله‌ای درجه‌ی دوم یا سهمی است. ضابطه‌ی آن به شکل $y=ax^۲+bx+c$ است. علامت a تعیین کننده‌ی تقعر (گودی) تابع است. اگر a مثبت باشد، دهانه‌ی آن رو به بالا و اگر a منفی باشد دهانه‌ی آن رو به پایین است. نمودار تابع درجه‌ی دوم برای a مثبت و منفی به شکل زیر است:

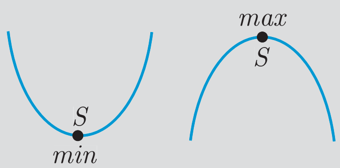
$$y=ax^۲+bx+c \quad (a\neq ۰)$$



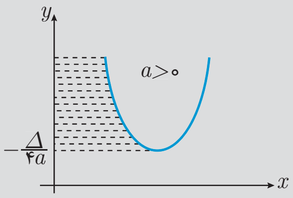
نکته تابع درجه دوم در هر دو حالت تقعر رو به بالا و پایین دارای یک محور تقارن است. معادله‌ی محور تقارن تابع درجه دوم خط $x=\frac{-b}{۲a}$ است.

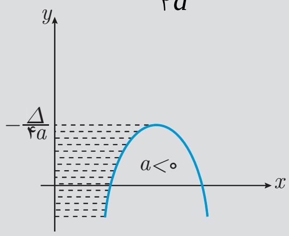


نکته تابع درجه دوم در حالت $a>۰$ دارای یک نقطه‌ی مینیمم و در حالت $a<۰$ دارای یک نقطه‌ی ماکزیمم است. مختصات این نقطه در هر دو حالت $S(-\frac{b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ است که در آن $\Delta=b^۲-۴ac$.



نکته همان‌طور که در شکل مشخص است، تابع درجه‌ی دوم در $a>۰$ دارای کم‌ترین مقدار است و این مقدار $-\frac{\Delta}{۴a}$ است، و هم‌چنین در حالت $a<۰$ تابع دارای بیش‌ترین مقدار است و این مقدار $-\frac{\Delta}{۴a}$ است. پس در حالت $a>۰$، برد تابع درجه‌ی دوم به شکل $[-\frac{\Delta}{۴a},+\infty)$ و در حالت $a<۰$ برد تابع درجه دوم به شکل $(-\infty,-\frac{\Delta}{۴a}]$ است.





تست ۱۴. اگر نقطه‌ی مینیمم تابع $y=mx^۲+(m-۱)x-۱$ در ناحیه‌ی چهارم باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m<۱$

۲) $m>۰$

۳) $۰<m<۱$

۴) $-۱<m<۱$

پاسخ: ۳

با توجه به این‌که در صورت سؤال کلمه‌ی مینیمم ذکر شده، پس تقعر تابع رو به بالا است و $m>۰$ است.

حال با توجه به این‌که مینیمم در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد باید طول آن مثبت و عرض آن منفی باشد:

$$-\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow -\frac{m-۱}{۲m}>۰\xrightarrow{m>۰} m-۱<۰\Rightarrow m<۱$$

$$-\frac{\Delta}{۴a}<۰\Rightarrow -\frac{\Delta}{۴m}<۰\xrightarrow{m>۰}\Delta>۰\Rightarrow (m-۱)^۲+۴m>۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۲m+۱+۴m>۰\Rightarrow m^۲+۲m+۱>۰\Rightarrow (m+۱)^۲>۰\Rightarrow m\neq -۱$$

اشتراک شرایط $m<۱$، $m>۰$ و $m\neq -۱$ مجموعه‌ی $۰<m<۱$ است.

تست ۱۵. برد تابع $y=\sqrt{-x^۲+۲x+۳}$ کدام مجموعه است؟

۱) $(۰,۲]$

۲) $[۲,+\infty)$

۳) $(-\infty,۲]$

۴) $[۰,۲]$

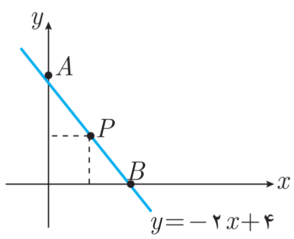
پاسخ: ۴

چون در تابع $(-x^۲+۲x+۳)$ ضریب $x^۲$، عددی منفی است، پس این تابع دارای حداکثر است و حداکثر آن برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است:

$$-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۴-۴(-۱)(۳)}{۴(-۱)}=۴$$

پس حداکثر مقدار عبارت زیر رادیکال، ۴ است، در نتیجه بیش‌ترین مقدار تابع $\sqrt{۴}=۲$ است. ضمناً می‌دانیم $y=\sqrt{-x^۲+۲x+۳}\geq ۰$ است، پس برد تابع $[۰,۲]$ است.

تست ۱۶. نقطه‌ی P روی خط $y=-۲x+۴$ و بین نقاط A و B حرکت می‌کند. بزرگ‌ترین مستطیلی که دو ضلع آن روی محورهای مختصات و یکی از رئوس آن نقطه‌ی P باشد، چه مساحتی دارد؟



۱) ۴

۲) ۲

۳) ۳

۴) $\frac{۵}{۲}$

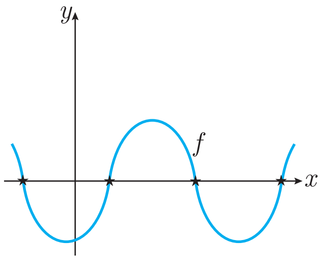
پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴

اگر طول نقطه‌ی P را x در نظر بگیریم، عرض آن $-۲x+۴$ است، چون نقطه‌ی P روی خط $y=-۲x+۴$ است. پس مساحت مستطیل که حاصل‌ضرب طول و عرض نقطه‌ی P است، برابر است با:

$$S=x(-۲x+۴)=-۲x^۲+۴x$$

برای پیدا کردن حداکثر مساحت، کافیست حداکثر مقدار تابع درجه‌ی دوم $-۲x^۲+۴x$ را بیابیم که برابر با $-\frac{\Delta}{۴a}$ است: $-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱۶-۰}{۴(-۲)}=۲$

ریشه‌های تابع درجه‌ی دوم

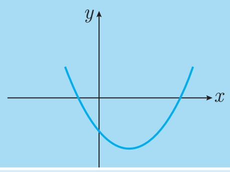
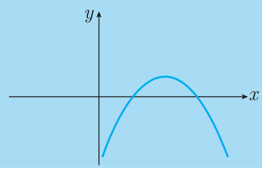
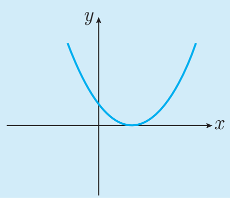
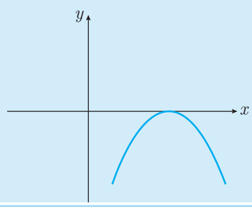
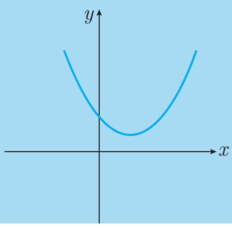
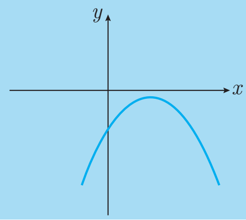


می‌دانیم ریشه‌های یک تابع نقاط تقاطع آن با محور x هاست. یعنی نقاطی از تابع که عرض آن‌ها صفر است.
پس برای پیدا کردن ریشه‌ی هر تابع کافیست ضابطه‌ی آن را با صفر برابر قرار دهیم.

وقتی ضابطه‌ی یک تابع درجه‌ی دوم را با صفر برابر قرار می‌دهیم یک **معادله‌ی درجه دوم** تشکیل می‌شود. معادله‌ی درجه دوم به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ است. می‌دانیم معادله‌ی درجه‌ی دوم، می‌تواند صفر، ۱ یا ۲ ریشه داشته باشد که تعداد جواب‌های آن به علامت Δ بستگی دارد. خلاصه‌ی تعداد جواب‌ها و مقدار آن‌ها بر اساس علامت Δ در جدول زیر آمده است:

علامت Δ	تعداد جواب‌ها	جواب‌ها
+	۲	$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a},\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$
صفر	۱	$-\frac{b}{۲a}$
−	صفر	«جواب حقیقی ندارد»

نمودار تابع درجه‌ی دوم با توجه به علامت Δ (تعداد ریشه‌ها) و علامت a (جهت تقعر) در جدول زیر خلاصه شده است:

a / Δ	+	−
+		
صفر		
−		

نکته همان‌طور که در نمودارها مشخص است، در حالت $\Delta = ۰$ تابع درجه‌ی دوم بر محور x ها مماس است. در این صورت می‌گوییم تابع درجه‌ی دوم دارای ریشه‌ی مضاعف $(x = \frac{-b}{۲a})$ است.

تست ۱۷. **به ازای چند مقدار صحیح m، معادله‌ی $۲x^۲ + mx + m = ۰$ جواب حقیقی ندارد؟**

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) بی‌شمار

پاسخ: ۱

می‌دانیم معادله‌ی درجه دوم جواب ندارد اگر $\Delta < ۰$ باشد:

$$\Delta = m^۲ - ۴(۲)(m) < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸m < ۰ \Rightarrow m(m-۸) < ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۸$$

مقادیر صحیح m در این بازه $۱, ۲, ۳, ..., ۷$ هستند.

تست ۱۸. **یک عدد حقیقی از دو برابر معکوسش ۱ واحد کوچک‌تر است. مجموع مقادیر ممکن برای این عدد کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: ۲

عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم:

$$x = \frac{۲}{x} - ۱ \Rightarrow x^۲ = ۲ - x \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۴(۱)(-۲) = ۹$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۹}}{۲(۱)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-۱+۳}{۲} = ۱ \\ x = \frac{-۱-۳}{۲} = -۲ \end{cases}$$

حاصل‌جمع مقادیر به‌دست آمده $۱ + (-۲) = -۱$ است.

جمع، ضرب و تفاضل ریشه‌ها

اگر معادله‌ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای دو ریشه باشد، جمع، ضرب و تفاضل ریشه‌ها را بدون محاسبه تک‌تک آن‌ها می‌توانیم از ضرایب معادله به‌دست آوریم. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های این معادله باشند:

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \qquad x_۱x_۲ = \frac{c}{a} \qquad |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

تذکر مجموع دو ریشه را با S و ضرب آن‌ها را با P نشان می‌دهیم.

تست ۱۹. **اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۲x + k = ۰$ باشند و داشته باشیم $۲x_۱ + x_۲ = ۵$، k کدام است؟**

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: ۲

می‌دانیم جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است:

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۲)}{۱} = ۲$$

حال با حل دو معادله دو مجهول ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۲ \\ ۲x_۱ + x_۲ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۳ \\ x_۲ = -۱ \end{cases}$$

حال حاصل‌ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$x_۱x_۲ = \frac{c}{a} \Rightarrow -۳ = \frac{k}{۱} \Rightarrow k = -۳$$

نکته روابط بر حســب ریشــه‌های یک معادله‌ی درجه دوم را می‌توان به جمع و ضرب آن‌ها مربوط کرد. یعنی مقادیر آن‌ها را بر اساس S و P بنویسیم. مثلاً اگر x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادله‌ی درجه دوم باشند، داریم:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$$

به همین ترتیب بقیه‌ی روابط با استفاده از اتحادهای جبری قابل اثباتاند:

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P \qquad x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{S}{P} \qquad \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$$

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{S^2-2P}{P}$$

تست ۲۰. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند، مقدار $x_1^4+x_2^4$ کدام است؟

۱) ۵۱ ۲) ۴۸ ۳) ۴۷ ۴) ۴۹

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا مقدار $x_1^2+x_2^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P\xrightarrow{S=3,P=1}x_1^2+x_2^2=9-2=7$$

حال عبارت $(x_1^2+x_2^2)^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(x_1^2+x_2^2)^2=x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2\Rightarrow 49=x_1^4+x_2^4+2(\underbrace{x_1x_2}_{P=1})^2$$

$$\Rightarrow 49=x_1^4+x_2^4+2(1)^2\Rightarrow x_1^4+x_2^4=49-2=47$$

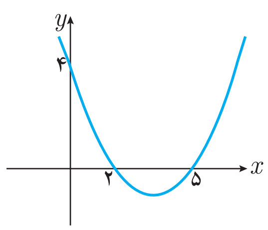
تشکیل معادله‌ی درجه دوم با ریشه‌ها

تابع درجه دومی که ریشه‌های متمایز α و β را داشته باشد، به شکل $y=k(x-\alpha)(x-\beta)$ است.

تابع درجه دومی که ریشه‌ی مضاعف α داشته باشد، به شکل $y=k(x-\alpha)^2$ است.

نکته اگر تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، عبارت ax^2+bx+c به شکل مربع کامل است.

