فیزیک (۳) رشته‌ی ریاضی

پایه‌ی دوازدهم

مؤلفین:

محسن قرقچیان، محمدرضا خوش‌سیما

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

خنده و گریه

تا حالا شده توی یه مکان عمومی مثل رستوران، بانک و ... یه موضوع خنده‌داری براتون اتفاق بیفته بخواید از ته دل بخندید، اونم در حد اففففجار؟!!! چی کار می‌کنید؟ خجالت رو می‌ذارید کنار و از ت دل می‌خندید اونم طوری‌که همه با خنده‌تون بخندن یا نه، یکم چاشنی شو می‌آرید پایین طوری‌که چند نفر اطرافتون بفهمن یا فقط به یه لبخد کوچک بسنده می‌کنید؟!

حالا اگر یه اتفاق ناراحت‌کننده افتاده باشه چی؟ گریه‌تونو پنهون می‌کنید، با به چند قطره اشک اکتفا می‌کنید، یا نه بیشتر، با چشمای گریون شروع می‌کنید تو خیابون قدم زدن؟!

نمی‌دونم کدموشون منطقی به نظر میاد!!

از نظر شما کدومش درسته؟! خنده‌ای که باعث خنده دیگران بشه یا گریه‌ای که غم رو تو دل دیگران راه بده.

اگر خنده‌تون باعث شه که یه لحظه یه نفر از غم های دنیا رها شه باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که باشم می‌کنم (البته طوری‌که لودگی به نظر نیاد). اگر گریه‌تون باعث بشه بغض دل یه نفر دیگه بترکه و اونم شروع کنه به گریه، باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که باشم می‌کنم.

خب شاید بگید که چی؟!

احتمالا هر کدوم از ما لذت خنده‌هایی که با خنده‌ی خودمون ایجاد کردیم رو تجربه کردیم. چه حس جالبی داره، وقتی بلند می‌خندی و همه به صدای خنده‌ی تو می خندن، یکی از ته دل و بدوزقضاوت تو، یکی با دلیل اینکه چه خوب! دلش شاده و یکی با این فکر که بابا اینم رد داده. ولی هر کدوم با هر دیدی با تو همراه می‌شن شروع می کنن به خندیدن.

حس جالبیه اگر تجربه نکردید حتما تو یه مکان و فضای مناسب امتحان کنید (نرید وسط مراسم عزاداری بعد بگید حرفت جواب نداد).

هر کاری توش یه لذتی داره. اگر آدم ته دلش صاف و صادق باشه شاید کوچکترین کارش هم همراه با لذت باشه.

شما تو چه چیزی استعداد دارید؟

من یکی از استعدادهامو تو ریاضی پیدا کردم، همه یه استعداد یا توانایی ندارن، به قول اساتید علوم تربیتی و اجتماعی، سی و چند شاخه‌ی توانایی و استعداد داریم که هر فردی می‌تونه توی چندتا از شاخه‌ها استعداد داشته باشه و هیچ کسی هم نیست که توی تمام شاخه‌ها توانایی داشته باشه. یکی استعداد ورزشی داره اونم نه نو همه‌ی رشته‌ها یکی شناگر خوبیه، یکی فوتبالیست، یکی ژیمناست، یکی تنیسور و .....، یکی استعداد تو هنر نقاشی‌داره، یکی مجسمه‌سازی، یکی بازیگری، یکی گلدوزی، یکی فرشبافی و ... ، یکی استعداد ریاضی داره، یکی فیزیک، یکی تاریخ، یکی ادبیات و ...

گفتم یه انسان تک بعدی نیست ممکنه یه تاجرِ ورزشکارِ مهندس باشی مثل علی دایی یا پزشکِ آهنگسازِ خواننده باشی مثل محمد اصفهانی یا استادِ مجریِ برنامه‌سازِ مهندس باشی مثل عادل فردوسی‌پور یا ...

حالا اگر بپرسید چطور باید استعدادهاتونو بشناسید می‌گم یکی از راهاش مدرسه است که به دلیل سیستم آموزشی نادرست یا ناقص ممکنه نتونه کمک لازم رو بهتون بکنه. ولی شما می‌تونید استعدادتونو با مطالعه، مشاوره، روابط اجتماعی، علایق و ... پیدا کنید.

خب یکی از توانایی‌ها و استعدادهایی که من در دوران مدرسه در خونم پیدا کردم ریاضیه، عاشق ریاضی‌ام شاید بهتر بگم گاهی دیووونه‌شم. خب بر طبق یه قاعده‌ی روانشانسی باید دوست و همکاریی داشته باشم که اونها هم عاشق یا دیووونه‌ی یه شاخه علمی باشن (بازم می‌گم صددرصد نیست). اونا هم علاقه، استعداد ِ آرامششون رو تو ریاضی، فیزیک، شیمی، هنر، ادبیات و ... یافتن. باز هم می‌گم ممکنه من همین آرامش، هیجان، عشق و ... رو تو گفتن شعر یا نوشتن متنی مثل همین متن هم داشته باشم (فکر نکنین یه آدم تک بعدی هستین هیچ آدمی تک بعدی نیست).

خوشخوان انتشاراتی ویژه‌ی دانش آموزان ممتاز

آره این شعار ما در بدو تاسیس بود؛ وقتی که کسی زیاد به ممتازها اهمیت نمی داد! اگر هم بود در حد چند مدرسه و چند کتاب خاص. ما اومدیم که بگیم تو همه‌ی کشور ممتاز داریم نه فقط شهرهای بزرگ. خواستیم بگیم ممتازهایی که توی روستای گرمسیر و سردسیر هستین ما هواتونو داریم، چون خودمون هم از همون ریشه‌ایم. خب به مرور مثل هر شغل و حرفه‌ای دوستان دیگه هم وارد زمینه‌ی توجه به دانش‌آموزان ممتاز شدن (ما با ممتازها بودیم وقی ممتاز بودن مد نبود).

ما می‌نوشتیم تا اونی که مثل خودمون عاشق درس و مبحث خاصیه سیرآب بشه. ما تالیف می‌کردیم تا دانش‌آموزهای خوبمون هی دنبال این کتاب اون کتاب نرن و گذشت ...

ما به هدفمون رسیدیم، شدیم ویژه‌ی ویژه ... . ولی همین ویژه بودن به روزایی شد دردسر، روزایی که به دلیل تغییر فرهنگ و شرایط درس خوندن (گاهی بی‌ارزش شدن ادامه تحصیل و کم علاقگی به غم و بی‌ارزش شدن مدارج تحصیلی)، دانشگاه رفتن ساده‌تر از گذشته شد و کم بهاتر (که چه خوب) و شکر که استرس کمتر شد وای کاش کمتر بشه و روزی برسه که روی دوش هیچ جوونی استرس کنکور نباشه تا راحت به پرورش استعدادهای واقعیش فکر کنه و اونها روفدای کنکور نکنه (ولی هنوز تشنه‌ها هستن).

بگذریم، پس از ۱۷ سال می‌خواهیم بگیم که ما نه تنها علاقه‌مندان هر شاخه‌ی علمی خاص مختص به دبیرستان رو رها نکردیم بلکه می‌خواهیم روش آموزشی رو ارائه بدیم تا هر دانش‌آموزشی با هر استعدادی بتونه در زمینه‌ی خاص در حد توانش (تاکید می‌کنم در حد ظرفش و نه بیشتر) رشد کنه تا علاوه بر ایجاد علاقه در زمینه‌ی‌علمی مورد نظر، بتونیم راهی رو برای رسیدن به اهداف آینده‌اش باز کنیم. شاید ریاضی برای من شیرین باشه و برای شما سخت، فیزیک برای یکی شیرین باشه و برای دیگری سخت، ولی مهم اینکه یاد بگیریم رشد کنیم و راه رشد کردن رو یاد بگیریم. به قوزیه جمله معروف ما می‌خواهیم به‌جای ماهی، ماهیگیری (روش حل، لذت بردن و فکر کردن) رو به شما یاد بدیم تا هر کسی به اندازه‌ی توانش بتونه از دریای بزرگ جلوی روش ماهی بگیره. یکی با یه ماهی خودشو سیر می‌کنه، یکی با چند تا خانواده شو و یکی با ماهی‌های‌بیشتری جامعه و فرهنگشو.

امیدوارم در سالی که پیش رو دارید کلی ماهی از دریای موفقیت بگیرید، کنکور آینه‌ی کسی رو نمی‌سازه شمایید که آینده رو می‌سازید.

ساختار

کتاب‌های دوازدهمی که از انتشارات به چاپ رسیده، به شکل زیرند:

درس‌نامه: درسنامه‌ی هر فصل به‌صورت جلسه‌بندی به همراه مثال‌ها و تست‌های متنوع ارائه شده، تا ضمن عمق بخشی به مطالب موجود در کتاب درسی، دانش‌آموزهای عزیز رو برای امتحان‌های مختلف از جمله امتحان نهایی آماده کنن.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای: پرسش‌ها چهار دسته دارن:

۱. سطح ساده ۲. سطح متوسط ۳. سطح دشوار ۴. ترکیب سطوح

برای اینکه کتاب، برای بیشتر دانش‌آموزان قابل استفاده باشه، پرسش‌ها سطح‌بندی شده‌اند تا دانش‌آموزان متوسط به پایین لزوما دنبال پرسش‌های سطح سخت نرن و دانش‌آموزهای متوسط به بالا وقت خودشونو برای پرسش‌های ساده خیلی سپری نکنن. برای اینکه مهارت دوستای عزیز رو در تشخیص سوالات ساده، متوسط و سخت بالا ببریم، پرسش‌های ترکیب سطوح رو آوردیم تا هر دانش‌آموزی بتونه متناسب با سطح تواناییش سوالات مربوط به سطحشو تشخیص‌بده.

پرسش‌های تکمیلی فصل: چون بعد از تموم شدن هر جلسه دانش‌آموز با ذهنیت نکات همون بخش شروع به حل کردن سوالات می‌کنه، شاید این موضوع در نهایت ایده‌آل نباشه، چون هنر شما زمانی نشون داده می‌شه که بتونید تشخیص بدید هر سوال برای کدوم مبحثه، پس با آوردن سوالات ترکیبی با یه تیر دو نشون زدیم یکی بلا بردن قدرت تشخیص مبحث مرتبط با سوال و دوم مرور فصل.

سوالات کنکور مرتبط با فصل: سعی کردیم سوالات کنکور داخل و خارج سال‌های اخیر مربوط به هر فصل رو برای شما جمع کنیم تا با شکل سوالات کنکور هم آشنا بشید.

پاسخ کلیدی و تشریحی پرسش‌ها: هم پاسخنامه‌ی کلیدی و هم تشریحی‌سوالات رو بعد از اتمام فصل آوردیم، حتی برای بعضی از سوالات بیشتر از یک راه‌حل آوردیم. راستی، همه به پاسخنامه‌ی تشریحی حتما سر بزنن!!!!!!!

آزمون‌های سه گانه: در آخر هر فصل سه آزمون استاندارد برای کنکوریای عزیز آوردیم تا سطح یادگیری مطالب رو برای خودشون بسنجن. راستی فقط جواب کلیدی رو داخل کتاب قرار دادیم تا خدایی نکرده اگر تو سوالی مشکل داشتید سعی کنید با جست‌وجو داخل کتاب یا مراجعه به دبیرتون به اون بخش مسلط بشین. (البته سعی می‌کنیم جوابا رو داخل سایت قرار بدیم تا دوستایی که احیانا مراجعه به دبیر براشون سخته دچار مشکل نشن).

آخر

با تشکر از تمام دوستانی که ما رو در تالیف و چاپ این کتاب یاری کردند و با طلب عفو و بخشش برای نواقص و کاستی‌ها از شما، برای همه‌ی شما در زندگی موفقیت و سربلندی رو از خداوند متعال خواستارم.

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلف

سلام بر شما خوبان

برخی اوقات فکر می‌کنیم، چگونه بعضی از آدم‌ها نسبت به سایرین دوست دشتنی‌تر و موفق‌تر هستند؟

آدم‌های خوش سیرت و موفق، به صورت تصادفی به وجود نمی‌آیند. این آدم‌ها ویژگی‌ها و مهارت‌های خاصی را هوشمندانه با برنامه‌ریزی به مرور زمان کسب کرده‌اند.

تجربه کردن

آن‌ها ...

تلاش بی‌وقفه

برنامه داشتن

مشورت گرفتن

شکست خوردن

امیدوار بودن

... را تجربه می‌کنند.

احساس مسئولیت

نسبت به ...

سرنوشت خودشان

سرنوشت همنوعشان

آینده‌ی محیط زیست

کسانی که برگردنشان حق دارند

انسان‌های دردمند و گرفتار

.... احساس‌مسئولیت می‌کنند.

تمرین کردن

برای ...

کمتر ادعا داشتن و اهل عمل بودن

قضاوت نابه‌جا نکردن و انصاف داشتن

بی‌موقع و بی‌منت، دوست داشتن و عشق ورزیدن

"چه باید کرد" به جای "چرا گفتن"

هر روز بهتر از دیروز بودن

... تمرین می‌کنند.

از صمیم قلب، برایتان روزگاری سرشار از شادی و سلامت آرزومندیم.

محسن قرقچیان - محمدرضا خوش‌سیما

تابستان ۱۳۹۸

فهرست مطالب

فصل اول	حرکت بر خط راست	۱
فصل دوم	دینامیک و حرکت چرخشی	۱۵۵
فصل سوم	نوسان و موج	۲۷۱
فصل چهارم	برهم‌کنش‌های امواج	۳۸۷
فصل پنجم	آشنایی با فیزیک اتمی	۴۶۵
فصل ششم	آشنایی با فیزیک هسته‌ای	۵۲۵

فصل اول

حرکت برخط راست

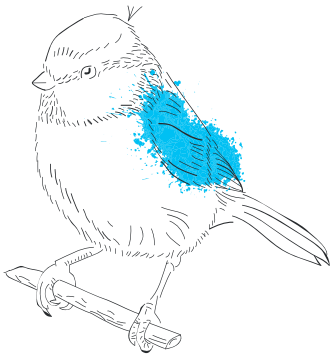
بخش ۱: مسافت، جابه‌جایی و تندی متوسط، سرعت متوسط

بخش ۲: حرکت با سرعت ثابت، تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای، شتاب متوسط

بخش ۳: حرکت با شتاب ثابت، شتاب لحظه‌ای

بخش ٤: نمودارهای حرکت

بخش ۵: حرکت سقوط آزاد



مقدمه

فیزیک علم زندگی است. بنابراین به بررسی و تحلیل رویدادهایی که در طبیعت رخ می‌دهد، می‌پردازد. یکی از رویدادهای بسیار مهم و متنوع در اطراف ما حرکت اجسام مختلف است. حرکت زمین، حرکت ترن‌ها و خودروها، حرکت توپ ورزشی، ربات، الکترون و ... نمونه‌هایی از این پدیده‌ی فیزیکی مهم هستند.

شاید جالب باشد بدانید که

۱ تندی‌سنج خودرو یا دوچرخه چه کمیتی را مشخص می‌کند؟

۲ دستگاه‌های فاصله‌یاب که توسط مهندسان عمران یا نقشه‌برداری استفاده می‌شود، چگونه عمل می‌کنند؟

۳ وقتی می‌گوییم هواپیمای مافوق صوت، مفهوم آن چیست؟

۴ بررسی حرکت پیستون درون سیلندر چه اهمیتی دارد؟

۵ مفاهیم سرعت و شتاب چه تفاوتی دارند؟

۶ در برنامه‌ریزی خطوط هوایی و یا ترن‌ها نقش سرعت و معادلات حرکت چیست؟

۷ در سامانه‌ی هوشمند خودروی بدون راننده "*LIDAR*" چگونه فاصله‌ها بررسی می‌شود؟

۸ در صنعت داروسازی در حوزه‌ی "*Target therapy*" سرعت و مکان جذب دارو چه اهمیتی دارد؟

۹ در صنعت، چگونه دستگاه‌های پرس‌کاری را برای وجود مانع خارجی، مانند دست کارگر ایمن‌سازی می‌کنند؟

۱۰ در خطوط تولید کارخانه‌های صنعتی، مانند خودروسازی حرکت ربات‌ها چگونه تنظیم می‌شود؟

۱۱ وقتی می‌گوییم زمان حمله‌ی مار کبری ۴۰ میلی‌ثانیه و زمان پلک زدن انسان ۲۰۰ میلی ثانیه است، نسبت شتاب‌ها چگونه است؟

۱۲ چگونه سرعت مجاز برای خودروها و ترن‌ها بررسی می‌شود؟

انتشارات خوشخوان

بخش اول: مفاهیم حرکت، جابه‌جایی و مسافت، تندی متوسط و سرعت متوسط

حرکت: وقتی جسمی مکان خود را با گذشت زمان تغییر می‌دهد، می‌گوییم حرکت کرده است. به عنوان نمونه، قطاری که مسیر بین دو ایستگاه را طی می‌کند، جسم متحرک نامیده می‌شود. اگر حرکت یک جسم در مسیر مستقیم روی خط راست انجام شود، حرکت را مستقیم‌الخط می‌نامیم. به عنوان نمونه، دونده‌ای که در مسیر مستقیم فاصله‌ی بین شروع و خط پایان را طی می‌کند، دارای حرکت مستقیم‌الخط است. در مبحث حرکت (سینماتیک) به دنبال علت حرکت یعنی نیرو نیستیم. در فصل بعد (دینامیک) حرکت همراه با نیرو بررسی می‌شود.

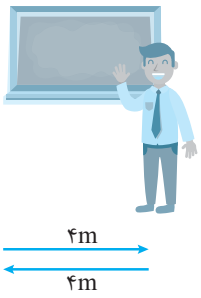
مسافت

فرض کنیم دانش‌آموزی از حیاط مدرسه به کلاس خود که در طبقه‌ی دوم قرار دارد حرکت می‌کند. طول این مسیر طی شده را مسافت پیموده شده یا به اختصار مسافت می‌نامیم.

تذکر

مسافت ممکن است خط مستقیم، خط‌های شکسته یا منحنی و یا این‌که مجموعه‌ای شامل دو یا چند مورد از موارد فوق باشد.

مثال ۱. **وقتی معلمی هنگام تدریس از یک طرف تخته تا طرف دیگر حرکت کرده و دوباره به محل اول باز می‌گردد، مسافت طی شده چند متر است؟ (مسیر حرکت را مستقیم و طول تخته را ۴ متر فرض کنید.)**



پاسخ: مسافت طی شده توسط معلم شامل دو پاره‌خط رفت و برگشت است. بنابراین مسافت طی شده ۸ متر است.

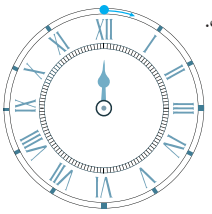
جابه‌جایی

اگر پاره‌خط جهت‌داری را از مکان شروع حرکت به مکان پایان حرکت وصل کنیم، این پاره‌خط جهت‌دار را که از مبدأ به مقصد وصل می‌شود، بردار جابه‌جایی می‌نامیم.

تذکر

بردار جابه‌جایی دارای جهت است، ولی مسافت طی شده جهت ندارد.

مثال ۲. **وقتی نوک عقربه ثانیه‌شمار از عدد ۱۲ شروع می‌کند و دوباره به همان مکان باز می‌گردد، مسافت و جابه‌جایی را محاسبه کنید. (نوک عقربه در دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر حرکت می‌کند.)**

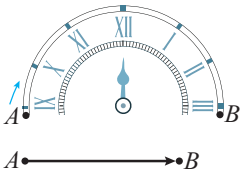


پاسخ: بردار جابه‌جایی باید مکان ابتدای حرکت (مبدأ) را به مکان انتهای حرکت وصل کند، بنابراین جابه‌جایی صفر است. مسافت طی شده طول مسیری است که نوک عقربه‌ی ثانیه‌شمار طی می‌کند. این مسیر به‌صورت دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر است. بنابراین اندازه‌ی مسافت طی شده محیط دایره‌ای به شعاع cm ۱۰ است.

$$L = 2\pi R = 2 \times 3/14 \times \frac{1}{10} = 0/628m = 628mm$$

انتشارات خوشخوان

مثال ۳. **در مثال ۲، اگر عقربه از عدد ۹ تا عدد ۳ حرکت کند حداقل مسافت طی شده و جابه‌جایی نوک عقربه به طول ۱۰ سانتی‌متر چند میلی‌متر است؟**



پاسخ: مسافت طی شده مطابق شکل مسیر A تا B یعنی محیط نیم‌دایره است.

