مقدمه

بچه‌ها کتاب جمع‌بندی آمارواحتمال و گسسته را با این دیدگاه نوشتم که با مطالعهٔ مطالب و حل سؤال‌های آن، در کم‌ترین زمان، بیشترین بهره را برای‌تان داشته باشد. در کنکورهای قدیم، ۱۵ سؤال از آمارواحتمال و گسسته داشتیم ولی با توجه به اضافه و حذف شدن برخی از مباحث، تعداد سؤالات آمارواحتمال و گسسته در کنکور جدید بین ۱۷ تا ۱۸ سؤال برآورد می‌شود که به تفکیک در اول هر فصل برآورد ما از تعداد سؤال‌های هر فصل را براتون نوشتیم. لطف کنید همهٔ سؤال‌ها را حل کنید و از قلم نندازید تا همهٔ تیپ‌های سؤال‌های محتمل رو دیده باشید.

در نظام قدیم مباحثی مانند رابطه و ویژگی‌های آن، ارتباط ماتریس و رابطه و گراف باید تدریس می‌شدند که در نظام جدید این مباحث از کتاب‌ها حذف شده است. همچنین در مبحث استدلال، روش استقرای ریاضی تدریس می‌شد و معمولاً یک سال در میان در کنکور سؤال داشت که این بخش هم حذف شده است. در بحث احتمال، مبحث احتمال پیوسته هم حذف شده است. در نظام جدید درس‌های منطق ریاضی، مدل‌سازی به کمک گراف (احاطه‌گری) و مربع لاتین اضافه شده است. همین‌طور در گراف تعریف گراف‌های C_n و P_n جزء مباحث جدید است. البته در مبحثی مثل استدلال با توجه به مفاهیم منطق ریاضی با تغییر رویکرد در نوع سؤال‌ها مواجه شده‌ایم که توجه به این جزئیات در حل مسائل غیر قابل انکار است. در کل از مباحث حذف شده ۴ سؤال در کنکور مطرح می‌شد که قاعدتاً سهم این درس‌ها به مباحث اضافه شده می‌رسد.

با توجه به تغییر مفاهیم در بعضی درس‌ها، سعی کردیم سؤال‌های کنکور سال‌های قبل را با کمی تغییر برای شما بنویسیم (در صورت لزوم البته) تا شما بیشتر با دیدگاه کتاب‌های جدید آشنا شوید.

براتون بهترین‌ها را آرزو دارم.

مسعود طایفه

ساختار و ویژگی‌های کتاب

این کتاب در ۸ فصل و به صورت موضوعی در کم‌ترین حجم، تمامی مباحث کنکور را پوشش می‌دهد که شامل قسمت‌های زیر است:

- **درسنامه:** تمامی مطالبی را که در کنکور به آن‌ها نیاز دارید به صورت عمیق توضیح دادیم و در این قسمت تست‌هایی قرار داده‌ایم و کنار هر تست آیکون‌های  که میزان نزدیکی به سؤالات کنکور ۹۹ از طریق کم و زیاد شدن آنتن نشان داده شده است (آنتن پر به معنی مهم بودن تست است.).
- **پرسش‌های چهار گزینه‌ای:** شامل تست‌های تألیفی و تست‌های کنکورهای دههٔ ۹۰ است.
- **پاسخنامهٔ تشریحی:** به تمامی سؤالات به صورت کاملاً دقیق و مفهومی پاسخ داده‌ایم.
- **آزمون‌های جامع:** سه دوره آزمون شبیه‌سازی کنکور برای تسلط بیشتر بر مطالب آورده شده است.
- **فرمول‌نامه:** تمامی فرمول‌های مورد نیاز را گردآوری کرده‌ایم.

سپاس و قدردانی

در این‌جا لازم است از تمامی عزیزانی که در آماده‌سازی این کتاب تلاش کرده‌اند، قدردانی کنم:

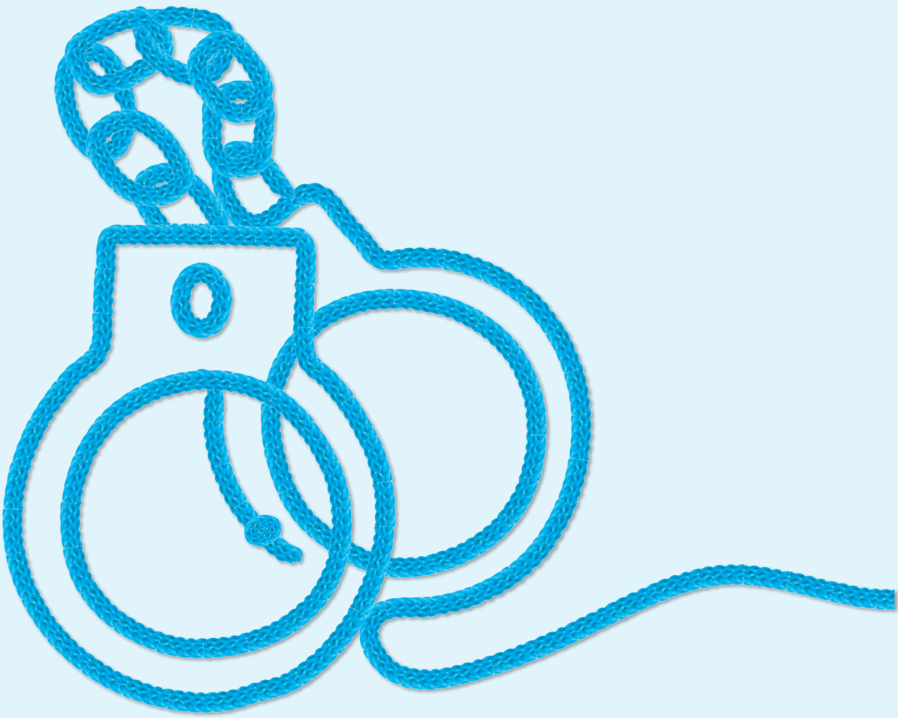
- جناب آقای **احمد اختیاری** مدیر فرهیختهٔ انتشارات
- جناب آقای **محمدحسین انوشه** مدیر شورای تألیف
- جناب آقای **عباس اشرفی** مدیر محترم گروه ریاضی
- آقای احسان لعل مسئول ویراستاری و خانم‌ها **مهرنوش رضوی و آزاده غنی‌فر** ویراستاران علمی کتاب
- سرکار خانم **سمیرا سیاوشی** مدیر واحد تولید، آقایان **امیر ماهر و مجتبی حسنی** صفحه‌آرایان کتاب و خانم‌ها **مریم صابری برون و خاطره بهاگیر** رسام.

فهرست

فصل ۲

نظریهٔ مجموعه‌ها

در کتاب آماروااحتمال، بحث مجموعه‌ها با مقداری تغییر روبه‌رو شـده اسـت. غیر از جبر مجموعه‌ها (اجتماع و اشـتراک و...) در بحث ضرب دکارتی دو مجموعه، نمودار ضرب‌های دکارتـی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار اسـت. همین‌طور بحث افـراز مجموعه و تعداد آن‌ها هم اهمیت دارد. لازم می‌دونم ذکر کنم که این مبحث سؤال‌های ساده کم نداشته، پس با خوندنش راحت می‌تونید به سؤال‌ها پاسخ بدید.



آمار و احتمال

نظریهٔ مجموعه‌ها

۱ دیباچهٔ مجموعه (مقدّمات و مفاهیم اولیه)

مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ B است، هرگاه هر عضو دلخواه A در B هم باشد و می‌نویسیم $A \subseteq B$ که به کمک سور عمومی به‌صورت مقابل تعریف می‌شود: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x \in A \Rightarrow x \in B)$

اگر عضوی از A در B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$ که این گزاره نقیض گزارهٔ بالاست. بیان ریاضی $A \not\subseteq B$، به‌صورت مقابل است: $\sim(A \subseteq B) \Leftrightarrow A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x \in A \wedge x \notin B)$

به خاطر داریم: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim q \wedge p$

تست مجموعه‌های $A=\{۲\}$، $B=\{۳,۵,\{۲\}\}$ و $C=\{\{\{۲\},۳,۵\},۲\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $A \in B$ ۲) $A \in C$ ۳) $B \in C$ ۴) $A \subseteq C$

پاسخ گزینهٔ «۲» با کمی دقت متوجه می‌شویم که $B=\{۳,۵,A\}$ و $C=\{B,۲\}$. پس گزینه‌های «۱» و «۳» درست هستند. با توجه به این‌که تنها عضو A، در مجموعهٔ C هم است، پس $A \subseteq C$ و گزینهٔ «۴» درست است. $A \notin C$ زیرا C عضوی به شکل $\{۲\}$ ندارد، بنابراین گزینهٔ «۲» نادرست است.

از درستی گزارهٔ $\forall x;(x \in A \Rightarrow x \notin B)$ کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

۱) $B' \subseteq A$ ۲) $B' \subseteq A'$ ۳) $A \subseteq B'$ ۴) $A \subseteq B$

پاسخ گزینهٔ «۳» از تعریف متمم A به یاد داریم: $A'=\{x \in U \mid x \notin A\}$

با توجه به تعریف متمم می‌توان نوشت:

$$\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in B') \Leftrightarrow \forall x;(x \in A \Rightarrow x \in B') \Leftrightarrow A \subseteq B'$$

کدام گزینه از درستی گزارهٔ $\exists x ; (x \in B \wedge x \notin A')$ نتیجه می‌شود؟

۱) $A' \not\subseteq B$ ۲) $A \not\subseteq B$ ۳) $A' \subseteq B'$ ۴) $B \not\subseteq A'$

پاسخ گزینهٔ «۴» می‌دانیم $B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x;(x \in B \wedge x \notin A)$، پس داریم:

$$\exists x;(x \in B \wedge x \notin A') \Leftrightarrow B \not\subseteq A'$$

اگر گزارهٔ $\exists x;(x \notin B' \wedge x \in A)$، نادرست باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $B' \not\subseteq A$ ۲) $B' \not\subseteq A'$ ۳) $B \subseteq A'$ ۴) $B \not\subseteq A'$

پاسخ گزینهٔ «۳» نقیض گزارهٔ نادرست، گزاره‌ای صحیح است. هم‌چنین به یاد داریم که نقیض یک سور وجودی، یک سور عمومی است.