تست ۲۱. اگر نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ به شکل روبه‌رو باشد، b کدام است؟



۱) ۲/۴-

۲) ۲/۶-

۳) ۲/۸-

۴) ۳/۲-

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

چون تابع دارای ریشه‌های ۲ و ۵ است، به شکل $y=k(x-2)(x-5)$ است. برای تعیین k از عرض از مبدأ تابع استفاده می‌کنیم. عرض از مبدأ تابع محل برخورد آن با محور y ها، یعنی جایی که $x=0$ است:

$$y=k(x-2)(x-5)\xrightarrow{x=0}y=10k=4\Rightarrow k=\frac{2}{5}$$

پس تابع به شکل $y=\frac{2}{5}(x-2)(x-5)$ است:

$$y=\frac{2}{5}(x^2-7x+10)=\frac{2}{5}x^2-\frac{14}{5}x+4\Rightarrow b=\frac{-14}{5}=-2/8$$

تشکیل معادله‌ی درجه دوم با S و P

معادله‌ی درجه دومی که جمع‌وضرب ریشه‌های آن S و P باشند، به شکل $x^{۲}-Sx+P=۰$ است.

مثلاً معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن $۲-\sqrt{۳}$ و $۲+\sqrt{۳}$ باشند، را با محاسبه S و P می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l} S=۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}=۴ \\ P=(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})=۴-۳=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow x^{۲}-Sx+P=۰ \Rightarrow x^{۲}-۴x+۱=۰$$

تست ۲۲. **ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}+kx+۴=۰$، ۲ برابر معکوس ریشه‌های معادله $x^{۲}+۴x+۱=۰$ هستند، در این صورت مقدار k کدام است؟**

۱) ۸ ‏ ‏ ‏ ۲) ۸- ‏ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ‏ ۴) ۶

پاسخ: ۱

ریشه‌های معادله $x^{۲}+۴x+۱=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم.

$$\alpha+\beta=-۴$$

$$\alpha\beta=۱$$

ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}+kx+۴=۰$ به شکل $\frac{۲}{\alpha}$ و $\frac{۲}{\beta}$ هستند، پس جمع آن‌ها برابر است با:

$$S=\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta} \Rightarrow -k=\frac{۲\alpha+۲\beta}{\alpha\beta} \Rightarrow -k=\frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{۲(-۴)}{۱} \Rightarrow k=۸$$

نکته با توجه به روابط جمع و ضرب ریشه‌ها به راحتی می‌توان اثبات کرد که اگر ضرایب معادله‌ی درجه دوم گویا باشند، ریشه‌های معادله به شکل $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ خواهند بود که α و β اعداد گویا هستند.

تشخیص علامت ریشه‌ها با علامت S و P

اگر معادله‌ی درجه دوم دارای دو ریشه باشد، $(\Delta>۰)$ می‌توان علامت ریشه‌ها را به شکل زیر به علامت S و P مرتبط ساخت:

P	S	ریشه‌ها
+	+	هر دو ریشه مثبت
+	−	هر دو ریشه منفی
−	+	یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی (اندازه‌ی ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر)
−	−	یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی (اندازه‌ی ریشه‌ی منفی بزرگ‌تر)

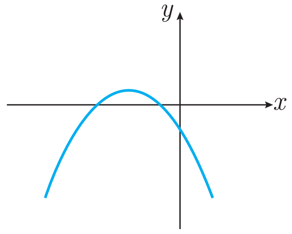
نکته دقت کنید که در حالت‌های ریشه‌های هم‌علامت (هر دو مثبت یا هر دو منفی) حتماً شرط $\Delta>۰$ را هم چک کنید.

نکته اگر $p<۰$ باشد (در حالت ریشه‌های مختلف‌العلامت) لازم نیست $\Delta>۰$ چک شود. (چرا؟)

تست ۲۳. اگر تابع $y=x^{۲}+۲mx+m-۱$ فقط از ناحیه‌ی اول عبور نکند، حدود m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $m>۱$ ۳) $m>۰$ ۴) هر مقدار m

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴



با توجه به شکل مقابل می‌توان نتیجه گرفت، تابع دارای ۲ ریشه منفی است، پس:

$$\Delta>۰ \Rightarrow ۴m^{۲}-۴(۱)(m-۱)>۰ \Rightarrow m^{۲}-m+۱>۰$$

عبارت $(m^{۲}-m+۱)$ همیشه مثبت است، چون Δ آن منفی است و ضریب $m^{۲}$ مثبت است.

$$S<۰ \Rightarrow -۲m<۰ \Rightarrow m>۰$$

$$P>۰ \Rightarrow m-۱>۰ \Rightarrow m>۱$$

اشتراک شرایط بالا $m>۱$ است.

معادلات قابل تبدیل به معادله‌ی درجه دوم

بعضی معادلات، ظاهری شبیه یک معادله‌ی درجه دوم را ندارند ولی با یک تغییر متغیر مناسب به یک معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شوند.

تست ۲۴. حاصل‌ضرب تمام جواب‌های معادله‌ی $(x^{۲}-x)^{۲}-۸(x^{۲}-x)+۱۲=۰$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲- ۳) ۱۲ ۴) ۲۴-

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

اگر $x^{۲}-x=t$ در نظر بگیریم، معادله تبدیل به یک معادله‌ی درجه دوم می‌شود:

$$t^{۲}-۸t+۱۲=۰ \Rightarrow \Delta=(-۸)^{۲}-۴(۱)(۱۲)=۶۴-۴۸=۱۶ \Rightarrow t=\frac{۸\pm ۴}{۲}=۶\,,\,۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۶ \Rightarrow x^{۲}-x=۶ \Rightarrow x^{۲}-x-۶=۰ \xrightarrow{\Delta=۲۵} x=\dfrac{۱\pm ۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۲ \end{cases} \\ t=۲ \Rightarrow x^{۲}-x=۲ \Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰ \xrightarrow{\Delta=۹} x=\dfrac{۱\pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=-۱ \end{cases} \end{cases}$$

حاصل‌ضرب جواب‌ها $(۳)(-۲)(۲)(-۱)=۱۲$ است.

تست ۲۵. اگر معادله‌ی $x-۴\sqrt{x}+m=۰$ فقط یک جواب داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $(-\infty,۰]\cup\{۴\}$ ۳) $(-\infty,۰)\cup\{۴\}$ ۴) $(-\infty,۴]$

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴

معادله‌ی داده شده با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ به معادله‌ی درجه دوم $t^{۲}-۴t+m=۰$ تبدیل می‌شود. حال این معادله یا فقط یک ریشه دارد (یعنی $\Delta=۰$ و $\frac{-b}{۲a}>۰$) یا دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها مثبت است و یکی دیگر منفی.

دقت کنید که چون $t=\sqrt{x}>۰$ است. اگر مقداری منفی برای t به‌دست آوریم قابل قبول نخواهد بود.

الف) $\begin{cases} \Delta=۰ \Rightarrow ۱۶-۴m=۰ \Rightarrow m=۴ \\ -\dfrac{b}{۲a}>۰ \Rightarrow \dfrac{۴}{۲}>۰ \quad \checkmark \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \Delta>۰ \\ P\leq ۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{لازم نیست } \Delta>۰ \text{ را چک کنید}]{\text{قبلاً گفتیم که وقتی } P<۰ \text{ است،}} \dfrac{m}{۱}\leq ۰ \Rightarrow m\leq ۰$

پس اجتماع شرایط بالا مجموعه $(-\infty\,,۰]\cup\{۴\}$ است.

یکی از معروف‌ترین معادلات قابل تبدیل به معادله‌ی درجه دوم معادله‌ی $ax^{۴}+bx^{۲}+c=۰$ است، که با تغییر متغیر $x^{۲}=t$ به معادله‌ی $at^{۲}+bt+c=۰$ تبدیل می‌شود. این معادله به **معادله‌ی دو مجذوری** معروف است. می‌دانیم یک معادله‌ی درجه‌ی چهار، **حداکثر چهار ریشه** دارد. همچنین معلوم است که اگر معادله‌ی درجه دوم، ریشه‌ای منفی برای t تولید کند، معادله‌ی درجه‌ی چهارم $(x^{۲}=t)$ ریشه‌ای نخواهد داشت. بنابراین با توجه به توضیحات داده شده تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی چهارم به شکل زیر متغیر است.

$ax^{۴}+bx^{۲}+c=۰$	$at^{۲}+bt+c=۰$
ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی چهارم	ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم
چهار ریشه (دوبه‌دو قرینه)	دو ریشه مثبت
سه ریشه (یک ریشه صفر و دو ریشه قرینه)	یک ریشه مثبت و یک ریشه صفر
دو ریشه‌ی قرینه	یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی
یک ریشه‌ی صفر	یک ریشه صفر و یک ریشه منفی
بدون ریشه	دو ریشه‌ی منفی
دو ریشه‌ی قرینه	یک ریشه مثبت
بدون ریشه	یک ریشه منفی
بدون ریشه	بدون ریشه

نکته معادله‌ی دو مجذوری هر چند ریشه که داشته باشد، مجموع ریشه‌هایش صفر است.

تست ۲۶. **معادله‌ی $x^{۴}+kx^{۲}+k+۲=۰$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی است. جمع مجذور ریشه‌ها کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: ۳

معادله‌ی دو مجذوری با تغییر متغیر $x^{۲}=t$ به $t^{۲}+kt+k+۲=۰$ تبدیل می‌شود و این معادله باید یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت داشته باشد.

چون صفر یکی از ریشه‌هاست، صفر را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$k+۲=۰\Rightarrow k=-۲\Rightarrow x^{۴}-۲x^{۲}=۰\Rightarrow x^{۲}(x^{۲}-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\sqrt{۲}\\ x=-\sqrt{۲}\end{cases}$$

حاصل‌جمع مجذور ریشه‌ها برابر است با:

$$(۰)^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}+(-\sqrt{۲})^{۲}=۴$$

معادلات گویا

معادلات گویا به شکل تساوی کسرهایی است که صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای هستند. این معادلات را با مخرج مشترک‌گیری کسرها یا طرفین وسطین حل می‌کنیم. مهم‌ترین نکته در حل این معادلات توجه به این موضوع است که جواب‌ها در معادله‌ی اصلی صدق کنند. در واقع باید به دامنه‌ی عبارات موجود در معادله توجه کنیم. در بیش‌تر موارد باید حواسمان به مخرج کسرها باشد که صفر نشوند.

تست ۲۷. معادله‌ی $\frac{1}{2x-2}=\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}$ **چند جواب دارد؟**

۱) صفر	۲) ۱	۳) ۲	۴) ۳

پاسخ: **۱** ۲ ۳ ۴

همه عبارت‌ها را به یک سمت تساوی می‌بریم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{4}{x+1}-\frac{1}{2x-2}=0\Rightarrow\frac{2+8(x-1)-(x+1)}{2(x-1)(x+1)}=0$$

$$\Rightarrow\frac{2+8x-8-x-1}{2(x-1)(x+1)}=0\Rightarrow\frac{7x-7}{2(x-1)(x+1)}=0\Rightarrow 7x-7=0\Rightarrow x=1$$

چون $x=1$ مخرج کسر را هم صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست.

تست ۲۸. **یک پرنده مسافت ۷۲ متر را پرواز می‌کند و همین مسیر را برمی‌گردد. اگر در برگشت سرعت پرنده ۵ متر بر ثانیه بیش‌تر از سرعت رفت باشد، ۱۰ ثانیه زودتر به مقصد می‌رسد. در این صورت پرنده کلاً چند ثانیه پرواز کرده است؟**

۱) ۲۴	۲) ۲۶	۳) ۲۸	۴) ۳۰

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم سرعت پرنده از رابطه‌ی $V=\frac{x}{t}$ به‌دست می‌آید که x مسافت طی شده و t زمان است.

در این صورت سرعت رفت $V=\frac{x}{t}$ و سرعت برگشت $V'=\frac{x}{t-10}$ است، چون در برگشت پرنده ۱۰ ثانیه زودتر به مقصد رسیده است. ضمناً سرعت برگشت ۵ ثانیه بیش‌تر است، پس $V'=V+5$:

$$\frac{x}{t-10}=\frac{x}{t}+5\xrightarrow{x=72}\frac{72}{t-10}-\frac{72}{t}=5\Rightarrow\frac{72t-72(t-10)}{t(t-10)}=5$$

$$\frac{720}{t(t-10)}=5\Rightarrow\frac{144}{t(t-10)}=1\Rightarrow t^2-10t-144=0\Rightarrow\Delta=100+4(1)(144)=676$$

$$\Rightarrow t=\frac{10\pm 26}{2}\Rightarrow\begin{cases}t=18\\ t=-8\Rightarrow \text{قابل قبول نیست}\end{cases}$$

پس پرنده طی مسیر رفت ۱۸ ثانیه پرواز کرده و در برگشت ۸ ثانیه پرواز کرده است. بنابراین کلاً ۲۶ ثانیه پرواز کرده است.

نکته اگر در یک مستطیل نسبت مجموع طول و عرض به طول برابر نسبت طول به عرض آن باشد، نسبت طول به عرض برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ خواهد بود (اثبات کنید!). به این عدد، **عدد طلایی** و به این مستطیل، **مستطیل طلایی** می‌گویند.

معادلات گنگ

معادلات گنگ شامل عبارت‌های رادیکالی هستند. عموماً این معادلات به شکل $\sqrt{f(x)}=g(x)$ هستند که آن‌ها را به توان دو می‌رسانیم و حل می‌کنیم. در پایان به دامنه‌ی عبارات موجود در معادلات دقت می‌کنیم. این دامنه به شکل $f(x)\geq 0$ و $g(x)\geq 0$ است. می‌توان به جای تعیین دامنه و این‌که چک کنیم جواب‌ها در دامنه هستند، بعد از به‌دست آوردن جواب‌ها آن‌ها را در معادله اصلی چک کنیم که صدق کنند. حواستان باشد که عموماً به توان دو رساندن یک معادله می‌تواند ریشه‌ی زائد تولید کند.

