

۱۳۴	درس ۱: ریشه و توان - ریشهٔ اُم
۱۳۹	TEST
۱۴۱	درس ۲: توان های گویا
۱۴۵	TEST
۱۵۰	درس ۳: عبارت های جبری
۱۶۲	TEST
۱۷۹	پاسخ نامه

3.1

LESSON

ریشه و توان - ریشه n ام

به علت فشردگی و درهم تنیدگی درس‌های ۱ و ۲ در کتاب درسی این دو درس را با هم و در درس اول مطرح می‌کنیم تا به درک و فهم مطلب کمک بیشتری نماید:
تعریف ریشه: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $b^n = a$ باشد، در این صورت می‌گوییم عدد b ریشه n ام a می‌باشد و می‌نویسیم:

$$b^n = a \Rightarrow b = \sqrt[n]{a}$$

به مثال‌های زیر دقت کنید:

$$2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow \text{عدد } 2 \text{ ریشه سوم } 8 \text{ است}$$

$$5^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \text{عدد } 5 \text{ ریشه دوم } 25 \text{ است}$$

سؤالاتی مربوط به ریشه و توان، در قالب موارد زیر مطرح می‌شوند:

ویژگی‌های ریشه‌های زوج و فرد

برای حل مسائل مربوط به این تیپ ابتدا باید چند ویژگی مهم را بدانیم:

- چون تمام توان‌های صفر برابر صفر هستند بنابراین ریشه n ام عدد صفر برابر با صفر است.
 $0^2 = 0^3 = 0^4 = \dots = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = \sqrt[3]{0} = \sqrt[4]{0} = \dots = 0$
- چون اعداد وقتی به توان زوج می‌رسند مثبت (یا صفر) می‌شوند بنابراین اعداد منفی ریشه زوج ندارند، زیرا توان دوم (یا توان چهارم یا ...) هیچ عددی منفی نمی‌شود.

$$\sqrt{-2} = \text{وجود ندارد} \quad \sqrt[3]{-5} = \text{وجود ندارد}$$

- چون هم اعداد منفی و هم اعداد مثبت وقتی به توان زوج می‌رسند مثبت می‌شوند بنابراین اعداد مثبت دو ریشه زوج دارند که قرینه یکدیگر هستند.

$$9^2 = (-9)^2 = 81$$

عدد ۸۱ دارای دو ریشه دوم ۹ و -۹ می‌باشد

$$3^4 = (-3)^4 = 81$$

عدد ۸۱ دارای دو ریشه چهارم ۳ و -۳ می‌باشد

فرض کنید a عددی مثبت باشد:

- ریشه دوم مثبت عدد a را با نماد \sqrt{a} و ریشه دوم منفی عدد a را با نماد $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم.
- ریشه چهارم مثبت عدد a را با نماد $\sqrt[4]{a}$ و ریشه چهارم منفی عدد a را با نماد $-\sqrt[4]{a}$ نشان می‌دهیم.

NOTE

- هر عدد با توان فرد فقط یک ریشه فرد دارد که هم علامت با خود عدد است.

$$5^3 = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$$

عدد ۵ ریشه سوم ۱۲۵ است

$$(-2)^5 = -32 \Rightarrow \sqrt[5]{-32} = -2$$

عدد -۲ ریشه پنجم -۳۲ است

ریشه در یک نگاه

مثال	نماد	ریشه‌های عدد a	نوع فرجه	علامت
$\sqrt{-9}$ تعریف نشده	-	عدد a ریشه n ام ندارد.	n زوج	$a < 0$
$\sqrt[3]{-8} = -2 < 0$	$\sqrt[3]{a} < 0$	عدد a یک ریشه n ام منفی دارد.	n فرد	
۵ و -۵ ریشه‌های دوم ۲۵ هستند.	$\sqrt{a}, -\sqrt{a}$	عدد a دو ریشه n ام قرینه دارد.	n زوج	$a > 0$
$\sqrt{8} = 2 > 0$	$\sqrt[3]{a} > 0$	عدد a یک ریشه n ام مثبت دارد.	n فرد	

نتیجه مهم

به شرط قابل تعریف بودن رادیکال، داریم:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (\sqrt[n]{a})^3 = a, \quad (\sqrt[n]{a})^4 = a, \dots \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a$$

حالا برای تسلط بهتر مثال های زیر را با هم بررسی می کنیم:

EXAMPLE

1. حاصل عبارت $\sqrt[6]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) $-\frac{5}{2}$ (4)