بنابراین:

$$\sim[\exists x\,;(x\notin B'\wedge x\in A)]\equiv \forall x;\sim(x\notin B'\wedge x\in A)$$
$$\equiv \forall x\,;(x\in B'\vee x\notin A)$$
$$\equiv \forall x;(x\notin B'\Rightarrow x\notin A)$$
$$\equiv \forall x;(x\in B\Rightarrow x\in A')$$

گزارهٔ به‌دست آمده، تعریف $B\subseteq A'$ است.

۲ تعداد زیرمجموعه و مجموعهٔ توانی

زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی

۱ اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با ۲^n.

۲ همهٔ زیرمجموعه‌های A به جز خود A را زیرمجموعه‌های **سره** یا **محض** می‌گوییم. تعداد زیرمجموعه‌های محض، مساوی با $(۲^n-۱)$ و تعداد زیرمجموعه‌های سرهٔ غیرتهی $۲^n-۲$ است.

۳ می‌توان برای هر زیرمجموعه، یک کُد با رقم‌های ۱ و ۰ تعریف کرد تعداد رقم‌های این کُد برابر با تعداد اعضای مجموعه است. اگر عضوی در زیرمجموعه باشد، آن را با ۱ و در غیر این صورت با صفر نشان می‌دهیم. به‌عنوان مثال اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b\}$ باشد، آن‌گاه کُد مربوط به زیرمجموعهٔ B به‌صورت زیر است:

$$(\underset{\text{a در زیرمجموعه نیست.}}{۰}\quad \underset{\text{b در زیرمجموعه است.}}{۱}\quad \underset{\text{c در زیرمجموعه نیست.}}{۰})$$

۴ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی در یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

۵ برای محاسبهٔ سریع $\binom{n}{r}$، می‌توانیم از روابط زیر کمک بگیریم:

الف) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

ب) $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$

پ) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

ت) $\binom{n}{۲}=\dfrac{n(n-۱)}{۲!}$

ث) $\binom{n}{۳}=\dfrac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}$

تست چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $A=\{a,b,\{a,b\},\{b,a\}\}$ عضو $\{a,b\}$ را ندارند؟

(ریاضی ۹۱)

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۱۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»** می‌دانیم دو مجموعه با هم مساوی هستند، اگر اعضای کاملاً یکسانی داشته باشند، بنابراین $\{a,b\}=\{b,a\}$، همین‌طور می‌دانیم اعضای تکراری در مجموعه، یک مرتبه شمرده می‌شوند، پس A مجموعه‌ای ۳ عضوی است. حال چون زیرمجموعه‌های فاقد عضو $\{a,b\}$ را می‌خواهیم، این عضو را کنار گذاشته و داریم:

تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب $=۲^۲=۴$

اگر با افزودن دو عضو جدید به مجموعهٔ A، تعداد اعضای مجموعهٔ توانی آن، ۲۴ واحد افزایش یابد، تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی A چند واحد افزایش می‌یابد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

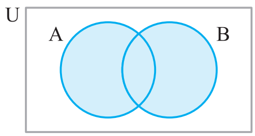
پاسخ گزینهٔ «۲» تعداد اعضای A را n در نظر می‌گیریم. به یاد داریم که تعداد اعضای $P(A)$ مساوی تعداد زیرمجموعه‌های A است، پس:

$$\underbrace{۲^{n+۲}}_{\substack{\text{تعداد اعضای } P(A)\\ \text{در حالت جدید}}} = \underbrace{۲^{n}}_{\substack{\text{تعداد اعضای } P(A)\\ \text{در حالت اولیه}}} + ۲۴ \Rightarrow ۲^{n+۲} - ۲^{n} = ۲۴ \Rightarrow ۲^{n}(۲^{۲}-۱) = ۲۴ \Rightarrow ۲^{n} = ۸ \Rightarrow n = ۳$$

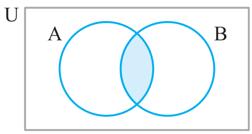
$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضو اضافه شده} = \binom{\boxed{۳}+۲}{۲} - \binom{\boxed{۳}}{۲} = ۱۰ - ۳ = ۷$$

۳ روش عضوگیری و جبر مجموعه‌ها

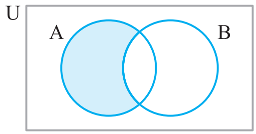
$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$



$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



چند قانون مهم

۱ دمورگان: $(A\cup B)' = A' \cap B' \,,\, (A\cap B)' = A' \cup B'$

۲ تفاضل متقارن: $A \Delta B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)$

۳ تبدیل تفاضل به اشتراک: $A - B = A\cap B' \,,\, B - A = B \cap A'$

۴ خاصیت توزیع‌پذیری:
$$\begin{cases} A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$$

۵ روابط $\cup, \cap, -$ در حالت $A \subseteq B$:
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A\cup B = B \\ A \cap B = A \\ A - B = \varnothing \end{cases}$$

۶ قانون جذب: $A\cup(B\cap A)=A\cap(B\cup A)=A$

۷ رابطهٔ تفاضل دو مجموعه: $A-B=A-(A\cap B)$

۸ نامساوی مجموعه‌ای: $\begin{cases}A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B\\ B\cap A\subseteq B\subseteq B\cup A\end{cases}$

نکته‌ها:

۱ اجتماع، اشتراک و تفاضل ویژگی حذف **ندارند**.

۲ دو مجموعهٔ A و B با هم مساوی هستند، اگر هرکدام زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

$$A=B\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$$

۳ اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup D$.

تست

اگر $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B=\{a,b\}$ باشد، مجموعهٔ $A-\{B\}$ چند زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی دارد؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۱۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** $A-\{B\}$ شامل اعضایی است که در A بوده ولی در $\{B\}$ نیستند. در واقع برای تعیین اعضای $A-\{B\}$ باید اعضای مشترک A و $\{B\}$ را از A کم کنیم و باقی اعضای A را بنویسیم:

$$A-\{B\}=\{a,b,\{a\},\underbrace{\{a,b\}\}-\{\{a,b\}}_{\text{عضو مشترک}}\}=\{a,b,\{a\}\}$$

$A-\{B\}$ تعداد زیرمجموعه‌های سرهٔ ناتهی $=۲^۳-۲=۶$

دقت کنید یک مجموعهٔ ۳ عضوی $۲^۳=۸$ زیرمجموعه دارد که غیر از خودش و تهی ۶ زیرمجموعهٔ سرهٔ غیرتهی دارد.

اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$ ، $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{۱,۲,۳\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $A-B=C$ ۲) $B-C=\varnothing$ ۳) $B-C=\{۱,۲\}$ ۴) $A-B=\{C\}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** با توجه به تعریف تفاضل ۲ مجموعه داریم:

$$A-B=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}-\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}=\{\{۱,۲,۳\}\}=\{C\}$$

همین‌طور می‌دانیم: $B-C=\{\{۱,۲\}\}$

اگر $A=\{۱,\{۱\},\{۱,۲\},\{۲\},۲\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^۲+۲=۳x\}$ باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های سرهٔ غیرتهی مجموعهٔ $A-B$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا اعضای مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

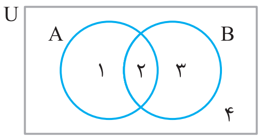
$$x^۲+۲=۳x\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow x=۱,۲\Rightarrow B=\{۱,۲\}$$

$$A-B=\{۱,\{۱\},\{۱,۲\},\{۲\},۲\}-\{۱,۲\}=\{\{۱\},\{۱,۲\},\{۲\}\}$$

$\Rightarrow A-B$ تعداد زیرمجموعه‌های سرهٔ ناتهی $=۲^۳-۲=۶$

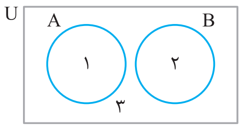
۴ استفاده از نمودار وِن در حل تست‌ها

در مسائلی که ۲ یا ۳ مجموعه داریم، برای حل از نمودار وِن استفاده می‌کنیم و به جای هر مجموعه، عدد ناحیهٔ آن مجموعه را به‌کار می‌بریم. به مثال زیر توجه کنید:

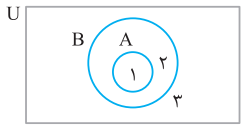


$A=\{۱,۲\}\,,\,A\bigcap B=\{۲\}\,,\,A'=\{۳,۴\}\,,\,B=\{۲,۳\}$

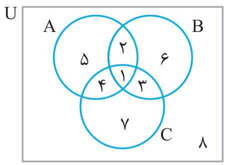
$B'=\{۱,۴\},\ A-B=\{۱\},\ B-A=\{۳\},\ A\bigcup B=\{۱,۲,۳\}$



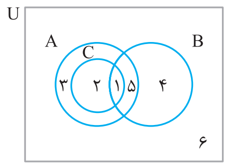
دو مجموعهٔ جدا از هم B,A



$A\subseteq B$



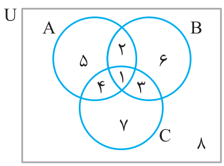
سه مجموعه در حالت کلی



سه مجموعه و $C\subseteq A$

شماره‌گذاری ناحیه‌ها کاملاً اختیاری است، نمودارهای بالا به عنوان یک پیشنهاد آورده شده است.