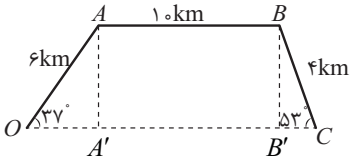
دقت کنیم تعداد دورهای بیش‌تر می‌تواند باعث افزایش مسافت طی شده گردد.

جابه‌جایی طول بردار AB است و به مسیر حرکت بستگی ندارد.

بنابراین: ۱) مسافت طی شده برابر است با $\pi R = ۳/۱۴ \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۳۱۴}{۱۰۰} m$ و بر حسب میلی‌متر معادل $۳۱۴\ mm$ است.

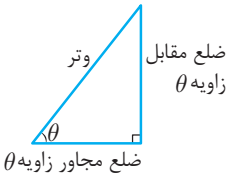
۲) جابه‌جایی برابر است با $۲ \times \frac{۱}{۱۰} = ۰/۲ m$ و برحسب میلی‌متر معادل $۲۰۰\ mm$ است.

مثال ٤. **یک بالگرد امداد از مبدأ O حرکت را شروع و با مسیر $OABC$ در مقصد C حرکت را تمام می‌کند. اگر مسیر حرکت مطابق شکل مقابل باشد، مسافت و جابه‌جایی را به‌دست آورید.**



پاسخ: مسافت طی شده مجموع پاره‌خط‌های OA ، AB و BC است. ولی جابه‌جایی، برداری است که از O به C وصل می‌شود و مجموع OA' و $A'B'$ و $B'C$ است.

یادآوری:



$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

بنابراین: ۱) مسافت طی شده برابر است با : $۶ + ۱۰ + ۴ = ۲۰ km$

۲) جابه‌جایی برابر است با : $۶\cos ۳۷^\circ + ۱۰ + ۴\cos ۵۳^\circ = ۱۷/۲ km$

تندی متوسط و سرعت متوسط

مسافت طی شده در واحد زمان را تندی متوسط و جابه‌جایی متحرک در واحد زمان را سرعت متوسط می‌نامیم.

تندی متوسط $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$

سرعت متوسط $v_{av} = \frac{d}{\Delta t}$

تذکر

تندی متوسط کمیت نرده‌ای ولی سرعت متوسط کمیت‌برداری است. واحد هر دو کمیت در SI متر بر ثانیه است. بنابراین بردار سرعت متوسط دارای مفهوم است ولی بردار تندی متوسط بی‌معنی است.

مثال ۵. **سرعت متوسط متحرکی $۷۲ \frac{km}{h}$ است.**

الف) سرعت را برحسب واحد SI بیابید.

ب) پس از ۲۰ دقیقه چند متر، جابه‌جا می‌شود؟

پاسخ: الف)

$$۷۲ \frac{km}{h} = \bigcirc \frac{m}{s} \Rightarrow \bigcirc = \frac{۷۲ \frac{۱۰^۳ m}{۳۶۰۰ s}}{\frac{m}{s}} = ۷۲ \times \frac{۱۰}{۳۶} = ۲۰$$

ب)

$$\bar{v} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow d = ۲۰ \times (۲۰ \times ۶۰) = ۲/۴ \times ۱۰^۴ m$$

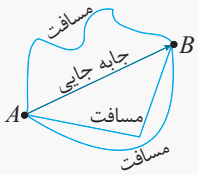
تذکر

برای تبدیل سرعت از $\frac{km}{h}$ به $\frac{m}{s}$ کافی است عدد مورد نظر را در $\frac{۱۰}{۳۶}$ ضرب کنیم.

مثال ۶. **وقتی می‌گوییم تندی متوسط متحرکی $۴۰\frac{m}{s}$ است، مفهوم آن چیست؟**

پاسخ: یعنی این‌که متحرک به‌طور متوسط در هر ثانیه مسافت ۴۰ متر را طی می‌کند.

تذکر

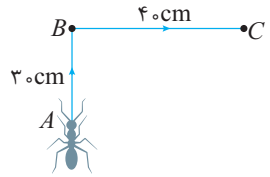


برای یک حرکت مشخص، مقدار تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی با مقدار سرعت متوسط است. زیرا سرعت متوسط به پاره‌خط واصل بین ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد ولی تندی متوسط به مسافت طی شده برای رسیدن از مبدأ به مقصد بستگی دارد. همواره جابه‌جایی کوچک‌تر یا مساوی با مسافت است.

مثال ۷. **در مسابقات دوی استقامت، اگر شروع و پایان مسابقه مکان یکسانی باشد برنده، کیست؟ شخصی که سرعت متوسط بیش‌تری داشته باشد یا تندی متوسط بیش‌تر؟**

پاسخ: سرعت متوسط همه دوندگانی که به نقطه‌ی پایان می‌رسند صفر است زیرا جابه‌جایی همه آن‌ها صفر است. ولی تندی متوسط متفاوت است زیرا مسافت‌های یکسانی را در زمان‌های متفاوت طی می‌کنند.

مثال ۸. **مورچه‌ای مسیر ABC را در مدت ۵۰ ثانیه طی می‌کند. سرعت متوسط و تندی متوسط آن را معلوم کنید.**



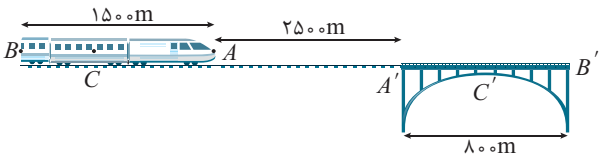
پاسخ: تندی متوسط:

$$s_{av}=\frac{۳۰+۴۰}{۵۰}=۱/۴\frac{cm}{s}$$

سرعت متوسط:

$$\vec{v}_{av}=\frac{d_{AC}}{\Delta t}=\frac{\sqrt{۳۰^{۲}+۴۰^{۲}}}{۵۰}=۱\frac{cm}{s}$$

مثال ۹. **قطاری به طول ۱۵۰۰ متر در فاصله‌ی ۲۵۰۰ متری از پلی به طول ۸۰۰ متر قرار دارد. پس از مدت ۲ دقیقه قطار به‌طور کامل از پل عبور می‌کند. سرعت متوسط قطار را در SI بیابید.**



پاسخ: اگر بخواهیم قطار به‌طور کامل از پل عبور کند، باید نقطه‌ی B به نقطه‌ی B' برسد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{۱۵۰۰+۲۵۰۰+۸۰۰}{۱۲۰}=۴۰\frac{m}{s}$$

مثال ۱۰. **در مسأله‌ی قبل اگر بخواهیم وسط قطار به وسط پل برسد، تقریباً چند دقیقه زمان لازم است؟**

پاسخ: باید نقطه C به C' برسد.

$$\vec{v}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{\vec{d}}{\vec{v}}=\frac{۷۵۰+۲۵۰۰+۴۰۰}{۴۰}\Rightarrow \Delta t=\frac{۳۶۵۰}{۴۰}=۹۱/۲۵s\Rightarrow \Delta t=\frac{۹۱/۲۵}{۶۰}\min\simeq ۱/۵\ \min$$

تذکر

اگر متحرکی مسیر مستقیم را با سرعت‌های ثابت $v_۱$ و $v_۲$ و $v_۳$ و ... در بازه‌های زمانی $\Delta t_۱$، $\Delta t_۲$، $\Delta t_۳$ و ... طی کند. برای محاسبه‌ی سرعت متوسط آن، جابه‌جایی کل را به زمان کل حرکت تقسیم می‌کنیم.

$$\text{کل } \vec{v}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳+\dots}{\Delta t_۱+\Delta t_۲+\Delta t_۳+\dots}$$

توجه کنید که می‌توان $\Delta x=vt$ و یا $\Delta t=\frac{\Delta x}{v}$ را در رابطه‌ی فوق جایگزین نمود.

انتشارات خوشخوان

مثال ۱۱. متحرکی در مسیر مستقیم ابتدا مسافت ۴۰۰ متر را با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ و سپس ۹۰۰ متر بعدی را با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ طی می‌کند.

سرعت متوسط در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ:

$$\vec{v}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{۴۰۰+۹۰۰}{\frac{\Delta x_۱}{v_۱}+\frac{\Delta x_۲}{v_۲}}=\frac{۱۳۰۰}{\frac{۴۰۰}{۲۰}+\frac{۹۰۰}{۳۰}}=۲۶\frac{m}{s}$$

مثال ۱۲. در هر حالت سرعت متوسط را در کل مسیر تعیین کنید.

الف) متحرکی دو جابه‌جایی متوالی $d_۱$ و $d_۲$ را با سرعت‌های ثابت v طی می‌کند.

ب) متحرکی در دو زمان یکسان جابه‌جایی‌های متوالی را با سرعت $v_۱$ و $v_۲$ طی می‌کند.

پ) متحرکی دو مسافت متوالی هم‌اندازه را با سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ طی می‌کند.

پاسخ:

الف) $\overline{v}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}\Rightarrow\begin{matrix}\Delta x_۱=d_۱\\ \Delta x_۲=d_۲\end{matrix}$

$$\overline{v}=\frac{d_۱+d_۲}{\frac{d_۱}{v_۱}+\frac{d_۲}{v}}=v(\frac{d_۱+d_۲}{d_۱+d_۲})=v$$

توجه داشته باشید که بدون محاسبه نیز انتظار می‌رفت که سرعت متوسط v باشد، وقتی متحرک در مسیر مستقیم با تندی ثابت v حرکت می‌کند، سرعت متوسط و تندی متوسط برابرند؛ همچنین جابه‌جایی و مسافت طی شده هم‌اندازه هستند.

ب) $\overline{v}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{v_۱t+v_۲t}{t+t}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$

پ) $\overline{v}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{d+d}{\frac{d}{v_۱}+\frac{d}{v_۲}}=\frac{۲d}{\frac{d(v_۱+v_۲)}{v_۱v_۲}}=\frac{۲v_۱v_۲}{v_۱+v_۲}$

مثال ۱۳. متحرکی ۸۰ درصد از مسیری را با سرعت ثابت v طی می‌کند. سپس به اندازه‌ی ۲۵ درصد از مسیر طی شده را با سرعت $۲v$ باز می‌گردد. سرعت متوسط در کل حرکت چند برابر v است؟

پاسخ:

$$\overline{v}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{\frac{۸}{۱۰}d-\frac{۱}{۴}(\frac{۸}{۱۰}d)}{\frac{\frac{۸}{۱۰}d}{v}+\frac{\frac{۱}{۴}(\frac{۸}{۱۰}d)}{۲v}}\Rightarrow\overline{v}=\frac{\frac{۴}{۵}d-\frac{۱}{۵}d}{\frac{d}{v}(\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۱۰})}=\frac{\frac{۳}{۵}v}{\frac{۹}{۱۰}}=\frac{۲}{۳}v$$

مثال ۱۴. یک کوادکوپتر از مکانی با مختصات $A\begin{vmatrix}۱۰۰\\ ۲۰۰\end{vmatrix}$ در مدت $۱۰s$ به مکانی با مختصات $B\begin{vmatrix}۴۰۰\\ ۶۰۰\end{vmatrix}$ جابه‌جا می‌شود. هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

الف) بردار مکان اولیه ب) بردار مکان ثانویه پ) بردار جابه‌جایی ت) بردار سرعت متوسط

پاسخ:

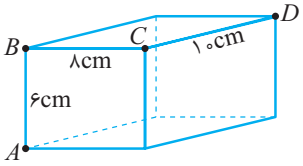
الف) $\vec{d}_۱=x_۱\vec{i}+y_۱\vec{j}=۱۰۰\vec{i}+۲۰۰\vec{j}$

ب) $\vec{d_۲}=x_۲\vec{i}+y_۲\vec{j}=۴۰۰\vec{i}+۶۰۰\vec{j}$

پ) $\vec{d}=\vec{d}_۲-\vec{d}_۱=۳۰۰\vec{i}+۴۰۰\vec{j}\Rightarrow|\vec{d}|=\sqrt{۳۰۰^۲+۴۰۰^۲}=۵۰۰m$

ت) $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{۳۰۰\vec{i}+۴۰۰\vec{j}}{۱۰}=۳۰\vec{i}+۴۰\vec{j}\frac{m}{s}\Rightarrow|\vec{v}_{av}|=۵۰\frac{m}{s}$

مثال ۱۵. مورچه‌ای با تندی ثابت $۲\frac{cm}{s}$ در مسیر $ABCD$ حرکت می‌کند.



الف) سرعت متوسط را در جابه‌جایی A تا D تعیین کنید.

ب) تندی متوسط را در مسیر A تا D تعیین کنید.

پاسخ:

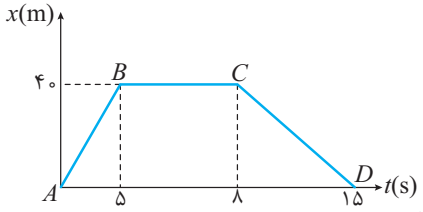
الف) $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{\sqrt{(AB)^۲+(AC)^۲+(CD)^۲}}{t_{AB}+t_{BC}+t_{CD}}$

توجه کنید که وقتی نماد بردار روی v یا d قرار ندارد، منظورمان مقدار این کمیت‌ها است.

سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\sqrt{۶^۲+۸^۲+۱۰^۲}}{\frac{۶}{۲}+\frac{۸}{۲}+\frac{۱۰}{۲}}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۱۲}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۶}\frac{cm}{s}$

ب) تندی متوسط $s=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۶+۸+۱۰}{۳+۴+۵}=\frac{۲۴}{۱۲}=۲\frac{cm}{s}$

مثال ۱۶. شکل مقابل نمودار مکان - زمان شناگری را نشان می‌دهد که در مسیر مستقیم حرکت رفت و برگشت را انجام می‌دهد. به هر یک از موارد زیر پاسخ دهید:



الف) سرعت متوسط در کل حرکت چند متر بر ثانیه است؟

ب) تندی متوسط در کل حرکت چند متر بر ثانیه است؟

پ) سرعت متوسط در مسیر AB و BC و CD چند متر بر ثانیه است.

ت) بیش‌ترین تندی در چه مسیری است.

ث) شیب خط‌های AB و CD را معلوم کنید و با سرعت متوسط در این مسیرها مقایسه کنید.

پاسخ:

الف) $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=۰$

ب) $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۴۰+۴۰}{۱۵}=\frac{۱۶}{۳}\frac{m}{s}$

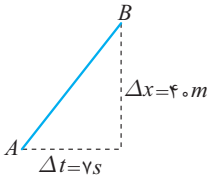
پ) مسیر AB $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}_{AB}}{\Delta t}=\frac{۴۰}{۵}=۸\frac{m}{s}$ و مسیر BC $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}_{BC}}{\Delta t}=۰$ و مسیر CD $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}_{CD}}{\Delta t}=\frac{\vec{d}_{CD}}{\Delta t}=\frac{-۴۰}{۷}\frac{m}{s}$

ت) $S_{AB}=\frac{۴۰}{۵}=۸\frac{m}{s}$ ، $S_{CD}=\frac{۴۰}{۷}\frac{m}{s}$

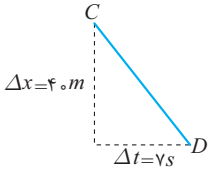
تذکر

دقت کنید که تندی متوسط کمیت عددی است. بیش‌ترین تندی متوسط در مسیر AB است.

ث) شیب خط AB برابر با $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ یعنی همان سرعت متوسط در مسیر AB است.

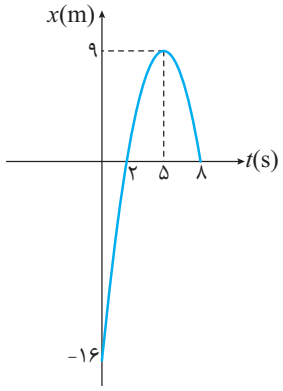


شیب خط CD برابر با $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ یعنی همان سرعت متوسط در مسیر CD است.



انتشارات خوشخوان

مثال ۱۷. نمودار مکان زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند مطابق شکل سهمی مقابل است. هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.



الف) سرعت متوسط در کل حرکت

ب) دورترین فاصله‌ی متحرک از مبدأ

پ) زمان‌هایی که متحرک در مبدأ مکان است.

ت) سرعت متوسط در مدتی که از مبدا دور می‌شود.

ث) معادله مکان - زمان را رسم کنید.

پاسخ:

الف) $\vec{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-(-۱۶)}{۸}=۲\frac{m}{s}$

ب) $x=-۱۶m$

$t_۱=۲s$ و $t_۲=۸s$

پ) متحرک دو بار از مبدأ عبور می‌کند.

ت) با توجه به نمودار در ۳ بازه‌ی زمانی، نزدیک شدن و دور شدن را معلوم می‌کنیم.

در بازه‌ی زمانی $۰<t_۱<۲$ ، متحرک از مکان $x_۱=-۱۶m$ به $x_۲=۰$ می‌رسد.

در بازه‌ی زمانی $۲<t_۲<۵$ ، متحرک از مکان $x_۱=۰$ به $x_۲=۹m$ می‌رسد.

در بازه‌ی زمانی $۵<t_۳<۸$ ، متحرک از مکان $x_۱=۹m$ به $x_۲=۰$ می‌رسد.

$$\vec{v}_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۹-۰}{۳}=۳\frac{m}{s}$$

ث) می‌دانیم که در سهمی معادله y بر حسب x به‌صورت $y=ax^۲+bx+c$ است. در نمودار داده شده مکان برحسب زمان است یعنی به جای تابع y، تابع x و به جای متغیر x متغیر t وجود دارد، بنابراین خواهیم داشت:

$$x=at^۲+bt+c$$

c عرض از مبدأ است که در این‌جا معادل (۱۶-) قرار می‌گیرد. برای رأس سهمی اگر متغیر $\frac{-b}{۲a}$ باشد، بیشینه‌ی تابع y_{max} به‌دست می‌آید.

$(-\frac{\sqrt{\Delta}}{۴a})$، در واقع مختصات رأس سهمی $(\frac{-b}{۲a}\,,\,\frac{\sqrt{\Delta}}{۴a})$ است.

(در این‌جا $t=۵=\frac{-b}{۲a}$ متغیر و $x_{max}=۹=\frac{-\Delta}{۴a}$)

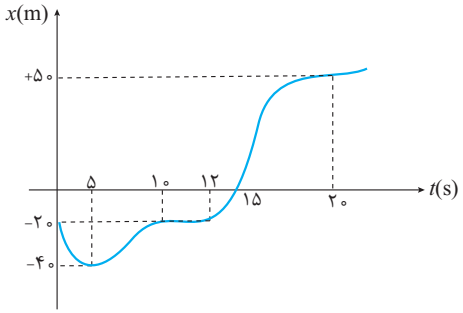
$$x=k(t-۲)(t-۸)$$

در لحظه $t=۰$ مکان متحرک ۱۶ m- است.

$$x=-۱۶=k(-۲)(-۸)\Rightarrow k=-۱$$

$$x=-(t-۲)(t-۸)=-t^۲+۱۰t-۱۶$$

مثال ۱۸. با توجه به نمودار مکان - زمان مقابل به هر مورد پاسخ دهید.



الف) در مدت ۲۰ s پس از شروع حرکت، متحرک چه مدت در مکان منفی و چه مدت در مکان مثبت بوده است؟

ب) در چه لحظه‌هایی متحرک متوقف می‌شود؟

پ) سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول، چند برابر سرعت متوسط در ۵ ثانیه‌ی سوم است؟

ت) از لحظه‌ی شروع تا لحظه‌ای که به دورترین فاصله از مبدأ می‌رسد سرعت متوسط چقدر است؟

ث) سرعت متوسط بین دو لحظه‌ای که متحرک تنها برای لحظه‌ای متوقف می‌شود، چقدر است؟

پاسخ: الف) با توجه به نمودار ۱۵ s آغازین حرکت مکان منفی است و در ۵ ثانیه چهارم مکان مثبت است.