پاسخ: گزینه (2)

تحلیل و محاسبه: تک تک رادیکال ها را ساده می کنیم تا به اعداد غیر رادیکالی تبدیل شوند:

$$\sqrt[6]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{\frac{25}{4}} + \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{5}{2} + (-\frac{5}{2}) - (\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

2. حاصل عبارت $(\sqrt[5]{2\sqrt[3]{3}})^{20}$ کدام است؟

32 (1) 36 (2) 42 (3) 48 (4)

پاسخ: گزینه (4)

تحلیل و محاسبه: عدد 20 را باز می کنیم و به صورت $20 = 4 \times 5$ می نویسیم و از قوانین ریشه و توان استفاده می کنیم:

$$(\sqrt[5]{2\sqrt[3]{3}})^{20} = ((\sqrt[5]{2\sqrt[3]{3}})^5)^4 \xrightarrow{(\sqrt[n]{a})^n = a} (2\sqrt[3]{3})^4 = 2^4 \times (\sqrt[3]{3})^4 = 16 \times 3 = 48$$

مجهول زیر رادیکال

وقتی فرجه رادیکال (همان ریشه) زوج است، رادیکال به شرطی تعریف شده است که عبارت زیر رادیکال بزرگ تر یا مساوی با صفر (نامنفی) باشد. در این صورت حاصل رادیکال نیز همواره بزرگ تر یا مساوی با صفر خواهد بود.

به عنوان مثال: به موارد زیر خوب دقت کنید بعضی اشتباهات متداول را بررسی کرده ایم:

1 $\sqrt{-8}$ تعریف شده است ولی $\sqrt{-9}$ یا $\sqrt[3]{-16}$ تعریف نشده اند.

2 $\sqrt{9}$ تعریف شده است و می نویسیم $\sqrt{9} = 3$ ، بنابراین $\sqrt{9} = -3$ نادرست است.

نتیجه: عدد 9 دارای دو ریشه 3 و -3 است که منظور از $\sqrt{9}$ فقط عدد مثبت 3 است.

3 $\sqrt[3]{16}$ تعریف شده است و می نویسیم $\sqrt[3]{16} = 2$ ، بنابراین $\sqrt[3]{16} = -2$ نادرست است.

نتیجه: عدد 16 دارای دو ریشه چهارم 2 و -2 است که منظور از $\sqrt[3]{16}$ فقط عدد مثبت 2 است.

4 $\sqrt{x^2}$ تعریف شده است و می نویسیم $\sqrt{x^2} = |x|$ چون می خواهیم مطمئن باشیم منفی نمی شود.

5 $\sqrt[3]{x^3}$ تعریف شده است و می نویسیم $\sqrt[3]{x^3} = |x|$ چون می خواهیم مطمئن باشیم منفی نمی شود.

نتیجه مهم

در فرجه های زوج از مثبت بودن زیر رادیکال و حاصل رادیکال مطمئن باش ...

$$\sqrt{x^2} = |x|, \sqrt[3]{x^3} = x, \sqrt[4]{x^4} = |x|, \sqrt[5]{x^5} = x, \dots \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} \text{فرد } n \rightarrow a \\ \text{زوج } n \rightarrow |a| \end{cases} = \begin{cases} a \rightarrow a & \text{مثبت } a \\ -a \rightarrow -a & \text{منفی } a \end{cases}$$



EXAMPLE

3. کدام گزینه درست است؟

$$\sqrt[4]{a^4} = \sqrt{a} \quad (4) \quad \sqrt[4]{a^8} = a^2 \quad (3) \quad \sqrt{a^2 + 2a + 1} = a + 1 \quad (2) \quad \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه (3)

تحلیل گزینه‌ها:

گزینه (1): نادرست است، چون $1 - \sqrt{2}$ عدد منفی است و حاصل رادیکال نباید منفی شود و جواب صحیح $1 - \sqrt{2}$ است.

گزینه (2): نادرست است، چون مطمئن نیستیم $a + 1$ نامنفی است، پس جواب صحیح $|a + 1|$ می‌باشد.

گزینه (3): درست است، چون مطمئن هستیم a^2 نامنفی است.

گزینه (4): نادرست است، چون مطمئن نیستیم که در \sqrt{a} عدد a نامنفی است، جواب درست $\sqrt{|a|}$ می‌باشد.