تست ۲۹. **معادله‌ی** $\sqrt{۲x-۱}=x-۸$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ: ۴

معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۲x-۱=x^{۲}-۱۶x+۶۴ \Rightarrow x^{۲}-۱۸x+۶۵=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۱۸^{۲}-۴(۱)(۶۵)=۶۴ \Rightarrow x=\frac{۱۸\pm ۸}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=۱۳ \\ x=۵ \end{cases}$$

اگر امتحان کنید می‌بینید که $x=۵$ در معادله صدق نمی‌کند. هم‌چنین، اگر دامنه‌ی عبارات معادله را به‌دست آوریم:

$$\begin{matrix} ۲x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq \frac{۱}{۲} \\ x-۸\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۸ \end{matrix} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq ۸$$

همان‌طور که معلوم است $x=۵$ در این بازه قرار ندارد.

تست ۳۰. **مجموع جواب‌های معادله‌ی** $\sqrt{۵-x}+\sqrt{۲x+۱}=۴$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۵۶}{۹}$ ۲) $\frac{-۵۶}{۹}$ ۳) $\frac{۸۰}{۹}$ ۴) ۴

پاسخ: ۱

یکی از رادیکال‌ها را به طرف دیگر می‌بریم و معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sqrt{۵-x}=۴-\sqrt{۲x+۱} \Rightarrow ۵-x=۱۶+(۲x+۱)-۸\sqrt{۲x+۱}$$

$$۸\sqrt{۲x+۱}=۳x+۱۲ \xrightarrow{\text{دوباره به توان دو می‌رسانیم}} ۶۴(۲x+۱)=۹x^{۲}+۱۴۴+۷۲x$$

$$\Rightarrow ۹x-۵۶x+۸۰=۰ \Rightarrow \Delta=۵۶^{۲}-۴(۹)(۸۰)=۲۵۶ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵۶+۱۶}{۱۸}=۴ \\ x=\frac{۵۶-۱۶}{۱۸}=\frac{۲۰}{۹} \end{cases}$$

هر دو جواب در معادله صدق می‌کنند و مجموع آن‌ها $\frac{۵۶}{۹}$ است.

نکته اگر مجموع دو یا چند عبارت نامنفی صفر باشند، همگی آن‌ها صفر هستند.

در معادلات زیر عبارت‌ها نامنفی هستند، پس:

الف) $$(x-۱)^{۲}+(۲y+۱)^{۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ ۲y+۱=۰ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

ب) $$\sqrt{x+۲}+\sqrt{x^{۲}-x-۶}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x^{۲}-x-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۲ \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=-۲$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

دستگاه مختصات

۱. دایره‌ای با مرکز $O\begin{vmatrix}۴\\-۳\end{vmatrix}$ بر محور xها مماس است. قطر این دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲. در مربع $ABCD$ داریم: $A(۴,۰)$ و $C(-۱,۵)$، مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۷۵

۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC با قاعده‌ی BC داریم: $C(۲,-۱)$ و $B(-۱,۴)$، اگر طول ارتفاع $AH=۳$ باشد، طول ساق مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۷۰}$ ۲) $\sqrt{۳۵}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{\sqrt{۷۰}}{۲}$

۴. مساحت مثلثی که نقاط $A(-۱,۲)$، $B(-۱,-۱)$ و $C(-۵,۱)$ رئوس آن هستند، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱۲ ۴) ۴

۵. اگر نقاط $A(۱,۲)$، $B(۲,۵)$ و $C(۴,۱)$ رئوس یک مثلث باشند، مساحت آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{۵}$

۶. نقطه‌ی $M(۵,-۴)$ وسط نقاط A و $B(۷,-۲)$ است. مجموع طول و عرض A کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۶- ۳) ۳- ۴) ۶

۷. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۲,۳)$ نسبت به نقطه‌ی $B(-۱,۱)$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۲) $(-۱,-۴)$ ۳) $(-۴,-۱)$ ۴) $(۴,-۱)$

۸. نقاط $A\begin{vmatrix}۱\\۲\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}-۲\\۵\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}-۵\\۲\end{vmatrix}$ سه رأس مربع $ABCD$اند. مجموع طول و عرض رأس D کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۵- ۳) ۱- ۴) ۹

۹. اگر نقطه‌ی $C(m,۲)$ روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد و $B(-۴,۲)$ و $A(-۳,۱)$، m کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۴- ۴) ۳-

۱۰. دو نقطه روی خط $y=x$ وجود دارد که از نقطه‌ی $B(۱,۲)$ به فاصله‌ی ۲ واحد هستند. مجموع عرض این دو نقطه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱. چند نقطه روی تابع $y=|x+۲|$ قرار دارد که از مبدأ مختصات به فاصله‌ی سه واحد باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲. دایره‌ای از دو نقطه‌ی $A(۰,۱)$ و $B(۳,۰)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x-y=۲$ است. شعاع دایره کدام است؟ (خارج ۹۰)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۴

۱۳. اگر نقاط $A(۰,۰)$ و $B(۴,۰)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس سوم با عرض منفی کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $(۲,۲\sqrt{۳})$ ۲) $(۲,-\sqrt{۳})$ ۳) $(۲,-۲\sqrt{۳})$ ۴) $(۲,-۲)$

۱۴. نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ دو انتهای یکی از قطرهای یک دایره هستند. کدام نقطه روی محیط دایره قرار دارد؟ (کتاب درسی)

۱) $(۳,۷)$ ۲) $(۷,۳)$ ۳) $(۶,۶)$ ۴) $(۵,۴)$

۱۵. دایره‌ای به شعاع ۲ واحد بر خطوط $x=-۳$ و $y=۱$ مماس است. مرکز این دایره کدام نقطه نمی‌تواند باشد؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,-۱)$ ۳) $(-۵,-۲)$ ۴) $(-۵,۳)$

۱۶. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۳,-۲)$ نسبت به خط $x=-\frac{۳}{۲}$ کدام است؟

۱) $(-۳,-۲)$ ۲) $(-۶,-۲)$ ۳) $(-۹,-۲)$ ۴) $(-۶,۲)$

۱۷. اگر نقاط $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، شیب ضلع AD کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶- ۳) $-\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۸. معادله‌ی خطی که با خط $۲y-۳x=۱$ موازی باشد و عرض از مبدأ آن ۵ باشد کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $۲y-۳x=-۱۰$ ۲) $۲y-۳x=۱۰$ ۳) $۳y-۲x=۱۰$ ۴) $۳y-۲x=-۱۰$

۱۹. خط $x=۱$ بر کدام یک از خطوط زیر عمود است؟

۱) $۲x+۱=۰$ ۲) $y=۲x+۱$ ۳) $۲y+۱=x$ ۴) $\frac{y-۱}{۲}=۳$

۲۰. معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و موازی با خط $y=۳x-۴$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $y-۳x=۲$ ۲) $۳y+x=۱$ ۳) $۳y+x=-۱$ ۴) $y+۷=۳x$

۲۱. به ازای کدام مقادیر a، نقاط $(a,۳)$ و $(۶,۴a+۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟ (خارج ۸۵)

۱) $-۲,\frac{۹}{۴}$ ۲) $-۲,\frac{۳}{۴}$ ۳) $-۲,-\frac{۳}{۴}$ ۴) $۲,-\frac{۹}{۴}$

۲۲. خطی از مبدأ مختصات می‌گذرد و برخطی که از نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۰\\-۳\end{matrix}\right.$ می‌گذرد عمود است. این خط، خط $y=۳$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۶-

۲۳. در مثلث ABC داریم: $A\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}۳\\-۵\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۵\\-۳\end{matrix}\right.$ ، امتداد میانه‌ی AM محور yها را در کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

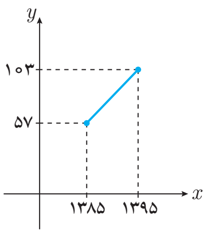
۲۴. اگر نقاط $A(۲,۵)$ ، $B(-۱,۲)$ و $C(۵,۱)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، معادله‌ی ضلع DA کدام است؟

۱) $۶y+x=۳۲$ ۲) $۶y-x=۲۸$ ۳) $۶x+y=۱۷$ ۴) $۶x-y=۷$

۲۵. خطی که از نقاط متمایز $A(m,-۱)$ و $B(۱,۱-۲m)$ می‌گذرد، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است. این خط محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۲- ۲) ۱ ۳) ۱/۵- ۴) ۲/۵-

۲۶. سود سالانه‌ی یک واحد تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ در نمودار زیر آمده است. سود این واحد در سال ۱۴۰۳ چقدر خواهد بود؟



۱) ۸۲/۸
۲) ۵۷
۳) ۱۳۹/۸
۴) ۱۲۹/۴

۲۷. نقاط $A(۱۴,۳)$ و $B(۱۰,-۱۳)$ مفروضند. معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $۴y+x=۸$ ۲) $۴y+x=-۸$ ۳) $۴x+y=۴۳$ ۴) $۴x+y=۱۷$

۲۸. شیب خطی برابر ۳- است. اگر طول نقطه‌ای روی این خط را ۳ واحد زیاد کنیم، عرض آن چه تغییری می‌کند؟

۱) ۱ واحد زیاد می‌شود. ۲) ۱ واحد کم می‌شود. ۳) ۹ واحد زیاد می‌شود. ۴) ۹ واحد کم می‌شود.

۲۹. معادله‌ی خطی که محور xها را در نقطه‌ای به طول p و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض q قطع می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$ ۲) $\frac{x}{q}+\frac{y}{p}=۱$ ۳) $\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=۰$ ۴) $\frac{y}{q}-\frac{x}{p}=۱$

۳۰. دو خط $y=۳x-۱$ و $x-۲y+۳=۰$ قطرهای دایره‌ای هستند که از مبدأ مختصات می‌گذرد. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{۵}$

۳۱. نقطه‌ی $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $(۴,۳)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۱,۵)$

۳۲. سه ضلع مثلثی به معادلات $AB:۲y-x=۳$ و $AC:y-۲x=۵$ و $BC:۲y+۳x=۶$ هستند. معادله‌ی ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟ (خارج ۸۹)

۱) $۶y-۴x=۱۵$ ۲) $۹y-۶x=۱۷$ ۳) $۳y-۲x=۷$ ۴) $۳y+۲x=۹$

۳۳. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۱,۲)$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم کدام است؟

۱) $(۱,-۲)$ ۲) $(-۱,-۲)$ ۳) $(۲,-۱)$ ۴) $(-۲,۱)$

۳۴. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۲,-۳)$ نسبت به خط $y=x+۱$ کدام است؟

۱) $(-۴,۳)$ ۲) $(-۳,۴)$ ۳) $(۴,-۳)$ ۴) $(-۳,۴)$

۳۵. از نقطه‌ی $A(۲,-۳)$ بر خط $۲x+۳y=۵$ خطی عمود می‌کنیم. عرض پای عمود کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۱۳}$ ۲) $-\frac{۱۳}{۹}$ ۳) $\frac{۱۳}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۱۳}$

۳۶. معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$ ، $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟

۱) $y=\frac{۲}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$ ۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۳۷. خط $۲y+۳x=۱$ کدام یک از خطوط زیر را قطع می‌کند؟

۱) $۲x+۳y=۱$ ۲) $۵+y=-\frac{۳}{۲}x$ ۳) $۲y=۵-۳x$ ۴) $۲y+۳x=۵$

۳۸. به ازای چه مقداری از m خط‌های $mx+y=۲m$ و $۹x+my=۶$ همدیگر را قطع نمی‌کنند؟

۱) $m=\pm۳$ ۲) $m=۳$ ۳) $m=-۳$ ۴) هیچ مقدار m

۳۹. معادله‌ی قرینه‌ی خط $y=۲x-۷$ نسبت به خط $y=x+۱$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $۲y-x=۵$ ۲) $۲x-y=۵$ ۳) $۲y-x=۱۰$ ۴) $۲x-y=۱۰$

۴۰. چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ بگذرد و با محورهای مختصات در ناحیه‌ی اول، مثلثی به مساحت $\frac{۹}{۲}$ بسازد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۱. دایره‌ای محور yها را در نقاطی با عرض ۲ و ۸ قطع کرده و بر خط $x=۲$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۲/۷۵

فاصله‌ی نقطه از خط

۴۲. شعاع دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۱)$ که بر خط $۳x-۴y=۰$ مماس است، کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

۴۳. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ از خط $x=a$ کدام است؟

۱) $a+۲$ ۲) $۳-a$ ۳) $|a+۲|$ ۴) $|۳-a|$

۴۴. فاصله‌ی قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ نسبت به مبدأ مختصات از خط $y=۵$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۶

۴۵. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ از خط ℓ به معادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۷/۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۱۵

۴۶. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}$ از خط $۳y-۴x-a=۰$ برابر ۲ باشد، مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۱۰ و ۰ ۲) ۱۰ و ۲۰ ۳) ۲۰ و ۰ ۴) ۲۰- و ۰