در برخی تست‌ها، تعدادی رابطه به عنوان فرض داریم و نتایجی خاص در گزینه‌ها آورده شده است. برای حل آن‌ها، نمودار وِن را در حالت کلی برای مجموعه‌ها رسم می‌کنیم. اگر در این حالت، ناحیه یا تعدادی از آن‌ها برابر تهی شود، آن را حذف کرده تا نمودار صحیح به‌دست آید، مثلاً فرض کنید در تستی داشته باشیم $B\bigcap C=\varnothing$ و $B\bigcup C\subseteq A$ و حاصل $(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)$ را بخواهیم، داریم:

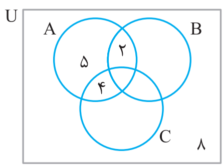


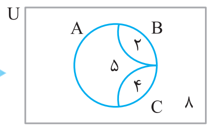
$B\bigcap C=\{۳,۱\}=\varnothing$

$(B\bigcup C=\{۱,۲,۳,۶,۴,۷\}\subseteq A=\{۱,۲,۴,۵\})$

$\Rightarrow \{۳,۶,۷\}=\varnothing$

با توجه به فرض‌ها، نمودار دقیق به صورت زیر است:





$A=\{۲,۴,۵\}$

$B=\{۲\},C=\{۴\}$

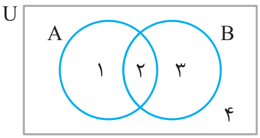
$(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)=(\{۲\})\Delta(\{۴\})=\{۲,۴\}=B\bigcup C$

در بیشتر تست‌ها از ترکیب روش‌های حل جبر مجموعه‌ها و نمودار وِن استفاده می‌کنیم. این کار، سرعت حل را به مراتب بالاتر می‌برد.

تست **مجموعهٔ A دارای ۱۴ زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی است. مجموعهٔ B دارای ۸ زیرمجموعه است. مجموعهٔ توانی $C = A\cap(A'-B)'$ چند عضو دارد؟** (ریاضی خارج ۹۵)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ **گزینهٔ«۴»** مجموعهٔ A، ۱۴ زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی دارد، پس در کل ۱۶ زیرمجموعه دارد. نتیجه می‌گیریم که A، ۴ عضوی است. با توجه به تعداد زیرمجموعه‌های B، متوجه می‌شویم B سه عضوی است. مجموعهٔ C را ساده می‌کنیم:

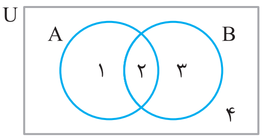


$$C = A\cap(A'-B)' = \{۱,۲\}\cap[\{۳,۴\}-\{۲,۳\}]'$$
$$=\{۱,۲\}\cap(\{۴\})' = \{۱,۲\}\cap\{۱,۲,۳\} = \{۱,۲\}$$
$\Rightarrow C = A \Rightarrow$ تعداد زیر مجموعه‌های C $= ۲^{۴} = ۱۶$

اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $(A\cap B')-(B-A)$ برابر کدام گزینه است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$

پاسخ **گزینهٔ«۴»** با توجه به نمودار وِن به حل تست می‌پردازیم:



$$A\cap B' = \{۱,۲\}\cap\{۱,۴\} = \{۱\},\ B-A = \{۳\}$$
$$(A\cap B')-(B-A) = \{۱\}-\{۳\} = \{۱\} = A-B$$

برای سه مجموعهٔ A، B و C داریم، $(A\cap B\subseteq C')\wedge(B'\subseteq A'\cap C')$. کدام گزینه قطعاً درست است؟

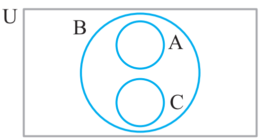
۱) $A\cap B=\varnothing$ ۲) $A\cap C=\varnothing$ ۳) $A\cup B=\varnothing$ ۴) $B\cap C=\varnothing$

پاسخ **گزینهٔ«۲»** می‌دانیم اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $B'\subseteq A'$ پس از $B'\subseteq A'\cap C'$ نتیجه می‌گیریم:

$$A\cup C\subseteq B \Leftarrow (A'\cap C')'\subseteq B$$

از $A\cup C\subseteq B$ نتیجه می‌گیریم که $A\subseteq B\wedge C\subseteq B$. از $A\subseteq B$ متوجه می‌شویم $A\cap B=A$. با توجه به فرض سؤال داریم: $A\subseteq C'$ که به معنی جدا بودن A و C از هم است یعنی $A\cap C=\varnothing$.

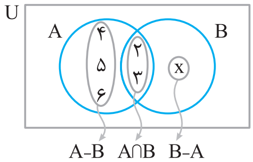
نمودار وِن مربوط به این تست به صورت زیر است:



تست اگر $A=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A\cap B=\{۲,۳\}$ باشند و مجموعهٔ $(A-B)\times(B-A)$ دارای ۶ عضو باشد، مجموعهٔ B چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۲» با توجه به داده‌های مسئله و توضیحات داده‌شده در مورد نمودار وِن داریم:



$$n[(A-B)\times(B-A)]=۶\Rightarrow n(A-B)\times n(B-A)=۶$$
$$\Rightarrow ۳\times x=۶\Rightarrow x=n(B-A)=۲$$
$$n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)=۲+۲=۴$$

اگر $A=\{۲k-۱|k\in\mathbb{Z},۰\le k\le ۲\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{N},x^۲\le ۹\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $B^۲-A^۲$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases}A=\{-۱,۱,۳\}\\B=\{۱,۲,۳\}\end{cases}\Rightarrow n(B^۲-A^۲)=n(B^۲)-n(B^۲\cap A^۲)=[n(B)]^۲-[n(A\cap B)]^۲$$
$$=۳^۲-۲^۲=۵\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}=۲^۵=۳۲$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. مجموعه‌های $A=\{\varnothing\}$، $B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ و $C=\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟

۱) $A\in B$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $A\subseteq C$ ۴) $B\in C$

۲. اگر $A=\{a^۲,-۲a,b^۳\}$ و $B=\{-۸,۴\}$ باشند و بدانیم گزارهٔ $(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$ صحیح می‌باشد، مقدار a^b کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) -۴ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۳. مجموعهٔ $A-B$ نامتناهی است. در این صورت کدام‌یک از مجموعه‌های زیر حتماً نامتناهی است؟

۱) $B-A$ ۲) $A\cap B$ ۳) $A\cup B$ ۴) A'

۴. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n+۳$ عضوی، ۴۸ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n+۱$ عضوی است. مجموعهٔ $n+۳$ عضوی چند زیرمجموعهٔ ۲ عضوی دارد؟

۱) ۶ ۲) ۲۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۵. اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، آن‌گاه حاصل متمم زیر کدام است؟

$$[(A-B)\cup(B-A')]\cup[B\cup(A'\cap B)]$$

۱) $A'-B$ ۲) $B'-A'$ ۳) $A'-B'$ ۴) $B-A'$

۶. اگر $(B-A)\bigcap C=(A\bigcup B)\bigcap C$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $B\subseteq C$ ۲) $A\subseteq C$ ۳) $B\subseteq C'$ ۴) $A\subseteq C'$

۷. اگر $k\in\mathbb{N}$ ؛ $A=[-k^{-1},k]$ باشد، مجموعهٔ $\bigcap_{k=1}^{5}A_k$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۸. اگر گزارهٔ $\exists x(x\in B\wedge x\notin A')$ نادرست باشد، کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A'\subseteq B'$ ۴) $B\subseteq A'$

۹. چند افراز سه بخشی برای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ وجود دارد که در آن‌ها a و b حتماً در یک مجموعه قرار بگیرد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۱۰. کدام گزینه یک افراز برای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ نمی‌باشد؟

۱) $\{\{a,b\},\{c,d,e\}\}$ ۲) $\{\{a\},\{b,c,d\},\{e\}$

۳) $\{\{a,b,c,d,e\}\}$ ۴) $\{\{a,b\},\{b,c,d\},\{e\}\}$

۱۱. می‌دانیم نمودار $C\times(A\bigcup B)$ به صورت دو نیم‌خط و دو پاره‌خط عمودی می‌باشد. در این صورت نمودار $(A\bigcup B)'\times C$ به کدام صورت است؟

۱) دو نیم‌خط افقی ۲) دو پاره‌خط افقی و دو نیم‌خط افقی

۳) دو پاره‌خط و دو نیم‌خط عمودی ۴) دو نیم‌خط عمودی

۱۲. اگر مجموعهٔ A دارای ۵ عضو، مجموعهٔ B دارای ۷ عضو و مجموعهٔ $(A\bigcap B')\times(A'\bigcap B)$ دارای ۱۵ عضو باشد، مجموعهٔ $A\bigcap B$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲

۱۳. اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، مجموعهٔ $(A\bigcap(A'\bigcup B))\bigcup(B\bigcap(A'\bigcup B'))$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) $A\bigcap B$ ۲) $A\bigcup B$ ۳) B ۴) A

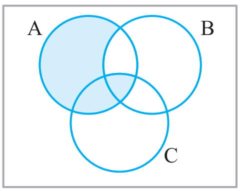
۱۴. اگر $A=\{1,2\}$ ، $B=\{1,2,\{1,2\}\}$ و $C=\{\{1,2,\{1,2\}\},1\}$ باشند، کدام بیان در مورد این مجموعه‌ها نادرست است؟ (ریاضی خارج ۹۷)

۱) $B\subseteq C$ ۲) $A\in B$ ۳) $A\subseteq B$ ۴) $B\in C$

۱۵. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۶. در نمودار وِن زیر، قسمت هاشورخورده مربوط به کدام مجموعه است؟



۱) $A-(B-C)$
۲) $(A-B)-C$
۳) $A-(C-B)$
۴) $A-(B\bigcap C)$

۱۷. اگر $A=\{-2,1\}$ و $B=[-1,2]$ باشند، $A\times B$ برابر کدام گزینه است؟

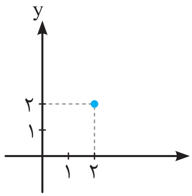
۱) $\{(x,y)\,|\,(x=-2\wedge x=1)\wedge(-1\le y\le 2)\}$

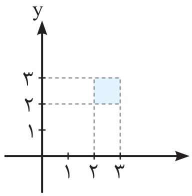
۲) $\{(x,y)\,|\,(x=2\vee x=1)\vee(-1\le y\le 2)$

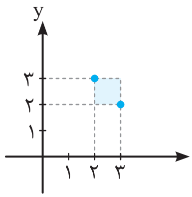
۳) $\{(x,y)\,|\,(x=-2\vee x=1)\wedge(-1\le y\le 2)$

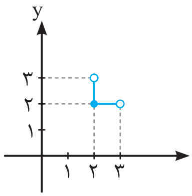
۴) $\{(x,y)\,|\,(x=-2\wedge x=1)\vee(-1\le y\le 2)\}$