ب) در ۵ ثانیه‌ی اول متحرک از مبدأ دور می‌شود و به دورترین مکان منفی رسیده و متوقف می‌شود.

پ)

سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{x_{t=5}-x_{t=0}}{5-0}=\frac{-40-(-20)}{5}=-4\frac{m}{s}$

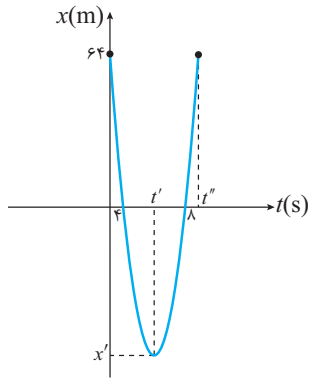
سرعت متوسط در ۵ ثانیه سوم $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{x_{t=15}-x_{t=10}}{5}=\frac{0-(-20)}{5}=4\frac{m}{s}$

برای نسبت سرعت متوسط در دو بازه زمانی داریم: $\Rightarrow \frac{-4}{4}=-1$

ت) دورترین فاصله از مبدأ (۵۰+) متر است. $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{50-(-20)}{20}=\frac{7}{2}\frac{m}{s}$

ث) در زمان‌های $t=5s$ و $t=20s$ متحرک متوقف می‌شود. $\vec{v}_{av}=\frac{50-(-40)}{15}=6\frac{m}{s}$

مثال ۱۹. در سهمی مقابل، نمودار مکان - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مشخص شده است. هر یک از موارد داده شده را تعیین کنید.



الف) سرعت متوسط از شروع حرکت تا دومین عبور از مرکز

ب) معادله مکان - زمان

پ) زمان و مکان توقف

ت) زمانی که طول می‌کشد متحرک به مکان اولیه باز گردد (t'')

ث) سرعت متوسط از ابتدای لحظه‌ای که در مکان منفی قرار دارد تا آخرین لحظه‌ای که از مبدأ دور می‌شود.

ج) تندی متوسط وقتی از ابتدا تا انتهای لحظه‌ای که در مکان منفی قرار دارد.

چ) رسم مسیر حرکت رسم کنید.

پاسخ:

الف) $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-64}{8-0}=-8\frac{m}{s}$

ب) $x=k(t-4)(t-8)\xrightarrow[x=64]{t=0}64=k(-4)(-8)\Rightarrow k=2$

$x=2(t-4)(t-8)=2(t^2-12t+32)=2t^2-24t+64$

پ) متحرک از لحظه‌ی شروع تا $t=4s$ به مبدأ نزدیک می‌شود و از t' تا $t=4s$ به دورترین مکان منفی می‌رسد، در لحظه‌ی t' متحرک در مکان x' متوقف می‌شود.

با استفاده از تقارن در سهمی می‌دانیم $t'=6s$ است، برای محاسبه x' خواهیم داشت: $x'=2(6)^2+(-24\times6)+64\Rightarrow x'=-8m$

ت) روش اول: برای این‌که به مکان اول بازگردد، باید $x=64m$ باشد.

$64=2t^2-24t+64\Rightarrow 2t^2-24t=0\Rightarrow t=0$ و $t=12s$

روش دوم: با استفاده از تقارن در سهمی می‌توانیم بگوییم $t''=8+4=12s$

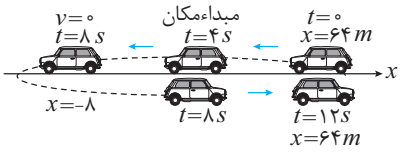
ث) متحرک در بازه زمانی $4<t<8$ در مکان منفی قرار دارد و در $4<t<6$ در حال دور شدن از مبدأ است.

$\vec{v}_{av}=\frac{-8-0}{6-4}=-4\frac{m}{s}$

ج) برای محاسبه‌ی تندی متوسط لازم است، مسافت طی شده در مدتی را که مکان منفی است معلوم کنیم.

$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{(+8)+(8)}{4}=4\frac{m}{s}$

چ) دقت کنید اگرچه نمودار مکان - زمان سهمی است ولی مسیر حرکت خط راست است.



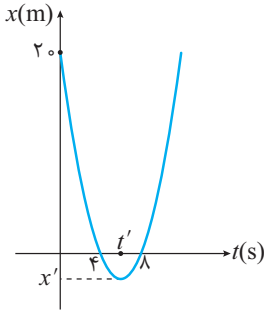
انتشارات خوشخوان

مثال ۲۰. نمودار سهمی مقابل مکان زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند.

الف) سرعت متوسط از ابتدای حرکت تا دومین عبور از مبدأ را بیابید.

ب) معادله مکان - زمان را معلوم کنید.

پ) زمان توقف را بیابید.



پاسخ:

الف) در $t=۸$ برای دومین بار از مبدأ عبور می‌کند.

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-۲۰}{۸}=-\frac{۵}{۲}\frac{m}{s}$$

دقت کنید علامت منفی برای سرعت نشان می‌دهد که جابه‌جایی منفی بوده است.

ب) معادله‌ی مکان $x=t^۲+bt+c\Rightarrow x=k(t-۴)(t-۸)$

در لحظه‌ی $t=۰$ مکان متحرک $x=۲۰m$ است.

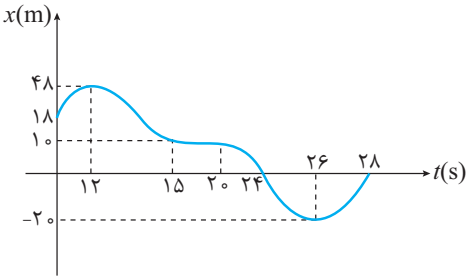
$$x=۲۰=k(-۴)(-۸)\Rightarrow k=\frac{-۵}{۸}$$

$$x=-\frac{۵}{۸}(t-۴)(t-۸)=-\frac{۵}{۸}t^۲+\frac{۱۵}{۲}t-۲۰$$

پ) مطابق شکل، زمان توقف t' یعنی رأس سهمی، که دورترین مکان در نمودار است، با استفاده از تقارن در سهمی خواهیم داشت:

$$t'=\frac{۴+۸}{۲}=۶s$$

مثال ۲۱. نمودار مکان - زمان متحرکی نشان داده شده است



الف) سرعت متوسط از ابتدای حرکت تا وقتی به دورترین فاصله از مبداء می‌رسد چقدر است؟

ب) سرعت متوسط در بازه‌ای که در مکان منفی قرار دارد و از مبدأ دور می‌شود چقدر است؟

پ) سرعت متوسط در بازه‌ای که در مکان منفی قرار دارد و به مبدأ نزدیک می‌شود چقدر است؟

ت) سرعت متوسط در بازه‌ای که در مکان مثبت قرار دارد و به مبدأ نزدیک می‌شود چقدر است؟

ج) در کل حرکت جهت حرکت چند بار تغییر کرده است؟

چ) در کل حرکت تندی متوسط بیش‌تر است یا سرعت متوسط؟

پاسخ:

الف) در بازه $۰<t<۱۲$

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۴۸-۱۸}{۱۲}=۲/۵\frac{m}{s}$$

ب) در بازه $۲۴<t<۲۶$

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۲۰-۰}{۲۶-۲۴}=-۱۰\frac{m}{s}$$

پ) در بازه $۲۶<t<۲۸$

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-(-۲۰)}{۲۸-۲۶}=۱۰\frac{m}{s}$$

ت) در بازه $۱۲<t<۱۵$

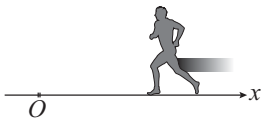
$$\overline{v}=\frac{۱۰-۴۸}{۱۵-۱۲}=\frac{-۳۸}{۳}\frac{m}{s}$$

ث) تا وقتی متحرک در حال دور شدن یا نزدیک شدن به مبدأ است، جهت حرکت عوض نمی‌شود، در لحظه‌ای که جهت حرکت عوض می‌شود، روند دور شدن یا نزدیک شدن به مبدأ تغییر می‌کند. در لحظه‌های $t=۱۲s$ و $t=۲۶s$ این اتفاق رخ می‌دهد.

ج) جابه‌جایی در کل حرکت ($-۱۸\ m$) است. ولی مسافت طی شده به مراتب بیش‌تر است. بنابراین تندی متوسط از سرعت متوسط بیش‌تر است.

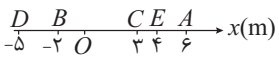
پرسش‌های سطح ساده

۱. شـخصی مطابق شـکل روبه‌رو بر محور xها می‌دود. کدام گزینه جهت بردار مکان او را در لحظه‌ی نشان داده شده در شکل، درست نمایش می‌دهد؟



۱) $\rightarrow$ ۲) $\leftarrow$
۳) $\uparrow$ ۴) $\downarrow$

۲. متحرکی روی خط مستقیم مسیر $ABCDE$ را طی می‌کند. نسبت مسافت به جابه‌جایی آن کدام است؟



۱) -۱ ۲) -۱۵
۳) $-۱۳/۵$ ۴) $-۱۶/۵$

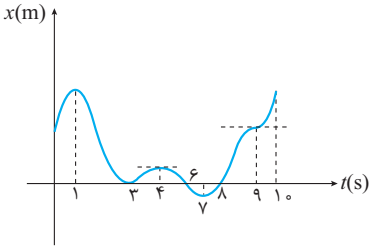
۳. مسافت طی شده متحرکی که با معادله زمان - مکان $x = ۳t^۳ + ۵t^۲ + t + ۱$ در SI است و در دو ثانیه‌ی اول حرکتش چند متر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۷ ۳) ۳۷ ۴) ۴۶

۴. متحرکی روی مسیر مستقیم با معادله‌ی مکان - زمان $x = -t^۲ + ۴t - ۳$ در حال حرکت است. جابه‌جایی متحرک را در دو ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر است؟

۱) $+۱۵$ ۲) $+۱$ ۳) -۱۲ ۴) -۱۵

۵. با توجه به نمودار مکان - زمان شـکل روبه‌رو، متحرک در مدت ..... ثانیه در حال نزدیک شـدن به مبدأ است و ..... بار از مبدأ عبور می‌کند.



۱) ۶ و ۲
۲) ۵ و ۲
۳) ۶ و ۳
۴) ۵ و ۳

۶. متحرکی نیمی از زمان حرکت بین نقاط A و B را روی خط مستقیم با سرعت $۲۰\frac{km}{h}$ و نیمی دیگر را با سرعت $۱۶\frac{km}{h}$ طی می‌کند. سرعت متوسط بین این دو نقطه چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۸ ۲) $\frac{۱۶۰}{۹}$ ۳) $\frac{۸۰}{۳}$ ۴) ۵

پرسش‌های سطح متوسط

۷. در کدام‌یک از موارد زیر اندازه‌ی جابه‌جایی و مسافت متحرک نمی‌تواند یکسان باشد؟

۱) متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ باشد.
۲) متحرک در حال حرکت، تندی‌اش در یک لحظه به سرعت صفر برسد.
۳) علامت سرعت متحرک عوض شود.
۴) سرعت و تندی متحرک هم علامت نباشند.

۸. معادله‌ی حرکت ذره‌ای که روی مسیر مستقیم در حال حرکت است به‌صورت $-۲t^۲ + ۶t + ۸$ است. از لحظه سوم تا پنجم حرکت کدام گزاره صحیح است؟

۱) متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.
۲) متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.
۳) متحرک ابتدا از مبدأ دور شده، سپس نزدیک می‌شود.
۴) متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک شده و سپس دور می‌شود.

۹. در چه صورت اندازه‌ی سرعت متوسط یک متحرک با تندی متوسط آن لزوماً برابر است؟

۱) متحرک با تندی ثابت حرکت کند.
۲) متحرک روی خط مستقیم حرکت کند.
۳) سرعت متحرک در هیچ لحظه‌ای صفر نشود.
۴) متحرک تغییر جهت ندهد.

۱۰. متحرکی روی محور xها در حال حرکت است. در کدام یک از گزینه‌های زیر متحرک الزاماً در حال نزدیک شدن به مبدأ است؟

۱) سرعت و تندی متحرک خلاف علامت هم باشند.
۲) سرعت و تندی متحرک هم‌علامت باشند.
۳) $xv > ۰$
۴) $xv < ۰$

انتشارات خوشخوان

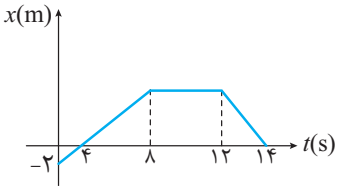
۱۱. قطاری به طول ۳۰۰ متر در مدت ۰/۵ ساعت با تندی ثابت ۰/۸ کیلومتر بر ساعت از پلی عبور می‌کند. طول پل چند متر است؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۰۰

۱۲. متحرکی با معادله‌ی حرکت $x = t^3 - 4t + 1$ روی خط مستقیم در حال حرکت است. سرعت متوسط متحرک در ۳ ثانیه دوم حرکت چند برابر ۳ ثانیه اول است.

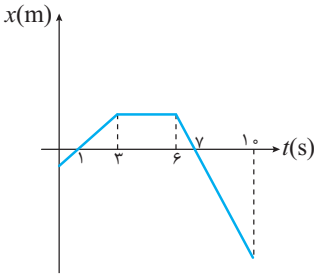
۱) ۴/۵ ۲) ۶/۴ ۳) ۱۱/۸ ۴) ۱۲/۸

۱۳. با توجه به نمودار مکان- زمان مقابل نسبت سرعت متوسط متحرک در ۳ ثانیه‌ی سوم به ثانیه‌ی سیزدهم کدام گزینه است؟



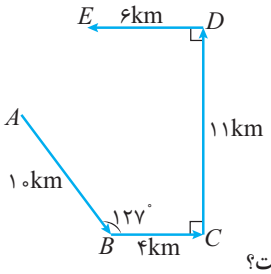
۱) $-\frac{1}{3}$
۲) -1
۳) $-\frac{2}{3}$
۴) -2

۱۴. نمودار مکان - زمان متحرکی که روی خط مستقیم حرکت می‌کند مطابق شکل زیر است. در کدام بازه‌ی زمانی، اندازه‌ی سرعت متوسط متحرک بزرگ‌تر است؟



۱) ۵۰ تا ۸ ثانیه
۲) ۱ تا ۴ ثانیه
۳) ۰/۵ تا ۶ ثانیه
۴) ۶/۵ تا ۹ ثانیه

۱۵. متحرکی روی مسیر مشخص شده در شکل از نقطه‌ی A به E می‌رود. جابه‌جایی این متحرک چند کیلومتر است؟ $(\sin 37^\circ = 0/6)$



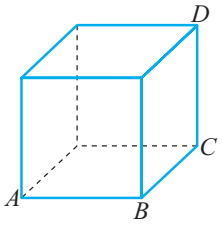
۱) $\sqrt{61}$
۲) $4\sqrt{2}$
۳) $3\sqrt{2}$
۴) ۵

۱۶. معادله‌ی حرکت جسمی در SI به‌صورت $x = -t^2 + 3t - 2$ است. در کدام بازه‌ی زمانی جابه‌جایی جسم مثبت است؟

۱) ۱/۳ تا ۱/۹ ثانیه ۲) ۰/۸ تا ۲/۴ ثانیه ۳) ۱/۴ تا ۱/۵۵ ثانیه ۴) ۱/۱ تا ۲/۱ ثانیه

پرسش‌های سطح دشوار

۱۷. مطابق شکل متحرکی با تندی ثابت v مسیر $ABCD$ را طی می‌کند. سرعت متوسط در این جابه‌جایی کدام است؟ (هر ضلع مکعب L فرض می‌شود.)

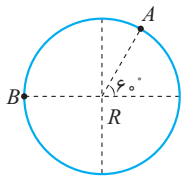


۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}v$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}v$
۳) $4v$
۴) $3v$

۱۸. شناگری فاصله دو نقطه‌ی A و B را در طول مسیر حرکت آب در روخانه‌ای با توان ثابت حرکت می‌کند. زمان بیشینه‌ی حرکت شناگر ۴ برابر زمان کمینه‌ی آن است. نسبت تندی حرکت شناگر در زمانی که آب ساکن است به تندی رودخانه کدام گزینه است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۹. متحرکی مسیر دایره‌ای را با تندی $\frac{\pi R}{۶}\frac{m}{s}$ دور می‌زند، حداکثر سرعت متوسط آن از A تا B کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$
۲) $\frac{R}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}R$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}R$

۲۰. متحرکی روی مسیر مستقیم با معادله مکان - زمان $x=-t^۲+۶t-۵$ در حال حرکت است. مسافت متحرک در ۲ ثانیه‌ی دوم حرکت چند متر است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۸

۲۱. معادله‌ی مکان - زمان متحرکی که روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند به‌صورت $x=at^۲+bt+c$ است. در چند شرط از موارد زیر، این متحرک همواره در حال دور شدن از مبدأ است؟

الف) $a,b,c>۰$
ب) $c>۰, ab>۰$
پ) $a,b,c<۰$
ت) $c<۰, ab<۰$
ث) $abc>۰$
ج) $c<۰, ab>۰$

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۲. شناگری طول استخری به اندازه‌ی ۵۰ متر را با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ در مسیر مستقیم رفته و با سرعت $۶\frac{m}{s}$ در همان مسیر برمی‌گردد. سرعت متوسط این شناگر در ۸ ثانیه‌ی اول حرکتش چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۰
۲) ۳/۲
۳) ۴
۴) $\frac{۱۶}{۱۳}$

۲۳. معادله‌ی مکان - زمان متحرکی در SI به‌صورت $x=۵+۲\sin(\frac{\pi}{۲}t)$ است. از لحظه‌ی ۲ تا ۱۰ ثانیه، این متحرک چه مسافتی را برحسب متر طی می‌کند؟

۱) ۱۶
۲) ۲۰
۳) ۱۸
۴) ۱۰

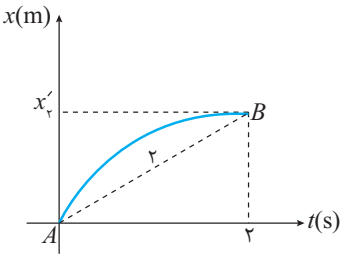
۲۴. متحرکی روی مسیر مستقیم $\frac{۱}{۳}$ فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی را با سرعت ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ و بقیه‌ی مسیر را با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه طی می‌کند. سرعت متوسط بین این دو نقطه چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲
۲) $\frac{۴۰}{۳}$
۳) ۱۵
۴) ۱۸

۲۵. شخصی می‌خواهد فاصله‌ی بین دو شهر را که ۲۱ کیلومتر است، به ترتیب با سرعت‌های ۲/۵ و ۳ کیلومتر بر ساعت طی کند. این شخص در بین راه پس از ۱۵ کیلومتر پیاده‌روی چند ساعت استراحت کند تا سرعت متوسط آن ۲/۱ کیلومتر بر ساعت شود؟

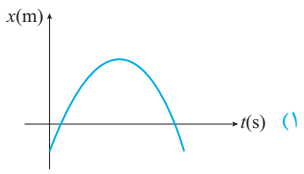
۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

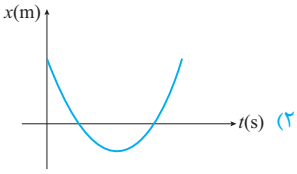
۲۶. با توجه به نمودار مقابل کدام گزینه برای نسبت $\frac{\overline{v}_۱}{\overline{v}_۲}$ در ۲ ثانیه‌ی اول صحیح است؟

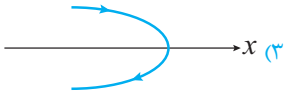


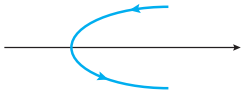
۱) برابر با $\frac{۱}{۲}$
۲) بیش‌تر از ۱
۳) کم‌تر از ۱
۴) برابر ۱

۲۷. معادله‌ی مکان - زمان متحرکی در SI به‌صورت $x_t=t^۲-۸t+۱۲$ است. کدام گزینه مسیر حرکت را بهتر نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

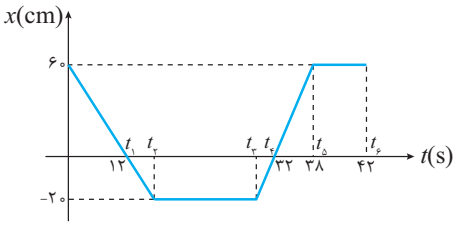
۴) 

انتشارات خوشخوان

۲۸. متحرکی روی خط مستقیم فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B که ۱۲۰ متری از هم فاصله دارند، را طی می‌کند به طوری که نیمی از مسیر را با تندی $12\frac{m}{s}$ و نیم دیگر را با تندی $24\frac{m}{s}$ می‌پیماید. تندی متوسط متحرک در ۲ ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۲۹. نمودار مکان - زمان کفش‌دوزکی به‌صورت مقابل است. کدام مورد درست است؟



الف) سرعت متوسط در کل مسیر صفر است.

