درس اول و دوم

استدلال و اثبات در هندسه

در روش اثبات ریاضی، از مواردی که قبلاً ثابت شده یا پذیرفته شده‌اند، حکم‌هایی که باید ثابت کرد را نتیجه می‌گیریم.

تذکر به فرآیند نتیجه‌گیری «استدلال» می‌گویند. به مواردی که قبلاً ثابت شده‌اند «قضیه» می‌گویند. به مواردی که درستی آن‌ها پذیرفته شده است «اصول موضوع» می‌گویند. یک ریاضی‌دان معمولاً حدس‌های خود را به صورت عبارت‌های ریاضی بیان می‌کند، این عبارت‌ها «گزاره» نام دارند. هر حکم از یک یا چند گزاره تشکیل شده است.

اصول موضوع و قضیه‌ها در هندسه

تعریف **«اصول موضوع» حکم‌هایی هستند که درستی آن‌ها پذیرفته شده است.**

«اقلیدس» برای هندسه تنها پنج اصل موضوع ارائه کرده بود. در جدول زیر چند اصل موضوع را مشاهده می‌کنیم.

چند نمونه از اصول موضوع	
۱)	از هر دو نقطه دقیقاً یک خط راست می‌گذرد.
۲)	هر دو خط متقاطع دقیقاً در یک نقطه تقاطع می‌کنند.
۳)	از هر نقطه خارج خط تنها یک خط موازی با آن خط می‌توان رسم کرد.

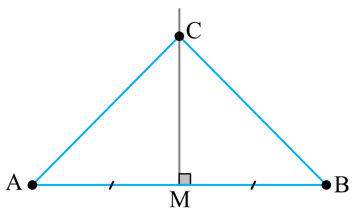
تعریف **منظور از قضیه‌ها، حکم‌هایی است که درستی یا صحت آن‌ها به کمک اثبات ریاضی تأیید شده باشد.**

ساختار اثبات در هندسه

هر اثبات هندسی از دو بخش کلی تشکیل شده است:

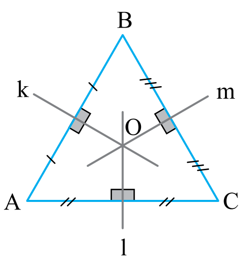
فرض‌ها	داده‌های مسأله که پذیرفته شده‌اند.
حکم	مواردی که از فرض‌ها نتیجه می‌شوند ولی تاکنون اثبات نشده‌اند.

مثال: در سال هفتم آموختید که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. این قضیه را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:



فرض‌ها	«پاره‌خط CM، عمودمنصف پاره‌خط AB» است.
حکم	$CA=CB$

مسأله‌ی ۱ : در مسأله‌ی زیر فرض و حکم را مشخص کنید:
«ثابت کنید در هر مثلث عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.»



راه‌حل: برای این مسأله ابتدا یک شکل ترسیم می‌کنیم. مثلث ABC و عمودمنصف‌های l، k و m را در شکل مشخص می‌کنیم. حال باید ثابت کنیم خطوط l، k و m همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. بنابراین می‌توان چنین نوشت:

فرض‌ها	« مثلث ABC»، «خط k عمودمنصف AB»، «خط l عمودمنصف AC» و «خط m عمودمنصف BC» است.
حکم	l، k و m در نقطه‌ی O همدیگر را قطع می‌کنند.

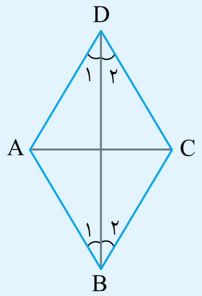
نتیجه: پس از مشخص نمودن فرض‌ها و حکم‌ها، با استفاده از «اصول موضوع» و «قضیه‌ها» به اثبات حکم می‌پردازیم. بنابراین برای اثبات حکم در هندسه، به‌طور خلاصه گام‌های زیر برداشته می‌شود:

گام ۱: فرض‌ها و حکم مسأله را مشخص کنید.

گام ۲: بر اساس فرض‌ها و حکم، یک شکل دقیق بکشید.

گام ۳: بر اساس فرض‌ها، قضیه‌ها و اصول، گزاره‌هایی را بنویسید و دلیل هر یک را مشخص کنید.

مسأله‌ی ۲: با توجه به شکل زیر اثبات را کامل کنید:

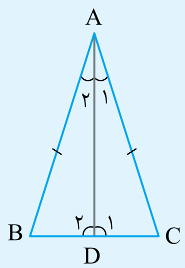


فرض‌ها	«BD نیمساز $A\hat{D}C$ است» و «$\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$».
حکم	$\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{CBD}$

استدلال	گزاره
....	۱) $\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$
فرض مسأله	۲) $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$
ضلع مشترک	۳) $BD=BD$
(زض‌ز)	۴)...............

راه‌حل: تساوی $\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$ به دلیل نیمساز بودن BD درست است. همچنین با توجه به گزاره‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان فهمید دو مثلث ABD و CBD به حالت دو زاویه و ضلع بین همنهشت هستند. در نتیجه گزاره‌ی (۴) به شکل $\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{CBD}$ نوشته می‌شود.