4. اگر x عددی منفی باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x^2} - \sqrt[3]{-x^3} + \frac{x}{\sqrt[4]{x^4}} + \sqrt{(1-x)^2}$ کدام است؟

$$x \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -x \quad (3) \quad -1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه (3)

نقشه راه: ابتدا تک تک رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم و به حالت غیررادیکالی تبدیل می‌کنیم و سپس با هم جمع و تفریق می‌کنیم؛ چون x منفی است باید $-x = |x|$ باشد. در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x^2} &= |x| = -x \\ \sqrt[3]{-x^3} &= \sqrt[3]{(-x)^3} = -x \\ \frac{x}{\sqrt[4]{x^4}} &= \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1 \\ \sqrt{(1-x)^2} &= |1-x| = 1-x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = (-x) - (-x) + (-1) + (1-x) = -x$$

$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow |1-x| = 1-x$

درس 1: ریشه و توان ...

یافتن مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a}$

اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a}$ را به دست آوریم ابتدا باید بینیم عدد a بین توان n ‌ام‌های کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

به عنوان مثال: اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\sqrt[3]{21}$ را حساب کنیم ابتدا به اعداد مکعب کامل توجه می‌کنیم، این اعداد عبارت‌اند از:

$$1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, \dots$$

معلوم است عدد 21 بین $2^3 = 8$ و $3^3 = 27$ قرار می‌گیرد بنابراین: $\sqrt[3]{21}$ عددی بین 2 و 3 است اما چون 21 به 27 نزدیک‌تر از 8 است $\sqrt[3]{21}$ تقریباً به 3 نزدیک‌تر است [این تقریب هروری است و دقیق نیست. چون تابع $y = \sqrt[n]{f(x)}$ یک تابع غیر خطی و شمیره است درس زدن تقریبی در این باره کار دقیقی نیست]

مقایسه اعداد با توان‌های گویا

این مقایسه با توجه به این که پایه عدد بزرگ‌تر از 1 یا بین صفر و یک باشد به دو مدل قابل تقسیم است:

پایه بزرگ‌تر از 1

اگر عدد a بزرگ‌تر از یک باشد، در این صورت برای اعداد گویا و مثبت m و n داریم:

$$a > 1 \xrightarrow{m > n} a^m > a^n > 1$$

به زبان ساده: اعداد بزرگ‌تر از یک، هر چه توانشان بزرگ‌تر باشد، مقدارشان هم بزرگ‌تر خواهد بود.

248 کسر $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ برابر است با:

۶ (۱)

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (۲)

۵ (۳)

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۴)

249 حاصل عبارت $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$ کدام است؟

$49 - 20\sqrt{6}$ (۱)

$49 + 20\sqrt{6}$ (۲)

$5 - 2\sqrt{6}$ (۳)

$49 - 10\sqrt{6}$ (۴)

250 حاصل عبارت $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ بعد از گویا کردن مخرج کدام است؟

(برگرفته از فعالیت کتاب درسی)

$\sqrt{x+h} + \sqrt{h}$ (۱)

$\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ (۲)

$\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{h}$ (۳)

$\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{h}}{x}$ (۴)

251 دو جمله اول یک دنباله هندسی صعودی به ترتیب $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

و $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ است. قدر نسبت این دنباله چقدر است؟

$5 - 2\sqrt{6}$ (۱)

$-5 + 2\sqrt{6}$ (۲)

$5 + 2\sqrt{6}$ (۳)

$-5 - 2\sqrt{6}$ (۴)

252 اندازه طول یک مستطیل $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ واحد و مساحت آن ۱ واحد

مربع می باشد. محیط آن برابر است با:

$2\sqrt{2}$ (۱)

$4\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۳)

$4\sqrt{2}$ (۴)

253 حاصل $\sqrt{2} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right)^2$ برابر کدام است؟

۲ (۱)

$2 + \sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$3 + 2\sqrt{2}$ (۴)

243 کسر $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ پس از گویا شدن مخرج به کدام صورت خواهد بود؟

$\frac{\sqrt{32}-\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{32}-\sqrt{2}}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{4}$ (۴)

244 حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2})^{-1}$ کدام است؟

$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۱)

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\sqrt{2}$ (۴)

245 پس از گویا کردن مخرج $\frac{1}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}$ مخرج کسر کدام است؟

۶ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

246 گویا شده کسر $\frac{1}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ کدام است؟

$\frac{1}{5}(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (۱)

$\frac{1}{5}(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (۲)

$\frac{1}{10}(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (۳)

$\frac{1}{10}(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (۴)

247 ساده شده کسر $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ کدام است؟

$9 - 2\sqrt{30}$ (۱)

$11 - 2\sqrt{30}$ (۲)

$9 + 2\sqrt{30}$ (۳)

$11 + 2\sqrt{30}$ (۴)

4 241

تحلیل و محاسبه:

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x-y = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال مرکب}} x-y = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \Rightarrow x-y = \sqrt{2}-1$$

بنابراین گزینه (۴) پاسخ درست است.