ب) مقدار سرعت متوسط بین t_1 تا t_3 معادل $\frac{10}{9}\frac{cm}{s}$ است.

پ) کم‌ترین سرعت متوسط در هنگام دور شدن از مبدأ $-5\frac{cm}{s}$ است.

ت) بیش‌ترین مقدار سرعت متوسط هنگام نزدیک شدن به مبدأ $10\frac{cm}{s}$ است.

۱) الف ۲) ب ۳) پ ۴) ت

۳۰. معادله‌ی حرکت ذره‌ای که روی مسیر مستقیم در حال حرکت است، در SI به‌صورت $x=t^2-6t-16$ است. از لحظه‌ی دوم تا چهارم حرکت، کدام گزاره صحیح است؟

۱) متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.
۲) متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.
۳) متحرک ابتدا از مبدأ دور شده سپس نزدیک می‌شود.
۴) متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک شده و سپس دور می‌شود.

۳۱. معادله مکان- زمان متحرکی که روی محور xها در حال حرکت است، به‌صورت $x=at+b$ است. در کدام یک از شرایط زیر این متحرک همواره در حال دور شدن از مبدأ است؟

۱) $a<0$ و $b>0$ ۲) $a>0$ و $b>0$ ۳) $a<0$ و $b<0$ ۴) گزینه‌های ۲ و ۳

پرسش‌های ترکیب سطوح

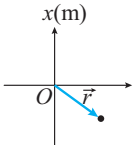
۳۲. معادله حرکت جسمی در SI با رابطه $x=2t^2+1$ داده شده است. سرعت متوسط این جسم در SI در بازه‌ی زمانی بین دو لحظه‌ی ۱ و ۱/۰۰۰۱ به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

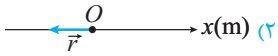
۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۸

۳۳. معادله‌ی مکان - زمان متحرکی به‌صورت $x=t^4+3t^3+4t^2+8t$ است. مسافت طی شده در ۲ ثانیه‌ی اول چند متر است؟

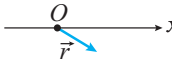
۱) ۸۴ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۷۵

۳۴. معادله‌ی حرکت جسمی در یک بعد با رابطه‌ی $x=-t^2+6t-8$ در SI داده شده است. کدام گزینه بردار مکان این متحرک را در لحظه‌ی $t=1s$ درست نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳)

۴) 

۳۵. معادله‌ی مکان- زمان متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند به‌صورت $x=t^3-t+7$ است. اگر سرعت متوسط این متحرک از $t=2s$ تا $t=t_2 s$ برابر $27\frac{m}{s}$ باشد، t_2 چند ثانیه است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۶. شخصی بین دو صخره ایستاده و فریاد می‌زند، اگر فاصله‌ی زمانی دریافت پژواک‌ها از دو صخره (T) باشد، اختلاف فاصله از دو صخره..... است. (سرعت صوت v است.)

۱) $3v.T$ ۲) $\frac{3}{2}v.T$ ۳) $v.T$ ۴) $\frac{1}{2}v.T$

۳۷. متحرکی که روی مسیر مستقیم با سرعت‌های ثابت در حرکت است، $15\,km$ را با سرعت $15\frac{km}{h}$ و سپس $10km$ را با سرعت $40\frac{km}{h}$ رفته و در انتها $5km$ را با سرعت $10\frac{km}{h}$ بازمی‌گردد. بزرگی سرعت متوسط کل حرکت چند کیلومتر بر ساعت است؟

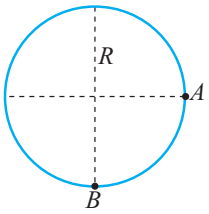
۱) $\frac{60}{7}$ ۲) ۱۰ ۳) $\frac{70}{8}$ ۴) $\frac{80}{7}$

انتشارات خوشخوان

۳۸. شخصی از پله برقی مترو زمانی که خاموش است در مدت ۱ دقیقه مسیری را طی می‌کند و در حالتی که پله روشن است و شخص قدم نمی‌زند، این مسیر را در مدت ۳ دقیقه طی می‌کند، اگر پله روشن باشد و شخص در جهت پله‌ها قدم بزند، این مسیر در چند ثانیه طی می‌شود؟

۱) ۴۵ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۱۵

۳۹. متحرکی روی مسیری مستقیم با تندی ثابت v حرکت می‌کند، سرعت متوسط در مسیر A تا B چند برابر v است؟ $(\pi \simeq ۳)$



۱) $\sqrt{۲}v$
۲) $۲\sqrt{۳}v$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}v$
۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}v$

۴۰. معادله مکان- زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = -۳t^۲ + ۱۸t + ۲۱$ است. در چند ثانیه پس از شروع حرکت، این متحرک مسافت و جابه‌جایی طی شده یکسان است؟

۱) ۳ ثانیه ۲) ۴ ثانیه ۳) ۷ ثانیه ۴) کل حرکت

۴۱. اتومبیلی روی مسیر مستقیم بین دو نقطه‌ی M و N در حال حرکت با سرعت ثابت است. نیمی از مسیر حرکت را با سرعت $۱۵\frac{m}{s}$ طی کرده و سپس نیمی از زمان باقی‌مانده را با سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ و بقیه مسیر را با سرعت $۳۵\frac{m}{s}$ را می‌پیماید. سرعت متوسط کل حرکت این اتومبیل چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۷/۵

۴۲. کدام یک از عبارات زیر صحیح نیست؟

۱) علامت منفی در بیان جابه‌جایی به معنای بیان جهت حرکت در مسیر مستقیم است.
۲) عددی که عقربه تندی‌سنج خودرو نشان می‌دهد، سرعت لحظه‌ای خودرو است.
۳) در فیزیک یک لحظه به هیچ‌وجه طول نمی‌کشد و لحظه به یک تک مقدار از زمان اشاره دارد.
۴) تندی یک کمیت نرده‌ای و سرعت یک کمیت برداری است.

۴۳. متحرکی روی مسیر دایره‌ای به شعاع ۳ متر با تندی ثابت ۲π متر بر ثانیه در حال حرکت است. سرعت متوسط این متحرک پس از گذشت ۳/۵ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{۶\sqrt{۳}}{۷}$ ۲) $\frac{۶\sqrt{۲}}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۷}$

۴۴. متحرکی ۶۰ درصد از مسیر مستقیم را با سرعت ثابت v و بقیه مسیر را با سرعت ثابت $۴v$ طی می‌کند، سرعت متوسط در طول مسیر چند برابر v است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۴۵. متحرکی که روی خط مستقیم با سرعت‌های ثابت در حال حرکت است، $۵\,km$ را با سرعت $۱۰\frac{km}{h}$، $۱۰\,km$ را با سرعت $۴۰\frac{km}{h}$ و $۱۵\,km$ را با سرعت $۱۵\frac{km}{h}$ در یک جهت طی می‌کند. سرعت متوسط کل مسیر حرکت چند $\frac{km}{h}$ است؟

۱) $\frac{۶۰}{۷}$ ۲) $\frac{۱۲۰}{۷}$ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۴۶. متحرکی روی مسیر دایره‌ای شکل به شعاع ۳ متر با تندی ثابت $۱۲\pi\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند. نسبت جابه‌جایی به مسافت طی شده توسط متحرک از لحظه‌ی شروع حرکت تا $\frac{۱}{۶}$ ثانیه چند برابر این نسبت از شروع حرکت تا $\frac{۱}{۱۲}$ ثانیه است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

انتشارات خوشخوان

بخش دوم: تندی و سرعت لحظه‌ای – حرکت یکنواخت – مفهوم شتاب

تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

وقتی با خودرو مسافرت می‌کنیم، ممکن است در طول مسیر سرعت خودرو ثابت نباشد، بنابراین اگر زمان رسیدن به مقصد را بخواهیم باید سرعت متوسط در کل مسیر را تعیین کنیم.

به نظر شما اگر قرار باشد دوربین‌های پلیس تخلفی را برای سرعت غیرمجاز ثبت کنند، آیا سرعت متوسط در این‌جا کاربرد دارد؟

پاسخ منفی است، زیرا ممکن است در کل مسیر سرعت متوسط مجاز ولی در لحظه‌هایی غیرمجاز باشد، بنابراین آن‌چه در دوربین‌های سرعت‌سنج اندازه‌گیری می‌شود، سرعت خودرو در یک لحظه‌ی خاص است. این سرعت را سرعت لحظه‌ای می‌گوییم.

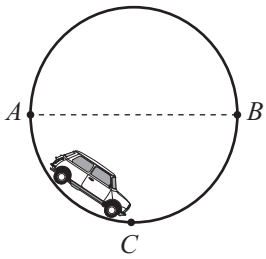
تندی لحظه‌ای نیز قابل محاسبه است، مقدار سرعت لحظه‌ای را که جهت در آن بیان نمی‌شود، تندی لحظه‌ای می‌نامیم. در واقع تندی لحظه‌ای مقدار سرعت لحظه‌ای است.

بنابراین: سرعت لحظه‌ای علاوه بر مقدار با سرعت لحظه‌ای جهت آن را نیز معلوم می‌کند.

سوال: به نظر شما آیا درست است که بگوییم «عقربه‌ی سرعت‌سنج خودرو» سرعت را نشان می‌دهد؟

پاسخ: خیر، باید گفته شود «عقربه‌ی تندی‌سنج خودرو» تندی را نشان می‌دهد، زیرا فقط درباره‌ی مقدار سرعت لحظه‌ای (تندی) اطلاعات می‌دهد و درباره‌ی جهت آن گزارشی ارائه نمی‌کند.

مثال ۲۲. مطابق شکل، اتومبیلی که عقربه‌ی تندی‌سنج آن عدد ثابتی را نشان می‌دهد در مدت ۱۰ ثانیه میدانی به شعاع ۵۰ متر را دور می‌زند.



الف) تندی متوسط وقتی نیم دور می‌چرخد، چند $\frac{m}{s}$ است؟

ب) سرعت متوسط وقتی نیم دور می‌چرخد، چند $\frac{m}{s}$ است؟ $(\pi \simeq ۳)$

پ) تندی لحظه‌ای چند $\frac{m}{s}$ است؟

ت) سرعت لحظه‌ای چگونه است؟

پاسخ:

الف) مسافت نصف محیط است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{(\frac{۲\pi R}{۲})}{۵} = ۳۰\frac{m}{s}$$

ب) جابه‌جایی قطر دایره است:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{۲R}{۵} = ۲۰\frac{m}{s}$$

پ) تندی لحظه‌ای همان عددی است که عقربه تندی‌سنج نشان می‌دهد یعنی $۳۰\frac{m}{s}$ دقت کنید در حرکت با تندی ثابت، تندی متوسط همان تندی لحظه‌ای خواهد بود.

ت) سرعت لحظه‌ای دارای مقدار $۳۰\frac{m}{s}$ است، ولی باید برای آن جهت مشخص کنیم. فرضاً در نقطه‌ی C، سرعت لحظه‌ای $۳۰\frac{m}{s}$ در جهت شرق خواهد بود.

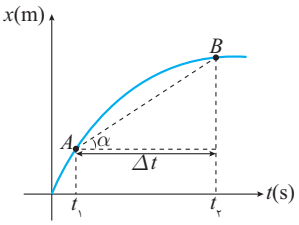
توجه داشته باشید که اگر بخواهیم به جای سرعت متوسط، سرعت لحظه‌ای را به‌دست آوریم، باید زمان Δt را تا حد ممکن به یک بازه بسیار کوچک برسانیم. در حالتی که Δt خیلی خیلی کوچک و در حد صفر باشد می‌گوییم Δt به صفر میل می‌کند. $(\Delta t \to ۰)$

فرض کنیم یک لیوان آب در اختیار داریم و هر بار نصف آن را مصرف می‌کنیم. به نظر شما آیا این مقدار آب تمام می‌شود؟! آن‌چه که در ذهن شما ایجاد شد مقدار آبی است که رفته رفته، کم‌تر و کم‌تر می‌شود ولی هرگز تمام نمی‌شود.

در این‌جا می‌گوییم آب باقی‌مانده به صفر میل می‌کند، ولی هرگز صفر نمی‌شود.

در فیزیک وقتی Δt به صفر میل می‌کند، کمیتی که در این زمان بسیار کوتاه محاسبه می‌شود کمیت لحظه‌ای خواهد بود.

انتشارات خوشخوان



در شکل مقابل، اگر نقطه‌ی B را خیلی به نقطه‌ی A نزدیک کنیم به‌جای Δt یک لحظه بسیار کوچک خواهیم داشت یعنی:

$$t_B - t_A = \Delta t \Rightarrow \Delta t \to 0$$

یعنی خط واصل بین A و B تبدیل به خط مماس بر A می‌شود.
به عبارتی شیب خط مماس بر منحنی مکان زمان در هر لحظه، سرعت لحظه‌ای در آن موقعیت را نشان می‌دهد.

قرارداد مهم

در کتاب‌های فیزیک وقتی سرعت یا تندی مطرح می‌شود عبارت‌های سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای مورد نظر است. و اگر بخواهیم متوسط این کمیت‌ها را مطرح کنیم باید واژه‌های سرعت متوسط یا تندی متوسط را به کار ببریم. نمادهای این چهار کمیت را به خاطر بسپارید.

$\vec{v}$ → سرعت لحظه‌ای

$\vec{v}_{av} = \overrightarrow{\bar{v}}$ → بردار سرعت متوسط

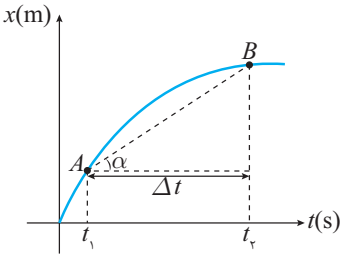
v → تندی لحظه‌ای

s_{av} → تندی متوسط

تذکر

در کاربردهای روزمره وقتی می‌گوییم لحظه‌ای درنگ کن و یا وقتی می‌گوییم لحظه‌ی باشکوه اهدای جام، منظورمان «مدت زمان» است. ولی در فیزیک مفهوم لحظه شامل مدت زمان نمی‌شود بلکه یک «تک مقدار» است.

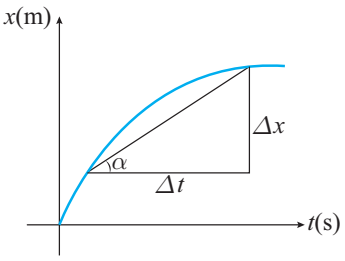
یادداشت ریاضی



اکنون می‌خواهیم مفهوم سرعت لحظه‌ای را از روی نمودار مکان زمان بررسی کنیم. مطابق شکل نشان داده شده سرعت متوسط در بازه Δt برابر است با:

$$\frac{\vec{d}}{\Delta t} = \vec{v}_{av} = \frac{\overrightarrow{AB}}{t_2 - t_1} \Rightarrow \frac{AB}{\Delta t} = \vec{v}_{av}$$

این نسبت همان $\tan\alpha$ یعنی شیب است.
بنابراین:
سرعت متوسط بین دو لحظه شیب خط واصل بین این دو لحظه در نمودار مکان - زمان است.
در واقع اگر در مدت Δt جابه‌جایی Δx انجام شود، برای تعیین سرعت متوسط خواهیم داشت:



$$\tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \vec{v}_{av}$$

ولی اگر $\Delta t \to 0$ جابه‌جایی بسیار کوچک dx ایجاد خواهد شد، و برای سرعت لحظه‌ای خواهیم داشت:

سرعت لحظه‌ای $v_t = \dfrac{dx}{dt}$

توجه: در مبحث ریاضیات بررسی خواهید کرد که چنین مفهومی را مشتق می‌نامیم. یعنی سرعت لحظه‌ای برابر است با مشتق مکان نسبت به زمان (شیب مماس بر منحنی مکان زمان در هر لحظه) وقتی از تابع $f(x)$ مشتق بگیریم، با استفاده از مفهوم حد خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x}$$

در حالت کلی، اگر از تابع $y = x^n$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = y' = nx^{n-1}$$

به عنوان مثال، مشتق $y = x^3$ چنین است:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - (x^3)}{(x+\Delta x) - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3}{\Delta x}$$

انتشارات خوشخوان

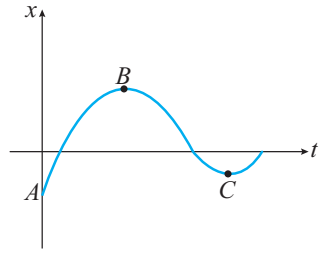
اگر از Δx صورت فاکتور بگیریم و با مخرج ساده کنیم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$$

به عنوان مثال اگر تابع مکان برحسب زمان متحرکی به‌صورت $x = t^2 - 4t$ باشد. معادله‌ی سرعت لحظه‌ای برابر است با: $v_t = \frac{dx}{dt} = x' = 2t - 4$

و برای $x = t^3$ خواهیم داشت: $\frac{dx}{dt} = v_t = 3t^2$

مثال ۲۳. با توجه به نمودار مکان - زمان مقابل به موارد زیر پاسخ دهید:



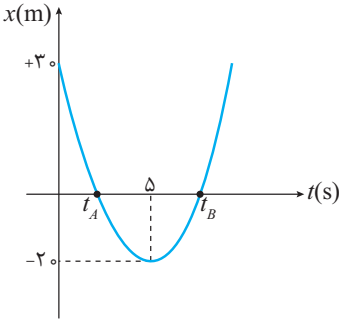
الف) چند بار متحرک متوقف می‌شود؟

ب) سرعت اولیه مثبت است یا منفی؟

پاسخ: الف) با توجه به این‌که سرعت (منظورمان سرعت لحظه‌ای است) شیب نمودار مکان - زمان در هر لحظه است، بنابراین در نقاط B و C سرعت صفر می‌شود و متحرک متوقف می‌شود.

ب) شیب نمودار در لحظه‌ی شروع مثبت است، پس سرعت اولیه مثبت است.

مثال ۲۴. در نمودار مقابل الف) سرعت متوسط تا لحظه‌ی توقف چند $\frac{m}{s}$ است؟

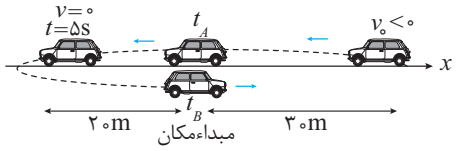


ب) مسیر حرکت را رسم کنید.

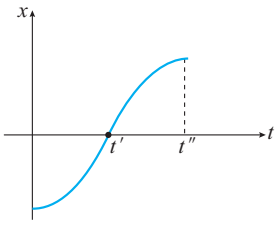
پاسخ: الف) در لحظه توقف، شیب نمودار $x - t$ (سرعت لحظه‌ای) صفر می‌شود.

$$\vec{v}_{av} = \frac{x_{t=5} - x_{t=0}}{5} = \frac{(-20) - (+30)}{5} = -10\frac{m}{s}$$

ب)



مثال ۲۵. حرکت متحرک مقابل را تحلیل کنید.