مسأله‌ی ۳: برای اثبات حکم زیر، مریم چنین استدلال کرده است:



فرض‌ها	«مثلث ABC متساوی الساقین» و «AD نیمساز زاویه‌ی A» است.
حکم	$BD=DC$

استدلال	گزاره
AD نیمساز $\hat{A}$	۱) $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$
AD نیمساز $\hat{A}$	۲) $\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$
ضلع مشترک	۳) $AD=AD$
(زض‌ز)	۴) $\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ADC}$
اجزای متناظر	۵) $BD=DC$

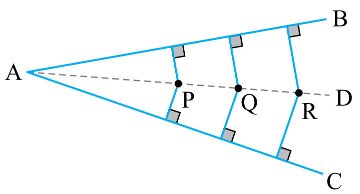
آیا استدلال مریم معتبر است؟

راه‌حل: خیر، توجه کنید که گزاره‌ی دوم، یعنی $\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$ از نیمساز بودن AD نتیجه نمی‌شود، زیرا AD نیمساز زاویه‌ی A می‌باشد.

بررسی استدلال‌ها

یک حکم ریاضی بعد از اثبات شدن همواره معتبر است. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: در سال هفتم ثابت کردید که هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. این حکم دو نتیجه‌ی ضمنی را در خود دارد.

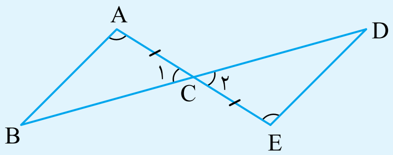


یکم: هر نقطه‌ای مثل P، Q و R و.... را روی نیمساز AD درنظر بگیریم فاصله‌ی آن از AB و AC برابر است.

دوم: این حکم برای هر زاویه برقرار است. بنابراین با وجود این‌که اثبات ریاضی برای یک نقطه مثل P و یک زاویه مثل $B\hat{A}C$ صورت گرفته است، از آن‌جایی که نقطه و زاویه دلخواه هستند می‌توان گفت حکم همواره برقرار است.

نکته احکام ریاضی در صورت اثبات در همه‌جا معتبر هستند.

مسأله‌ی ۴: مینا و مهرگان می‌خواهند حکم زیر را ثابت کنند.



فرض‌ها	«C وسط AE» و «$\hat{E}=\hat{A}$» است.
حکم	$\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{EDC}$

برای این کار هر یک چنین می‌کنند:

مینا: شکل را با خط‌کش و پرگار رسم کردم و دیدم سه ضلع مثلث‌ها مساوی هستند، پس دو مثلث مساوی‌اند.

مهرگان: در کتاب سال هشتم ثابت شده بود $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ و چون C وسط AE است، داریم $AC=CE$. پس دو مثلث به حالت «زض‌ز» مساوی هستند.

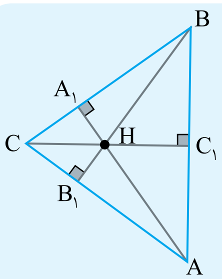
استدلال کدام یک معتبر است؟

راه‌حل: **استدلال مینا:** مینا تنها به رسم شکل پرداخته است و از هیچ‌گونه اصول و قضایا استفاده نکرده است، پس اثبات وی پذیرفتنی نیست.

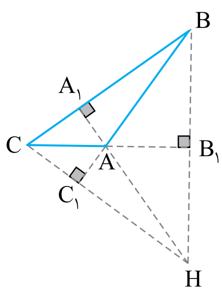
استدلال مهرگان: در اثبات هندسی ارجاع به کتاب سال گذشته و ... مجاز نیست، در نتیجه استدلال مهرگان نیز چندان معتبر نیست.

مسأله‌ی ۵: تارا مثلثی رسم کرده و سه ارتفاع آن را ترسیم می‌کند و مشاهده می‌کند که سه ارتفاع مثلث همدیگر را قطع می‌کنند. آیا تارا می‌تواند نتیجه بگیرد که:

«در هر مثلث سه ارتفاع در نقطه‌ای داخل مثلث با هم برخورد می‌کنند.»

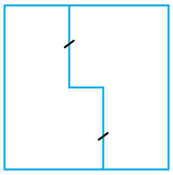


راه‌حل: همان‌طور که گفتیم برای ثابت کردن حدس‌ها باید از روش استدلال ریاضی استفاده کرد. بنابراین مشاهده‌ی تارا یک حدس ثابت نشده است که اتفاقاً همواره درست نیست. به‌طور مثال در مثلث مقابل سه ارتفاع مثلث ABC، در نقطه‌ای خارج از مثلث همدیگر را قطع می‌کنند.