4 242

نقشه راه: رادیکال‌های صورت را ساده کرده و مخرج را گویا می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{9 \times 3} + \sqrt{4 \times 3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{25} - \sqrt{9} + \sqrt{4})\sqrt{2}}{2} = \frac{(5 - 3 + 2)\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

2 243

تحلیل و محاسبه:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}-1} \times \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}}{2} = \frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$$

4 244

تحلیل و محاسبه:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

1 245

نقشه راه: صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

پس مخرج کسر گویا به صورت زیر خواهد بود:

$$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$$

$$= (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 18 - 12 = 6$$

3 246

نقشه راه: صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب می‌نماییم.

$$\frac{1}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{1}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})} \times \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12-2} = \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10}$$

2 247

نقشه راه: با ضرب مزدوج مخرج در صورت و مخرج کسر، مخرج کسر را

گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}{1}$$

$$= 6+5-2\sqrt{30} = 11-2\sqrt{30}$$

4 248

تحلیل و محاسبه:

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})} \times \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{12}-2\sqrt{18}}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{18-12}$$

$$= \frac{6(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{6} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

1 249

تحلیل و محاسبه:

$$\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \frac{3+2-2\sqrt{6}}{3+2+2\sqrt{6}} = \frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} \times \frac{5-2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{(5-2\sqrt{6})^2}{25-24} = \frac{25+24-20\sqrt{6}}{1} = 49-20\sqrt{6}$$

2 250

تحلیل و محاسبه:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{\underbrace{x+h-x}_{\cancel{h}}} = \sqrt{x+h}+\sqrt{x}$$

3 251

تحلیل و محاسبه:

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2}$$

$$= (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+2\sqrt{6}$$

2 252

نقشه راه: عرض مستطیل را x در نظر

می‌گیریم. داریم:

عرض × طول = مساحت

$$x(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

محیط = ۲(طول + عرض) = ۲(√۳ + √۲ + √۳ - √۲)

$$= ۲(۲\sqrt{۳}) = ۴\sqrt{۳}$$

CHAPTER

7 آمار و احتمال



درس ۱: احتمال یا اندازه‌گیری شانس ۴۴۳

TEST ۴۶۷

درس ۲ و ۳: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه متغیّر ... ۴۸۷

TEST ۴۹۱

پاسخ‌نامه ۴۹۴

احتمال‌های انتخاب چند مهره از کیسه



در این تیپ که به سؤالات کیسه و مهره مشهور است می‌توان به جای مهره‌های رنگی و غیر رنگی از چیزهای دیگر نظیر لامپ سالم و لامپ سوخته یا دانش‌آموز ریاضی، تجربی، انسانی و ... نیز صحبت کرد. در این مسائل n مهره داریم و k مهره خارج می‌کنیم، در این حالت تعداد عضوهای فضای نمونه برابر $\binom{n}{k}$ است و تعداد عضوهای پیشامد مطلوب نیز با انتخاب به دست می‌آید.

در این تیپ مسأله زخم‌هایی هست که مثل خوره روح دانش‌آموزان را آهسته می‌خورد و می‌تراشد، اما معمولاً به کسی اظهار نمی‌کنند!!
زخم اول: اگر چند مهره با هم خارج شوند یا چند مهره یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج شدند یا این که راجع به سرنوشت تعدادی از مهره‌ها سؤال به میان بیاید هیچ تفاوتی در راه‌حل مسأله ندارد.
زخم دوم: مهره‌ها مشابه باشند یا متمایز هیچ تفاوتی در راه‌حل نخواهیم داشت.