پاسخ: متحرک از مکان اولیه‌ی منفی دارای سرعت اولیه‌ی صفر است و در جهت مثبت شروع به حرکت می‌کند، زیرا سرعت آن مثبت است. در لحظه‌ی t' با بیش‌ترین سرعت (بیش‌ترین شیب) از مبدأ عبور می‌کند. رفته رفته سرعت آن اگرچه مثبت است، ولی کاهش می‌یابد تا در لحظه t'' متوقف می‌شود.

مثال ۲۶. معادله‌ی مکان - زمان متحرکی به‌صورت $x = t^2 - 16t + 60$ است.

الف) مکان اولیه و سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه‌ی اول را بیابید.

ب) زمان عبور از مبدأ را تعیین کنید.

پ) مکان توقف را معلوم کنید.

پاسخ: الف)

$$x_{t=0} = x_0 = 0 - 0 + 60 = 60m$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{x_{t=10} - x_{t=0}}{10} = \frac{0 - 60}{10} = -6\frac{m}{s}$$

ب) ریشه‌های معادله مکان - زمان، زمان عبور از مبدأ را مشخص می‌کند. $x = 0 \Rightarrow t^2 - 16t + 60 = 0 \Rightarrow t_1 = 6s \ , \ t_2 = 10s$

پ) با توجه به این‌که نمودار مکان - زمان سهمی است. با رسم سهمی نمودار مکان - زمان و استفاده از تقارن در سهمی، خواهیم داشت:

$$t' = 8s$$

انتشارات خوشخوان

یعنی زمان توقف $t' = ۸s$ است.

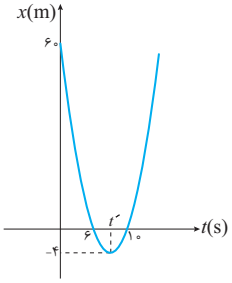
بنابراین مکان توقف $x = -۴m$ است: $x_{t'=۸} = ۶۴ - ۱۲۸ + ۶۰ = -۴m$

روش دوم: می‌توانیم معادله‌ی سرعت - زمان را با مشتق به‌دست آوریم:

معادله سرعت لحظه‌ای $v = \frac{dx}{dt} = (t^۲ - ۱۶t + ۶۰)' = ۲t - ۱۶$

$v = ۲t - ۱۶ \xrightarrow{v=۰} ۲t - ۱۶ = ۰ \Rightarrow t = ۸s$

$x_{t=۸} = ۸^۲ - (۱۶ \times ۸) + ۶۰ = -۴m$



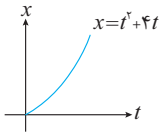
مثال ۲۷. معادله‌ی مکان - زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = t^۲ + ۴t$ است.

الف) آیا این متحرک متوقف می‌شود؟

ب) آیا می‌توانیم بگوییم مسافت طی شده برای این متحرک همواره با جابه‌جایی برابر است؟

ج) سرعت اولیه‌ی متحرک چند $\frac{m}{s}$ است؟

پاسخ:



الف) روش اول

روش دوم: $V = x' = ۲t + ۴$

$۲t + ۴ = ۰ \Rightarrow t = -۲ \Rightarrow$ زمان منفی قابل قبول نیست بنابراین توقف ندارد

ب) چون در مسیر مستقیم بدون تغییر جهت حرکت می‌کند و متوقف نمی‌شود، مسافت و جابه‌جایی برابر است.

ج) روش اول: شیب نمودار در لحظه‌ی $t = ۰$ را باید معلوم کنیم.

روش دوم: $v_{t=۰} = ۲t + ۴ = ۴\frac{m}{s}$

مثال ۲۸. معادله‌ی مکان - زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = t^۳ - ۶t^۲$ است.

الف) معادله سرعت لحظه‌ای این متحرک را برحسب t تعیین کنید؟

ب) این متحرک در چه زمان‌هایی متوقف می‌شود؟

پ) این متحرک در چه مکانی متوقف می‌شود؟

ت) این متحرک با چه سرعتی از مبدأ عبور می‌کند؟

پاسخ: الف) ابتدا معادله‌ی سرعت لحظه‌ای را با مشتق مکان به‌دست می‌آوریم. $v_t = \frac{dx}{dt} = ۳t^۲ - ۱۲t$

ب) $v = ۳t^۲ - ۱۲t = ۰ \Rightarrow t = ۰ \ , \ t = ۴$

پ) در معادله‌ی مکان $t = ۰$ و $t = ۴s$ قرار می‌دهیم: $x_{t=۰} = ۰$ و $x_{t=-۴} = (۴^۳) - ۶(۴^۲) = -۳۲m$

ت) برای تعیین زمان عبور از مبدأ از $x = ۰$ ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم: $x = ۰ \Rightarrow t^۳ - ۶t^۲ = ۰ \Rightarrow t^۲(t-۶) = ۰ \Rightarrow t = ۰$ و $t = ۶s$

بنابراین باید سرعت در لحظه‌ی $t = ۶s$ را به‌دست آوریم تا سرعت عبور از مبدأ مشخص شود: $v_{t=۶} = |۳t^۲ - ۱۲t|_{t=۶} \Rightarrow v_{t=۶} = ۳۶\frac{m}{s}$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

وقتی می‌گوییم یک خودرو شتاب بالایی دارد، مفهوم آن چیست؟ آیا ممکن است شتاب اولیه‌ی یک موتورسیکلت بیش‌تر از یک قطار باشد؟ برای پاسخ به سوال‌های بالا مفهوم شتاب را که در سال نهم با آن آشنا شدید یادآوری می‌کنیم. تغییر سرعت یک جسم در مدت زمان معین باعث ایجاد شتاب می‌شود. شتاب ممکن است در اثر تغییر در مقدار سرعت یا جهت سرعت و یا هر دو عامل به‌وجود آید.

انتشارات خوشخوان

مثال ۲۹. در هر یک از حرکت‌های زیر معلوم کنید حرکت یکنواخت است یا شتابدار؟

الف) قطاری که با تندی ثابت در مسیر مستقیم حرکت می‌کند.

ب) آسانسوری که با تندی ثابت در راستای قائم پایین می‌آید.

پ) دوچرخه‌سواری که مسیر دایره‌ای را با تندی ثابت طی می‌کند.

ت) توپ بسکتبالی که به طرف حلقه پرتاب می‌شود.

پاسخ: همان‌طور که می‌دانیم تندی لحظه‌ای کمیتی نرده‌ای، ولی سرعت لحظه‌ای کمیتی برداری است. طبق قرارداد، در هر مورد منظورمان از تندی همان تندی لحظه‌ای و سرعت همان سرعت لحظه‌ای است.

مورد	تغییر در مقدار سرعت	تغییر در جهت سرعت	نوع حرکت
الف	×	×	یکنواخت
ب	×	×	یکنواخت
پ	×	✓	شتابدار
ت	✓	✓	شتابدار

رابطه شتاب متوسط

تغییر سرعت متحرک در واحد زمان را شتاب متوسط می‌گویند.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$

توجه داشته باشید که شتاب متوسط از تقسیم کمیت برداری Δv بر کمیت نرده‌ای Δt حاصل می‌شود، بنابراین شتاب متوسط کمیتی برداری است.

علاوه بر این اگر متحرک در یک جهت معین حرکت کند، خواهیم داشت $a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$

واحد شتاب متوسط در SI متر بر مجذور ثانیه $(\frac{m}{s^2})$ است.

مثال ۳۰. وقتی می‌گوییم شتاب متوسط یوزپلنگ $15\frac{m}{s^2}$ است، مفهوم آن چیست؟

پاسخ: یعنی در هر ثانیه سرعت $15\frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد.

البته این شتاب فقط در چند ثانیه برقرار است و یوزپلنگ نمی‌تواند به مدت طولانی این شتاب را حفظ کند (در عمل یک آهو برای فرار، مسیر و در نتیجه زمان را طولانی می‌کند)

مثال ۳۱. وقتی می‌گوییم یک چتر از هنگام سقوط به شتاب صفر می‌رسد، مفهوم آن چیست؟

پاسخ:یعنی پس از مدتی تغییرات سرعت آن صفر می‌شود، و سرعت از سرعت معینی بیش‌تر نخواهد شد. در واقع شتاب در حال کاهش ولی سرعت تا لحظه‌ای که $a=0$ می‌شود، در حال افزایش است.

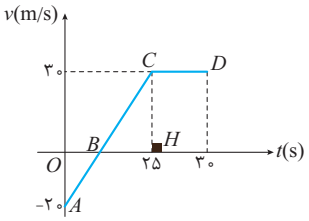
مثال ۳۲. صفر تا $100\frac{km}{h}$ یک خودرو $\frac{50}{9}$ ثانیه است. شتاب این خودرو در SI چقدر است؟

پاسخ:

$$100\frac{km}{h}=\bigcirc\frac{m}{s}\Rightarrow\frac{100\frac{km}{h}}{\frac{m}{s}}=100\times\frac{10}{36}=\frac{250}{9}\frac{m}{s}$$

$$\vec{a}_{ab}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\frac{250}{9}-0}{\frac{50}{9}}=5\frac{m}{s^2}$$

مثال ۳۳. نمودار سرعت - زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است.

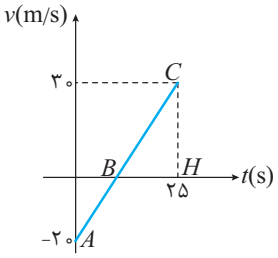


الف) شتاب متوسط از ابتدای حرکت تا لحظه توقف چند $\frac{m}{s^2}$ است؟

ب) در چه بازه‌ای از زمان، شتاب متوسط صفر است؟

پ) شتاب متوسط در مدتی که متحرک در سوی مثبت حرکت می‌کند چقدر است؟

پاسخ: الف) متحرک در لحظه‌ی t_B متوقف می‌شود. با استفاده از تشابه $t_B = ۱۰s$ است. مثلث OAB و BCH مشابه هستند:



$$\frac{OB}{BH} = \frac{OA}{HC} \Rightarrow \frac{t_B}{۲۵ - t_B} = \frac{۲۰}{۳۰} \Rightarrow ۵۰ - ۲t_B = ۳t_B \Rightarrow t_B = ۱۰s$$

بنابراین شتاب متوسط از آغاز حرکت تا لحظه‌ی توقف برابر است با:

$$\vec{a}_{av} = \frac{۰ - (-۲۰)}{۱۰} = ۲\frac{m}{s}$$

ب) در بازه‌ی زمانی ۲۵ تا ۳۰ ثانیه سرعت ثابت است، بنابراین: $\vec{a}_{av} = ۰$

پ) وقتی سرعت مثبت است، متحرک در سوی مثبت حرکت می‌کند. در بازه‌ی زمانی t_B تا t_D سرعت مثبت است. بنابراین شتاب متوسط در بازه‌ی $۱۰s$ تا $۳۰\ s$ برابر است با:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_{t=۳۰} - \vec{v}_{t=۱۰}}{۳۰ - ۱۰} = \frac{۳۰ - ۰}{۲۰} = \frac{۳}{۲}\frac{m}{s^2}$$

مثال ۳۴. معادله‌ی سرعت - زمان متحرکی در SI به‌صورت $v_t = ۴t - ۸$ است:

الف) شتاب متوسط این حرکت در ۱۰ ثانیه اول چند $\frac{m}{s^2}$ است؟

ب) شتاب متوسط تا لحظه توقف چند $\frac{m}{s^2}$ است؟

پاسخ: الف)

$$\vec{a}_{av} = \frac{v_{t=۱۰} - v_{t=۰}}{\Delta t} = \frac{۳۲ - (-۸)}{۱۰} = ۴\frac{m}{s^2}$$

ب) ابتدا لحظه‌ی توقف را به‌دست می‌آوریم:

$$V = ۰ \Rightarrow ۴t - ۸ = ۰ \Rightarrow t = ۲s$$

$$\overrightarrow{a_{av}} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_{t=۲} - V_{t=۰}}{۲} = \frac{۰ - -۸}{۲} = ۴\frac{m}{s^2}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، شتاب متوسط در هر دو قسمت برابر $۲\frac{m}{s^2}$ است.

تذکر

اگر شتاب حرکت در هر بازه‌ی زمانی دلخواه برابر باشد، حرکت را شتاب ثابت می‌نامیم.

مثال ۳۵. وقتی می‌گوییم حرکت یک قطار در ۲۰ ثانیه‌ی اول با شتاب ثابت $۱\frac{m}{s^2}$ انجام می‌شود، مفهوم آن چیست؟

پاسخ: یعنی در هر ثانیه مقدار سرعت $۱\frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد.

زمان	$t=۰$	$t=۲$	$t=۳$	...	$t=۲۰$
سرعت	۱m/s	۲m/s	۳m/s		۲۰m/s

مثال ۳۶. آیا در واقعیت حرکت یک اتومبیل که با شتاب $۶\frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند، حرکتی شتاب ثابت است؟

پاسخ: خیر- با گذشت زمان شتاب صفر می‌شود و در لحظه‌ای که شتاب صفر می‌شود، متحرک به حداکثر سرعت خود می‌رسد و افزایش سرعت متوقف می‌شود.

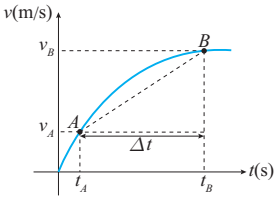
شتاب لحظه‌ای

همان‌طور که در یادداشت ریاضی، سرعت لحظه‌ای را مشتق مکان نسبت به زمان معرفی کردیم، برای شتاب لحظه‌ای نیز چنین مفهومی وجود دارد. شتاب متحرک در هر لحظه را شتاب لحظه‌ای می‌نامیم.

تذکر

برای سادگی به جای واژه شتاب لحظه‌ای از شتاب استفاده می‌کنیم و آن را نماد $\vec{a}$ می‌نامیم.

با استفاده از مفهوم شتاب متوسط در نمودار $v-t$ شیب خط واصل بین دو نقطه‌ی A و B، شتاب متوسط را در این بازه زمانی را معلوم می‌کند.



اگر بازه‌ی زمانی Δt به صفر میل کند، به جای پاره‌خط AB خطی مماس بر نقطه‌ی A ایجاد می‌شود بنابراین در زمان‌های بسیار کوچک شیب خط مماس بر منحنی سرعت زمان در هر لحظه، شتاب آن لحظه را معلوم می‌کند.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow \vec{a}_{av}=\vec{a}_t \quad (\Delta t\to 0)$$

$$\vec{a}_t=\frac{dv}{dt}=(v)'$$

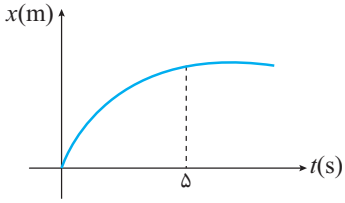
به عبارتی مشتق سرعت برحسب زمان، شتاب لحظه‌ای را معلوم می‌کند.

مثال ۳۷. **معادله‌ی سرعت متحرکی در SI به‌صورت $v=t^2+4t$ است. معادله‌ی شتاب لحظه‌ای را بیابید.**

پاسخ:

$$a_t=\frac{dv}{dt}=(t^2+4t)'=2t+4$$

مثال ۳۸. **با توجه به نمودار مکان زمان مقابل، اگر مقدار شتاب متوسط در ۵ ثانیه اول برابر با $4\frac{m}{s^2}$ باشد، سرعت اولیه متحرک را به‌دست آورید.**



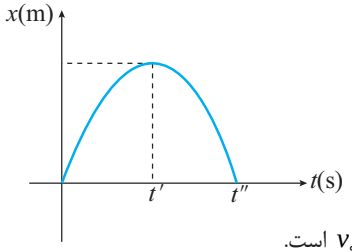
پاسخ: همان‌طور که می‌دانیم، شتاب متوسط برابر با تغییرات سرعت در واحد زمان است.

بنابراین خواهیم داشت: $\vec{a}_{av}=\frac{v_{t=5}-v_{t=0}}{5}=4$

با توجه به این‌که شیب نمودار در لحظه‌ی $t=5s$ صفر است، پس سرعت لحظه‌ای (سرعت) در این لحظه صفر است، پس سرعت متحرک کاهش یافته و شتاب منفی است.

$$\Rightarrow -4=\frac{v_{t=5}-v_{t=0}}{5}-\frac{0-v_0}{5}\Rightarrow v_{t=0}=20\frac{m}{s}$$

مثال ۳۹. **با توجه به نمودار مکان - زمان مقابل به هر مورد پاسخ دهید.**



الف) سرعت اولیه مثبت است یا منفی؟

ب) در چه لحظه‌ای سرعت صفر می‌شود؟

پ) شتاب متوسط از لحظه شروع تا توقف مثبت یا منفی؟

ت) شتاب متوسط در کل حرکت مثبت است یا منفی؟

پاسخ:

الف) در نمودار مکان - زمان شیب نمودار در هر لحظه، سرعت لحظه‌ای را معلوم می‌کند. بنابراین $v_0>0$ است.

ب) در لحظه‌ای که شیب نمودار $x-t$ صفر می‌شود، سرعت (سرعت لحظه‌ای) صفر می‌شود بنابراین در لحظه t' سرعت صفر می‌شود.

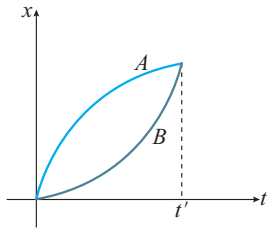
پ) $\vec{a}_{av}=\frac{v_{t'}-v_0}{t'-0}\Rightarrow \vec{a}_{av}<0$

ت) $v_{t''}<0$, $v_0>0$

$$\vec{a}_{av}=\frac{v_{t''}-v_0}{t''-0}\Rightarrow \vec{a}_{av}<0$$

انتشارات خوشخوان

مثال ۴۰. هر یک از نمودارهای A و B را تحلیل کنید.

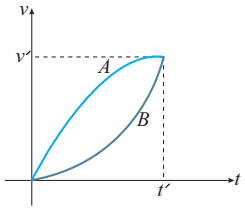


پاسخ: در نمودار A ابتدا شیب مثبت است و رفته رفته شیب کاهش می‌یابد، بنابراین سرعت مثبت و در حال کاهش است. یعنی شتاب منفی است. علاوه بر این متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.

در نمودار B ابتدا شیب صفر و رفته رفته شیب مثبت بیش‌تر می‌شود. بنابراین سرعت در حال افزایش است، پس شتاب مثبت است. علاوه بر این متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.

توجه داشته باشید که در مدت t' جابه‌جایی هر دو متحرک A و B برابر است بنابراین طبق رابطه $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت متوسط A و B در بازه‌ی صفر تا t' با هم برابر است.

مثال ۴۱. نمودارهای A و B را تحلیل کنید.



پاسخ: در نمودار A ابتدا شیب مثبت است و رفته رفته کاهش می‌یابد، تا به صفر برسد. بنابراین شتاب اولیه مثبت و بیشینه است و شتاب نهایی صفر است، یعنی شتاب در حال کاهش است. علاوه بر این مساحت زیر نمودار $v.t$ که جابه‌جایی را مشخص می‌کند مثبت و در نتیجه سرعت متوسط مثبت است.

در نمودار B شیب ابتدا صفر است و رفته رفته افزایش می‌یابد، بنابراین شتاب اولیه صفر و شتاب نهایی بیش‌ترین شتاب است.

علاوه بر این مساحت زیر نمودار $v.t$ که جابه‌جایی را مشخص می‌کند، مثبت است در نتیجه سرعت متوسط مثبت است.

توجه داشته باشید که طبق رابطه شتاب متوسط $\vec{a}_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ تغییر سرعت هر دو متحرک در بازه‌ی زمانی صفر تا t' برابر است و چون مقدار آن v' است، شتاب متوسط هردو متحرک $\vec{a}_{av}=\frac{v'}{t'}$ است. علاوه بر این سرعت متوسط A بیش‌تر از سرعت متوسط B است. زیرا (سطح زیر نمودار) در نتیجه جابه‌جایی آن A بیش‌تر است.