مسألهٔ ۶: مهرسا و مهرگان بعد از یاد گرفتن چندضلعی‌ها با هم بحث می‌کنند. مهرسا می‌پرسد: «آیا می‌توان یک مربع را به دو شش‌ضلعی همنهشت تقسیم کرد؟» مهرگان پاسخ می‌دهد که مربع چهار ضلع دارد، پس نمی‌تواند به شکل‌هایی با بیش از چهار ضلع تقسیم شود. آیا استدلال مهرگان معتبر است؟

راه‌حل: استدلال مهرگان به هیچ‌وجه معتبر نیست، به‌طور مثال در شکل مقابل مربع را به دو شش‌ضلعی همنهشت تقسیم کرده‌ایم.

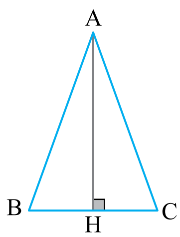


همان‌طور که ملاحظه کردید برای رد کردن یک استدلال، یک مثال کفایت می‌کند، این مثال معمولاً «مثال نقض» نام می‌گیرد.

بررسی درستی نتیجه‌گیری‌ها

مجید استدلالی مطابق زیر را بیان کرده است:

مقدمه	«در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه و عمودمنصف قاعده می‌باشد.» «مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده $(AB=AC)$ و AH ارتفاع وارد بر ساق می‌باشد.»
نتیجه	«AH عمودمنصف و میانهٔ ضلع BC می‌باشد.»



همان‌طور که مشــاهده می‌کنید، نتیجه‌گیری مجید صرفاً قســمتی از آن‌چه در مقدمه آمده است را دوباره بیان می‌کند. پس می‌توان نوشت:

نکته هر حکم ریاضی اگر به دقت ثابت شده باشد، تنها قسمتی از آن‌چه در مقدمه آمده است را از نو بیان می‌کند.

مسألهٔ ۷: در هر مورد نشان دهید آیا نتیجه‌ای که از فرض‌ها (مقدمه) گرفته شده معتبر است یا خیر؟

الف)

مقدمه	«در هر مربع ضلع‌ها برابرند.» «چهارضلعی $ABCD$ مربع نیست.»
نتیجه	«ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ برابر نیستند.»

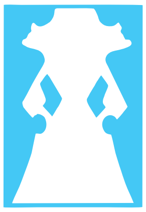
ب)

مقدمه	«در هر مربع ضلع‌ها برابرند.» «در چهارضلعی $ABCD$ ضلع‌ها برابر نیستند.»
نتیجه	«چهارضلعی $ABCD$ مربع نیست.»

راه‌حل: الف) خیر، زیرا در مقدمهٔ دوم آمده است که چهارضلعی $ABCD$ مربع نیست، اما از مربع نبودن چهارضلعی ضرورتاً نابرابری ضلع‌ها نتیجه نمی‌شود. بنابراین این نتیجه‌گیری معتبر نیست.

ب) بله، زیرا در دومین مقدمه بیان شده است که در چهارضلعی $ABCD$ ضلع‌ها برابر نیستند، در نتیجه می‌توان فهمید چهارضلعی $ABCD$ مربع نیست، بنابراین نتیجه‌گیری معتبر است.

مطالعه‌ی آزاد



آیا مشاهده مبنای محکمی برای استدلال است؟

به شکل مقابل نگاه کنید. در شکل چه می‌بینید؟

آیا یک بانوی سفیدپوش است یا دو دختر از خودراضی که سر به آسمان دارند یا حتی سماوری است که در حال جوشیدن است؟

روان‌شناسان می‌گویند آن‌چه می‌بینید بازتاب شیوه‌ی کار مغزتان است. آن‌ها معتقد هستند آن‌چه ما تجربه می‌کنیم در حقیقت بسیار متفاوت از چیزی است که از اندام‌های حسی خود دریافت می‌کنیم. در واقع مغز ما این دریافت‌ها را تصحیح می‌کند، حتی بعضاً چیزهایی که وجود دارند را نادیده می‌گیرد. در واقع مغز بر اساس شواهد محدودی که چشم دریافت می‌کند شکلی را خلق می‌کند. به‌طور مثال اگر دست خود را در یخ قرار دهید و سپس همان دست را در آب سرد قرار دهید، آب سرد را گرم حس می‌کنید.

بر این اساس می‌توان دریافت که مشاهده‌ها و تجربیات حسی ما چندان هم قابل اتکا نیستند. بحث درباره‌ی این‌که اعتبار مشاهدات در علوم تجربی، انسانی و اجتماعی چه حد است از مسایل مهم فلسفه‌ی علم است. در این‌جا تا همین حد می‌توان گفت که مشاهده‌ها می‌توانند مبنای نظریه‌ها و احکام قرار گیرند اما اعتبار آن‌ها باید با روش‌هایی مثل منطق ریاضی سنجیده شود.

بر این اساس در اثبات هندسی ذکر هرگونه رابطه که تنها در مشاهده ریشه دارد، نادرست و نامعتبر است.

اکنون برای یادگیری بیش‌تر می‌توانید به حل تمرین‌های این بخش در انتهای فصل بپردازید.