۴۷. قطر مربعی منطبق بر نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم و یک رأس آن نقطه‌ی $(۳,-۲)$ است. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۴۸. طول ارتفاع AH در مثلثی با رئوس $A(۳,۲)$ ، $B(۰,۳)$ و $C(۴,۰)$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۱ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۶

۴۹. دو ضلع یک مســتطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(۸,۵)$ اســت. مســاحت این مستطیل کدام است؟ (خارج ۹۰)

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

۵۰. دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y=x-۱$ قرار دارند، که فاصله‌ی این نقاط از خط به معادله‌ی $۲x-۳y=۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟ (تجربی ۸۹)

۱) ۹ و ۱۵- ۲) ۱۱ و ۱۵- ۳) ۹- و ۱۱ ۴) ۱۵و ۱۱-

۵۱. اضلاع یک متوازی‌الاضلاع بر خطوط $x-۳y+۲=۰$ و $۲x+y-۳=۰$ منطبقند. اگر یکی از رئوس این متوازی‌الاضلاع نقطه‌ی $A(۴,۳)$ باشد، مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۲}{۷}$ ۳) $\frac{۱۳}{۷}$ ۴) ۲

۵۲. نقاط $A(۱,۰)$ ، $B(۶,۰)$ و $C(۲,۲)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر CD نیمساز داخلی زاویه‌ی C باشد، مختصات D کدام است؟

۱) $(\frac{۸}{۳},۰)$ ۲) $(۳,۰)$ ۳) $(\frac{۱۰}{۳},۰)$ ۴) $(\frac{۷}{۳},۰)$

۵۳. دایره‌ای به مرکز $(۱,۲)$ بر خط $۲x+y=-۱$ مماس است. این دایره از کدام یک از نقاط زیر نیز می‌گذرد؟

۱) $(۴,۱)$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(۰,۴)$ ۴) $(-۲,۳)$

۵۴. مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معادلات $y=x+۴$ و $x=۴$ و محور yها و نیمساز ناحیه‌ی اول برابر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۵۵. مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است. اگر این دایره از نقطه‌ی $A(۶,۳)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=۲x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) ۵ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) ۱۰

۲۰۰. اگر شی‌ای از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h قرار می‌گیرد $(t=\sqrt{10-\frac{h}{5}})$. پس از ۱ ثانیه شی در چه ارتفاعی قرار دارد؟ (کتاب درسی)

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۳۵

۲۰۱. معادلهٔ $2+\sqrt{2x^2-5x+2}=x$ چند جواب دارد؟ (کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{\sqrt{x+5}+x}=5$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۵۱ ۳) ۳۱ ۴) ۶۱

۲۰۳. اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ (تجربی ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگری ندارد

۲۰۴. معادلهٔ $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}=1$ چند جواب حقیقی دارد؟ (کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۰۵. حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{10-x^2}+\frac{1}{\sqrt{10-x^2}}=2$ کدام است؟

۱) ۹- ۲) ۹ ۳) ۲۷- ۴) ۱۸-

۲۰۶. مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x+1)(2x+5)=\sqrt{-(x+3)(2x+1)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{-7+\sqrt{17}}{4}$ ۳) $\frac{-7-\sqrt{17}}{4}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

۲۰۷. معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-2}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۰۸. معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{2}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۹. معادلهٔ $\sqrt{\sqrt{x+3}-x}=1+\sqrt{1-x}$ چند جواب دارد؟

۱) یک جواب مثبت ۲) یک جواب منفی ۳) دو جواب ۴) بدون جواب

۲۱۰. معادلهٔ $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2}\sqrt{x+6}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۱. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x+3}=|x-1|-2$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۹

۲۱۲. اگر $x=3$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x-2}{\sqrt{x+a}}=\frac{x}{9}$ باشد، حاصل‌جمع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۱۰۸

پاسخ کلیدی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ
۱	۳	۱۱	۳	۲۱	۴	۳۱	۳
۲	۱	۱۲	۳	۲۲	۴	۳۲	۲
۳	۴	۱۳	۳	۲۳	۳	۳۳	۳
۴	۱	۱۴	۲	۲۴	۱	۳۴	۱
۵	۳	۱۵	۳	۲۵	۳	۳۵	۱
۶	۳	۱۶	۲	۲۶	۳	۳۶	۱
۷	۳	۱۷	۳	۲۷	۲	۳۷	۱
۸	۱	۱۸	۲	۲۸	۴	۳۸	۱
۹	۴	۱۹	۴	۲۹	۱	۳۹	۳
۱۰	۲	۲۰	۴	۳۰	۴	۴۰	۲

پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ
۴۱	۱	۵۱	۲	۶۱	۱	۷۱	۲
۴۲	۴	۵۲	۱	۶۲	۴	۷۲	۲
۴۳	۳	۵۳	۳	۶۳	۲	۷۳	۱
۴۴	۳	۵۴	۴	۶۴	۲	۷۴	۲
۴۵	۳	۵۵	۲	۶۵	۱	۷۵	۲
۴۶	۳	۵۶	۲	۶۶	۱	۷۶	۱
۴۷	۳	۵۷	۳	۶۷	۳	۷۷	۲
۴۸	۲	۵۸	۱	۶۸	۱	۷۸	۱
۴۹	۲	۵۹	۳	۶۹	۱	۷۹	۱
۵۰	۲	۶۰	۱	۷۰	۴	۸۰	۲

پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ
۸۱	۲	۹۱	۱	۱۰۱	۲	۱۱۱	۲
۸۲	۲	۹۲	۳	۱۰۲	۴	۱۱۲	۳
۸۳	۳	۹۳	۳	۱۰۳	۴	۱۱۳	۳
۸۴	۳	۹۴	۱	۱۰۴	۱	۱۱۴	۳
۸۵	۲	۹۵	۴	۱۰۵	۴	۱۱۵	۳
۸۶	۴	۹۶	۱	۱۰۶	۳	۱۱۶	۲
۸۷	۳	۹۷	۲	۱۰۷	۱	۱۱۷	۳
۸۸	۲	۹۸	۳	۱۰۸	۱	۱۱۸	۱
۸۹	۲	۹۹	۳	۱۰۹	۲	۱۱۹	۲
۹۰	۱	۱۰۰	۳	۱۱۰	۲	۱۲۰	۲

پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ	پرسش	پاسخ
۱۲۱	۴	۱۳۱	۱	۱۴۱	۱	۱۵۱	۴
۱۲۲	۲	۱۳۲	۱	۱۴۲	۳	۱۵۲	۴
۱۲۳	۳	۱۳۳	۲	۱۴۳	۳	۱۵۳	۳
۱۲۴	۳	۱۳۴	۳	۱۴۴	۲	۱۵۴	۳
۱۲۵	۲	۱۳۵	۴	۱۴۵	۲	۱۵۵	۱
۱۲۶	۲	۱۳۶	۲	۱۴۶	۲	۱۵۶	۱
۱۲۷	۴	۱۳۷	۳	۱۴۷	۲	۱۵۷	۴
۱۲۸	۳	۱۳۸	۴	۱۴۸	۳	۱۵۸	۱
۱۲۹	۲	۱۳۹	۱	۱۴۹	۳	۱۵۹	۳
۱۳۰	۲	۱۴۰	۳	۱۵۰	۱	۱۶۰	۳

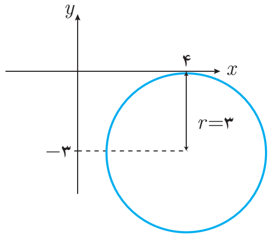
ادامه پاسخ کلیدی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۶۱.	۱	**۲**	۳	۴
۱۶۲.	۱	**۲**	۳	۴
۱۶۳.	**۱**	۲	۳	۴
۱۶۴.	**۱**	۲	۳	۴
۱۶۵.	**۱**	۲	۳	۴
۱۶۶.	۱	۲	۳	**۴**
۱۶۷.	۱	**۲**	۳	۴
۱۶۸.	**۱**	۲	۳	۴
۱۶۹.	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۰.	۱	**۲**	۳	۴
۱۷۱.	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۲.	**۱**	۲	۳	۴
۱۷۳.	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۴.	**۱**	۲	۳	۴
۱۷۵.	۱	**۲**	۳	۴
۱۷۶.	۱	**۲**	۳	۴
۱۷۷.	۱	**۲**	۳	۴
۱۷۸.	**۱**	۲	۳	۴
۱۷۹.	۱	**۲**	۳	۴
۱۸۰.	۱	۲	**۳**	۴
۱۸۱.	**۱**	۲	۳	۴
۱۸۲.	۱	۲	۳	**۴**
۱۸۳.	**۱**	۲	۳	۴
۱۸۴.	۱	۲	۳	**۴**
۱۸۵.	۱	۲	۳	**۴**
۱۸۶.	**۱**	۲	۳	۴
۱۸۷.	**۱**	۲	۳	۴
۱۸۸.	۱	**۲**	۳	۴
۱۸۹.	۱	۲	۳	**۴**
۱۹۰.	**۱**	۲	۳	۴
۱۹۱.	۱	۲	**۳**	۴
۱۹۲.	۱	۲	**۳**	۴
۱۹۳.	۱	**۲**	۳	۴
۱۹۴.	۱	۲	۳	**۴**
۱۹۵.	۱	**۲**	۳	۴
۱۹۶.	۱	**۲**	۳	۴
۱۹۷.	۱	**۲**	۳	۴
۱۹۸.	۱	**۲**	۳	۴
۱۹۹.	۱	۲	۳	**۴**
۲۰۰.	۱	۲	**۳**	۴
۲۰۱.	**۱**	۲	۳	۴
۲۰۲.	**۱**	۲	۳	۴
۲۰۳.	۱	۲	۳	**۴**
۲۰۴.	**۱**	۲	۳	۴
۲۰۵.	**۱**	۲	۳	۴
۲۰۶.	**۱**	۲	۳	۴
۲۰۷.	۱	۲	**۳**	۴
۲۰۸.	۱	**۲**	۳	۴
۲۰۹.	۱	۲	۳	**۴**
۲۱۰.	۱	**۲**	۳	۴
۲۱۱.	۱	۲	**۳**	۴
۲۱۲.	**۱**	۲	۳	۴

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. ۱ ۲ **۳** ۴

رسم دایره با این ویژگی: از شکل معلوم است شعاع دایره $r=3$ است. پس قطر آن ۶ است.



۲. **۱** ۲ ۳ ۴

راهنمایی: AC همان قطر مربع است.

اول: طول AC را می‌یابیم:

$$AC=\sqrt{(4-(-1))^2+(0-5)^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$

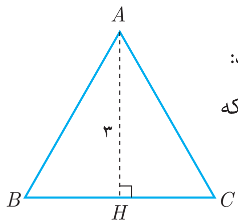
دوم: مساحت مربع به قطر d برابر است با $\frac{d^2}{2}$:

$$S=\frac{(5\sqrt{2})^2}{2}=\frac{25\times 2}{2}=25$$

۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

راهنمایی: از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده کنید.

اول: مثلث متساوی‌الساقین زیر را در نظر بگیرید:



برای محاسبه‌ی AC لازم است طول HC که همان $\frac{BC}{2}$ است را بیابیم.

دوم: محاسبه‌ی BC:

$$B(-1,4)\,,\,C(2,-1)\Rightarrow BC=\sqrt{(2-(-1))^2+(-1-4)^2}$$
$$=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

پس: $HC=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

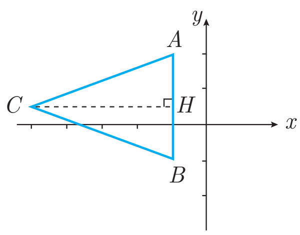
سوم: محاسبه‌ی طول AC:

$$AC^2=HC^2+AH^2=\frac{34}{4}+9$$
$$=\frac{34}{4}+\frac{36}{4}=\frac{70}{4}\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{70}}{2}$$

۴. **۱** ۲ ۳ ۴

راهنمایی: سه نقطه‌ی مذکور را در دستگاه مختصات مشخص کنید.

طبق راهنمایی داریم:



از شکل معلوم است که $AB=3$ و $CH=4$ است.

پس: $S=\frac{AB.CH}{2}=\frac{3\times 4}{2}=6$

۵. ۱ ۲ **۳** ۴

راه حل اول: طول اضلاع مثلث را حساب می‌کنیم:

چون بین طول اضلاع رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است پس مثلث قائم‌الزاویه است:

$$AB=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}\qquad S=\frac{1}{2}\sqrt{10}\times\sqrt{10}=\frac{10}{2}=5$$
$$BC=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

راه حل دوم: کافیست از رابطه‌ی $S=\frac{AH.BC}{2}$ مساحت مثلث را به دست آوریم که در آن AH ارتفاع وارد بر ضلع BC است.

اول: طول ضلع BC:

$$B(2,5),\,C(4,1)\Rightarrow BC=\sqrt{(4-2)^2+(1-5)^2}$$
$$=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$$

دوم: معادله‌ی BC را به دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{5-1}{2-4}=\frac{4}{-2}=-2$$

معادله‌ی خط BC:

$$y-5=-2(x-2)\Rightarrow y-5=-2x+4$$
$$\Rightarrow y=-2x+9\Rightarrow y+2x-9=0$$

سوم: فاصله‌ی A از ضلع BC (همان AH)

$$\begin{matrix} y+2x-9=0 \\ A(1,2)\end{matrix}\Rightarrow AH=\frac{|2+2(1)-9|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

چهارم: پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S=\frac{AH.BC}{2}=\frac{\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{2}=5$$

تذکر

راه حل دوم را بعد از مطالعه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط، بخوانید.