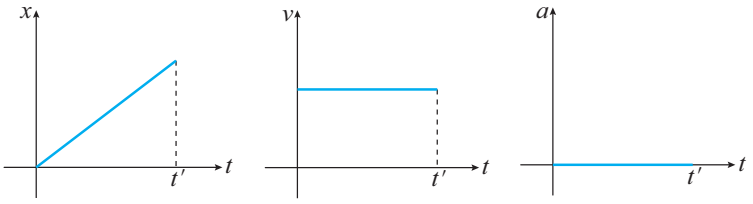
مثال ۴۲. اتومبیل A در راستای افقی با تندی ثابت حرکت می‌کند و اتومبیل B در مسیر دایره‌ای با تندی ثابت میدانی را دور می‌زند. نوع حرکت این دو متحرک را بررسی کنید.

پاسخ: برای اتومبیل A هم مقدار سرعت (تندی) و هم جهت سرعت ثابت است. بنابراین حرکت اتومبیل A یک حرکت سرعت ثابت است، یعنی حرکت یکنواخت مستقیم‌الخط (سرعت ثابت روی مسیر مستقیم) است.

برای اتومبیل B مقدار سرعت (تندی) ثابت است، ولی جهت سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت است، یعنی لحظه به لحظه جهت سرعت و در نتیجه بردار سرعت تغییر می‌کند، اگرچه مقدار آن ثابت است، بنابراین حرکت دایره‌ای که با تندی ثابت انجام می‌شود (حرکت دایره‌ای یکنواخت) یک حرکت شتاب‌دار است.

حرکت یکنواخت (معادله و نمودارها)

فرض کنیم هواپیمایی در مسیر مستقیم با سرعت ثابت در حرکت باشد، در این صورت شیب نمودار مکان- زمان (سرعت) ثابت خواهد بود و شیب نمودار سرعت- زمان (شتاب) صفر خواهد بود.



$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

اگر مطابق شکل $t_1=0$ و $x_1=x_0$ فرض می‌شود، خواهیم داشت:

$$v=\frac{x-x_0}{t-0}\Rightarrow x=vt+x_0$$

این رابطه را معادله‌ی حرکت یکنواخت می‌نامیم.

تذکر

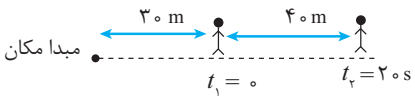
دقت کنید که x_0 ، x و v می‌توانند منفی یا مثبت باشند.

انتشارات خوشخوان

مثال ۴۳. با توجه به شکل داده شده، که مربوط به یک دوره است که با تندی ثابت در حال دویدن روی مسیر مستقیم است:

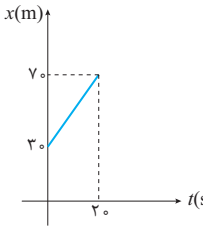
الف) نمودار مکان- زمان دونده را رسم کنید؟

ب) نمودار سرعت- زمان دونده را رسم کنید؟

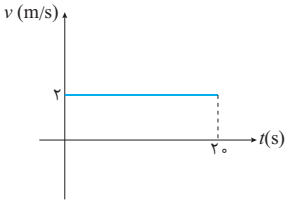


پاسخ:

الف)



ب)



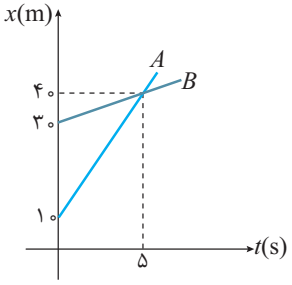
$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۰}{۲۰} = ۲\frac{m}{s}$$

مثال ۴۴. نمودار مکان- زمان دو دونده A و B مطابق شکل مقابل است.

الف) سرعت متوسط هر دونده را بیابید.

ب) معادله مکان- زمان هر دونده را بنویسید.

پ) در چه لحظه‌ای فاصله دو دونده ۱۵ متر می‌شود.



پاسخ:

الف) $\vec{v}_{av} = \frac{۴۰-۳۰}{۵} = ۲\frac{m}{s}$ و $\vec{v}_{av} = \frac{۴۰-۱۰}{۵} = ۶\frac{m}{s}$

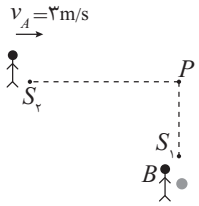
ب) $x_B = ۲t + ۳۰$ و $x = vt + x_۰ \Rightarrow x_A = ۶t + ۱۰$

پ) توجه داشته باشید، اگر فاصله‌ی دو دونده ۱۵ متر باشد دو حالت وجود دارد. ممکن است، متحرک A معادل ۱۵ متر عقب‌تر یا جلوتر از B باشد. مطابق شکل داده شده ابتدا م تحرک B در فاصله ۲۰ متر جلوتر از A قرار دارد.

اگر A جلوتر باشد: $x_A - x_B = ۱۵ \Rightarrow (۶t + ۱۰) - (۲t + ۳۰) = ۱۵ \Rightarrow t = \frac{۳۵}{۴}s$

اگر A عقب‌تر باشد: $x_A - x_B = -۱۵ \Rightarrow (۶t + ۱۰) - (۲t + ۳۰) = -۱۵ \Rightarrow t = \frac{۵}{۴}s$

مثال ۴۵. در یک حرکت تمرینی فوتبال، بازیکن B توپی را با شتاب $-۲\frac{m}{s^۲}$ و سرعت اولیه $v_۰$ در مسیر افقی $S_۱P$ برای بازیکن A ارسال می‌کند، $v_۰$ چقدر باشد تا ۲ ثانیه پس از پاس، توپ با سرعت $۱\frac{m}{s}$ در نقطه P به بازیکن A که سرعتش ثابت است، برسد؟



پاسخ: سرعت متوسط بازیکن A و توپ باید در مدت ۲ ثانیه برابر باشد، تا با طی جابه‌جایی برابر در نقطه‌ی P پاس دقیق به بازیکن A برسد.

$$\Delta x_A = \Delta x \Rightarrow \bar{v}_A t = \bar{v}.t \Rightarrow ۳ = (\frac{v_۰ + ۱}{۲}) \Rightarrow v_۰ = ۵\frac{m}{s}$$

$$a = -۲ = \frac{v - v_۰}{t} \Rightarrow -۲ = \frac{۱ - v_۰}{۲} \Rightarrow v_۰ = ۵\frac{m}{s}$$

انتشارات خوشخوان

مثال ۴۶. سرعت لحظه‌ای دو متحرک A و B در مسیر مستقیم با مبدأ برابر مطابق جدول زیر داده شده است:

t برحسب ثانیه	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$v_A(\frac{m}{s})$	۴	۴	۴	۴	۴	۴
$v_B(\frac{m}{s})$	۰	۰/۴	۰/۸	۱/۲	۱/۶	۲

الف) کدام حرکت یکنواخت و کدام حرکت شتاب ثابت است؟

ب) سرعت متوسط متحرک B در ۵ ثانیه، چند متر بر ثانیه است؟

پ) از لحظه‌ی آغاز تا پایان پنجمین ثانیه (لحظه‌ی $t=5s$) فاصله‌ی دو متحرک چگونه است؟

ت) نمودار سرعت - زمان دو متحرک را رسم کنید.

پاسخ: الف) حرکت A با سرعت ثابت (هم‌مقدار و هم‌جهت) و حرکت B با شتاب ثابت انجام می‌شود و مقدار شتاب آن برابر با $\frac{۲-۰}{۵}=۰/۴\frac{m}{s^2}$ است.

ب) از آن‌جا که تغییرات سرعت برحسب زمان خطی است، بنابراین سرعت متوسط بین دو لحظه با میانگین سرعت بین آن دو لحظه برابر است.

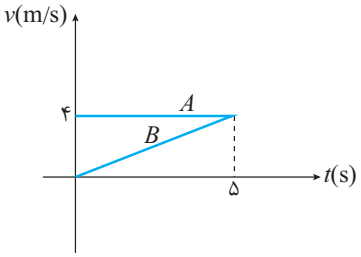
$$\overline{v}_B=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{0+2}{2}=1\frac{m}{s}$$

پ) چون دو متحرک هم مبدأ هستند، جابه‌جایی هر دو متحرک را به‌دست می‌آوریم و اختلاف این جابه‌جایی‌ها، فاصله دو متحرک را معلوم می‌کند.

$$\Delta x_A=\overline{v}_A.t=4\times5=20m \quad \text{و} \quad \Delta x_B=\overline{v}_B.t=1\times5=5m$$

بنابراین در پایان ۵ ثانیه اول متحرک A به اندازه ۱۵ متر جلوتر از B قرار دارد.

ت)



توجه داشته باشید که در لحظه‌ی $t=5s$ اگرچه سرعت دو متحرک برابر می‌شود، ولی متحرک B به اندازه‌ی ۱۵ متر از متحرک A عقب‌تر است.

به نظر شما چند ثانیه پس از لحظه‌ی $t=5s$ دو متحرک به هم می‌رسند؟

مثال ۴۷. یک خودرو با سرعت $72\frac{km}{h}$ در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. سامانه‌ی هوشمند خودرو با تشخیص مانع ساکنی در فاصله‌ی ۶۰ متری، با شتاب ثابت $4\frac{m}{s}$ سرعت خودرو را کاهش می‌دهد. این اتومبیل در چه فاصله‌ای از مانع متوقف می‌شود؟

پاسخ: از مفهوم سرعت متوسط در حرکت شتاب ثابت استفاده می‌کنیم:

$$v=72\frac{km}{h}=72\times\frac{10}{36}\frac{m}{s}=20\frac{m}{s}$$

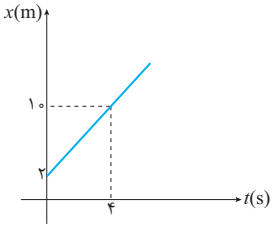
$$\Delta x=\overline{v}.t\begin{cases}\overline{v}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{20+0}{2}=10\frac{m}{s}\\ t=\frac{v_2-v_1}{a}\Rightarrow t=\frac{0-20}{-4}=5s\end{cases}\Rightarrow \Delta x=(10)(5)=50m$$

بنابراین خودرو در فاصله‌ی ۱۰ متری از مانع متوقف می‌شود.

انتشارات خوشخوان

پرسش‌های سطح ساده

۴۷. نمودار مکان- زمان متحرکی به شکل مقابل است معادله حرکت آن در SI کدام است؟



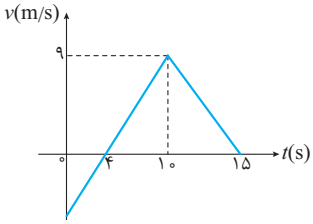
۱) $x=\frac{۱}{۲}t+۲$

۲) $x=\frac{۱}{۲}t+۴$

۳) $x=۲t+۴$

۴) $x=۲t+۲$

۴۸. نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. شتاب متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $t=۰$ تا $t=۱۵s$ چند متر بر مجذور ثانیه است؟



۱) ۰/۴

۲) ۰/۶

۳) ۰/۸

۴) ۱

۴۹. متحرکی که روی محور xها با سرعت ثابت در حرکت است در لحظه‌ی $t_۱=۱s$ از $x_۱=۴m$ و در لحظه‌ی $t_۲=۵s$ از $x_۲=-۸m$ می‌گذرد. معادله‌ی مکان، زمان آن کدام گزینه است؟

۱) $x=-۲t+۱۰$ ۲) $x=-۲t+۷$ ۳) $x=-۳t+۱۰$ ۴) $x=-۳t+۷$

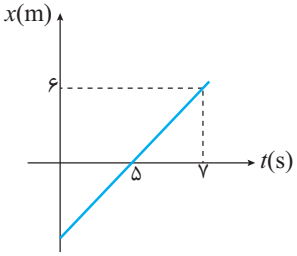
۵۰. متحرکی که روی مسیر مستقیم به‌صورت سرعت ثابت در حرکت است در لحظه‌ی $t_۱=۱(s)$ از $x_۱=+۱m$ و در لحظه‌ی $t_۲=۴(s)$ از $x_۲=-۵m$ می‌گذرد. این متحرک در چه لحظه‌ای از نقطه‌ی $x_۳=-۱۳m$ عبور می‌کند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۵۱. معادله‌ی مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x=-۶t+۱۸$ است. جابه‌جایی در پنجمین ثانیه چند برابر پنج ثانیه‌ی دوم است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

۵۲. معادله مکان- زمان متحرکی که نمودار $x-t$ آن به‌صورت زیر است، کدام گزینه است؟



۱) $x=\frac{۶}{۷}t-\frac{۳۰}{۷}$

۲) $x=\frac{۶}{۷}t-۱۵$

۳) $x=۳t-۱۵$

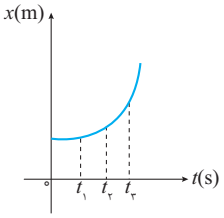
۴) $x=۳t-\frac{۳۰}{۷}$

۵۳. معادله‌ی مکان- زمان حرکت متحرکی به‌صورت $x=-۵t+۴$ است. در کدام بازه‌ی زمانی، زمان نزدیک شدن به مبدأ و زمان دور شدن از مبدأ یکسان است؟

۱) ۰/۵ تا ۱ ثانیه ۲) ۰/۶ تا ۱ ثانیه ۳) ۰/۲ تا ۱/۲ ثانیه ۴) از ۰ تا ۲/۵ ثانیه

پرسش‌های سطح متوسط

۵۴. نمودار مکان- زمان متحرکی سهمی و مطابق شکل است. سرعت متوسط متحرک در کدام بازه‌ی زمانی بیش‌تر است؟



۱) ۰ تا $t_۱$

۲) $t_۱$ تا $t_۳$

۳) $t_۲$ تا $t_۳$

۴) بستگی به اندازه‌ی فاصله‌های زمانی دارد.

۵۵. کدام گزینه نادرست است؟

۱) در حرکت غیرمستقیم حرکت الزاماً شتابدار است.

۲) شتاب متوسط هم‌جهت با بردار تغییر سرعت است.

۳) در حرکت شتابدار برای آن‌که جهت سرعت عوض شود، الزاماً باید متحرک متوقف شود.

۴) ممکن است شتاب جسمی منفی باشد، ولی سرعت آن مثبت است.

۵۶. متحرکی بر روی خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+۵$ با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند، این متحرک پس از $۲s$ چند متر جابه‌جا می‌شود؟

۱) $۱۰\sqrt{۳}$ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۴۰

۵۷. دو متحرک A و B هم زمان از شهر M روی مسیر مستقیم به ترتیب با سرعت‌های ثابت ۸۰ و ۶۰ کیلومتر بر ساعت به سمت شهر N که در فاصله‌ی ۱۲۰ کیلومتری M قرار دارد، حرکت می‌کنند. بیش‌ترین فاصله‌ی این دو متحرک چند کیلومتر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۵۸. معادله‌ی مکان متحرکی در SI، $x_t=-t^۲+۹t+۱۰$ است. مسافت طی شده در پنجمین ثانیه کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $\frac{۵۱}{۴}$

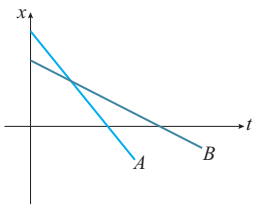
۵۹. معادله‌ی حرکت جسمی روی خط مستقیم به‌صورت $x=t^۲-۷t+۱۰$ است. در کدام لحظه زاویه‌ی بین بردار مکان و سرعت ۱۸۰° است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۲/۱ ۳) ۳/۳ ۴) ۵/۳

۶۰. دو متحرک A و B در مسیر مستقیم با سرعت ثابت $v_A=۱۰\frac{m}{s}$ و $v_B=۵۴\frac{km}{h}$ خلاف جهت هم و به سمت هم حرکت می‌کنند اگر فاصله‌ی دو متحرک ۱۵۰ متر باشد، حداکثر چند ثانیه بعد برای دومین بار فاصله‌ی دو متحرک به ۵۰ متر می‌رسد؟ (طول هر دو متحرک را ۲۰۰ متر فرض کنید)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴

۶۱. با توجه به شکل مقابل، کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟



۱) سرعت متحرک B از A بیش‌تر است.

۲) فاصله‌ی دو متحرک ابتدا کم سپس زیاد می‌شود.

۳) زمانی که متحرک B به مبدأ می‌رسد، متحرک A در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

۴) در بازه‌ی زمانی مساوی، جابه‌جایی A کم‌تر از B است.

۶۲. شخصی با سرعت $۲\frac{m}{s}$ در امتداد یک پله برقی قدم می‌زند اگر سرعت پله برقی $۱\frac{m}{s}$ باشد، حداقل زمان لازم برای طی نمودن مسافت ۱۲ متر چند ثانیه است؟

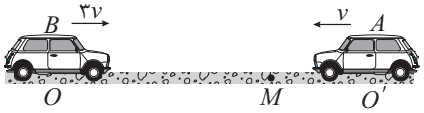
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

۶۳. معادله حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=\frac{۱}{۳}t^۳+\frac{۱}{۲}t^۲-۲t$ است. شتاب متوسط آن بین دو لحظه‌ی $t_۱=۲s$ و $t_۲=۳s$ برابر چند $\frac{m}{s^۲}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

پرسش‌های سطح دشوار

۶۴. مطابق شکل دو متحرک با سرعت ثابت به طرف یک‌دیگر حرکت می‌کنند و t ثانیه بعد در M به هم می‌رسند. چند t بعد از شروع حرکت، متحرک A از M به O می‌رسد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

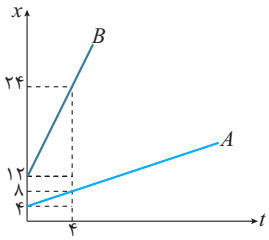
۶۵. دو متحرک A و B با تندی‌های v_A و v_B در مسیری مستقیم به سمت هم حرکت می‌کنند. در مبدأ زمان فاصله‌ی آن‌ها d باشد و پس از t ثانیه به یک‌دیگر می‌رسند. سپس، پس از گذشت $\frac{۲}{۳}t$ متحرک تندتر، به محل اولیه متحرک دیگر برسد. اگر $v_B>v_A$ باشد، نسبت $\frac{v_B}{v_A}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۶۶. عرض رودخانه‌ای d و سرعت آب آن (v) است. شخصی می‌خواهد با سرعت (v') پارو بزند و با کم‌ترین جابه‌جایی خود را به طرف دیگر برساند، در این صورت زمان کدام است؟

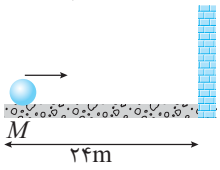
۱) $\frac{d}{\sqrt{v'^2-v^2}}$ ۲) $\frac{d}{v'}$ ۳) $\frac{d}{\sqrt{v^2+v'^2}}$ ۴) $\frac{d}{v+v'}$

۶۷. با توجه به نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B در شکل مقابل، پس از چند ثانیه از لحظه‌ی $t=0$، فاصله‌ی دو متحرک ۲۰ متر می‌شود؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۷

۶۸. دو گلوله‌ی A و B با سرعت ثابت از نقطه‌ی M مطابق شکل با سرعت‌های ثابت $۶\frac{m}{s}$ و $۴\frac{m}{s}$ به سمت دیواری در حال حرکت‌اند. اگر گلوله‌ای به دیوار برخورد کند، دقیقاً با همان سرعت برمی‌گردد. محل اولین ملاقات دو گلوله در زمانی که از کنار یکدیگر عبور می‌کنند تا نقطه‌ی شروع حرکت چند متر است؟

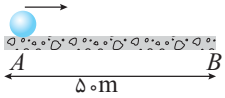


۱) ۱۶/۸
۲) ۱۷
۳) ۱۷/۶
۴) ۱۹/۲

۶۹. قطاری به طول $۲L$ با سرعت ثابت v در حرکت است. در لحظه‌ی $t=0$ به پلی به طول L می‌رسد. t ثانیه طول می‌کشد تا تمام قطار به طور کامل از پل عبور کند. چند t بعد از $t=0$ وسط قطار به وسط پل می‌رسد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۷۰. گلوله‌ای در لحظه‌ی $t=0$ از نقطه‌ی A با تندی ثابت $\frac{۵}{۳}\frac{m}{s}$ به سمت B حرکت کرده و با همان تندی برمی‌گردد و این حرکت را به طور پیوسته ادامه می‌دهد. گلوله‌ی (۲) در لحظه‌ی $t=0$ از همان نقطه‌ی A با تندی ثابت $۰/۲\frac{m}{s}$ به سمت B حرکت می‌کند و پس از رسیدن به آن متوقف می‌شود. گلوله‌ی (۱) در حین حرکت گلوله‌ی (۲) چند بار از کنار آن می‌گذرد؟

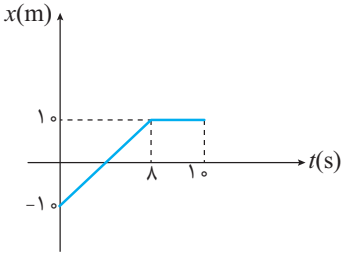


۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۷۱. عرض رودخانه‌ای (d) و سرعت آب (v) است شخص می‌خواهد پاروزنان عرض رودخانه را در کم‌ترین زمان طی می‌کند. در این صورت جابه‌جایی قایق کدام است؟ (سرعت قایق نسبت به آب ساکن v' فرض شود)

۱) $\frac{v'^2}{v'^2}.d$ ۲) $\frac{v^2}{v'^2}.d$ ۳) $\sqrt{v^2+v'^2}.d$ ۴) $\sqrt{v^2+v'^2}.d$

۷۲. با توجه به نمودار مکان - زمان مقابل کدام گزینه درست است؟



۱) سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه‌ی اول $۲\frac{m}{s}$ است.
۲) متحرک به مدت $۶s$ از مبدأ دور می‌شود.
۳) در لحظه‌ی $t=۴$ متحرک ساکن است.
۴) جابه‌جایی تا توقف با مسافت طی شده تا توقف برابر نیست.

