



هر تابع چند جمله‌ای صاف صورت
 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ را که در آن
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی
 و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجه n
 می‌نامیم.

* دامنه توابع چندجمله‌ای، مجموعه اعداد حقیقی است.
 * بزرگترین توان x را که در این عبارت ظاهر می‌شود،
 درجه چندجمله‌ای می‌نامند.

مثال ۱: درجه توابع چندجمله‌ای زیر را مشخص کنید.

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x^2 \text{ (الف)}$$

$$g(x) = (1-x)^2(x^3 + 2x + 2) \text{ (ب)}$$

مثال ۲: نشان دهید در چندجمله‌ای زیر، ضرایب جملات با
 توان‌های فرد x ، صفرند.

$$p(x) = (1-x+x^2-x^3+\dots-x^9)(1+x+x^2+\dots+x^9)$$



حل ۱:

$$= \text{الف} \Rightarrow f(x) = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x^2 \Rightarrow \text{درجه } 5 =$$

$$g(x) = (1-x)^2(x^3 + 2x + 2)$$

$$= (1-2x+x^2)(x^3+2x+2)$$

$$= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \text{درجه } 5 =$$

حل ۲: می‌دانیم $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $2 \times 9 = 18$

می‌باشد. با تبدیل x به $-x$ چندجمله‌ای p تغییر نمی‌کند،

بنابراین: $p(x) = p(-x)$

$$p(-x) = (1+x+x^2+\dots+x^9)(1-x+x^2-\dots-x^9)$$

$$p(x) = a_{18}x^{18} + a_{17}x^{17} + \dots + a_1x + a_0$$

$$p(-x) = a_{18}x^{18} - a_{17}x^{17} + \dots - a_1x + a_0$$

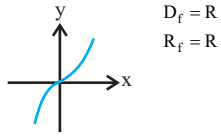
با مقایسه ضرایب دو چندجمله‌ای فوق داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a_{17} = -a_{17} \\ a_{15} = -a_{15} \\ \vdots \\ a_1 = -a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{17} = 0 \\ a_{15} = 0 \\ \vdots \\ a_1 = 0 \end{array} \right.$$



تابع چندجمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یک تابع درجه ۳ نامیده می‌شود. ($a \neq 0$)

* به طور خاص نمودار تابع $f(x) = x^3$ به شکل زیر خواهد بود؛



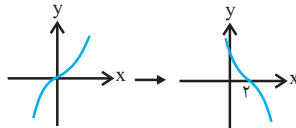
مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = -(x-2)^3$ را رسم کنید.

مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = x^2$ در بازه $(0, m)$ ، بالای

نمودار $g(x) = x^3$ قرار دارد. مقدار m را بیابید.



حل ۱:



حل ۲: ابتدا محل تلاقی دو تابع را در قسمت مثبت محور طول‌ها می‌یابیم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 = x^2 \Rightarrow x^2(x-1) = 0$$

$$\xrightarrow{x>0} x = 1$$

بنابراین همان‌طور که در نمودار نیز مشخص است تابع $f(x)$ در بازه $(0, 1)$ بالای نمودار تابع $g(x)$ قرار دارد.

به عبارت دیگر:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow x^2 > x^3 = x^2(1-x) > 0$$

$$\Rightarrow 0 < x < 1$$

$$m = 1$$

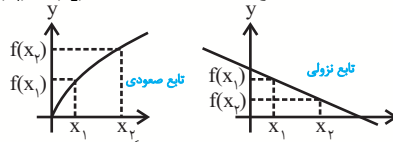
در نتیجه:



اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

تابع f اکیداً صعودی است. $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

تابع f اکیداً نزولی است. $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



* به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

مثال ۱: نمودار توابع زیر را رسم نموده و بازه‌هایی را که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی می‌باشند، را مشخص کنید.

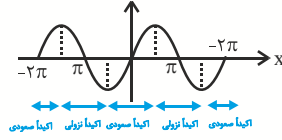
الف) $f(x) = \sin x, x \in [-2\pi, 2\pi]$

ب) $g(x) = |x + 1|$

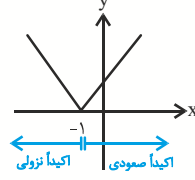


حل ۱:

$$f(x) = \sin x \text{ (الف)}$$



$$g(x) = |x + 1| \text{ (ب)}$$





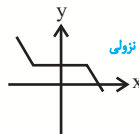
اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

تابع f صعودی است.

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow$$

تابع f نزولی است.

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow$$



* تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا گوئیم.

* تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد.

مثال ۱: توابع زیر را رسم نموده و وضعیت یکنوایی آن‌ها را مشخص کنید.

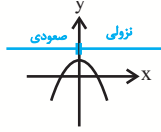
الف) $f(x) = -x^2 + 1$

ب) $g(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

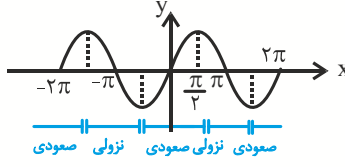


حل ۱:

الف) $f(x) = -x^2 + 1$

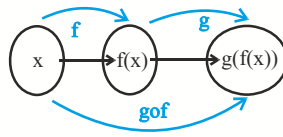


ب) $g(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$





اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با $f \circ g$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

مثال ۱: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \frac{x}{x-2}$ باشند،

مطلوبست:

الف) $D_{g \circ f}$

ب) $D_{f \circ g}$



(حل ۱: الف)

$$D_{g \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{x}{x-2} \in \mathbb{R} - \{2\}\}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-2} \neq 2 \Rightarrow 2x - 4 \neq x \Rightarrow x \neq 4$$

$$\Rightarrow D_{g \circ g} = \mathbb{R} - \{2, 4\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad \text{ب)}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{x}{x-2} \in [1, +\infty)\}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-2} \in [1, +\infty) \Rightarrow \frac{x}{x-2} \geq 1 \Rightarrow \frac{x}{x-2} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-2} \geq 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = (2, +\infty)$$



در سؤالات مربوط به ترکیب توابع به صورت زوج مرتب، مشخص نمودن دامنه ترکیب توابع بسیار مهم است.

مثال ۱: $f = \{(-2,1), (-1,3), (0,2), (1,4)\}$ و

$g = \{(-3,-1), (4,0), (5,2), (1,8)\}$ باشد، مطلوبست محاسبه

تابع

: fog

حل:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -3 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 3 \\ 4 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} 2 \\ 5 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} x \\ 1 \xrightarrow{g} 8 \xrightarrow{f} x \end{array} \right\} \Rightarrow fog = \{(-3,3), (4,2)\}$$