۶. ۱ ۲ **۳** ۴

مختصات نقطه‌ی A را به شکل $A(x,y)$ در نظر می‌گیریم:

$$A(x,y)\,,\,B(7,-2)\Rightarrow M=(\frac{x+7}{2}\,,\,\frac{y-2}{2})=(5,-4)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x+7}{2}=5\Rightarrow x=3\\ \frac{y-2}{2}=-4\Rightarrow y=-6\end{cases}\Rightarrow x+y=-3$$

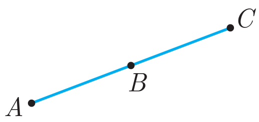
۷. ۱ ۲ **۳** ۴

نقطه‌ی C را به شکل $C(x,y)$ در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی B وسط A و C است:

$$A(۲,۳)\,,\ C(x,y) \Rightarrow B(\frac{x+۲}{۲}\,,\,\frac{y+۳}{۲}) = B(-۱,۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۴ \\ y=-۱ \end{cases}$$

پس نقطه‌ی C به شکل $(-۴,-۱)$ است.



۸. **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد، داریم $x_A + x_C = x_B + x_D$ و $y_A + y_C = y_B + y_D$

مربع متوازی‌الاضلاع هم هست، پس نکته‌ی بالا برای آن صادق است:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow ۱+(-۵) = -۲ + x_D \Rightarrow x_D = -۲$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow ۲+۲ = ۵ + y_D \Rightarrow y_D = -۱$$

پس مختصات رأس چهارم $D(-۲,-۱)$ است و مجموع طول و عرض آن ۳- است.

۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

راه حل اول: اگر C روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد باید فاصله‌ی آن از A با فاصله‌اش از B برابر باشد. یعنی:

$$AC = BC \Rightarrow \sqrt{(m+۳)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{(m+۴)^۲ + (۲-۲)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} m^۲ + ۶m + ۹ + ۱ = m^۲ + ۸m + ۱۶ \Rightarrow ۲m + ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow m = -۳$$

راه حل دوم: برای پیدا کردن عمودمنصف AB ابتدا مختصات M (وسط AB) را می‌یابیم. همچنین شیب عمودمنصف، معکوس و قرینه‌ی شیب AB است.

$$m_{AB} = \frac{۲-۱}{-۴-(-۳)} = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

پس شیب عمودمنصف ۱ است. مختصات M (وسط AB):

$$A(-۳,۱)\,,\ B(-۴,۲) \Rightarrow M = (\frac{-۳-۴}{۲}\,,\,\frac{۱+۲}{۲}) = (-\frac{۷}{۲},\frac{۳}{۲})$$

معادله‌ی عمودمنصف:

$$y - \frac{۳}{۲} = ۱ \times (x + \frac{۷}{۲}) \Rightarrow y - \frac{۳}{۲} = x + \frac{۷}{۲} \Rightarrow y = x + ۵$$

نقطه‌ی $C(m,۲)$ روی عمودمنصف است، پس در معادله‌ی آن صدق می‌کند.

$$۲ = m + ۵ \Rightarrow m = -۳$$

۱۰. ۱ **۲** ۳ ۴

راهنمایی: نقاط مذکور را به شکل $A(x,x)$ در نظر بگیرید چون روی $y = x$ است.

طبق راهنمایی نقطه‌ی مذکور را به شکل $A(x,x)$ در نظر می‌گیریم.

فاصله‌ی آن‌ها از $B(۱,۲)$، ۲ واحد است:

$$B(۱,۲)\,,\ A(x,x) \Rightarrow AB = \sqrt{(x-۱)^۲ + (x-۲)^۲} = ۲$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (x-۲)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + x^۲ - ۴x + ۴ = ۴$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۶x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۳۶ - ۴(۱)(۲) = ۲۸ > ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۶ \pm \sqrt{۲۸}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۶+\sqrt{۲۸}}{۴} \\ x_۲ = \frac{۶-\sqrt{۲۸}}{۴} \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = \frac{۱۲}{۴} = ۳$$

۱۱. ۱ ۲ **۳** ۴

راهنمایی: نقطه‌ی موردنظر را به شکل $(x,|x+۲|)$ در نظر می‌گیریم.

اول: نقطه‌ی مورد نظر را طبق راهنمایی به شکل $A(x,|x+۲|)$ در نظر می‌گیریم چون روی تابع $y = |x+۲|$ است.

دوم: فاصله‌ی آن از مبدأ برابر ۳ است:

$$(۰,۰)\,,\ (x,|x+۲|) \Rightarrow \sqrt{x^۲ + (|x+۲|)^۲} = ۳$$

$$\Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۴x + ۴ = ۹ \Rightarrow ۲x^۲ + ۴x - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۴(۲)(-۵) = ۵۶ > ۰$$

چون $\Delta > ۰$ است، پس معادله ۲ جواب دارد. بنابراین دو نقطه با این ویژگی وجود دارد.

۱۲. ۱ ۲ **۳** ۴

راهنمایی: چون مرکز روی قطر است، پس مختصات آن به شکل $O(x,x-۲)$ است.

اول: قطر دایره $y = x - ۲$ است، پس مختصات مرکز که روی قطر و به شکل $O(x,x-۲)$ است.

دوم: فاصله‌ی مرکز از هر نقطه روی دایره برابر با شعاع دایره است. پس:

$$O(x,x-۲)\,,\ A(۰,۱) \Rightarrow \sqrt{x^۲ + (x-۳)^۲}$$

$$O(x,x-۲)\,,\ B(۳,۰) \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲ + (x-۲)^۲}$$

از تساوی فاصله‌ها داریم:

$$\sqrt{x^۲ + (x-۳)^۲} = \sqrt{(x-۳)^۲ + (x-۲)^۲}$$

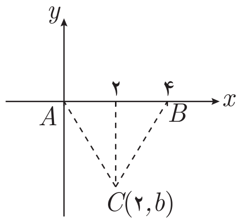
$$\Rightarrow x^۲ + x^۲ - ۶x + ۹ = x^۲ - ۶x + ۹ + x^۲ - ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow x = ۱$$

سوم: پس شعاع دایره برابر است با:

$$\sqrt{x^۲ + (x-۳)^۲} = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵}$$

۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴



اول: رسم شکل:

معلوم است که رأس C روی عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی روی خط $x=۲$ است، پس طول آن ۲ است.

دوم: عرض آن را b در نظر می‌گیریم. پس مختصات آن $(۲,b)$ است.

می‌دانیم فاصله‌ی $AC=AB=۴$. پس:

$$AC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(b-۰)^۲}=۴\Rightarrow ۴+b^۲=۱۶\Rightarrow b^۲=۱۲$$
$$\Rightarrow b=\pm ۲\sqrt{۳}$$

با توجه به صورت سؤال $b=-۲\sqrt{۳}$ صحیح است.

۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: فاصله‌ی AB برابر قطر دایره و وسط AB مرکز دایره است.

اول: مرکز دایره وسط AB است:

$$A(۲,-۲)\ ,\ B(۶,۴)\Rightarrow O(\frac{۲+۶}{۲}\ ,\ \frac{-۲+۴}{۲})=O(۴,۱)$$

دوم: شعاع دایره نصف طول AB است:

$$۲r=AB=\sqrt{(۶-۲)^۲+(۴+۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۳۶}=\sqrt{۵۲}$$
$$=۲\sqrt{۱۳}\Rightarrow r=\sqrt{۱۳}$$

سوم: فاصله‌ی هر نقطه روی دایره از مرکز برابر با شعاع است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱:

$$(۴,۱),(۳,۷)\Rightarrow\sqrt{(۴-۳)^۲+(۱-۷)^۲}=\sqrt{۱+۳۶}=\sqrt{۳۷}$$

گزینه‌ی ۲:

$$(۴,۱),(۷,۳)\Rightarrow\sqrt{(۷-۴)^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

گزینه‌ی ۳:

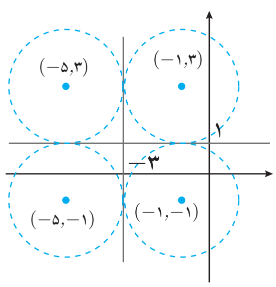
$$(۴,۱),(۶,۶)\Rightarrow\sqrt{(۶-۴)^۲+(۶-۱)^۲}=\sqrt{۴+۲۵}=\sqrt{۲۹}$$

گزینه‌ی ۴:

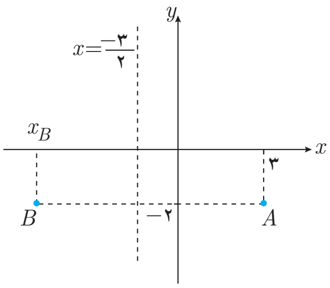
$$(۴,۱),(۵,۴)\Rightarrow\sqrt{(۵-۴)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: ۴ دایره با ویژگی‌های ذکر شده داریم، هر ۴ تا را رسم کنید. طبق راهنمایی:



۱۶. ۱ ۲ ۳ ۴



با رسم شکل داریم:

معلوم است نقطه‌ی A و B هم‌عرض هستند. ضمناً فاصله‌ی هر دو نقطه از خط $x=-\frac{۳}{۲}$ یکسان است. پس:

$$-\frac{۳}{۲}-x_B=۳-(-\frac{۳}{۲})\Rightarrow x_B=-۶$$

پس مختصات نقطه‌ی B به شکل $(-۶,-۲)$ است.

۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴

شیب اضلاع AB و AD معکوس و قرینه هم‌اند. پس شیب خط AB را به‌دست می‌آوریم:

$$A(۵,۱),\ B(۱۰,۴)\Rightarrow m_{AB}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵}$$

پس شیب AD برابر است با: $m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$

۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: معادله‌ی خطی که به دنبال آن هستیم به شکل $y=ax+b$ است که a شیب آن و b عرض از مبدأ آن است. چون دو خط با هم موازی‌اند پس شیب آن‌ها با هم برابر است:

$$۲y-۳x=۱\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

دوم: در صورت سؤال ذکر شده که $b=۵$ پس معادله خط مذکور $y=\frac{۳}{۲}x+۵$ است:

$$y=\frac{۳}{۲}x+۵\Rightarrow ۲y=۳x+۱۰\Rightarrow ۲y-۳x=۱۰$$

۱۹. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: خطوط $x=a$ بر خطوط $y=b$ عمودند.

گزینه‌ی ۴: طبق راهنمایی داریم: $\frac{y-۱}{۲}=۳\Rightarrow\ y=۷$

۲۰. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: چون دو خط با هم موازی‌اند پس شیب آن‌ها برابر است:

$$y=۳x-۴\Rightarrow m=۳$$

دوم: خطی با شیب ۳ که از $A(۲,-۱)$ می‌گذرد:

$$y+۱=۳(x-۲)\Rightarrow y+۱=۳x-۶\Rightarrow y+۷=۳x$$

۲۱. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: معادله‌ی خطی که از مبدأ و $(a,۳)$ می‌گذرد را می‌یابیم و نقطه‌ی سوم را در آن قرار می‌دهیم.

اول: طبق راهنمایی معادله‌ی خطی که از مبدأ و $(a,۳)$ می‌گذرد را می‌یابیم:

$$(۰,۰)\,,\,(a,۳) \Rightarrow m=\frac{۳-۰}{a-۰}=\frac{۳}{a} \xrightarrow{\text{معادله خط}}$$

$$y-۰=\frac{۳}{a}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۳}{a}x$$

دوم: مختصات نقطه‌ی $(۶,۴a+۱)$ را در این خط قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=\frac{۳}{a}x \\ (۶,۴a+۱) \end{cases} \Rightarrow ۴a+۱=\frac{۳}{a}(۶) \Rightarrow ۴a^۲+a=۱۸$$

$$\Rightarrow ۴a^۲+a-۱۸=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۴(۴)(-۱۸)=۲۸۹$$

$$\Rightarrow a=\frac{-۱\pm ۱۷}{۸}=\begin{cases} a=-\frac{۹}{۴} \\ a=۲ \end{cases}$$

۲۲. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: شیب خط AB را می‌یابیم:

$$A(۲,۱)\,,\,B(۰,-۳) \Rightarrow m_{AB}=\frac{۱+۳}{۲-۰}=۲$$

پس خط مورد نظر سؤال دارای شیب $(-\frac{۱}{۲})$ است و همچنین از مبدأ مختصات می‌گذرد:

$$y-۰=-\frac{۱}{۲}(x-۰) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x$$

دوم: محل برخورد با $y=۳$:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{۱}{۲}x \\ y=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x=۳ \Rightarrow x=-۶$$

۲۳. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: M وسط BC است:

$$B(۳,-۵)\,,\,C(۵,-۳) \Rightarrow M\,(\frac{۳+۵}{۲}\,,\,\frac{-۵-۳}{۲})=M\,(۴,-۴)$$

دوم: معادله‌ی خط AM :

$$A(۲,۴), M\,(۴,-۴) \Rightarrow m_{AM}=\frac{۴+۴}{۲-۴}=-۴$$

معادله‌ی خط:

$$y-۴=-۴(x-۲) \Rightarrow y-۴=-۴x+۸ \Rightarrow y=-۴x+۱۲$$

عرض از مبدأ این خط ۱۲ است.