NOTE

EXAMPLE

33. کیسه‌ای شامل ۳ مهره سیاه و ۴ مهره سفید است. ۳ مهره به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم، احتمال آنکه:

الف) دقیقاً یک مهره سیاه باشد:

نقشه راه: دقیقاً یک مهره سیاه یعنی باید ۱ سیاه و ۲ سفید انتخاب کنیم، حال چون «و» استفاده شده تعداد حالات در هم ضرب می‌شود:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \times 6}{35} = \frac{18}{35}$$

ب) مهره‌ها هم‌رنگ باشند:

نقشه راه: مهره‌ها هم‌رنگ باشند یعنی یا هر ۳ سفید یا هر ۳ سیاه باشند و چون «یا» آمده تعداد حالات با هم جمع می‌شود:

$$P(B) = \frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1 + 4}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

ج) دقیقاً دو مهره هم‌رنگ باشند:

نقشه راه: در اینجا ترکیبی از ضرب و جمع باید مورد استفاده قرار گیرد:

$$P(C) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{(3 \times 4) + (6 \times 3)}{35} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$$

مهره‌های شماره‌دار



در این تیپ که به نوعی کیسه و مهره‌های شماره‌دار است، همان‌طور که در بخش اول گفتیم تعداد عضوهای پیشامد را به دست می‌آوریم و تعداد عضوهای فضای نمونه نیز اگر مهره‌ها با هم خارج شوند با انتخاب به دست می‌آید و اگر با جایگذاری خارج شوند با اصل ضرب به دست می‌آید.



EXAMPLE



34. یک جعبه مطابق شکل مفروض است:

الف) یک مهره از جعبه خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد عدد خارج شده، زوج یا مضرب ۳ باشد؟

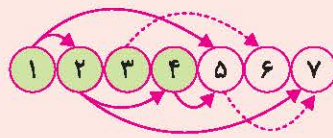
تحلیل و محاسبه: پیشامد مطلوب $A = \{2, 4, 6, 3\}$ است و تعداد اعضای فضای نمونه نیز برابر است با:

$$n(S) = \binom{7}{1} = 7$$

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

ب) دو مهره به تصادف و با هم از جعبه خارج می‌کنیم احتمال آن که مجموع شماره‌های ۲ مهره مضرب ۳ باشد، چقدر است؟

تحلیل و محاسبه: پیشامد مطلوب را به کمک فلش زدن به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow P(A) = \frac{7}{\binom{7}{2}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

ج) یک مهره از جعبه خارج کرده شماره آن را می‌نویسیم و به جعبه برمی‌گردانیم. سپس مهره دیگری خارج می‌کنیم چقدر احتمال دارد مجموع شماره‌های ۲ مهره ۶ باشد؟

تحلیل و محاسبه: پیشامد مطلوب در این حالت مانند پرتاب دو تاس است یعنی

$$A = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$$

و تعداد عضوهای فضای نمونه نیز طبق اصل ضرب برابر است با $n(S) = 7 \times 7$

$$P(A) = \frac{5}{49}$$

بنابراین:

احتمال‌های مربوط به اصول شمارش و جایگشت



این تیپ، مسائلی را در احتمال مطرح می‌کند که محاسبه $n(S)$ و $n(A)$ مربوط به مسائل شمارش، مخصوصاً جایگشت در فصل قبلی می‌شود و لازمه حل آنها دانستن مطالب فصل قبلی است. با هم به یک مثال چند قسمتی از این تیپ نگاه کنیم:

EXAMPLE

35. سه مرد و چهار زن به تصادف در یک ردیف قرار می‌گیرند، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را پیدا کنید:

الف) مردها کنار هم و زن‌ها نیز کنار هم باشند.

نقشه راه: مردها را با هم و زن‌ها را نیز با هم می‌بندیم و جایگشت هر گروه را حساب کرده و در (جایگشت دو گروه) ضرب می‌کنیم، در ضمن در همه قسمت‌ها $n(S) = 7!$ است.

$$n(A) = \underbrace{3!}_{\text{مردها}} \times \underbrace{4!}_{\text{زن‌ها}} \times \underbrace{2!}_{\text{جایگشت دو گروه}} \Rightarrow P(A) = \frac{4! \times 3! \times 2!}{7!} = \frac{2}{35}$$

ب) مردها و زن‌ها یک در میان قرار بگیرند.

نقشه راه: مردها با هم و زن‌ها با هم جابه‌جا می‌شوند:

$$\Rightarrow n(B) = \underbrace{4!}_{\text{زن‌ها}} \times \underbrace{3!}_{\text{مردها}} \Rightarrow P(B) = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{1}{35}$$

ج) مردها کنار هم باشند.

نقشه راه: مردها را به هم می‌بندیم:

$$\Rightarrow n(C) = \underbrace{3!}_{\text{مردها}} \times \underbrace{5!}_{\text{کل تعداد}} \Rightarrow P(C) = \frac{3! \times 5!}{7!} = \frac{1}{7}$$

د) هیچ دو مردی کنار هم نباشند.