۱۸. اگر $A=[-1,3)$ و $B=\{2,4\}$، آن‌گاه $(A\times B)\cap(B\times A)$ در کدام گزینه مشخص‌شده است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۹. اگر A، B و C، افرازی برای مجموعهٔ ۱۲ عضوی U و $3n(A)=6n(B)=2n(C)$ باشد، تعداد اعضای $A\cup C$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۰. اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $A\cap B=\{1,3\}$ و مجموعهٔ $(A\cup B)\times(B-A)$ دارای ۵ عضو باشد، تعداد اعضای مجموعهٔ B کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۱. اگر $A=\{2K+1\,|\,K\in\mathbb{Z},0\le K\le 5\}$ و $B=\{K\in\mathbb{Z}\,|\,(k^2-1)(K^2-7K+12)=0\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A\times B)\cup(B\times A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۴۴ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۴۴

۲۲. اگر $A=\{1,2,\{1,2\},\{1,\{1,2\}\},\{2\}\}$ و $B=\{\{1\},\{1,2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A\cap B'$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۳. مجموعهٔ A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است، مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B\cup A')'$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۲۴. گر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $A\subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $B \quad A'=A$ ۲) $A \quad B'=A$ ۳) $A\bigcap B'=\phi$ ۴) $B\bigcap A'=\phi$

۲۵. مجموعهٔ $(A-B)\bigcup((B\bigcap C)'\bigcap((B'\bigcup A)-B))$، با کدام مجموعه برابر است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $A\bigcup B'$ ۲) $A\bigcap B'$ ۳) A ۴) B'

۲۶. در مجموعه‌های چهارعضوی $A=\{x+۲,۱,۴,y\}$ و $B=\{۵,۷,z,t-۱\}$، فرض کنید $A\times B=B\times A$ باشد. تعداد مجموعه‌ها به‌صورت $\{(x,y),(z,t)\}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۷. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعهٔ مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $A\subset B'$ ۲) $A-B'=\phi$

۳) $A\bigcap B'=A$ ۴) $(\overline{A\bigcup B})'=\phi$

۲۸. مجموعهٔ $(A-(A\bigcap B'))\bigcup(B\bigcap(A\bigcap B)')$ با کدام مجموعه، برابر است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) B'

۲۹. اگر $A=[۱,۴]$ و $B=[-۱,۳]$ باشند، مساحت نمودار $A\times A-B\times B$ در صفحهٔ مختصات، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۳»

با توجه به مجموعه‌های A، B و C، مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B و مجموعهٔ B عضو مجموعهٔ C است. در واقع مجموعهٔ $B=\{\varnothing,A\}$ و $C=\{B\}$ است. همچنین $A\subseteq B$ است، زیرا تنها عضو A یعنی $\varnothing$ عضو B نیز است. امّا $A\subseteq C$ نادرست است، زیرا $\varnothing$ عضو A بوده ولی عضو C نیست.

۲. گزینهٔ «۲»

با توجه به درستی گزارهٔ $(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$ نتیجه می‌گیریم $A=B$ و داریم:

$$\{a^۲,-۲a,b^۳\}=\{۴,-۸\}\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۴\\-۲a=۴\Rightarrow\\b^۳=-۸\end{cases}\begin{cases}a=-۲\\b=-۲\end{cases}\Rightarrow a^b=(-۲)^{(-۲)}=\frac{۱}{۴}$$

دقت داشته باشید که در سایر حالت‌هایی که از تساوی A و B به‌دست می‌آید مقادیر a و b قابل قبول نیستند. به عنوان مثال اگر $a^۲=۴$ و $-۲a=-۸$ و $b^۳=-۸$ را در نظر بگیریم برای a سه مقدار ۴ و ±۲ به‌دست می‌آید که قابل قبول نیست.

۳. گزینهٔ «۳»

می‌دانیم $A-B\subseteq A$ است، بنابراین با توجه به نامتناهی بودن $A-B$، A نیز نامتناهی است از سوی دیگر برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B داریم $A\subseteq A\bigcup B$، پس $A\bigcup B$ نیز نامتناهی است.

۴. گزینهٔ «۳»

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

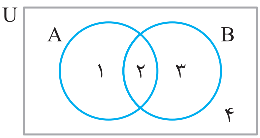
$$۲^{n+۳}=۲^{n+۱}+۴۸\Rightarrow ۲^{n+۳}-۲^{n+۱}=۴۸\Rightarrow ۲^{n+۱}(۲^۲-۱)=۴۸$$

$$\Rightarrow ۲^{n+۱}\times ۳=۴۸\Rightarrow ۲^{n+۱}=۱۶\Rightarrow n+۱=۴\Rightarrow n=۳$$

مجموعهٔ $n+۳$ عضوی، ۶ عضو دارد بنابراین $\binom{۶}{۲}=۱۵$ زیرمجموعهٔ ۲ عضوی دارد.

۵. گزینهٔ «۱»

از نمودار وِن برای ساده‌سازی عبارت داده‌شده استفاده می‌کنیم:



$$A=\{۱,۲\},A'=\{۳,۴\}\quad,\quad B=\{۲,۳\},B'=\{۱,۴\}$$

$$(A-B)\cup(B-A')=\{۱\}\cup\{۲\}=\{۱,۲\}=A$$

$$B\cup(A'\cap B)=\{۲,۳\}\cup\{۳\}=\{۲,۳\}=B$$

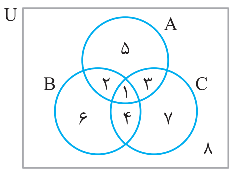
$$\Rightarrow[(A-B)\cup(B-A')]\cup[B\cup(A'\cap B)]=A\cup B$$

می‌خواهیم متمم $A\cup B$ را به‌دست آوریم، پس خواهیم داشت:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'=A'-B$$

۶. گزینهٔ «۴»

با استفاده از نمودار وِن برای سه مجموعه داریم:



$$(B-A)\cap C=\{۶,۴\}\cap\{۱,۳,۴,۷\}=\{۴\}$$

$$(A\cup B)\cap C=\{۱,۲,۳,۵,۴,۶\}\cap\{۱,۳,۴,۷\}=\{۱,۳,۴\}$$

$$\Rightarrow\{۱,۳,۴\}=\{۴\}\Rightarrow\{۱,۳\}=\varnothing$$

$$A\cap C=\{۱,۳\}=\varnothing\Rightarrow A\subseteq C'\wedge C\subseteq A'$$

۷. گزینهٔ «۱»

ابتدا بازه‌های $A_۱,A_۲,\dots,A_۵$ را مشخص می‌کنیم:

$$A_۱=[-۱,۱]\ ،\ A_۲=[-\frac{۱}{۲},۲]\ ،\ A_۳=[-\frac{۱}{۳},۳]\ ،\ A_۴=[-\frac{۱}{۴},۴]\ ،\ A_۵=[-\frac{۱}{۵},۵]$$

$$\Rightarrow\bigcap_{k=۱}^{۵}A_k=[-\frac{۱}{۵},۱]$$

این بازه شامل عددهای صحیح ۰,۱ است.

۸. گزینهٔ «۴»

با توجه به این‌که سور وجودی داده شده نادرست می‌باشد، بنابراین نقیض این گزارهٔ سوری، یک سور عمومی درست است. پس داریم:

$$\sim(\exists x;x\in B\wedge x\notin A')\equiv\forall x;[\sim(x\in B\wedge x\notin A')]$$

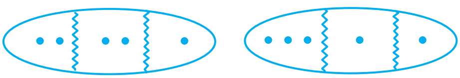
$$\equiv\forall x;(x\notin B\vee x\in A')$$

$$\equiv\forall x;(x\in B\Rightarrow x\in A')$$

گزارهٔ حاصل تعریف $B\subseteq A'$ است.

۹. گزینهٔ «۲»

a,b را یک عضو در نظر گرفته، بنابراین در این حالت ۵ عضو داریم. تعداد افرازهای سه بخشی برابر است با:



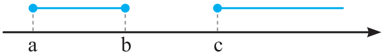
$$\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}}{۲!}+\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۲!}=۱۵+۱۰=۲۵$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

با توجه به تعریف افراز یک مجموعه، بخش‌های افراز نباید تهی باشند و باید دو به دو از هم جدا باشند. هم‌چنین باید اجتماع همهٔ بخش‌ها برابر مجموعهٔ اولیه باشد. در گزینهٔ «۴»، عضو b در دو بخش مجزا حضور دارد، بنابراین نمی‌تواند یک افراز برای A باشد.

۱۱. گزینهٔ «۲»

وقتی $C\times(A\cup B)$ به صورت دو نیم‌خط و دو پاره‌خط عمودی است، نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ C دو عضوی بوده و $A\cup B$ از اجتماع دو بازهٔ جدا از هم تشکیل شده است که یکی از آن‌ها شامل بی‌نهایت می‌باشد، نمونه‌ای برای بازهٔ $A\cup B$:



بنابراین $(A\cup B)'$ نیز مشابه $A\cup B$ بوده و نمودار $(A\cup B)'\times C$ به‌صورت دو نیم‌خط و دو پاره‌خط افقی است.

۱۲. گزینهٔ «۴»

$$n[(A\cap B')\times(A'\cap B)]=n(A\cap B')\times n(A'\cap B)=n(A-B)\times n(B-A)=۱۵$$

$$\Rightarrow[n(A)-n(A\cap B)]\times[n(B)-n(A\cap B)]=۱۵$$

$$\xrightarrow{n(A\cap B)=x}(۵-x)(۷-x)=۱۵\Rightarrow x^۲-۱۲x+۳۵=۱۵$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۲x+۲۰=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۱۰)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۲ & \text{قابل قبول}\\ x=۱۰ & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

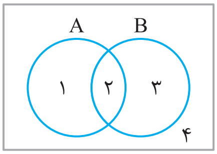
$x=۱۰$ غیرقابل قبول است، زیرا:

$$n(A\cap B)\le n(B),\, n(A\cap B)\le n(A)$$

بنابراین:

$$n(A\cap B)=۲$$

۱۳. گزینهٔ «۳»



با استفاده از نمودار وِن داریم: $A\cap(A'\cup B)=\{۱,۲\}\cap(\{۳,۴\}\cup\{۲,۳\})$

$$=\{۱,۲\}\cap\{۲,۳,۴\}=\{۲\}$$

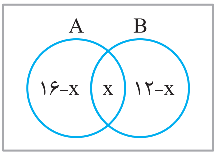
$$B\cap(A'\cup B')=\{۲,۳\}\cap(\{۳,۴\}\cup\{۱,۴\})=\{۲,۳\}\cap\{۱,۳,۴\}=\{۳\}$$

جواب نهایی $=\{۲\}\cup\{۳\}=\{۲,۳\}=B$

۱۴. گزینهٔ «۱»

B زیر مجموعهٔ C نیست زیرا $۲\in B$ ولی $۲\notin C$.

