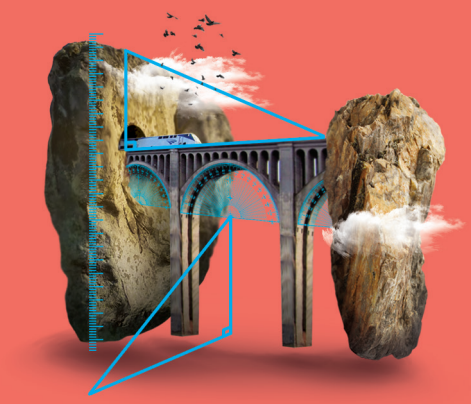


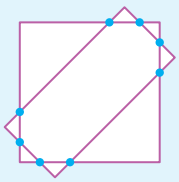
فصل ۱
راهبردهای حل مسئله

راهبرد رسم شکل

اگر شما ساعت‌ها درمورد یک منظرهٔ زیبا در طبیعت صحبت کنید و سعی کنید تمامی جزئیات آن را بیان کنید، باز هم نمی‌توانید به اندازهٔ یک تصویر از آن محل، شنوندگان را با زیبایی‌های آن منظره آشنا کنید.

در حلّ مسائل ریاضی هم، رسم شکل (در صورت امکان) می‌تواند به حلّ مسئله کمک زیادی کند. گاهی فقط با رسم شکل، مسئله به‌طور کامل حل می‌شود.

مثال **یک مربع و یک مستطیل، حداکثر در چند نقطه می‌توانند همدیگر را قطع کنند؟**

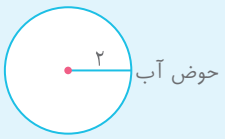


پاسخ ۸ نقطه

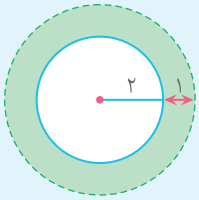
دقت کنید که شکل رسم‌شده، حتماً نباید دقیق باشد، بلکه معمولاً رسم شکل تقریبی هم برای حلّ مسئله کافی است. پس از رسم شکل، بهتر است اطلاعات مسئله را نیز روی شکل پیاده کنیم.

مثال **می‌خواهیم تا فاصلهٔ یک متر دور یک حوض آب دایره‌ای‌شکل به شعاع ۲ متر را چمن بکاریم. مساحت زمینی که باید چمن‌کاری شود را محاسبه کنید. ($\pi = 3 \simeq \pi$ = عدد پی)**

پاسخ



مساحت دایره = شعاع × شعاع × π



مساحت قسمت چمن‌کاری‌شده = ۲۷ − ۱۲ = ۱۵ متر مربع

مساحت دایرهٔ بزرگ = ۳ × ۳ × ۳ = ۲۷

مساحت حوض = ۳ × ۲ × ۲ = ۱۲

در هر قسمت با رسم شکل، پاسخ مسئله را پیدا کنید.

۱ **در یک صف، ۸ نفر جلوی احمد ایستاده‌اند. $\frac{۳}{۴}$ این تعداد نیز پشت سر احمد ایستاده‌اند. این صف از چند نفر تشکیل شده است؟**

۲ $\frac{۱}{۴}$ مخزن سوخت یک خودرو پر است. اگر ۲۰ لیتر بنزین درون آن بریزیم، هنوز ظرفیت مخزن به اندازهٔ ۷ لیتر بنزین جا دارد. کلّ مخزن چند لیتر ظرفیت دارد؟

۳ طول و عرض یک فرش به‌ترتیب ۴ و ۳ متر است. وقتی آن را در اتاق پهن می‌کنیم، از هر طرف دیوار ۰/۵ متر فاصله دارد. مساحت اتاق چند متر مربع است؟

۴ زمین کشاورزی مستطیل‌شکلی داریم، که روز اوّل $\frac{۱}{۳}$، روز دوم $\frac{۱}{۲}$ باقی‌مانده و روز سوم $\frac{۱}{۴}$ باقی‌ماندهٔ آن را درو می‌کنیم. چه کسری از زمین کشاورزی هنوز درو نشده است؟

۵ یک مثلث، یک دایره و یک خطّ راست در یک صفحه رسم می‌کنیم. حداکثر چند نقطهٔ مشترک خواهند داشت؟

۶ در یک مسابقهٔ دو، علی ۳۰ متر از رضا جلوتر است، محمد ۱۷ متر از علی عقب‌تر است، حسین ۸ متر از محمد جلوتر است. حسین چند متر از رضا جلوتر است؟