نقشه راه: زن‌ها را مانند دیوار فرض می‌کنیم:

$$n(D) = (\underbrace{5}_{\text{حالت برای مرد اول}} \times \underbrace{4}_{\text{حالت برای مرد دوم}} \times \underbrace{3}_{\text{حالت برای مرد سوم}}) \times 4! \Rightarrow P(D) = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 4!}{7!} = \frac{2}{7}$$

احتمال‌های مربوط به ترکیب پیشامدها

مسائل مربوط به ترکیب پیشامدها را می‌توان به چند مدل تقسیم‌بندی کرد:

مدل‌های ضربی (مستقل)

در این مدل معمولاً صحبت از چند سکه و چند تاس به میان می‌آید و چون سکه‌ها و تاس‌ها هیچ تأثیری روی هم ندارند، می‌توانید شانس آنها را در هم ضرب کنید.

EXAMPLE

36. یک تاس و دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه تاس مضرب 3 و حداقل یک سکه رو بیاید، کدام است؟

نقشه راه: فضای نمونه تاس 6 حالت و دو سکه 4 حالت دارد و چون سکه‌ها و تاس مستقل از هم به حساب می‌آیند (یعنی نتیجه یکی روی دیگری تأثیر ندارد) به راحتی با ضرب احتمال‌ها جواب به دست می‌آید:

$$P = \frac{2}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$A = \{2, 6\}$ $B = \{(ر, پ), (پ, ر), (ر, ر), (پ, پ)\}$

مدل‌های فرمولی

در این مدل در مسأله صحبت از دو پیشامد A و B به میان می‌آید و سؤالی دربارهٔ آنها پرسیده می‌شود. برای حل این تپ مسائل با توجه به اعمال روی پیشامدها، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

1 احتمال آنکه پیشامد A یا پیشامد B رخ دهد برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2 گاهی اوقات محاسبهٔ احتمال آنچه مسأله نمی‌خواهد به مراتب راحت‌تر از آن چیزی است که می‌خواهد در این موارد از احتمال

متمم استفاده می‌کنیم:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

NOTE



EXAMPLE

37. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = 0/6$ و $P(B) = 0/7$ و $P(A \cap B) = 0/4$ ، آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

0/6 (4)

0/7 (3)

0/8 (2)

0/9 (1)

پاسخ: گزینه (1)

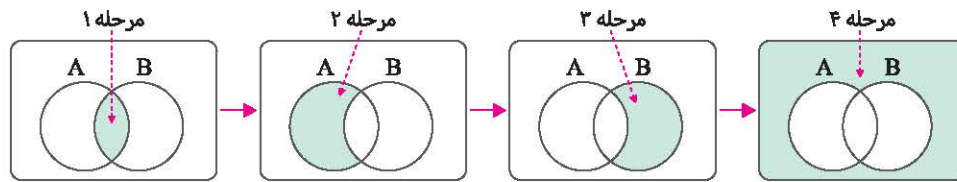
راه استراتژیک: طبق نتایجی که به دست آوردیم داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 + 0/7 - 0/4 = 0/9$$

مدل‌های نموداری

خیلی از مسائل مربوط به ترکیب پیشامدها را می‌توان با استفاده از نمودار ون و بدون استفاده از روابط حل کرد، مخصوصاً در مواردی که بیش از دو پیشامد در مسأله مطرح است. برای پر کردن نمودار ابتدا اشتراک را پر می‌کنیم. مطابق شکل یعنی از وسط وسط شروع کرده و آرام آرام به کناره‌ها می‌رویم:

دو پیشامد مطرح شده

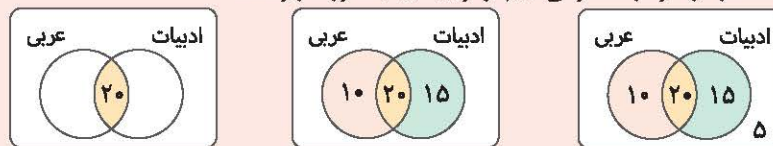


حالا سعی کنید مثال زیر را با دقت بررسی کنید.