۱۵. گزینهٔ «۴»



با توجه به نمودار وِن داریم:

دانش‌آموزان گروه ورزش A و گروه روزنامه‌دیواری B هستند.

می‌دانیم که: $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۶-x=۹\Rightarrow x=۷$

بنابراین:

دانش‌آموزی که عضو هیچ گروهی نیستند. $=n(U)-n(A\cup B)$

$$=۳۹-(n(A)+n(B))-n(A\cap B))=۳۹-(۱۶+۱۲-۷)=۱۸$$

آمار و احتمال

احتمال

علم آمار و علم احتمال

شناخت **جامعهٔ نامعلوم** از روی **نمونهٔ معلوم**، در علم **آمار** و شناخت **نمونهٔ نامعلوم** از روی **جامعهٔ معلوم**، در علم **احتمال** انجام می‌گیرد.

تست **کدام سؤال در علم آمار مورد بررسی قرار می‌گیرد؟**

۱) می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند سیب از جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که دست کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟

۲) درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟

۳) ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کم‌تر از ۱۵ نفر از آن‌ها به شنا علاقه‌مند باشند؟

۴) در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سوادکوه با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکوردداربوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش‌از یک نفر منفی باشد؟

پاسخ **گزینهٔ «۲»** در گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» اطلاعات جامعه را داریم و مشخصات نمونه برای ما مجهول است، پس بررسی آن‌ها مربوط به علم احتمال است. امّا در مورد گزینهٔ «۲»، برای بررسی درآمد کارمندان شهرداری باید حتماً از تعدادی به عنوان نمونه استفاده کنیم و از نتیجهٔ به دست آمده از نمونه، به شناخت جامعه بپردازیم که این مطالعه مربوط به علم آمار است.

تعاریف مقدماتی علم احتمال

اگر نتیجهٔ یک پدیده یا آزمایش را قبل از انجام آن بدانیم به آن **پدیده یا آزمایش قطعی** می‌گوییم. اما اگر نتیجهٔ یک آزمایش یا پدیده‌ای، پیش از انجام معلوم نباشد به آن **پدیدهٔ تصادفی** می‌گوییم. به مجموعهٔ همهٔ حالت‌هایی که در انجام یک آزمایش تصادفی ممکن است اتفاق بیفتد، **فضای نمونه** می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم.

به هر کدام از اعضای S، یک **برآمد** و به هر زیرمجموعهٔ S یک **پیشامد** گفته می‌شود. پس در پرتاب یک تاس، ۶ برآمد و $2^6 = 64$ پیشامد داریم که در این بین پیشامد $\varnothing$ را **پیشامد غیرممکن** و پیشامد S را **پیشامد حتمی** می‌نامند.

فضاهای نمونهٔ مهم را ببینید:

فضای نمونه	تعداد اعضا	حالت کلی	نکتهٔ قابل توجه
پرتاب ۲ سکه	$۲^۲$	۲^n	دقت کنید که همیشه (رو، پشت) با (پشت، رو) فرق دارد.
خانوادهٔ ۳ فرزندی	$۲^۳$	۲^n	دقت کنید که همیشه (دختر، پسر) با (پسر، دختر) فرق دارد.
پرتاب ۲ تاس	$۶^۲$	۶^n	در پرتاب تاس‌ها، (۱,۲) و (۲,۱) با هم متفاوت است.
کیسه و مهره	-	(تعداد کل / تعداد مورد نظر)	همیشه گوی‌ها را متفاوت از هم در نظر می‌گیریم.
جایگشت ۴ شیء	$۴!$	$n!$	سخنرانی، صفت ایستادن، در طبقات مختلف و ... از این نوع فضای نمونه هستند.
انتخاب ۴ شیء از بین ۵ شیء	$\binom{۵}{۴}$	$\binom{n}{k}$	-

نکته‌ها:

۱ اگر فضای نمونه، n عضوی باشد، ۲^n پیشامد در این آزمایش تصادفی وجود دارد.

۲ هرگاه نتیجهٔ آزمایش، یکی از اعضای پیشامد باشد، می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.

تست **یک رانندهٔ ون با حداکثر ۱۰ مسافر در یک خط رفت و برگشت کار می‌کند. فضای نمونهٔ پدیدهٔ «تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت» چند عضو دارد، هرگاه بدانیم حداقل در یک مسیر، خالی حرکت نمی‌کند؟**

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۹

پاسخ **گزینهٔ «۲»** فضای نمونهٔ مسیر رفت و برگشت $S_۱ = S_۲ = \{۰,۱,۲,\ldots,۱۰\}$ و فضای نمونهٔ کل آزمایش $S_۱ \times S_۲$ است که ۱۲۱ عضو دارد. با توجه به این‌که حداقل در یک مسیر بدون مسافر حرکت نمی‌کند، پس حالتی که در هر دو مسیر خالی حرکت کند را باید حذف کنیم. بنابراین فضای نمونه ۱۲۰ عضو دارد.

اعمال روی پیشامدها

اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند.

اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. (به طور مشابه پیشامد $B - A$ هم تعریف می‌شود.)

متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونهٔ یک پدیدهٔ تصادفی و A پیشامدی از آن باشد، در این صورت متمم A را با A' نمایش می‌دهیم و زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ **ندهد**.

دو پیشامد ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند و $A\cap B=\varnothing$، در این صورت آن‌ها را دو پیشامد ناسازگار می‌گوییم. در واقع دو پیشامد ناسازگار، همزمان رخ نمی‌دهند.

تست **در پرتاب دو تاس سالم، اگر A پیشامد «مجموع دو تاس بیش از ۷» و B پیشامد «هر دو تاس زوج» باشند، پیشامد $A-B$ چند عضو دارد؟**

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۱

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اعضای پیشامدهای A و B را می‌نویسیم:

$$A=\{\overbrace{(۲,۶),(۶,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴)}^{\text{مجموع}=۸},\overbrace{(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴)}^{\text{مجموع}=۹},\overbrace{(۶,۴),(۴,۶),(۵,۵)}^{\text{مجموع}=۱۰},$$
$$\underbrace{(۵,۶),(۶,۵)}_{\text{مجموع}=۱۱},\underbrace{(۶,۶)}_{\text{مجموع}=۱۲}\}$$

$$B=\{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}$$
$$A-B=\{(۵,۳),(۳,۵),(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

اگر $S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$ فضای نمونه و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۵,۶\}$ دو پیشامد آن باشند، چند پیشامد ناسازگار با $(A-B)\cup(B-A)$ وجود دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا اعضای $(A-B)\cup(B-A)$ را می‌نویسیم:

$$(A-B)\cup(B-A)=\{۱\}\cup\{۵,۶\}=\{۱,۵,۶\}$$

پیشامدی با $(A-B)\cup(B-A)$ ناسازگار است که عضو مشترکی با این پیشامد نداشته باشد، یعنی اعضای ۱,۵,۶ را نداشته باشد، بنابراین تعداد پیشامدهای ناسازگار با $(A-B)\cup(B-A)$ برابر است با:

$$۲^{۱۰-۳}=۲^{۷}=۱۲۸$$

احتمال در فضای هم شانس

اگر همهٔ اعضای فضای نمونه شانس یکسانی برای رخدادن داشته باشند، به آن فضای نمونهٔ هم‌شانس می‌گوییم. احتمال رخدادن پیشامد A در این حالت به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}$$

تست **اعضای تیم والیبال که ۱۴ نفر هستند و قد هیچ دو عضوی برابر نیست، به طور تصادفی پی‌درپی وارد سالن می‌شوند. احتمال آن‌که اولین کسی که وارد می‌شود، قدبلندترین عضو تیم باشد، چقدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۱۳}$

پاسخ گزینهٔ «۱» چون ۱۴ نفر به طور متوالی و پی‌درپی وارد سالن می‌شوند، بنابراین جایگشت ۱۴ نفر مورد نظر است. پس داریم $n(S)=۱۴!$. از طرفی در پیشامد مورد نظر، نفر اول قرار است قد بلندترین عضو تیم باشد، پس تکلیف نفر اول مشخص است، جایگشت ۱۳ نفر مابقی برابر !۱۳ است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۳!}{۱۴!}=\frac{۱}{۱۴}$$

در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ هستند؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

پاسخ گزینهٔ «۱» در این‌جا فرض می‌کنیم ۴ شیء متمایز سفید و ۵ شیء متمایز سیاه داریم. برای نوشتن $n(A)$ و $n(S)$ به صورت اختیاری می‌توانیم انتخاب کنیم و فقط تعداد حالت‌های مختلف انتخاب ۳ شیء از بین این ۹ شیء را در نظر بگیریم. دو حالت وجود دارد؛ هر ۳ مهره سفید یا هر ۳ مهره سیاه باشند، پس داریم:

هر ۳ مهره سفید: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۴}{۳}}^{\text{انتخاب ۳ سفید از بین ۴ سفید}}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴}{۸۴}=\frac{۱}{۲۱}$

هر ۳ مهره سیاه: $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۵}{۳}}^{\text{انتخاب ۳ سیاه از بین ۵ سیاه}}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱۰}{۸۴}=\frac{۵}{۴۲}$