۲۴. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: ضلع AD و BC موازی‌اند.

اول: شیب خط BC را می‌یابیم:

$$B(-۱,۲)\,,\,C(۵,۱) \Rightarrow m_{BC}=\frac{۲-۱}{-۱-۵}=-\frac{۱}{۶}$$

پس شیب خط AD هم $-\frac{۱}{۶}$ است.

دوم: معادله‌ی خط AD:

$$A(۲,۵),\, m_{AD}=-\frac{۱}{۶} \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}} y-۵=-\frac{۱}{۶}(x-۲)$$

$$\Rightarrow ۶y-۳۰=-x+۲ \Rightarrow ۶y+x=۳۲$$

۲۵. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی داده شده بگذرد را می‌یابیم:

$$A(m,-۱)\,,\,B(۱,۱-۲m) \Rightarrow\ m_{AB}=\frac{۱-۲m+۱}{۱-m}$$

$$=\frac{۲-۲m}{۱-m}=۲ \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}} y+۱=۲(x-m)$$

$$\Rightarrow\ y=۲x-۲m-۱$$

عرض از مبدأ این خط $-۲m-۱=۳$ است، پس $m=-۲$.

دوم: تقاطع خط با محور xها:

$$y=۰ \Rightarrow ۲x-۲m-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۲m+۱}{۲}$$

$$=\frac{۲(-۲)+۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۲۶. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: معادله‌ی خط را می‌یابیم و خروجی آن را به ازای $x=۱۴۰۳$ می‌یابیم:

$$(۱۳۸۵\ ,\ ۵۷)\,,\ (۱۳۹۵,۱۰۳) \Rightarrow m=\frac{۱۰۳-۵۷}{۱۳۹۵-۱۳۸۵}=\frac{۴۶}{۱۰}=۴/۶$$

معادله‌ی خط: $y-۵۷=۴/۶(x-۱۳۸۵)$

دوم: مقدار $x=۱۴۰۳$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$y-۵۷=۴/۶(۱۴۰۳-۱۳۸۵) \Rightarrow y=۱۳۹/۸$$

۲۷. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: وسط AB را می‌یابیم:

$$A(۱۴,۳)\,,\,B(۱۰,-۱۳) \Rightarrow O(\frac{۱۴+۱۰}{۲},\frac{۳-۱۳}{۲})=O(۱۲,-۵)$$

دوم: شیب پاره‌خط AB :

$$m_{AB}=\frac{۳-(-۱۳)}{۱۴-۱۰}=\frac{۱۶}{۴}=۴$$

چون شیب AB برابر ۴ است، پس شیب عمودمنصف آن $-\frac{۱}{۴}$ است.

سوم: معادله‌ی عمودمنصف را طوری می‌نویسیم که شیب آن $-\frac{۱}{۴}$ است و از $O(۱۲,-۵)$ می‌گذرد:

$$y+۵=-\frac{۱}{۴}(x-۱۲) \Rightarrow y+۵=-\frac{۱}{۴}x+۳$$

$$\Rightarrow ۴y+۲۰=-x+۱۲ \Rightarrow ۴y+x=-۸$$

۲۸. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم شیب خط حاصل تقسیم تغییرات عرض به تغییرات طول یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ است. پس:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-۳ \Rightarrow \frac{\Delta y}{۳}=-۳ \Rightarrow \Delta y=-۹$$

پس عرض آن نقطه ۹ واحد کم می‌شود.

۲۹. ۱ ۲ ۳ ۴

خط مذکور از نقطه‌ی $A(p,۰)$ و $B(۰,q)$ می‌گذرد:

$$m_{AB}=\frac{q-۰}{۰-p}=-\frac{q}{p} \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}} y-q=-\frac{q}{p}(x-۰)$$

$$\Rightarrow y-q=-\frac{q}{p}x \Rightarrow py-pq=-qx \Rightarrow py+qx=pq$$

$$\xrightarrow{\div pq} \frac{y}{q}+\frac{x}{p}=۱$$

تذکر

نتیجه‌ی این تست را حفظ کنید!

۳۰. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: تقاطع قطرهای دایره، مرکز دایره است.

اول: طبق راهنمایی تقاطع دو قطر مرکز دایره است. پس مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=۳x-۱ \\ x-۲y+۳=۰ \Rightarrow x-۲(۳x-۱)+۳=۰ \\ \Rightarrow -۵x+۵=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

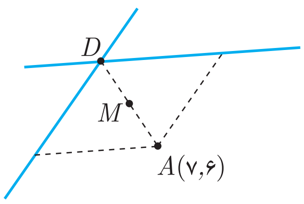
پس مرکز دایره $O(۱,۲)$ است.

دوم: دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصله‌ی مرکز تا مبدأ مختصات همان شعاع دایره است:

$$r=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

۳۱. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: خطوط داده شده متقاطعند و نقطه‌ی A روی هیچ یک از آنان نیست.



اول: وضعیت خطوط داده شده و نقطه‌ی A با توجه به راهنمایی به شکل رو به رو است:

دوم: برای یافتن مختصات نقطه‌ی D کافیست دو خط داده شده را تقاطع دهیم:

$$\begin{matrix} ۲y-۳x=۱۱ \Rightarrow ۶y-۹x=۳۳ \\ ۳y+۴x=۸ \Rightarrow ۶y+۸x=۱۶ \end{matrix} \Rightarrow ۱۷x=-۱۷ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۴$$

پس مختصات نقطه‌ی D به شکل $D(-۱,۴)$ است.

سوم: نقطه‌ی M (وسط دو قطر) نقطه‌ی میانی A و D است:

$$A(۷,۶)\ ,\ D(-۱,۴) \Rightarrow M\left(\frac{۷-۱}{۲},\frac{۶+۴}{۲}\right)=M(۳,۵)$$

۳۲. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: مختصات نقطه‌ی A را از تقاطع اضلاع AB و AC می‌یابیم:

$$\begin{matrix} ۲y-x=۳ \\ y-۲x=۵ \Rightarrow ۲y-۴x=۱۰ \end{matrix} \Rightarrow ۳x=-۷ \Rightarrow x=-\frac{۷}{۳} \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}$$

پس $A(-\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۳})$ است.

دوم: شیب ارتفاع AH معکوس و قرینه‌ی ضلع BC است:

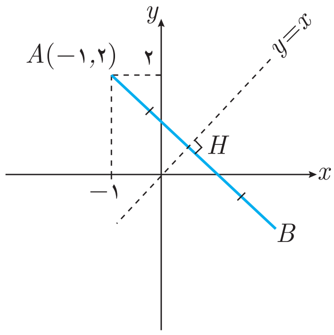
$$BC: ۲y+۳x=۶ \Rightarrow m_{BC}=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow m_{AH}=\frac{۲}{۳}$$

معادله‌ی خط AH:

$$y-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}(x+\frac{۷}{۳}) \Rightarrow ۳y-۱=۲x+\frac{۱۴}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳y-۲x=\frac{۱۷}{۳} \Rightarrow ۹y-۶x=۱۷$$

۳۳. ۱ ۲ ۳ ۴

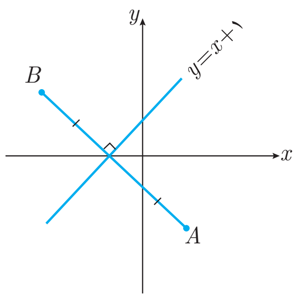


می‌دانیم قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم نقطه‌ی $B(y,x)$ است.

پس قرینه‌ی نقطه‌ی A نقطه‌ی $B(۲,-۱)$ است.

راه حل اصلی هم این است که از نقطه‌ی مفروض خطی بر $y=x$ عمود کنید. اگر محل تقاطع این دو خط نقطه‌ی H باشد آن‌گاه H را می‌توانید با برابر قرار دادن خطوط $y=x$ و معادله‌ی خط AB به دست آورید. H وسط A و B است. پس مختصات B به‌دست می‌آید.

۳۴. ۱ ۲ ۳ ۴



راهنمایی: قرینه‌ی نقطه‌ی A را B در نظر بگیرید. AB باید بر خط مذکور عمود باشد و فاصله‌ی نقاط A و B از خط یکسان باشد.

اول: طبق راهنمایی نقطه‌ی B را به شکل $B(\alpha,\beta)$ در نظر می‌گیریم.

اولاً شیب خط AB باید معکوس و قرینه‌ی شیب خط $y=x+۱$ باشد:

$$A(۲,-۳)\ ,\ B(\alpha,\beta) \Rightarrow m_{AB}=\frac{\beta+۳}{\alpha-۲}=-۱$$

$$\Rightarrow \beta+۳=۲-\alpha \Rightarrow \alpha+\beta=-۱$$

دوم: فاصله‌ی نقاط A و B از خط باید یکسان باشد:

$$y-x-1=0$$

$$\left.\begin{matrix}A(2,-3)\\B(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{|-3-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|\beta-\alpha-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\Rightarrow|\beta-\alpha-1|=6\Rightarrow\begin{cases}\beta-\alpha-1=6\Rightarrow\beta-\alpha=7\\\beta-\alpha-1=-6\Rightarrow\beta-\alpha=-5\end{cases}$$

سوم: حل دو معادله و دو مجهول:

$$\begin{cases}\beta-\alpha=7\\\alpha+\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=3\\\alpha=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta-\alpha=-5\\\alpha+\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-3\\\alpha=2\end{cases}$$

چهارم: از شکل معلوم است که نقطه‌ی B باید دارای طول منفی باشد، پس $B(-4,3)$ صحیح است. ضمناً دقت کنید که قرینه نقطه‌ی A نمی‌تواند خودش باشد.

۳۵. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: معادله‌ی خط عمود را بنویسید و با خط داده شده تقاطع دهید.

اول: خط داده شده دارای شیب $-\frac{2}{3}$ است:

$$2x+3y=5\Rightarrow3y=-2x+5\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

دوم: معادله‌ی خط عمود که از $A(2,-3)$ می‌گذرد و شیب آن معکوس و قرینه‌ی خط داده شده یعنی برابر $\frac{3}{2}$ است را می‌نویسیم:

$$y+3=\frac{3}{2}(x-2)\Rightarrow y+3=\frac{3}{2}x-3\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-6$$

سوم: تقاطع دو خط:

$$\begin{cases}2x+3y=5\\y=\frac{3}{2}x-6\end{cases}$$

$$\Rightarrow2x+3(\frac{3}{2}x-6)=5\Rightarrow2x+\frac{9}{2}x-18=5$$

$$\Rightarrow\frac{13x}{2}=23\Rightarrow x=\frac{46}{13}\Rightarrow y=\frac{3}{2}(\frac{46}{13})-6=\frac{69}{13}-6=-\frac{9}{13}$$

۳۶. ۱ ۲ ۳ ۴

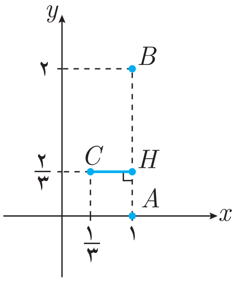
راهنمایی: از تقاطع ۳ خط داده شده، سه رأس مثلث را به‌دست آورید و در یک دستگاه رسم کنید.

اول: طبق راهنمایی:

$$\begin{cases}x+y=1\\x=1\end{cases}\Rightarrow A(1,0)\quad,\quad\begin{cases}y=2x\\x=1\end{cases}\Rightarrow B(1,2)\quad,$$

$$\begin{cases}x+y=1\\y=2x\end{cases}\Rightarrow C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

دوم: رسم ۳ نقطه در دستگاه مختصات:



معلوم است که بزرگ‌ترین ضلع $AB=2$ است. پس کوچک‌ترین ارتفاع بر آن وارد می‌شود. بنابراین کوچک‌ترین ارتفاع CH است که روی خط $y=\frac{2}{3}$ قرار گرفته است.

۳۷. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: باید دنبال خطی بگردیم که با خط مذکور موازی نباشد. شیب خط داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$2y+3x=1\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\Rightarrow m=-\frac{3}{2}$$

دوم: بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱: $2x+3y=1\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

گزینه‌ی ۲: $5+y=-\frac{3}{2}x\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x-5$

گزینه‌ی ۳: $2y=5-3x\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

گزینه‌ی ۴: $2y+3x=5\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

۳۸. ۱ ۲ ۳ ۴

شرط آن که دو خط $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ همدیگر را قطع نکنند این است که موازی باشند و منطبق نباشند. یعنی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$:

$$\begin{cases}9x+my=6\\mx+y=2m\end{cases}$$

$$\frac{9}{m}=\frac{m}{1}\neq\frac{6}{2m}$$

$$\frac{9}{m}=m\Rightarrow m^2=9\Rightarrow m=\pm3$$

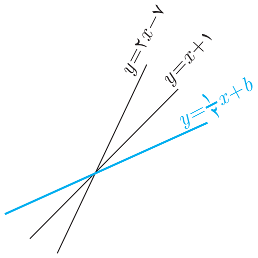
$$\begin{cases}\text{اگر } m=3\Rightarrow\frac{9}{3}=\frac{3}{1}\neq\frac{6}{2(3)}\ \checkmark\\\text{اگر } m=-3\Rightarrow\frac{9}{-3}=-\frac{3}{1}\neq\frac{6}{2(-3)}\ \checkmark\end{cases}$$

هر دو مقدار $m=3$ و $m=-3$ قابل قبولند.