EXAMPLE

38. از 50 دانش‌آموز یک دبیرستان 35 نفر در کلاس ادبیات و 30 نفر در کلاس عربی و 20 نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند، اگر دانش‌آموزی به تصادف از این دبیرستان انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد: الف) در عربی شرکت کرده باشد، اما در ادبیات شرکت نکرده باشد؟

نقشه راه: ابتدا اعداد داده شده را در نمودار مستقر می‌کنیم؛ و ترتیب آن به صورت زیر است:



بنابراین 10 نفر هستند که در عربی شرکت کرده‌اند، ولی در ادبیات شرکت نکرده‌اند و احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

ب) حداقل در یکی از دو درس شرکت کرده باشند؟

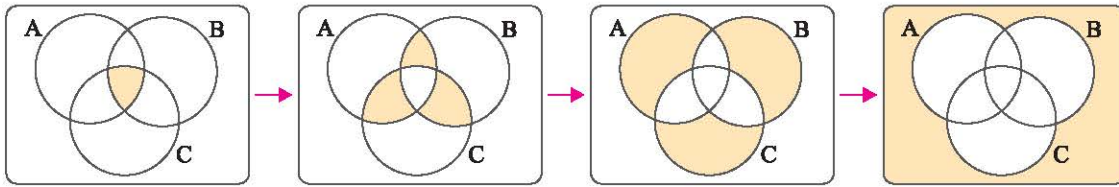
تحلیل و محاسبه: حداقل یکی یعنی محاسبه $P(A \cup B)$ بنابراین:

$$P(A \cup B) = \frac{10 + 20 + 15}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$$

ج) در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت نکرده باشد؟

تحلیل و محاسبه: هیچ یک از دو کلاس یعنی متمم اجتماع:

$$P((A \cup B)') = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$



EXAMPLE

39. از ۱۰۰ دانش‌آموز یک مدرسه ۶۰ نفر مجله A، ۵۰ نفر مجله B و ۴۰ نفر مجله C را می‌خوانند. اگر ۳۰ نفر مجله‌های A و B و ۲۰ نفر مجله‌های A و C و ۱۵ نفر مجله‌های B و C و ۱۰ نفر هر سه مجله را بخوانند چقدر احتمال دارد، دانش‌آموزی که به تصادف از مدرسه انتخاب می‌شود دقیقاً دو مجله بخواند؟

$$۰/۳۵ (۴)$$

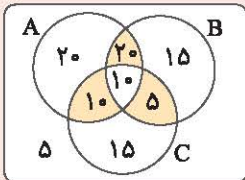
$$۰/۲۵ (۳)$$

$$۰/۳ (۲)$$

$$۰/۴۵ (۱)$$

پاسخ: گزینه (۴)

نقشه راه: ابتدا یک نمودار ون رسم می‌کنیم و مطابق مراحل گفته شده آن را پر می‌کنیم:



$$\Rightarrow P(\text{دقیقاً دو مجله}) = \frac{35}{100} = 0/35$$

78 در پرتاب دو تاس با هم احتمال آنکه مجموع کمتر از ۶ باشد، کدام

است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{5}{18}$

(۳) $\frac{11}{36}$

(۴) $\frac{1}{3}$

79 در پرتاب دو تاس با هم احتمال آنکه مجموع مضرب ۴ باشد،

کدام است؟

(۱) $\frac{5}{18}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{2}{9}$

(۴) $\frac{1}{3}$

83 در پرتاب دو تاس با هم احتمال آنکه هر عدد رو شده عدد اول

باشند، کدام است؟

(۱) $\frac{4}{9}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{9}$

(۴) $\frac{5}{12}$

84 در پرتاب دو تاس با هم احتمال آنکه حداکثر یکی از تاس‌ها

مضرب ۳ باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$

(۲) $\frac{1}{9}$

(۳) $\frac{8}{9}$

(۴) $\frac{2}{3}$

80 در پرتاب دو تاس با هم احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده، یک

عدد اول باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{5}{12}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{5}{9}$

(۴) $\frac{7}{12}$

85 تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم احتمال آن که حداقل یک بار عددی

بزرگتر از ۴ بیاید، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{9}$

(۲) $\frac{2}{9}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۴) $\frac{5}{9}$

81 در پرتاب دو تاس با هم احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده زوج

باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{5}{18}$

(۴) $\frac{1}{4}$

86 در پرتاب دو تاس سفید و قرمز با هم احتمال آنکه تاس سفید

بزرگ‌تر از ۴ و تاس قرمز عدد زوج بیاید کدام است؟

(۱) $\frac{1}{9}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۴) $\frac{5}{12}$