۷۳. دو متحرک A و B با سرعت‌های ثابت v_A و v_B روی مسیر مستقیم هم‌زمان شروع به حرکت می‌کنند. اگر x_A و x_B مکان‌های دو متحرک در $t=0$ باشند، در کدام یک موارد زیر الزاماً دو متحرک به یک‌دیگر برخورد خواهند داشت؟

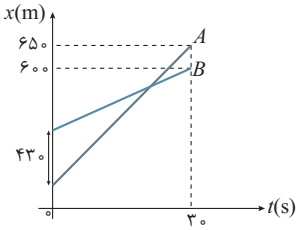
۱) $x_A > x_B$ و $v_A v_B > 0$
۲) $x_B x_A < 0$ و $v_A v_B > 0$
۳) $x_A > x_B$ و $v_A v_B < 0$
۴) $x_B v_B < 0$ و $x_A v_A < 0$ و $v_A v_B < 0$

پرسش‌های ترکیب سطوح

۷۴. معادله‌ی حرکت متحرکی بر مسیر مستقیم در SI به‌صورت $x=\frac{t^3}{3}+t^2+3t$ است. شتاب متوسط متحرک در بازه‌های زمانی ۱ تا ۳ ثانیه چند متر بر مجذور ثانیه است؟

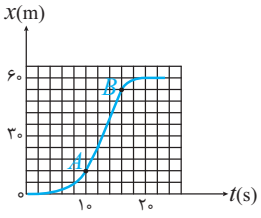
۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۴

۷۵. نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B به‌صورت شکل مقابل است. سرعت متحرک A چند متر بر ثانیه بیش‌تر از سرعت متحرک B است؟



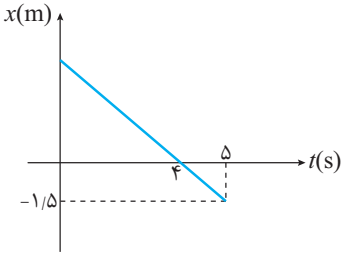
۱) ۱۲
۲) ۱۲/۶
۳) ۱۶
۴) ۱۶/۳

۷۶. شکل زیر، نمودار مکان- زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت کرده است. بیشینه‌ی سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟



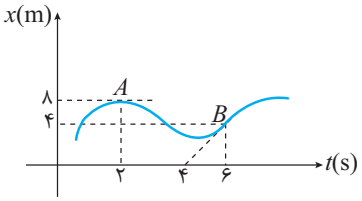
۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

۷۷. نمودار مکان- زمان حرکت ذره‌ای روی محور xها به‌صورت مقابل است. معادله‌ی مکان- زمان حرکت آن در SI کدام گزینه است؟



۱) $x=\frac{2}{3}t+6$
۲) $x=\frac{3}{2}t+6$
۳) $x=\frac{-2}{3}t+6$
۴) $x=-\frac{3}{2}t+6$

۷۸. در شکل مقابل شتاب متوسط در فاصله‌ی زمانی A تا B چند برابر سرعت متوسط در این فاصله است؟



۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{2}{3}$
۳) -۱
۴) $+\frac{2}{3}$

۷۹. دو متحرک A و B که با فاصله‌ی ۱۰۰ متری یک‌دیگر قرار دارند، به سمت هم با سرعت‌های ۲ و ۶ متر بر ثانیه شروع به حرکت می‌کنند. در لحظه‌ای که این دو متحرک برای دومین بار به ۶۰ متری از یک‌دیگر می‌رسند، مسافت طی شده متحرک A چند متر بیش‌تر از B خواهد بود؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

۸۰. متحرکی با سرعت ثابت $60\frac{m}{s}$ از نقطه‌ی A روی مسیر مستقیم به نقطه‌ی B رفته و با سرعت ثابت $120\frac{m}{s}$، $\frac{1}{3}$ مسیر را بازمی‌گردد. سرعت متوسط متحرک در کل مسیر حرکت چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۴۸ ۴) $\frac{240}{7}$

انتشارات خوشخوان

۸۱. دو قطار A و B به طول ۱۰۰ متر در فاصله‌ی ۳۰۰ متر از هم قرار دارند در مسیری مستقیم و با سرعت‌های ثابت $v_A = ۱۰۸\frac{km}{h}$ و $v_B = ۷۲\frac{km}{h}$ به طرف هم نزدیک می‌شوند. چند ثانیه بعد، فاصله‌ی آن‌ها ۱۰۰ متر می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۳۰ ۴) گزینه ۱ و ۲

۸۲. اتومبیل A با سرعت ثابت از نقطه‌ی M روی خط مستقیم به سمت مقصد N که در فاصله‌ی ۶۰ کیلومتری آن قرار دارد حرکت می‌کند. اتومبیل B که از A، ۱۵ کیلومتر عقب‌تر است، نیم ساعت دیرتر شروع به حرکت کرده ولی یک ساعت زودتر به مقصد می‌رسد. اگر سرعت اتومبیل B، $۱۵۰\frac{km}{h}$ باشد، سرعت اتومبیل A چند $\frac{km}{h}$ است؟

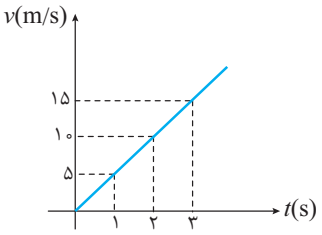
۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۸۳. دو متحرک با سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ در یک امتداد با فاصله‌ی $۲۰۰\,m$ حرکت می‌کنند. حداقل زمان رسیدن آن‌ها $\frac{T}{۴}$ و حداکثر T است. حداقل مقدار $v_۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۰۰}{T}$ ۲) $\frac{۱۰۰}{T}$ ۳) $\frac{۲۰۰}{T}$ ۴) $\frac{۳۰۰}{T}$

انتشارات خوشخوان

بخش سوم: حرکت شتاب ثابت (معادله‌ها و نمودارها)



اتومبیلی را در نظر بگیریم که نمودار سرعت لحظه‌ای (سرعت) برحسب زمان آن مطابق شکل مقابل باشد.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در هر ثانیه سرعت اتومبیل به اندازه‌ی $۵\frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد:

$$۰ \to ۵\frac{m}{s} \to ۱۰\frac{m}{s} \to ۱۵\frac{m}{s} \to ۲۰\frac{m}{s} \to \dots$$

یعنی تغییرات سرعت در هر ثانیه (واحد زمان) برابر $۵\frac{m}{s}$ است. بنابراین شتاب این حرکت ثابت و مقدار آن طبق رابطه‌ی شتاب $۵\frac{m}{s^۲}$ است.

در ۳ ثانیه‌ی اول و $a_{av}=\frac{۱۵-۰}{۳}=۵\frac{m}{s^۲}$: در ۲ ثانیه‌ی اول $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱۰-۰}{۲}=۵\frac{m}{s^۲}$

اگر شتاب لحظه‌ای این حرکت را بررسی کنیم، به همین مقدار $۵\frac{m}{s^۲}$ می‌رسیم. زیرا شیب نمودار $V-t$ در هر بازه زمانی دلخواه با شیب نمودار در هر لحظه برابر است. (شیب خط مماس بر یک خط راست همواره مقدار ثابتی دارد)

هر حرکت روی خط مستقیم که در لحظه‌های مختلف شتاب یکسان داشته باشد را حرکت شتاب ثابت می‌نامیم.

در حرکت شتاب ثابت روابط زیر برقرار است:

۱) معادله‌ی شتاب - زمان : $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_۰}{t-t_۰}=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow \boxed{a=\frac{v-v_۰}{t}}$

۲) معادله‌ی سرعت- زمان : $a=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow \boxed{v=at+v_۰}$

۳) معادله‌ی سرعت متوسط : $v_{av}=\boxed{\frac{v+v_۰}{۲}}$

از آن‌جا که سرعت برحسب زمان یک تابع خطی است، یعنی تغییرات سرعت در بازه‌های یکسان، هم اندازه است، می‌توان نتیجه گرفت سرعت متوسط بین دو لحظه با میانگین سرعت بین این دو لحظه برابر است.

$$\overline{v}=v_{\frac{t_۱+t_۲}{۲}}=\frac{v_{t_۱}+v_{t_۲}}{۲}$$

فرض کنیم، متحرکی با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ از حال سکون در مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کند. در پایان لحظه‌ی $t=۵\ s$ سرعت به $۲۰\frac{m}{s}$ می‌رسد.

$$۰ \to ۴ \to ۸ \to ۱۲ \to ۱۶ \to ۲۰$$

می‌توانیم از سرعت متوسط که همان میانگین سرعت در این بازه است، استفاده کنیم.

$$\overline{v}=\frac{۰+۴+۸+۱۲+۱۶+۲۰}{۶}=۱۰\frac{m}{s}$$

برای سادگی می‌توان میانگین سرعت ابتدا و انتهای بازه‌ی زمانی را محاسبه نمود که همان نتیجه را خواهد داشت:

$$\overline{v}=\frac{۰+۲۰}{۲}=۱۰\frac{m}{s}$$

۴) معادله‌ی مکان - زمان : $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow (\frac{v+v_۰}{۲})(t)=\Delta x \xrightarrow{v=at+v_۰} \Delta x=(\frac{at+v_۰+v_۰}{۲})(t) \Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t$

بنابراین برای معادله مکان برحسب زمان خواهیم داشت:

$$x-x_۰=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \boxed{x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰}$$

۵) معادله‌ی مستقل از زمان، رابطه بین سرعت و شتاب و جابه‌جایی : $\boxed{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}(t)=(\frac{v+v_۰}{۲})(\frac{v-v_۰}{a})=\frac{v^۲-v_۰^۲}{۲a} \Rightarrow v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$$

نمودار مکان- زمان

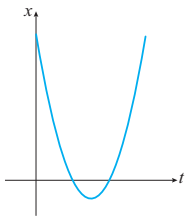
معادله‌ی مکان برحسب زمان درجه ۲ است بنابراین نمودار آن یک سهمی است.

اگر در معادله $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ ضریب $t^۲$ مثبت باشد، سهمی دارای کمینه و اگر منفی باشد، سهمی دارای بیشینه است. شیب اولیه‌ی نمودار $x-t$ سرعت اولیه است.

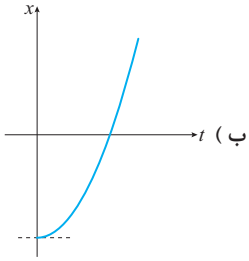
انتشارات خوشخوان

مثال ۴۸. با توجه به نمودارهای مکان زمان علامت x_0 و a و v_0 را در هر سهمی معلوم کنید.

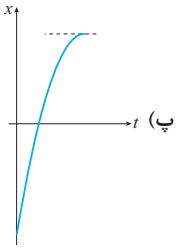
الف)



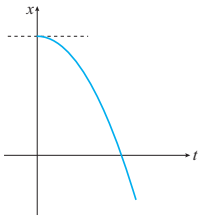
ب)



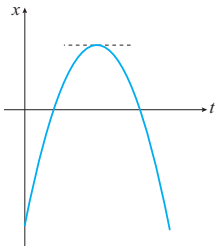
پ)



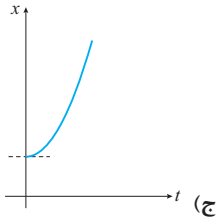
ت)



ث)



ج)

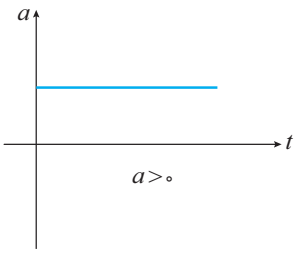


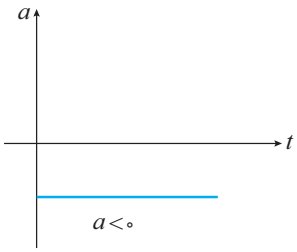
پاسخ:

کمیت / نمودار	الف	ب	پ	ت	ث	ج
x_0 (مکان اولیه)	$x_0>0$	$x_0<0$	$x_0<0$	$x_0>0$	$x_0<0$	$x_0>0$
v_0 (سرعت اولیه)	$v_0<0$	$v_0=0$	$v_0>0$	$v_0=0$	$v_0>0$	$v_0=0$
a (جهت تقعر)	$a>0$	$a>0$	$a<0$	$a<0$	$a<0$	$a>0$

نمودار شتاب – زمان

از آن‌جا که در حرکت شتاب ثابت مقدار شتاب در کل مسیر بدون تغییر است. بنابراین نمودار شتاب - زمان خطی مستقیم با شیب (تغییرات نسبت به زمان) صفر است.



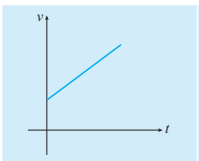
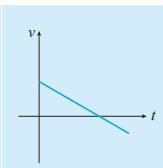
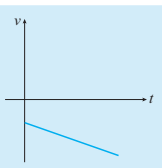
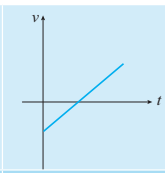
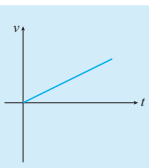
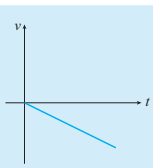


انتشارات خوشخوان

نمودار سرعت- زمان

سرعت برحسب زمان خطی به معادله $v=at+v_0$ است که در آن $\begin{cases} v=at+v_0 \\ y=mx+b \end{cases}$ شیب معادل شتاب و عرض از مبدأ v_0 است.

مثال ۴۹. در هر نمودار a و v_0 را تعیین کنید.

						مقدار a و v_0
						v_0 (عرض از مبدأ)
						a (شیب نمودار)

پاسخ:

مقدار / کمیت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
v_0	$v_0=0$	$v_0=0$	$v_0<0$	$v_0<0$	$v_0>0$	$v_0>0$
a	$a<0$	$a>0$	$a>0$	$a<0$	$a<0$	$a>0$

مثال ۵۰. معادله‌ی سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=-4t+12$ است.

الف) سرعت اولیه را تعیین کنید.

ب) زمان توقف را بیابید.

پ) اگر در لحظه‌ی $t=0$ متحرک در مکان $x=14m$ باشد، معادله‌ی مکان - زمان را بنویسید.

ت) نمودارهای شتاب - زمان، سرعت - زمان و مکان - زمان را رسم کنید.

ث) مسیر حرکت را رسم کنید.

ج) حرکت را تحلیل کنید.

پاسخ: الف) سرعت اولیه یعنی سرعت در لحظه‌ی $t=0$

$$v_{t=0}=v_0=12\frac{m}{s}$$

ب) زمان توقف لحظه‌ای است که $v=0$ باشد

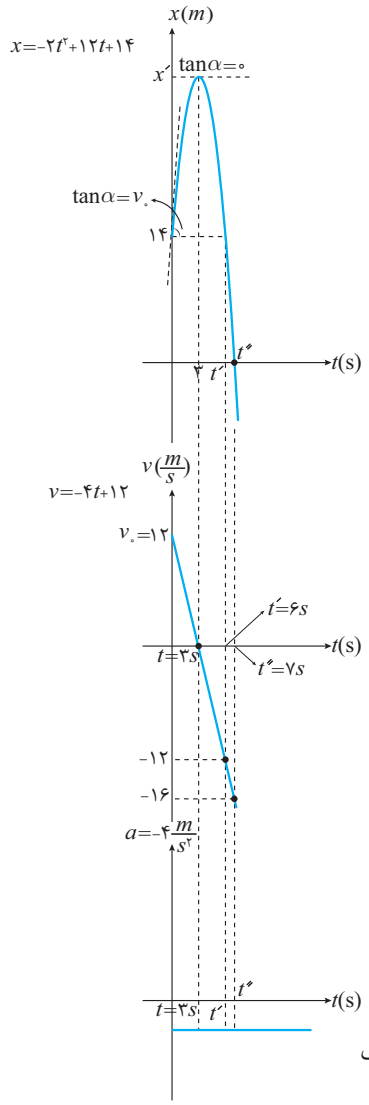
$$v=0\Rightarrow -4t+12=0\Rightarrow t=3s$$

پ)

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+V_0t+x_0 \\ v=at+v_0=-4t+12 \end{cases} \xrightarrow[v_0=12]{\substack{x_0=14 \\ a=-4}} x=-2t^2+12t+14$$

انتشارات خوشخوان

ت)



$$x=0=-2t^2+12t+14$$

$$t_1,t_2=\frac{-12\pm\sqrt{144-4(-2)(14)}}{(2)(-2)}\Rightarrow\begin{cases}t=-1 & \text{غیر قابل قبول}\\ t=7 & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

در لحظه t' متحرک پس از توقف در مکان x' مجدداً از مبدا عبور می‌کند، با اســتفاده از تقارن در سهمی $t'=3s$ است. زیرا $t'=\frac{-1+7}{2}=3$. با جایگذاری در معادله‌ی مکان - زمان، x' به دست می‌آید.

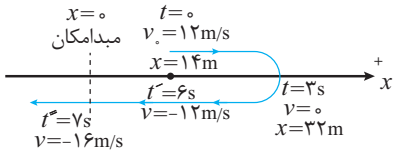
$$x'=-2\times3^2+12\times3+14=32m$$

متحرک با سرعت $(-16\frac{m}{s})$ در لحظه $t=7s$ از مبدأ عبور می‌کند.

شتاب لحظه‌ای همواره مقدار ثابت $-4\frac{m}{s^2}$ است.

$$a_t=\frac{dv}{dt}=(-4t+12)'=-4$$

ت) توجه داشته باشید که مسیر حرکت خط مستقیم است. (مسیر حرکت را نشان می‌دهد) در حالی که نمودار مکان - زمان یک سهمی است. (تغییرات x برحسب t را نشان می‌دهد)



ج) در ۷ ثانیه‌ی اول حرکت:

۱- در بازه زمانی $0<t<3$ متحرک با سرعت مثبت از مبدأ دور می‌شود.

۲- دورترین فاصله از مبدأ مکان ۳۲+ متر است.