پس احتمال مورد نظر برابر است با: $\frac{۱}{۲۱}+\frac{۵}{۴۲}=\frac{۷}{۴۲}=\frac{۱}{۶}$

در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از کیسه انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال فقط ۲ مهرهٔ خارج‌شده، هم‌رنگ هستند؟ (تجربی ۹۶)

۱) $\frac{۴۱}{۱۲۰}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۰}$ ۳) $\frac{۷۹}{۱۲۰}$ ۴) $\frac{۳۱}{۶۰}$

پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به اینکه مهره‌ها از ۳ رنگ مختلف هستند، ۳ حالت به وجود می‌آید: ۲ مهره سفید و ۱ مهره غیرسفید یا ۲ مهره سیاه و ۱ مهره غیرسیاه یا ۲ مهره قرمز و ۱ مهره غیرقرمز باشد، پس داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۵}{۲}}^{\text{۲مهره سفید}}\times\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{۱مهره غیرسفید}}+\overbrace{\binom{۳}{۲}}^{\text{۲مهره سیاه}}\times\overbrace{\binom{۷}{۱}}^{\text{۱مهره غیرسیاه}}+\overbrace{\binom{۲}{۲}}^{\text{۲مهره قرمز}}\times\overbrace{\binom{۸}{۱}}^{\text{۱مهره غیرقرمز}}}{\binom{۱۰}{۳}}$$

$$=\frac{۱۰\times۵+۳\times۷+۱\times۸}{۱۲۰}=\frac{۷۹}{۱۲۰}$$

از ۱۲ کتاب که ۵ تای آن‌ها در مورد ادبیات و ۷ تای آن‌ها در مورد تاریخ است، به تصادف ۵ کتاب انتخاب کرده‌ایم. احتمال این‌که ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۶}$ ۳) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۱۳۲}$

پاسخ گزینهٔ«۳» باید ۳ کتاب ادبیات از بین ۵ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ از بین ۷ کتاب تاریخ انتخاب کنیم. پس داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۳}\times\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۲}{۵}}=\frac{\cancel{۱۰}^{۵}\times\cancel{۲۱}^{۷}}{۱۱\times\cancel{۹}_{۳}\times\cancel{۸}_{۴}}=\frac{۳۵}{۱۳۲}$$

دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

پاسخ گزینهٔ«۱» جمع دو تاس همواره مورد علاقهٔ طراحان کنکور بوده است. از این جهت جدول زیر می‌تواند تا اندازه‌ای به حل تست سرعت ببخشد.

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

می‌خواهیم مجموع دو تاس اول باشد، پس باید یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد. بنابراین داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱+۲+۴+۶+۲}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

یک تاس را به تکرار پرتاب می‌کنیم. احتمال ظاهرشدن عدد ۴ قبل از آمدن عدد ۶، کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ گزینهٔ«۲» می‌دانیم در چیدن n شیء متمایز، اگر k شیء ترتیب خاصی داشته باشند، تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $\frac{n!}{k!}$. حال فرض کنید بخواهیم اعداد ۱ تا ۶ را به گونه‌ای بچینیم که عدد ۴ جلوتر از عدد ۶ قرار گیرد، تعداد حالت‌های این چیدن برابر است با $\frac{۶!}{۲!}$. بنابراین احتمال این پیشامد به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۶!}{۲!}}{۶!}=\frac{۱}{۲}$$

در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی از مهره‌ها سفید است؟ (تجربی ۹۱)

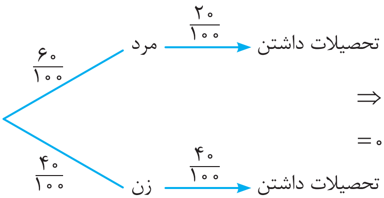
۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$

پاسخ گزینهٔ«۴» در حالت کلی زمان‌هایی که واژه‌های حداقل و حداکثر را می‌بینید، نیم‌نگاهی به حالت‌های نامطلوب داشته باشید، شاید تعداد حالت‌های نامطلوب کم‌تر باشد و از اصل متمم استفاده کنید.

۶۰ درصد از کارکنان سازمانی مرد و ۴۰ درصد از آن‌ها زن می‌باشند. می‌دانیم ۲۰ درصد از مردان و ۴۰ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آن‌ها تحصیلات دانشگاهی دارند؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) ۰/۱۸۹ ۲) ۰/۱۹۲ ۳) ۰/۱۶۹ ۴) ۰/۱۹۸

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول باید احتمال دارا بودن تحصیلات دانشگاهی را به‌دست آوریم و بعد از احتمال دوجمله‌ای استفاده کنیم:



$$\Rightarrow P(\text{تحصیلات داشتن}) = \left(\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}\right)+\left(\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}\right)$$
$$= ۰/۲۸$$

و در آخر داریم:
$$\binom{۳}{۲}(۰/۲۸)^{۲}(۰/۷۲)^{۱} \simeq ۰/۱۶۹$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. مهدی و علی با یکدیگر سنگ ـ کاغذ ـ قیچی بازی می‌کنند. در هر بار بازی هر کدام که ببرد ۱ امتیاز می‌گیرد. پیشامد آن که در ۳ بار بازی مساوی شوند، چند عضو دارد؟

۱) ۱۸۹ ۲) ۲۴۳ ۳) ۷۲۹ ۴) ۸۱

۲. دو تاس را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو مضرب ۳ بیایند. با کدام احتمال حداکثر در ۳ پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۷۲۹}$ ۲) $\frac{۲۱۷}{۷۲۹}$ ۳) $\frac{۲۷۱}{۷۲۹}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴۳}$

۳. در یکی از شهرهای بزرگ ۰/۳۷ جرایم در طول روز و ۱۹٪ جرایم درون شهر صورت می‌گیرد. اگر ۰/۸۸ جرایم در حومهٔ شهر یا در طول روز رخ دهد، در این صورت چند درصد جرایم درون شهر و در شب اتفاق می‌افتد؟

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۱۶

۴. فضای نمونهٔ آزمایشی به صورت $S=\{a,b,c,d\}$ است. اگر $P(a)=۲P(b)=۴P(c)=۶P(d)$ باشند، حاصل $P(\{b,c,d\}|\{b,c,a\})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲۳}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۵. از مجموعهٔ $\{۲۰۱,۲۰۲,\ldots,۵۰۰\}$، یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این عدد نه مضرب ۴ و نه مضرب ۵ باشد، چند برابر احتمال آن است که این عدد مضرب ۴ و مضرب ۵ نباشد؟

۱) $\frac{۱۲}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۲}$ ۳) $\frac{۶}{۱۹}$ ۴) $\frac{۱۹}{۶}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۱»

مهدی و علی هر کدام ۳ حالت برای بازی می‌توانند داشته باشند، پس فضای نمونه‌ای یک بار بازی به صورت زیر است:

$$S=\{\underbrace{(\text{س},\text{س}),(\text{ق},\text{ق}),(\text{ک},\text{ک})}_{\text{مساوی}},\underbrace{(\text{ق},\text{س}),(\text{س},\text{ک}),(\text{ک},\text{ق})}_{\text{علی می‌برد}},\underbrace{(\text{س},\text{ق}),(\text{ک},\text{س}),(\text{ق},\text{ک})}_{\text{مهدی می‌برد}}\}$$

حالت‌هایی که دو نفر در ۳ بار بازی با هم مساوی شوند به صورت زیر است:

❶ هر سه بازی مساوی شود. از آن‌جا که در هر بازی، تعداد حالت‌های مساوی ۳ تا است، تعداد حالت‌های ۳ مساوی برابر است با: $۳\times۳\times۳=۲۷$

❷ یک مساوی و یک برد و یک باخت داشته باشیم. هر کدام از این شرایط، ۳ حالت دارند. از آن‌جا که نمی‌دانیم در کدام بازی‌ها این حالت‌ها پیش می‌آید $۳!=۶$ حالت هم برای این که در کدام بازی‌ها مساوی، برد یا باخت اتفاق افتاده است،در نظر می‌گیریم: $۳\times۳\times۳\times۶=۶\times۲۷$

پس تعداد کل حالت‌های مساوی در ۳ بار بازی برابر است با: $۲۷+۶\times۲۷=۷\times۲۷=۱۸۹$

۲. گزینهٔ «۲»

احتمال این‌که در پرتاب دو تاس با هم، هر دو مضرب ۳ بیاید، برابر $\frac{۱}{۹}=\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}$ است. بنابراین متمم این پیشامد به احتمال $\frac{۸}{۹}$ رخ می‌دهد. اگر بخواهیم در حداکثر ۳ بار پرتاب دو تاس، این اتفاق بیفتد، حالت‌های زیر را باید در نظر بگیریم:

$$P=\underset{\substack{\text{در پرتاب اول هر}\\\text{دو تاس مضرب ۳ بیاید}}}{\overset{\text{پرتاب اول}}{\frac{۱}{۹}}}+\left(\underset{\substack{\text{هر دو تاس}\\\text{مضرب ۳ نیاید}}}{\overset{\text{پرتاب اول}}{\frac{۸}{۹}}}\times\underset{\substack{\text{هر دو مضرب}\\\text{۳ بیاید}}}{\overset{\text{پرتاب دوم}}{\frac{۱}{۹}}}\right)+\left(\underset{\substack{\text{هر دو مضرب}\\\text{۳ نیاید}}}{\overset{\text{پرتاب اول}}{\frac{۸}{۹}}}\times\underset{\substack{\text{هر دو}\\\text{مضرب ۳ نیاید}}}{\overset{\text{پرتاب دوم}}{\frac{۸}{۹}}}\times\underset{\substack{\text{هر دو}\\\text{مضرب ۳ بیاید}}}{\overset{\text{پرتاب سوم}}{\frac{۱}{۹}}}\right)\Rightarrow P=\frac{۸۱+۷۲+۶۴}{۷۲۹}=\frac{۲۱۷}{۷۲۹}$$

۳. گزینهٔ «۳»