82 در پرتاب دو تاس با هم احتمال آنکه هیچ کدام از اعداد رو شده

مضرب ۳ نباشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{5}{18}$

(۳) $\frac{4}{9}$

87 در پرتاب دو تاس سفید و قرمز با هم چقدر احتمال دارد عدد تاس

سفید بزرگ‌تر از عدد تاس قرمز باشد؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{5}{12}$

(۳) $\frac{5}{18}$

نقشه راه: تعداد روها بیشتر از پشت‌ها یعنی ۳ بار «رو» یا ۴ بار «رو» یا ۵ بار «رو» یعنی:

$$A = \left\{ \underbrace{(ر, ر, ر)}_{\binom{5}{3}=10}, \underbrace{(پ, ر, ر, ر)}_{\binom{5}{4}=5}, \underbrace{(ر, ر, ر, ر)}_{\binom{5}{5}=1} \right\}$$

این پیشامد با پیشامد دقیقاً ۳ بار پشت هیچ اشتراکی ندارد.

تحلیل مفهوم: پیشامد $A \cap B$ بدین معنی است که اعداد رو شده متوالی بوده و جمع آنها کمتر از ۷ باشد:

$$A \cap B = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

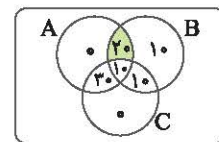
این پیشامد با پیشامد حاصل ضرب اعداد رو شده فرد (که هر دو عدد رو شده باید فرد باشند) ناسازگار است.

تحلیل مفهوم: در این شکل هم A و هم B رخ داده ولی C رخ نداده است.

تحلیل مفهوم: باید A و B را جدا رسم کنیم و C را متقاطع با هر دوی آنها و قسمتی را رنگ کنیم که در A هست ولی در C و B نیست.

تحلیل مفهوم: B یا C به معنی $(B \cup C)$ است. حال می‌خواهیم $B \cup C$ رخ دهد و A رخ ندهد، یعنی $(B \cup C) - A$ که گزینه «۳» جواب است.

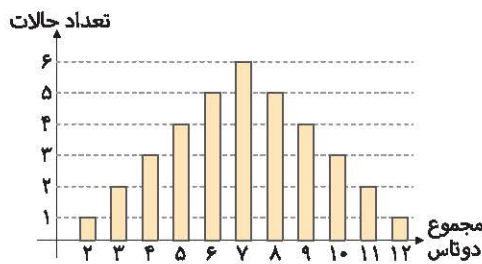
نقشه راه: A و B رخ دهد ولی C رخ ندهد یعنی قسمتی که درون $A \cap B$ هست ولی درون C نیست که برابر ۲۰ نفر است:



تحلیل مفهوم: عدد ۵ به «۱» نزدیک‌تر از «۱۳» است، چون اختلاف آن با عدد یک برابر ۴ واحد است، پس:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

نقشه راه: در پرتاب دو تاس با هم پیشامد مجموع ۷ بیشترین شانس را در بین سایر مجموع‌ها دارد و دارای ۶ حالت است دلیلش هم این است که ۷ بیشترین فاصله را تا ۱ و ۱۳ دارد. و بقیه مجموع‌ها مطابق نمودار زیر یا به ۱ نزدیک‌ترند یا به ۱۳:



تحلیل و محاسبه: مجموع دو تاس باید ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ باشد که اختلافشان از «۱۳» اعداد ۱، ۲، ۳ است پس:

$$P(A) = \frac{3+2+1}{36} = \frac{1}{6}$$

تحلیل و محاسبه: مجموع دو تاس باید ۵ یا ۴ یا ۳ یا ۲ باشد که اختلافشان از «۱» اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ است پس:

$$P(A) = \frac{1+2+3+4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

نقشه راه: مجموع باید ۴ یا ۸ یا ۱۲ باشد که اختلافشان از «۱۳» و «۱» اعداد ۱، ۵، ۳ است پس:

$$P(A) = \frac{3+5+1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

نقشه راه: مجموع باید ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد:

$$P(A) = \frac{1+2+4+6+2}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

نقشه راه: مجموع در $\frac{1}{4}$ حالات زوج و در $\frac{1}{4}$ حالات فرد است.

نقشه راه: یعنی احتمال اولی مضرب ۳ نباشد $(\frac{4}{6})$ و همچنین دومی هم مضرب ۳ نباشد $(\frac{4}{6})$ ، بنابراین:

$$P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

نقشه راه: هر تاس به احتمال $\frac{3}{6}$ عدد اول می‌آید حال چون کلمه هر دو آمده احتمال‌ها در هم ضرب می‌شود:

$$P(A) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