۳- در ۳ ثانیه اول مقدار سرعت در حال کاهش (حرکت کند شونده) و در ۴ ثانیه‌ی بعدی مقدار سرعت در حال افزایش است. (حرکت تندشونده)

۴- همان‌طور که از نمودار سرعت - زمان و مسیر حرکت نیز مشخص است، جابه‌جایی و مسافت طی شده در ۷ ثانیه‌ی اول برابر است با:

جابه‌جایی $\overline{d}=x_{t=7}-x_{t=0}=0-14=-14m$

مسافت $L=|\Delta x|_{(0-3)}+|\Delta x|_{(3-7)}=|32-14|+|0-32|=50m$

توجه مهم: برخی اوقات لازم میشــه تا همه‌ی قدرت و همت خودمون رو نشــون بدیم. برخی سوال‌ها این ویژگی رو دارن که ما رو به چالش بکشونن. حالا وقتشه که این دو (زمان خاص و سوال خاص) یک پدیده با شکوه رو رقم بزنن و سطح توانمندی شما رو ارتقاء بدن. مثل این سوال که یه سوال همه چیز تمومه!

مثال ۵۱. معادله‌ی مکان- زمان متحرکی با شتاب ثابت در SI به‌صورت $x=t^2-12t+32$ داده شده است. هر یک از موارد زیر را تعیین کنید:

۱) مکان اولیه ، ۲) سرعت اولیه ، ۳) شتاب حرکت ، ۴) مکان متحرک در $t=10s$ ، ۵) سرعت متوسط در ۴ ثانیه دوم حرکت ۶) چه مدت متحرک در مکان مثبت یا منفی قرار دارد؟ ، ۷) زمان عبور از مبدأ ، ۸) معادله سرعت برحسب زمان ، ۹) زمان توقف ۱۰) مکان توقف ، ۱۱) سرعت عبور از مبدأ ، ۱۲) چه مدت سرعت مثبت یا منفی است؟ ، ۱۳) چه مدت متحرک به مبدأ نزدیک می‌شود؟ ، ۱۴) چه مدت متحرک ازمبدأ دور می‌شود؟ ۱۵) چه مدت حرکت تند شونده یا کند شونده است؟ ، ۱۶) جابه‌جایی و مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه اول ۱۷) شتاب متوسط در ۵ ثانیه‌ی اول ، ۱۸) رسم نمودار مکان - زمان ، ۱۹) رسم نمودار سرعت - زمان ۲۰) رسم نمودار شتاب - زمان ، ۲۱) رسم مسیر حرکت

پاسخ: ۳ و ۲ و ۱: در حرکت شتاب ثابت معادله مکان- زمان به‌صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ است. بنابراین x_0 یعنی مکان در لحظه‌ای که زمان صفر است، ۳۲ متر است. $x_{t=0}=x_0=32$

سرعت اولیه $-12\frac{m}{s}$ و شتاب، ثابت و مقدار آن $2\frac{m}{s^2}$ است.

۴: در معادله‌ی مکان $t=10s$ قرار می‌دهیم. $x_{t=10}=10^2-(12)(10)+32=12m$

۵: چهار ثانیه‌ی دوم، بازه زمانی ۴ تا ۸ ثانیه است.

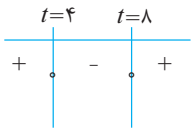
$$\vec{v}_{av}=\frac{x_{t=8}-x_{t=4}}{4}=0$$

۶: معادله‌ی مکان - زمان را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x=t^2-12t+32=0\Rightarrow t_1=4, t_2=8$$

$\begin{cases}0<t<4 \\ t>8\end{cases}$ مکان مثبت

$4<t<8$ مکان منفی



۷: برای تعیین زمان عبور از مبداء ریشه‌ی معادله‌ی x را معلوم می‌کنیم.

$$x=0\Rightarrow t^2-12t+32=0\Rightarrow t_1=4s \ , \ t_2=8s$$

۸:
$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2+v.t+x_0 \\ x=t^2-12t+32\end{cases}\xrightarrow[a=2,v_0=-12]{x_0=32} v=at+v_0=2t-12$$

۹: برای تعیین زمان توقف ریشه معادله v را معلوم می‌کنیم. $v=2t-12=0\Rightarrow t=6s$

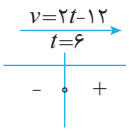
۱۰: برای تعیین مکان توقف، زمان توقف را در معادله سرعت قرار می‌دهیم.

$$x_{t=6}=(6)^2-(12)(6)+32=-4m$$

۱۱: برای تعیین سرعت عبور از مبدأ، زمان عبور از مبدأ را در معادله مکان قرار می‌دهیم.

$v=2t-12$
- سرعت اولین عبور از مبدأ: $v_{t=4}=(2)(4)-12=-4\frac{m}{s}$
- سرعت دومین عبور از مبدأ: $v_{t=8}=(2)(8)-12=4\frac{m}{s}$

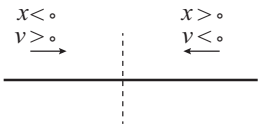
۱۲: تابع سرعت را تعیین علامت می‌کنیم.



$0<t<6$ سرعت منفی است.

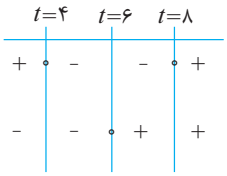
$6<t$ سرعت مثبت است.

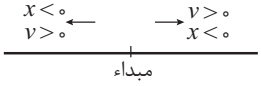
۱۳: در دو حالت متحرک به مبدا نزدیک می‌شود.



به عبارتی وقتی علامت مکان و سرعت مخالف هم باشد متحرک به مبدأ نزدیک می‌شود. با همین استدلال وقتی سرعت و مکان هم علامت باشند متحرک از مبدأ دور می‌شود.

بنابراین x و v را تعیین علامت می‌کنیم.





یعنی در دو بازه زمانی $0<t<4$ و $6<t<8$ متحرک به مبدأ نزدیک می‌شود. توجه داشته باشید به مدت $6s$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

انتشارات خوشخوان

۱۴: در زمان‌های $t<۸$ و $۴<t<۶$ متحرک، در حال دور شدن از مبدأ است.

۱۵: وقتی $av<۰$ و یا این‌که $|v|$ در حال کاهش باشد، حرکت کندشونده است.

و اگر $av>۰$ و یا این‌که $|v|$ در حال افزایش باشد، حرکت تندشونده است.

در بازه‌ی زمانی $۰<t<۶$ مقدار سرعت در حال کاهش است.

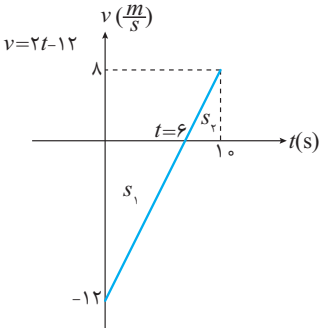
در زمان‌های $t>۶$ مقدار سرعت در حال افزایش است.

۱۶: روش اول:

جابه‌جایی : $\Delta x = x_{t=۱۰} - x_{t=۰} = ۱۲ - ۳۲ = -۲۰\,m$

مسافت : Δx تا توقف + Δx پس از توقف $= |x_{t=۶} - x_{t=۰}| + |x_{t=۱۰} - x_{t=۶}| = |-۳۶| + |۱۶| = ۵۲\,m$

روش دوم: استفاده از سطح زیر نمودار سرعت - زمان

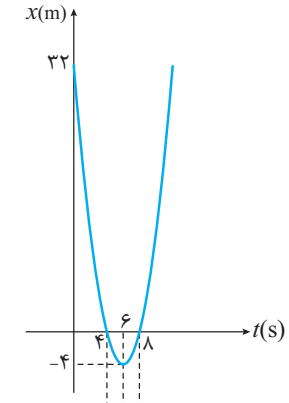


جابه‌جایی $= S_۱ + S_۲ = (-۳۶) + (۱۶) = -۲۰\,m$

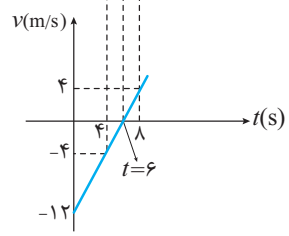
مسافت $= |S_۱| + |S_۲| = |-۳۶| + |۱۶| = ۵۲\,m$

۱۷:
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{t=۵} - v_{t=۰}}{۵} = \frac{(-۲) - (-۱۲)}{۵} = ۲\,\frac{m}{s^۲}$$

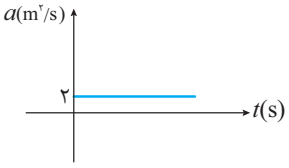
۱۸:



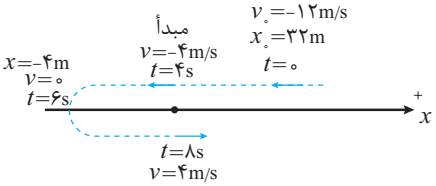
۱۹:



۲۰:

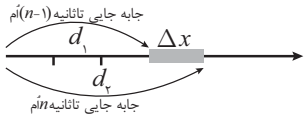


۲۱:



چند نکته مهم در حل مسائل حرکت (سینماتیک) با شتاب ثابت

نکته در حرکت شتاب ثابت جابه‌جایی در ثانیه n ام از رابطه $d = \frac{1}{2}a(2n-1) + v_0$ به‌دست می‌آید.



و جابه‌جایی در t ثانیه‌ی n ام از رابطه‌ی $d = \frac{at^2}{2}(2n-1) + v_0 t$ به‌دست می‌آید.

فرضاً اگر جابه‌جایی از لحظه شروع تا لحظه‌ی $t = 5\,s$ را به‌دست آورده و جابه‌جایی از لحظه‌ی شروع تا لحظه‌ی $t = 4\,s$ از آن کسر نمائیم جابه‌جایی در ثانیه پنجم $(4 < t < 5)$ به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} d_2 = \frac{1}{2}an^2 + v_0 n \\ d_1 = \frac{1}{2}a(n-1)^2 + v_0(n-1) \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{2}an^2 + v_0 n - [\frac{1}{2}a(n-1)^2 + v_0(n-1)]$$

$$\Delta x = \cancel{\frac{1}{2}an^2} + \cancel{v_0 n} - \cancel{\frac{1}{2}an^2} - \frac{1}{2}a + an + \cancel{v_0 n} + v_0 \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{2}a(2n-1) + v_0}$$

مثال ۵۲. اتومبیلی با شتاب $4\,\frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی در پنجمین ثانیه چند متر است؟

پاسخ:

$$d = \frac{1}{2}a(2n-1) + v_0 \Rightarrow d = \frac{1}{2}(4)(2\times 5 - 1) + 0 = 18\,m$$

مثال ۵۳. اتومبیلی با شتاب ثابت $8\,\frac{m}{s^2}$ حرکت کند شونده انجام می‌دهد. اگر جابه‌جایی در دهمین ثانیه ۴ متر باشد، v_0 را بیابید.

پاسخ:

$$d = \frac{1}{2}a(2n-1) + v_0 \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}(-8)(2\times 6 - 1) + v_0 \Rightarrow v_0 = 48\,\frac{m}{s}$$

نکته در حرکت شتاب ثابت به جای استفاده از روابط چندگانه‌ی شتاب ثابت می‌توانیم به کمک مفهوم سرعت متوسط حرکت را با یک حرکت یکنواخت جایگزین کنیم. این جایگزینی می‌تواند در بسیاری از مسائل باعث حل ساده‌تر مسأله شود.

مثال ۵۴. مطابق شکل ترنی هنگام رسیدن به ایستگاه با شتاب $4\,\frac{m}{s^2}$ سرعت اولیه $72\,\frac{km}{h}$ خود را کاهش می‌دهد. مسافت طی شده در کل حرکت و در ۲ ثانیه اول و ۲ ثانیه پایانی را به‌دست آورید.

پاسخ:

برای کل حرکت:

$$t = \frac{0-20}{-4} = 5s \Rightarrow \Delta x = \overline{v}.t = (\frac{20+0}{2})(5) = 50m$$

برای ۲ ثانیه اول سرعت از $20\,\frac{m}{s}$، $8\,\frac{m}{s}$ کم می‌شود.

$$\Delta x = \overline{v}.t = (\frac{20+12}{2})(2) = 32m$$

برای ۲ ثانیه پایانی سرعت از $8\,\frac{m}{s}$ به صفر می‌رسد.

$$\Delta x = \overline{v}.t = (\frac{0+8}{2})(2) = 8m$$

نکته در حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی‌ها در n ثانیه‌های مشابه و متوالی، تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن an^2 است.

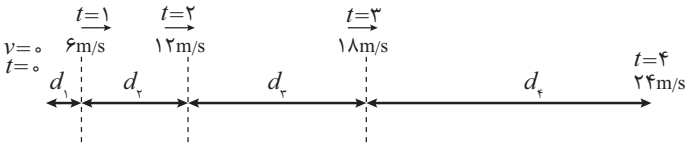
انتشارات خوشخوان

فرض کنیم مسافت طی شده در ثانیه n ام و ثانیه $(n-1)$ ام را به ترتیب d_2 و d_1 بنامیم. بنابراین برای (d_2-d_1) خواهیم داشت:

$$d_2-d_1=\frac{1}{2}a(2n-1)+v_0-[\frac{1}{2}a(2(n-1)-1)+v_0]\Rightarrow d_2-d_1=d=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a(2)$$

$$\Rightarrow d_2-d_1=\frac{1}{2}a(2n)-\frac{1}{2}a+v_0-\frac{1}{2}a(2n)+\frac{1}{2}a(2)+\frac{1}{2}a+v_0\Rightarrow d_2-d_1=a$$

این اثبات برای بازه‌های زمانی یک ثانیه ($n=1$) انجام شد. به عنوان مثال اگر اتومبیلی با شتاب ثابت $6\frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت کند، برای جابه‌جایی‌های متوالی آن خواهیم داشت:

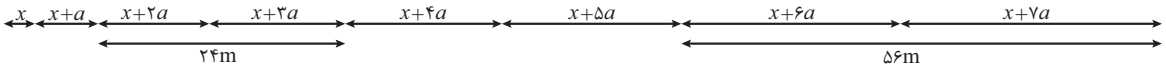


$$d_1=(\frac{0+6}{2})(1)=3m \quad و \quad d_2=(\frac{6+12}{2})(1)=9m \quad و \quad d_3=(\frac{12+18}{2})(1)=15m \quad و \quad d_4=(\frac{18+24}{2})(1)=24m$$

$$d_2-d_1=6m \quad و \quad d_3-d_2=6m \quad و \quad d_4-d_3=6m$$

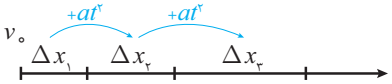
مثال ۵۵. اتومبیلی با شتاب ثابت در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. اگر در ۲ ثانیه‌ی دوم ۲۴ متر و در ۲ ثانیه‌ی چهارم ۵۶ متر طی کند، شتاب حرکت را بیابید؟

پاسخ:



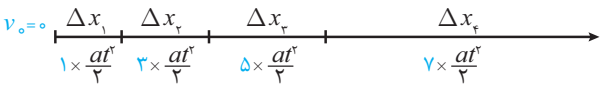
$$\begin{cases}2x+5a=24\\2x+13a=56\end{cases}\Rightarrow 8a=32\Rightarrow a=4\frac{m}{s^2}$$

در حالت کلی، در حرکت شتاب ثابت برای جابه‌جایی در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی t با یک‌دیگر تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت at^2 می‌دهند.



$$\Delta x_2-\Delta x_1=\Delta x_3-\Delta x_2=\Delta x_n-\Delta x_{n-1}=at^2$$

در حالت خاص، اگر v_0 برابر صفر باشد (بدون سرعت اولیه) جابه‌جایی‌های متوالی در بازه‌های زمانی مساوی ضریب‌های فردی از at^2 هستند.

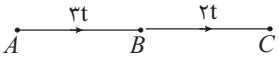


نکته در حل برخی مسائل شتاب ثابت بهتر است، بازه‌های جابه‌جایی را تغییر دهیم.

مثال ۵۶. ترنی با شتاب ثابت a در مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کند. جابه جایی در $3t$ ثانیه اول چند برابر $2t$ ثانیه بعد از آن است؟

پاسخ: روش اول:

$$v_B=a(3t)+\cancel{v_A}$$



$$\Delta x_{AB}=\frac{1}{2}a(3t)^2=\frac{9}{2}at^2 \quad و \quad \Delta x_{BC}=\frac{1}{2}a(2t)^2+(3at)(2t)=8at^2\Rightarrow\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta x_{BC}}=\frac{\frac{9}{2}at^2}{8at^2}=\frac{9}{16}$$

انتشارات خوشخوان

روش دوم: به جای مسیر BC که دارای سرعت اولیه است. از مسیر AC استفاده می‌کنیم.

$$\Delta x_{AB}=\frac{1}{2}a(9t^2)$$
$$\Delta x_{AC}=\frac{1}{2}a(25t^2)$$
$$\xrightarrow[\Delta x_{BC}=8at^2]{\Delta x_{BC}=\Delta x_{AC}-\Delta x_{AB}} \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta x_{BC}}=\frac{9}{16}$$

مثال ۵۷. جسمی با شتاب ثابت a در راستای قائم به بالا پرتاب می‌شود و با حرکت کند شونده در مدت $5t$ تا نقطه اوج رسیده و متوقف می‌شود. جابه‌جایی در $3t$ ثانیه آخر حرکت را بیابید.

پاسخ: روش اول:

$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

روش دوم: می‌توانیم فرض کنیم به‌جای این‌که در $3t$ ثانیه آخر از سرعت v به سرعت صفر می‌رسد و سرعت متوسط آن $\frac{v}{2}$ باشد از حال سکون رها می‌شود و پس از $3t$ به سرعت v می‌رسد که باز هم سرعت متوسط آن $\frac{v}{2}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta x=\frac{1}{2}a(3t)^2=\frac{9}{2}at^2$$

نکته

در حرکت شتاب ثابت در مسیر مستقیم ممکن است مسافت و جابه‌جایی برابر نباشند (وقتی تغییر جهت رخ می‌دهد) برای محاسبه جابه‌جایی رابطه‌ی $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ مناسب است، ولی برای مسافت نمی‌توان از این رابطه استفاده کرد، مگر این‌که مسیر حرکت را دو قسمت کنیم.

|مسافت کلی| = |جابه‌جایی تا توقف| + |جابه‌جایی پس از توقف|

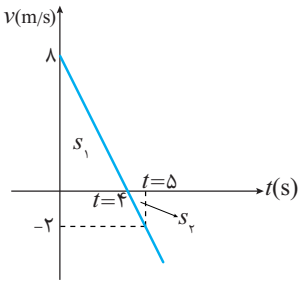
تذکر

برای محاسبه مسافت بهتر است از نمودار $v-t$ استفاده شود.

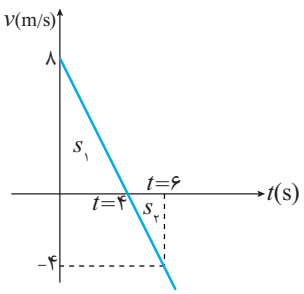
مثال ۵۸. معادله‌ی مکان متحرکی در SI به‌صورت $x=-t^2+8t-12$ است.
الف) مسافت طی شده در ۵ ثانیه اول حرکت را بیابید.
ب) مسافت طی شده تا دومین عبور از مبدأ را بیابید.

پاسخ: زمان‌های عبور از مبدأ:

$$x=-t^2+8t-12=0\Rightarrow t_1=2s \text{ و } t_2=6s$$



جواب الف) مسافت طی شده $=|S_1|+|S_2|=16+|-1|=17m$



جواب ب) مسافت طی شده $=|S_1|+|S_2|=16+4=20m$

نکته

در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در کل حرکت از لحظه‌ی شروع تا لحظه t از رابطه‌ی $\overline{v}=\frac{1}{2}at+v_0$ به‌دست می‌آید.

فرض کنیم متحرکی با شتاب ثابت a در مدت t ثانیه به سرعت v می‌رسد برای سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$\overline{v}=v_{av}=\frac{v_0+v}{2}=\frac{v+(at+v_0)}{2}\Rightarrow \boxed{\overline{v}=\frac{1}{2}at+v_0}$$

انتشارات خوشخوان