پیشامد رخداد در روز را با A و رخداد درون شهر را با B نمایش می‌دهیم. داریم: $P(A)=۰/۳۷\,,P(B)=۰/۱۹$

$$P(A\cup B')=۰/۸۸\Rightarrow P(A)+P(B')-P(A\cap B')=۰/۸۸$$

$$\Rightarrow ۰/۳۷+\underbrace{(۱-۰/۱۹)}_{۰/۸۱}-P(A\cap B')=۰/۸۸\Rightarrow P(A\cap B')=۰/۳$$

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۳۷-P(A\cap B)=۰/۳\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۰۷$$

درون شهر و در شب می‌شود $B\cap A'$، پس خواهیم داشت:

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=۰/۱۹-۰/۰۷=۰/۱۲$$

۴. گزینهٔ «۲»

می‌دانیم $P(S)=۱$، بنابراین داریم:

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱\Rightarrow P(a)+\frac{P(a)}{۲}+\frac{P(a)}{۴}+\frac{P(a)}{۶}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۱۲P(a)+۶P(a)+۳P(a)+۲P(a)}{۱۲}=۱\Rightarrow P(a)=\frac{۱۲}{۲۳}$$

$$P(\{b,c,d\}|\{b,c,a\})=\frac{P(\{b,c,d\}\cap\{b,c,a\})}{P(\{b,c,a\})}=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{b,c,a\})}=\frac{P(b)+P(c)}{۱-P(d)}$$

$$\frac{\frac{۶}{۲۳}+\frac{۳}{۲۳}}{۱-\frac{۲}{۲۳}}=\frac{\frac{۹}{\cancel{۲۳}}}{\frac{۲۱}{\cancel{۲۳}}}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷}$$

۵. گزینهٔ «۱»

تعداد مضرب‌های ۴ در مجموعهٔ مورد نظر $=[\frac{۵۰۰}{۴}]-[\frac{۲۰۰}{۴}]=۷۵$

تعداد مضرب‌های ۵ در مجموعهٔ مورد نظر $=[\frac{۵۰۰}{۵}]-[\frac{۲۰۰}{۵}]=۶۰$

تعداد مضرب‌های ۴و۵(۲۰) در مجموعهٔ مورد نظر $=[\frac{۵۰۰}{۲۰}]-[\frac{۲۰۰}{۲۰}]=۱۵$

پیشامد A را مضرب ۴ بودن و پیشامد B را مضرب ۵ بودن در نظر می‌گیریم. «نه مضرب ۴ و نه مضرب ۵» یعنی $A'\cap B'$، پس داریم:

$$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)=۱-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=۱-(\frac{۷۵}{۳۰۰}+\frac{۶۰}{۳۰۰}-\frac{۱۵}{۳۰۰})=۰/۶$$

هم‌چنین پیشامد «مضرب ۴ و ۵ نباشد» یعنی $(A\cap B)'$ که احتمال آن برابر است با:

$$P(A\cap B)'=۱-P(A\cap B)=۱-\frac{۱۵}{۳۰۰}=۰/۹۵$$

در انتها خواهیم داشت:

$$\frac{P(A'\cap B')}{P(A\cap B)'}=\frac{۰/۶}{۰/۹۵}=\frac{۶۰}{۹۵}=\frac{۱۲}{۱۹}$$

۶. گزینهٔ «۳»

می‌دانیم مجموع احتمال‌ها برابر ۱ است. هم‌چنین $\{b,a\}$ و $\{b,c\}$ دو پیشامد مستقل‌اند. اگر $A=\{a,b\}$ و $B=\{b,c\}$ باشند، داریم: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow P(\{a,b\}\cap\{b,c\})=P(\{a,b\})\times P(\{b,c\})$

$$\Rightarrow P(\{b\})=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۱۵}$$

هم‌چنین از فرض سؤال داریم: $P(\{a,b\})=P(a)+P(b)=\frac{۲}{۵}\Rightarrow P(a)=\frac{۲}{۵}-P(b)=\frac{۲}{۵}-\frac{۲}{۱۵}=\frac{۴}{۱۵}$

$$P(\{b,c\})=P(b)+P(c)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(c)=\frac{۱}{۳}-P(b)=\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۱۵}=\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$P(d)=۱-P(\{a,b,c\})=۱-\frac{۲}{۱۵}-\frac{۱}{۵}-\frac{۴}{۱۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow P(\{b,d\})=P(b)+P(d)=\frac{۲}{۱۵}+\frac{۲}{۵}=\frac{۸}{۱۵}$$

۷. گزینهٔ «۳»

تعداد اعضای فضای نمونهٔ جدید برابر $n(S)=۶\times۵=۳۰$ (حالت‌های $(۱,۱),(۲,۲),\ldots(۶,۶)$ را نداریم) است.
حالا تعداد اعضای پیشامد مطلوب برابر است با:

هر زوجی می‌تواند بیاید

$$n(A)=۳\times۲=۶\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۰}=\frac{۱}{۵}$$

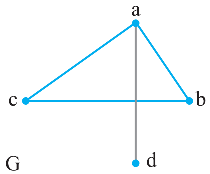
عدد زوجی که در پرتاب اول آمده، نیاید

گسسته

گراف

گراف

مجموعه‌ای است متشکل از رئوس و یال‌هایی که این رئوس را به هم متصل می‌کنند. مجموعهٔ رئوس گراف G را با $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌های گراف G را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{ad,ab,ac,bc\} \end{cases}$$

مرتبه و اندازهٔ گراف

به تعداد رئوس یک گراف، مرتبهٔ یک گراف گفته می‌شود و با p نشان می‌دهیم. همچنین به تعداد یال‌های یک گراف، اندازهٔ یک گراف گفته می‌شود و با q نشان می‌دهیم. ($p(G)$ و $q(G)$، مرتبه و اندازهٔ گراف G هستند.)

درجهٔ یک رأس: درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند. درجهٔ رأس v را با $deg(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد، آن را رأس فرد و اگر زوج باشد، آن را رأس زوج می‌نامیم. به عنوان مثال در گراف بالا داریم:

$$deg(d)=۱ \ , \ deg(a)=۳ \ , \ deg(b)=۲ \ , \ deg(c)=۲$$

همچنین بزرگ‌ترین عدد در بین درجهٔ رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم. در گراف بالا $\Delta(G)=۳$ و $\delta(G)=۱$ است. به رأسی که درجهٔ آن صفر باشد، یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (ایزوله) می‌گوییم.

نکات درجهٔ رئوس گراف

۱ در گراف مرتبهٔ p: $\quad ۰\le deg(v_i)\le p-۱$

۲ مجموع درجه‌های رئوس یک گراف دو برابر اندازهٔ آن است. $\quad \sum_{i=۱}^{p} deg(v_i)=۲q$

۳ تعداد رئوس فرد یک گراف زوج است. تعداد رئوس زوج یک گراف، از نظر زوج یا فرد بودن، مشابه مرتبهٔ گراف (p) است.

۴ در هر گراف با بیش از یک رأس، رئوس با درجهٔ تکراری وجود دارند.

۵ اگر تعداد m رأس از گرافی از درجهٔ غیر صفر باشند، داریم: $\quad ۰\le deg(v_i)\le m-۱$

۶ چنانچه تعداد m رأس گرافی از درجهٔ غیر صفر باشند، k رأس از درجهٔ $\Delta=m-۱$ داشته باشد، آنگاه داریم: $\quad \delta\ge k$

تست **در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس‌های فرد عددی .... و تعداد رأس‌های زوج عددی .... است.**

۱) فرد ـ فرد ۲) فرد ـ زوج ۳) زوج ـ فرد ۴) زوج ـ زوج

پاسخ **گزینهٔ «۴»** تعداد رأس‌های فرد، همواره عددی زوج است. هم‌چنین تعداد رئوس زوج از نظر زوج یا فرد بودن مشابه مرتبهٔ گراف است. پس تعداد آن‌ها نیز زوج است.

در گرافی از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۱۹، $\Delta=۴$ و $\delta=۳$ است. اختلاف تعداد رأس‌های درجهٔ ۳ و تعداد رأس‌های درجهٔ ۴ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ماکزیمم درجهٔ رئوس برابر ۴ و مینیمم درجه برابر ۳ است. پس رئوس گراف فقط از درجهٔ ۳ و ۴ هستند. تعداد رأس‌های از درجهٔ ۳ و ۴ را به ترتیب x و y می‌گیریم. پس داریم: $x+y=۱۰$

از طرفی مجموع درجهٔ رئوس دو برابر تعداد یال‌ها است. یعنی:

$$\underbrace{۳+۳+\cdots+۳}_{x\ \text{تا}}+\underbrace{۴+۴+\cdots+۴}_{y\ \text{تا}}=۲q=۲\times ۱۹$$

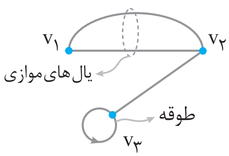
$$\Rightarrow ۳x+۴y=۳۸\Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۰ \\ ۳x+۴y=۳۸ \end{cases}\Rightarrow x=۲\ ,\ y=۸$$

بنابراین اختلاف تعداد رأس‌های درجهٔ ۳ و ۴ برابر با: $y-x=۶$

انواع گراف

۱- گراف غیر ساده

گراف غیرساده یا چندگانه، گرافی است که طوقه یا یال‌های چندگانهٔ (موازی) یا هر دو را داشته باشد.



- **طوقه:** طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.
- **یال‌های چندگانه:** اگر بین دو رأس از یک گراف بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن‌ها را یال‌های چندگانه (موازی) می‌گویند.

۲- گراف ساده

گرافی که فاقد طوقه و فاقد یال‌های چندگانه (موازی) است. به بیان دیگر در گراف ساده بین دو رأس، حداکثر یک یال وجود دارد و طوقه نیز وجود ندارد.

۳- گراف جهت دار

گرافی که برای تمام یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، گراف جهت‌دار نامیده می‌شود. هر یال جهت‌دار را با یک زوج‌مرتب نشان می‌دهند که از مؤلفهٔ اول به مؤلفهٔ دوم یال وجود دارد.