۳۹. ۱ ۲ ۳ ۴

نکته دو خط قرینه نسبت به $y=x$ و خطوط موازی آن دارای شیب‌های معکوس هم‌اند.

اول: طبق راهنمایی خط قرینه دارای شیب $\frac{۱}{۲}$ است. همچنین از نقطه‌ی تقاطع دو خط می‌گذرد.



دوم: محل تقاطع دو خط $y=x+۱$ و $y=۲x-۷$:

$$\begin{cases} y=x+۱ \\ y=۲x-۷ \end{cases} \Rightarrow x+۱=۲x-۷ \Rightarrow x=۸ \Rightarrow y=۹$$

سوم: خط قرینه هم از نقطه‌ی $(۸,۹)$ می‌گذرد.

$$۹=\frac{۱}{۲}(۸)+b \Rightarrow b=۵$$

پس $y=\frac{۱}{۲}x+۵$ معادله‌ی خط قرینه است:

$$۲y=x+۱۰ \Rightarrow ۲y-x=۱۰$$

۴۰. ۱ **۲** ۳ ۴

راهنمایی: شیب خط مورد نظر را m در نظر بگیرید.

اول: خط مورد نظر را با شیب m در نظر می‌گیریم. از نقطه‌ی $A(۱,۲)$ می‌گذرد:

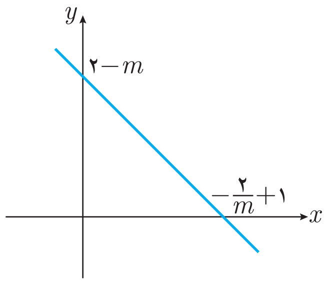
$$y-۲=m(x-۱)$$

دوم: محل برخورد تابع را با محورهای مختصات می‌یابیم:

$$y=۰ \Rightarrow -۲=m(x-۱) \Rightarrow x-۱=-\frac{۲}{m} \Rightarrow x=-\frac{۲}{m}+۱$$

$$x=۰ \Rightarrow y=۲-m$$

پس نمودار خط به شکل روبه‌روست:



سوم: مساحت مثلث تشکیل شده برابر است با:

$$S=\frac{(۲-m)(-\frac{۲}{m}+۱)}{۲}=\frac{۹}{۲} \Rightarrow -\frac{۴}{m}+۲+۲-m=۹$$

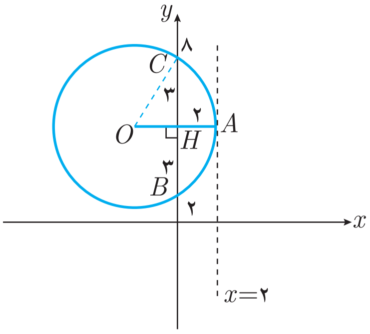
$$\Rightarrow \frac{-۴-m^۲-۵m}{m}=۰ \Rightarrow m^۲+۵m+۴=۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۱ \\ m=-۴ \end{cases}$$

پس دو خط با ویژگی مورد نظر داریم.

۴۱. **۱** ۲ ۳ ۴

اول: دایره‌ای با این مشخصات رسم می‌کنیم:



خط OA بر وتر جدا شده روی محور yها عمود است. فاصله‌ی $HA=۲$ است و $HC=HB=۳$ است.

دوم: شعاع دایره OA است و داریم:

$$OA=OH+۲$$

از طرفی شعاع دایره OC است و داریم:

$$OC=\sqrt{OH^۲+۳^۲}$$

با تساوی این دو مقدار داریم:

$$OH+۲=\sqrt{OH^۲+۹} \Rightarrow OH^۲+۴OH+۴=OH^۲+۹$$

$$\Rightarrow OH=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

سوم: پس شعاع دایره برابر است با:

$$OA=OH+۲=۱/۲۵+۲=۳/۲۵$$

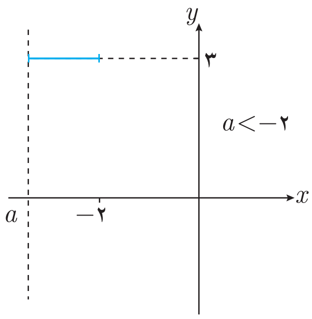
۴۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مذکور همان شعاع دایره است:

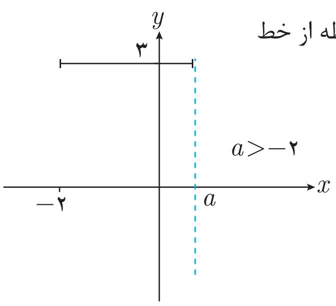
$$\begin{matrix} O(۲,-۱) \\ ۳x-۴y=۰ \end{matrix} \Rightarrow \frac{|۳(۲)-۴(-۱)|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

۴۳. ۱ ۲ **۳** ۴

اول: یک بار خط $x=a$ را سمت راست نقطه داده شده و بار دیگر سمت چپ آن در نظر می‌گیریم:



$$-۲-a=\text{فاصله‌ی نقطه از خط}$$



$$a-(-۲)=a+۲=\text{فاصله‌ی نقطه از خط}$$

دوم: فاصله‌ی نقطه از خط را می‌توان با $|a+۲|$ نشان داد، چون:

$$|a+۲|=\begin{cases}a+۲ & a>-۲\\ -a-۲ & a<-۲\end{cases}$$

نکته می‌توان نتیجه گرفت فاصله‌ی نقطه $A(\alpha,\beta)$ از خط $x=a$ با $|\alpha-a|$ برابر است.

۴۴. ۱ ۲ **۳** ۴

اول: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ی $A'(۲,-۳)$ است. این نکته را حفظ کنید:

نکته قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ی $A'(-x,-y)$ است.

دوم: فاصله‌ی $A'(۲,-۳)$ را از خط $y=۵$ می‌یابیم.

فاصله‌ی مذکور $۵-(-۳)=۸$ واحد است.

۴۵. ۱ ۲ **۳** ۴

از رابطه‌ی فاصله نقطه از خط داریم:

$$\begin{cases}۴x+۳y-۱۸=۰\\ A(۷,۵)\end{cases}\Rightarrow \frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

۴۶. ۱ ۲ **۳** ۴

طبق رابطه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط داریم:

$$\begin{cases}۳y-۴x-a=۰\\ A(-۱,۲)\end{cases}\Rightarrow\frac{|۳(۲)-۴(-۱)-a|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۲$$

$$\Rightarrow|۱۰-a|=۱۰\Rightarrow\begin{cases}۱۰-a=۱۰\Rightarrow a=۰\\ ۱۰-a=-۱۰\Rightarrow a=۲۰\end{cases}$$

۴۷. ۱ ۲ **۳** ۴

راهنمایی: اگر قطر مربع d باشد، مساحت آن $\frac{d^۲}{۲}$ است.

فاصله‌ی رأس از قطر همان نصف طول قطر است:

پس: $$\begin{cases}A(۳,-۲)\\ y+x=۰\end{cases}\Rightarrow AH=\frac{|-۲+۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

پس قطر مربع $۲(\frac{۱}{\sqrt{۲}})=\sqrt{۲}$ است و مساحت مربع $S=\frac{d^۲}{۲}=\frac{(\sqrt{۲})^۲}{۲}=۱$ است.

۴۸. ۱ **۲** ۳ ۴

راهنمایی: طول ارتفاع AH همان فاصله‌ی رأس A از معادله‌ی خط BC است.

اول: طبق راهنمایی معادله‌ی خط BC را می‌یابیم:

$$B(۰,۳)\,,\ C(۴,۰)\Rightarrow m_{BC}=\frac{۳-۰}{۰-۴}=-\frac{۳}{۴}$$

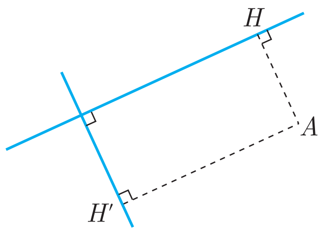
معادله‌ی خط: $y-۳=-\frac{۳}{۴}(x-۰)\Rightarrow y-۳=-\frac{۳}{۴}x$

دوم: فاصله‌ی رأس A از خط BC:

$$\begin{cases}۴y+۳x-۱۲=۰\\ A(۳,۲)\end{cases}\Rightarrow\frac{|۴(۲)+۳(۳)-۱۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

۴۹. ۱ **۲** ۳ ۴

راهنمایی: دو خط داده شده بر هم عمودند و نقطه‌ی داده شده روی هیچ یک از دو خط نیست.



اول: طبق راهنمایی فاصله‌ی نقطه‌ی A از دو خط، طول و عرض مستطیل است:

دقت کنید که دو خط بر هم عمودند:

$۲y+x=۶\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$

$۲x-y=۷\Rightarrow m'=۲$

همچنین دقت کنید که مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از خطوط صدق نمی‌کند.

دوم: فاصله‌ی نقطه‌ی A از دو خط:

$$\begin{cases}۲y+x-۶=۰\\ A(۸,۵)\end{cases}\Rightarrow AH=\frac{|۲(۵)+۸-۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\begin{cases}۲x-y-۷=۰\\ A(۸,۵)\end{cases}\Rightarrow AH'=\frac{|۲(۸)-۵-۷|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

سوم: پس مساحت مستطیل $S=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$ است.

۵۰. ۱ **۲** ۳ ۴

راهنمایی: نقطه‌ی مورد نظر را به شکل $(x,x-۱)$ در نظر می‌گیریم چون روی خط $y=x-۱$ است.

نقطه‌ی مذکور به شکل $(x\,,\,x-۱)$ است و فاصله‌ی آن از خط داده شده $\sqrt{۱۳}$ است:

$$\begin{cases}۲x-۳y-۵=۰\\ (x\,,\,x-۱)\end{cases}\Rightarrow\sqrt{۱۳}=\frac{|۲x-۳(x-۱)-۵|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}$$

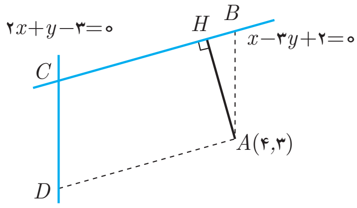
$$\Rightarrow\sqrt{۱۳}=\frac{|-x-۲|}{\sqrt{۱۳}}\Rightarrow|x+۲|=۱۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+۲=۱۳\Rightarrow x=۱۱\\ x+۲=-۱۳\Rightarrow x=-۱۵\end{cases}$$

۵۱. ۱ **۲** ۳ ۴

راهنمایی: دو خط داده شده موازی نیستند و ضمناً نقطه‌ی داده شده روی هیچ یک از دو خط داده شده نیست.

اول: طبق راهنمایی وضعیت خطوط و نقطه‌ی A به شکل زیر است. برای محاسبه‌ی مساحت متوازی‌الاضلاع لازم است طول قاعده‌ی BC و ارتفاع AH را داشته باشیم.



دوم: محاسبه‌ی طول BC، برای این کار معادله‌ی خط AB را می‌نویسیم. خط AB موازی CD است، پس شیب‌های برابر دارند. پس شیب AB، ۲- است. معادله‌ی خط AB:

$$A(4,3)\,,\ m=-2 \Rightarrow y-3=-2(x-4)$$
$$\Rightarrow y-3=-2x+8 \Rightarrow y=-2x+11$$

پیدا کردن مختصات B (تقاطع خط AB و CB):

$$\begin{cases} y=-2x+11 \\ x-3y+2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y=-2(3y-2)+11 \Rightarrow y=-6y+15$$
$$\Rightarrow 7y=15 \Rightarrow y=\frac{15}{7} \Rightarrow x=\frac{31}{7}$$

پس مختصات نقطه‌ی B به شکل $(\frac{31}{7}, \frac{15}{7})$ است.

مختصات C (تقاطع DC و BC):

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-3y+2=0 \end{cases} \Rightarrow x=1\,,\ y=1 \Rightarrow C(1,1)$$

طول BC:

$$\sqrt{(\frac{31}{7}-1)^2+(\frac{15}{7}-1)^2}=\sqrt{\frac{576}{49}+\frac{64}{49}}=\sqrt{\frac{640}{49}}=\frac{8\sqrt{10}}{7}$$

سوم: محاسبه‌ی AH:

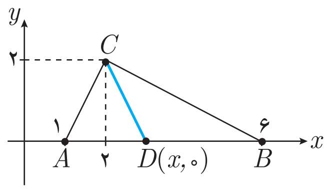
$$BC: x-3y+2=0\,,\ A(4,3) \Rightarrow AH=\frac{|4-3(3)+2|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

چهارم: محاسبه‌ی مساحت متوازی‌الاضلاع:

$$S=\frac{AH.BC}{2}=\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{8\sqrt{10}}{7}}{2}=\frac{12}{7}$$

۵۲. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: شکل را ببینید:



دوم: معادله‌ی خطوط AC و CB را می‌یابیم. فاصله‌ی نقطه‌ی D از هر دو خط برابر است.

$$A(1,0)\,,\ C(2,2) \Rightarrow AC: y-0=\frac{2-0}{2-1}(x-1) \Rightarrow y=2x-2$$

$$C(2,2)\,,\ B(6,0) \Rightarrow BC: y-0=\frac{0-2}{6-2}(x-6) \Rightarrow$$
$$y=-\frac{1}{2}x+3$$

سوم: فاصله‌ی D از هر دو خط: $D(x\,,0)$

$$\begin{matrix} y-2x+2=0 \\ y+\frac{1}{2}x-3=0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{|-2x+2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|\frac{1}{2}x-3|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}$$

$$\frac{|-2x+2|}{\sqrt{5}}=\frac{|x-6|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2=x-6 \Rightarrow x=\frac{8}{3} \\ -2x+2=6-x \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

معلوم است که $x=\frac{8}{3}$ صحیح است.