نکته‌ها:

❶ در هر گراف ساده از مرتبهٔ p و اندازهٔ q داریم:

$$\underset{\text{کم‌ترین تعداد یال}}{0} \le q \le \underset{\text{بیشترین تعداد یال}}{\binom{p}{2}}$$

❷ تعداد گراف‌های ساده از مرتبهٔ p، با مجموعهٔ رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ برابر است با: $2^{\binom{p}{2}}$

تست **علی، سامان، محمد، نازنین و فاطمه، در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هرکدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هرکدام از چهار نفر دیگر باشد یا نباشد. اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه‌ای دوطرفه باشد، یعنی هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان یکدیگر نیستند، در این صورت چند حالت مختلف برای آن‌ها می‌تواند وجود داشته باشد؟**

۱) 2^{10} ۲) 2^{23} ۳) 2^{15} ۴) 2^{20}

پاسخ **گزینهٔ «۱»** اگر این ۵ نفر را به عنوان ۵ رأس گراف در نظر بگیریم و بودن در فهرست دوستان یکدیگر را با یک یال بین این افراد نشان دهیم، در این صورت گراف متناظر با این وضعیت، یک گراف ساده از مرتبهٔ ۵ می‌باشد. پس تعداد گراف‌های سادهٔ از مرتبهٔ ۵ مورد نظر است، که برابراست با: $2^{\binom{5}{2}} = 2^{10}$

نکته:

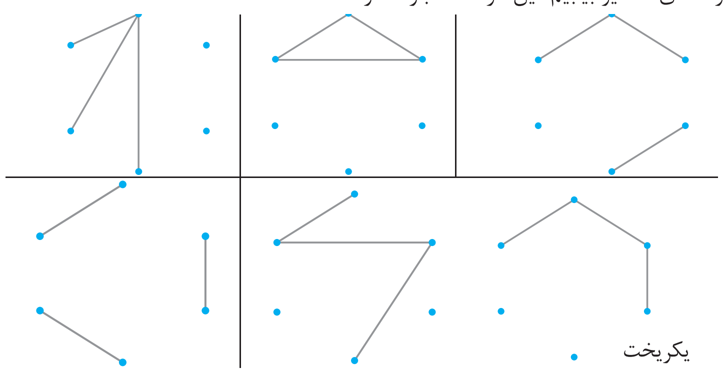
برای رسم نمودار یک گراف، روش یکتایی مد نظر نیست. آنچه مهم است، این است که باید مشخص باشد که گراف چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. با توجه به توضیح داده شده، گراف‌هایی که تعداد یکسانی رأس دارند و این رأس‌ها به صورت مشابهی به یکدیگر متصل شده‌اند، **یکریخت** نامیده می‌شوند. برای تعیین یکریختی دو گراف باید به چند مورد توجه شود:

❶ تعداد رئوس یا مرتبهٔ گراف ❷ تعداد یال‌ها یا اندازهٔ گراف ❸ درجهٔ هر یک از رئوس ❹ همسایگی هر رأس

تست **با ۶ رأس بدون نام، چند گراف ساده با اندازهٔ ۳ وجود دارد؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۴»** در این‌جا رئوس بدون نام هستند، پس باید تعداد گراف‌های غیر یکریخت را به کمک رسم گراف‌های متمایز بیابیم. این گراف‌ها عبارتند از:



نکته:
تعداد گراف‌های جهت‌دار از مرتبهٔ p، با مجموعهٔ رئوس $\{v_۱, v_۲, \dots, v_p\}$ برابر $۲^{p\times p}$ است و اگر گراف‌های جهت‌دار فاقد طوقه باشد، تعداد آن‌ها برابر است با: $۲^{p(p-۱)}$

تست **علی، سامان، محمد، نازنین و مریم، در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هرکدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هرکدام از چهار نفر دیگر باشد یا نباشد. در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟**

۱) $۲^۹$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۲۰}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر این ۵ نفر را به عنوان ۵ رأس گراف در نظر بگیریم، در این صورت گراف متناظر با این وضعیت، یک گراف جهت‌دار بدون طوقه است. زیرا ممکن است به عنوان مثال، محمد در فهرست دوستان سامان باشد ولی سامان در فهرست دوستان علی نباشد. پس نیاز به یال‌های جهت‌دار است. با توجه به این‌که $p=۵$ است، تعداد گراف‌های جهت‌دار فاقد طوقه برابر است با: $۲^{p(p-۱)} = ۲^{۲۰}$

یک گام فراتر: تشخیص ساده بودن یک گراف از روی درجه‌های آن مطابق مراحل زیر نیز ممکن است:

۱ درجهٔ رئوس گراف را به طور نزولی (بزرگ به کوچک) مرتب می‌کنیم.

۲ یک رأس با درجهٔ ماکزیمم را حذف می‌کنیم (اگر چند رأس ماکزیمم داشتیم، یکی را حذف می‌کنیم) و به تعداد عدد درجهٔ همان رأس، از بقیهٔ درجه‌ها، هرکدام یک واحد کم می‌کنیم.

۳ درجه‌های به‌دست آمده را به طور نزولی مرتب می‌کنیم و مرحلهٔ دوم را تکرار می‌کنیم. اگر در حین تکرار، ادامهٔ کار ممکن نشد و یا درجهٔ منفی به‌دست آمد، درجه‌های اولیه، مربوط به گراف ساده نیست و اگر پس از چند مرحله تکرار، تمام درجه‌های گراف صفر شدند، درجه‌های داده شده، مربوط به یک گراف ساده است.

تست **درجهٔ رئوس گرافی به صورت $a,b,۵,۴,۳,۲$ است. کم‌ترین عدد $a+b$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۴»** می‌دانیم مجموع درجهٔ رئوس دو برابر اندازهٔ گراف است. یعنی:

$$\sum \deg(v_i) = ۲q \Rightarrow a+b+۵+۴+۳+۲ = ۲q \Rightarrow a+b = \underbrace{۲q-۱۴}_{\text{زوج}}$$

حال چون $a+b$ زوج است و حداقل مقدار آن را می‌خواهیم، اول فرض می‌کنیم $a+b=۲$ باشد، داریم:

$$a+b=۲ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۱ \end{cases} \Rightarrow \text{درجهٔ رئوس}: ۵,۴,۳,۲,۱,۱$$

حال به کمک نکتهٔ قبل، بررسی می‌کنیم که آیا دنبالهٔ به‌دست آمده مربوط به درجهٔ رئوس یک گراف ساده است یا خیر؟

$$\cancel{۵},۴,۳,۲,۱,۱ \xrightarrow[\text{۱ درجه کم می‌کنیم.}]{\text{از ۵ رأس بعدی هرکدام}} \Rightarrow \cancel{۳},۲,۱,۰,۰ \xrightarrow[\text{یک واحد کم می‌کنیم.}]{\text{از ۳ رأس بعدی هرکدام}} ۱,۰,-۱,۰ \Rightarrow ۱,۰,۰,-۱$$

به درجهٔ منفی رسیدیم پس مربوط به گراف ساده نیست. با توجه به گزینه‌ها بنابراین $a+b=۴$ مورد قبول است.

فصل هفتم

دو رأس مجاور (همسایه): دو رأس u و v را دو رأسِ همسایه یا مجاور می‌گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی: $uv \in E(G)$

مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس: اگر G یک گراف دلخواه باشد و $v \in V(G)$، آن‌گاه مجموعهٔ تمام رئوسی از گراف G که با رأس v همسایه‌اند (مجاور یا به رأس v متصل هستند)، مجموعهٔ **«همسایگی باز رأس v»** نامیده و با نماد $N_G(v)$ نمایش داده می‌شود، بنابراین: $N_G(v)=\{u \in V(G) ; uv \in E(G)\}$

اگر خودِ رأس v را به مجموعهٔ همسایگی باز آن اضافه کنیم، مجموعهٔ **«همسایگی بستهٔ رأس v»** به دست می‌آید که آن را با نماد $N_G[v]$ نشان می‌دهند. بنابراین: $N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$

نکته:
با توجه به تعریف درجهٔ هر رأس و مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس می‌توان گفت:

۱) $|N_G(v)|=\deg(v)$ ۲) $\sum_{i=1}^{p}|N_G(v_i)|=\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)$

تست با مجموعهٔ رئوس $\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده با شرط $N_G[a]=\{a,b,c\}$ و ۴ یالی وجود دارد؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۵ ۳) ۲۸ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۲» از $N_G[a]=\{a,b,c\}$ نتیجه می‌گیریم که دو رأس b و c با a مجاورند. پس تعداد گراف‌های سادهٔ ۴ یالی را می‌خواهیم که شامل یال ab و ac باشد. هم‌چنین در این گراف یال‌های ad و ae را هم حتماً نداریم. با توجه به این‌که مرتبهٔ گراف برابر ۵ و حداکثر یال این گراف برابر $\binom{5}{2}=10$ می‌باشد. باید یال‌های ab و ac و ad و ae را کنار بگذاریم و از بین ۶ یال باقی‌مانده ۲ یال را انتخاب کنیم تا با ab و ac، ۴ یال مورد نظر را تشکیل دهند، پس تعداد گراف‌های مورد نظر برابر: $\binom{6}{2}=15$

میانگین درجهٔ رئوس گرافی با مجموعهٔ رئوس $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_{10}\}$ برابر ۳ است. حاصل $\sum_{i=1}^{10}|N_G[v_i]|$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ گزینهٔ «۲» میانگین درجه‌ها، برابر مجموع درجه‌ها $(2q)$ تقسیم بر تعداد آن‌ها (p) است، پس:

$$\frac{2q}{p}=3 \Rightarrow \frac{2q}{10}=3 \Rightarrow q=15$$

$N_G[v_i]$، مجموعهٔ همسایه‌های بستهٔ رأس v_i است. تعداد عضوهای این مجموعه، برابر درجهٔ رأس v_i به علاوهٔ ۱ است که در واقع خود رأس v_i را هم می‌شماریم. یعنی پس داریم: $|N_G[v_i]|=d(v_i)+1$

$$\sum_{i=1}^{10}|N_G[v_i]|=|N_G[v_1]|+\cdots+|N_G[v_{10}]|=(d(v_1)+1)+(d(v_2)+1)+\cdots+(d(v_{10})+1)$$

$$=\underbrace{(d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_{10}))}_{2q}+10=2(15)+10=40$$