۵۳. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مذکور برابر شعاع دایره است.

$$2x+y+1=0 \Rightarrow \frac{|2(1)+2+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

دوم: ضمناً فاصله‌ی مرکز تا هر نقطه روی دایره برابر شعاع دایره است. پس باید نقاط را بررسی کنیم.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱: $(1,2)\,,\ (4,1) \Rightarrow \sqrt{(1-4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

گزینه‌ی ۲: $(1,2),\ (-2,2) \Rightarrow \sqrt{(1+2)^2+(2-2)^2}=3$

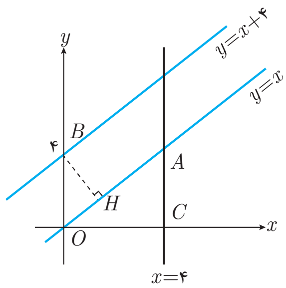
گزینه‌ی ۳: $(1,2),(0,4) \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{5}$

گزینه‌ی ۴: $(1,2)\,,\ (-2,3) \Rightarrow \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$

۵۴. ۱ ۲ ۳ ۴

راه حل اول:

اول: هر ۴ خط اشاره شده در صورت سؤال را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن‌ها (رئوس متوازی‌الاضلاع) را به‌دست می‌آوریم:



دوم: مختصات نقطه‌ی A به شکل $(4,4)$ است و برای به‌دست آوردن ارتفاع BH فاصله‌ی نقطه‌ی B از خط OA را می‌یابیم:

$$\begin{matrix} y-x=0 \\ B(0,4) \end{matrix} \Rightarrow BH=\frac{|4-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

سوم: قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع (OA) را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix} O(0,0) \\ A(4,4) \end{matrix} \Rightarrow OA=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

چهارم: مساحت متوازی‌الاضلاع:

$$S = BH.OA = 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2} = 16$$

راه حل دوم: از شکل معلوم است که قاعده متوازی‌الاضلاع $OB = 4$ و ارتفاع آن $OC = 4$ است، پس مساحت آن $4\times 4 = 16$ است.

۵۵. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: مرکز دایره روی $y = x$ است، پس مختصات آن به شکل $O(x,x)$ است.

دوم: فاصله‌ی مرکز از نقطه‌ی مذکور با فاصله‌ی آن از خط داده شده باید برابر باشد: $y - 2x = 0$

$$\frac{|x-2x|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{(x-6)^2+(x-3)^2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{5}} = \sqrt{2x^2-18x+45}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5} = 2x^2-18x+45 \Rightarrow x^2 = 10x^2-90x+225$$

$$\Rightarrow 9x^2-90x+225=0 \Rightarrow x^2-10x+25=0$$

$$\Rightarrow (x-5)^2=0 \Rightarrow x=5$$

سوم: پس شعاع دایره $r=\sqrt{(x-6)^2+(x-3)^2}=\sqrt{5}$ است.

۵۶. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: فاصله‌ی بین دو خط برای خطوط موازی تعریف شده است.

اول: دو خط موازی‌اند. پس شیب آن‌ها با هم برابر است:

$$\begin{matrix} ax+by-6=0 \Rightarrow m=-\frac{a}{b} \\ \sqrt{3}x-y+1=0 \Rightarrow m'=\sqrt{3} \end{matrix} \Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{3} \Rightarrow b=-\frac{a}{\sqrt{3}}$$

دوم: فاصله‌ی بین دو خط: برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط نقطه‌ی $(0,1)$ را روی خط اول در نظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را با خط بعدی محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} ax+by-6=0 \\ (0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{|b(1)-6|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|-\frac{a}{\sqrt{3}}-6|}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{3}}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |-\frac{a}{\sqrt{3}}-6| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}a^2} = \frac{|a|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |\frac{-a-6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}| = |\frac{a}{\sqrt{3}}|$$

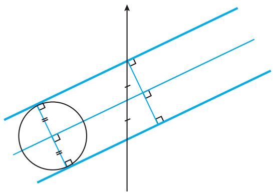
$$\Rightarrow |-a-6\sqrt{3}| = |a|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a-6\sqrt{3}=a \Rightarrow a=-3\sqrt{3} \\ -a-6\sqrt{3}=-a \Rightarrow -6\sqrt{3}=0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۵۷. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: دو خط داده شده موازی‌اند و مرکز دایره هم روی خطی موازی با آن‌هاست.

اول: طبق راهنمایی، مرکز دایره روی خط $y=2x+5$ است. به شکل روبه‌رو دقت کنید:



از شکل معلوم است که مرکز دایره روی خطی موازی این دو خط است که عرض از مبدأ آن وسط عرض از مبدأ دو خط مذکور است.

دوم: فاصله‌ی بین دو خط موازی قطر دایره است:

$$y=2x \Rightarrow y-2x=0$$

$$y=2x+10 \Rightarrow y-2x-10=0$$

$$\Rightarrow \text{فاصله دو خط} = \frac{|-10-0|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

پس شعاع دایره $r=\sqrt{5}$ است.

سوم: چون مرکز دایره روی خط $y=2x+5$ است، پس مختصات آن به شکل $O(x,2x+5)$ است که فاصله‌ی آن با مبدأ $r=\sqrt{5}$ است:

$$\sqrt{(2x+5)^2+x^2}=\sqrt{5} \Rightarrow 4x^2+20x+25+x^2=5$$

$$\Rightarrow 5x^2+20x+20=0 \Rightarrow x^2+4x+4=0$$

$$\Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=1$$

۵۸. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: فاصله‌ی $(3\sqrt{5}, b)$ از دو خط مذکور باید یکسان باشد:

$$\begin{matrix} y-2x=0 \\ x-2y=0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{|b-2(3\sqrt{5})|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|3\sqrt{5}-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$\Rightarrow |b-6\sqrt{5}| = |3\sqrt{5}-2b|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-6\sqrt{5}=3\sqrt{5}-2b \Rightarrow 3b=9\sqrt{5} \Rightarrow b=3\sqrt{5} \\ b-6\sqrt{5}=2b-3\sqrt{5} \Rightarrow b=-3\sqrt{5} \end{cases}$$

دوم: محاسبه‌ی مقدار شعاع: (فاصله‌ی مرکز تا یکی از خطوط)

$$b=3\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|b-6\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}=3$$

$$b=-3\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|b-6\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}=9$$

۵۹. ۱ ۲ ۳ ۴

اول: دو خط مذکور موازی‌اند. معادله‌ی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$A(0,0),\ B(1,1) \Rightarrow m=\frac{1-0}{1-0}=1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}}$$

$$y-0=1(x-0) \Rightarrow y=x$$

$$C(1,3),\ D(2,4) \Rightarrow m=\frac{4-3}{2-1}=\frac{1}{1}=1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}}$$

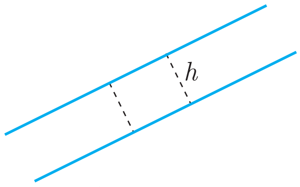
$$y-3=1(x-1) \Rightarrow y=x+2$$

دوم: فاصله‌ی خطوط از هم:

$$\begin{matrix} y-x=۰ \\ y-x-۲=۰ \end{matrix} \Rightarrow \text{فاصله دو خط} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|-۲-۰|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

۶۰. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: دقت کنید که دو خط داده شده موازی‌اند و فاصله‌ی آن‌ها از هم طول ضلع مربع است.



همان‌طور که ذکر شد، دو خط داده شده موازی‌اند و فاصله‌ی آن‌ها از هم برابر ضلع مربع است:

$$۲x+۳y-۳=۰$$
$$۴x+۶y-۸=۰ \Rightarrow ۲x+۳y-۴=۰$$

فاصله‌ی بین خطوط برابر است با:

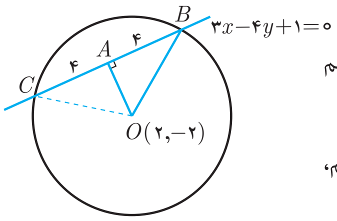
$$h=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \qquad \frac{|-۳+۴|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$$

پس مساحت مربع $\frac{۱}{۱۳}$ است.

۶۱. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: یک دایره‌ی فرضی با خط مذکور رسم کنید و از مرکز دایره بر خط عمود کنید.

اول: طبق راهنمایی شکل را رسم می‌کنیم:



اگر از O به نقاط B و C وصل کنیم، مثلث‌های OAB و OAC هر دو قائم‌الزاویه و دارای وتر و یک ضلع مشترک (OA) هستند، پس با هم برابرند. می‌توان نتیجه گرفت $AB=AC=۴$

دوم: فاصله‌ی OA همان فاصله‌ی نقطه‌ی O از خط مذکور است:

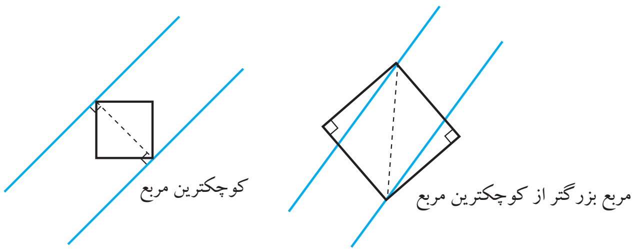
$$\frac{|۳x-۴y+۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|۳(۲)-۴(-۲)+۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۶+۸+۱}{۵}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

سوم: قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OAB:

$$OB^۲=OA^۲+AB^۲ \Rightarrow OB^۲=۹+۱۶=۲۵ \Rightarrow OB=۵$$

۶۲. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنمایی: کوچک‌ترین مساحت مربوط به کوتاه‌ترین قطر است و کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه از دو خط موازی، همان فاصله بین دو خط است.



اول: طبق راهنمایی دو خط داده شده موازی هستند. کوتاه‌ترین قطر، فاصله‌ی بین دو خط موازی است.

دوم: فاصله‌ی بین دو خط موازی را می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۲x-۴y+۵=۰ \\ x-۲y+۳=۰ \Rightarrow ۲x-۴y+۶=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین خطوط} = \frac{|۶-۵|}{\sqrt{۲^۲+۴^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲۰}}$$

سوم: اگر قطر یک مربع d باشد، مساحت آن $\frac{d^۲}{۲}$ است:

$$S=\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۲۰}})^۲}{۲}=\frac{۱}{۴۰}$$

۶۳. ۱ ۲ ۳ ۴

> **نکته** قرینه‌ی یک خط نسبت به یک نقطه، خطی موازی با آن است که فاصله‌ی نقطه‌ی مذکور از دو خط یکسان است.

اول: خط قرینه را به شکل زیر در نظر می‌گیریم: $x+۳y=k$

دوم: فاصله‌ی $A(۱,۱)$ از دو خط برابر است:

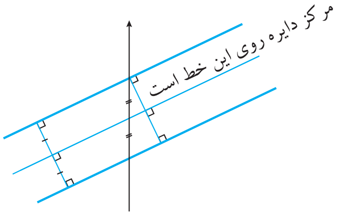
$$\begin{matrix} x+۳y-k=۰ \\ x+۳y-۵=۰ \end{matrix} \Rightarrow \frac{|۱+۳-k|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{|۱+۳-۵|}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow |۴-k|=۱$$

$$\begin{cases} ۴-k=۱ \Rightarrow k=۳ \\ ۴-k=-۱ \Rightarrow k=۵ \end{cases}$$

دقت کنید $k=۵$ صحیح نیست چون قرینه‌ی خط، خودش نمی‌شود مگر اینکه نقطه روی خط باشد.

۶۴. ۱ ۲ ۳ ۴

مرکز دایره‌هایی که بر دو خط $y=۲x+۲$ و $y=۲x-۴$ مماسند روی خط $y=۲x+\frac{۲-۴}{۲}$ قرار دارد.



۶۵. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم معادله‌ی درجه دوم ریشه‌ی مضاعف دارد اگر $\Delta=۰$ باشد:

$$x^۲-x-k=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۴(۱)(-k)=۰ \Rightarrow k=-\frac{۱}{۴}$$

۶۶. ۱ ۲ ۳ ۴

> **نکته** می‌دانیم اگر $\alpha=۲$ ریشه‌ی مضاعف درجه‌ی دوم باشد، معادله‌ی آن به شکل $k(x-\alpha)^۲=۰$ است.

طبق نکته معادله باید به شکل $-۲(x-۲)^۲=۰$ باشد:

$$-۲x^۲+mx+n=-۲(x-۲)^۲$$
$$\Rightarrow -۲x^۲+mx+n=-۲x^۲+۸x-۸$$

پس $m=۸$ و $n=-۸$ است و $m+n=۰$ است.