۷ علی و سایر دانش‌آموزان در حیاط مدرسه در صف‌هایی به طول مساوی ایستاده‌اند. ۴ نفر جلوی علی، ۲ نفر پشت سر او، ۳ سفر سمت راست او و ۴ نفر سمت چپ او ایستاده‌اند. چند نفر در حیاط مدرسه ایستاده‌اند؟

راهبرد الگوسازی

به مسئلهٔ زیر دقت کنید:

به چند حالت می‌توان خانه‌های جدول | | را با حروف A، B، C و D پر کرد؟

برای حلّ این نوع مسائل، نیاز داریم تا تمام حالت‌ها را محاسبه کنیم. برای اینکه هیچ حالتی را از قلم نیندازیم یا حالتی را تکراری ننویسیم، بهتر است حالت‌ها را با یک نظم و ترتیب یا با یک الگوی مشخص بنویسیم. به این کار الگوسازی گفته می‌شود.

خانهٔ سمت چپ D باشد.	خانهٔ سمت چپ C باشد.	خانهٔ سمت چپ B باشد.	خانهٔ سمت چپ A باشد.
D A	C A	B A	A A
D B	C B	B B	A B
D C	C C	B C	A C
D D	C D	B D	A D

در راهبرد الگوسازی، برای نوشتن راحت‌تر همهٔ حالت‌ها، می‌توانیم از جدول نظام‌دار نیز استفاده کنیم. از آنجایی که در این راهبرد با استفاده از نظم و ترتیب در نوشتن حالت‌ها، به مسئله پاسخ می‌دهیم، به این راهبرد، «تفکر نظام‌دار» نیز گفته می‌شود.

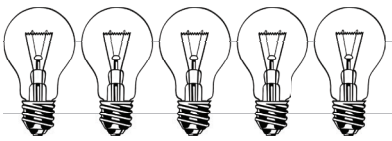
مثال **تعداد زیادی سکهٔ ۱۰۰ و ۲۰۰ تومانی در اختیار داریم. به چند حالت می‌توانیم هزینهٔ یک کالای ۱۰۰۰ تومانی را پرداخت کنیم؟**

پاسخ

مبلغ	تعداد سکهٔ ۱۰۰ تومانی	تعداد سکهٔ ۲۰۰ تومانی
۰×۲۰۰+۱۰×۱۰۰=۱۰۰۰	۱۰	۰
۱×۲۰۰+۸×۱۰۰=۱۰۰۰	۸	۱
۲×۲۰۰+۶×۱۰۰=۱۰۰۰	۶	۲
۳×۲۰۰+۴×۱۰۰=۱۰۰۰	۴	۳
۴×۲۰۰+۲×۱۰۰=۱۰۰۰	۲	۴
۵×۲۰۰+۰×۱۰۰=۱۰۰۰	۰	۵

۸ **دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۳۶ و حاصل جمع آنها، کمترین مقدار باشد. (از جدول زیر کمک بگیرید.)**

حاصل جمع	حاصل ضرب	دومین عدد	اوّلین عدد
	۳۶		
	۳۶		
	۳۶		
	۳۶		
	۳۶		



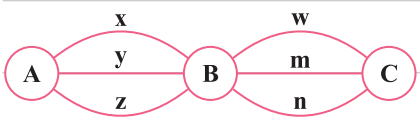
۹ **اگر هر لامپ روشن معادل عدد ۱ باشد:**

الف) به چند طریق می‌توان عدد ۴ را نشان داد؟

ب) به چند طریق می‌توان عدد ۲ را نشان داد؟

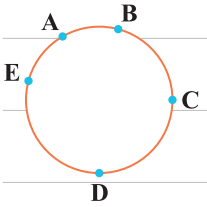
۱۰ **به چند طریق با سکه‌های ۵ و ۲۵ تومانی، می‌توان مبلغ ۲۰۰ تومان را پرداخت کرد؟**

۱۱ **به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟**

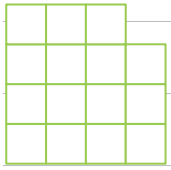


۱۲ **چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۶۰۰ می‌توان نوشت که مجموع رقم یکان و دهگان آن، برابر با رقم صدگان آن باشد (مانند ۳۲۱ که در آن ۱ + ۲ = ۳ است)؟ دقت کنید ارقام یک عدد نباید تکراری باشند.**

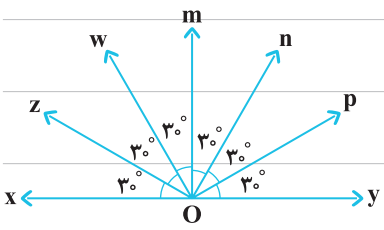
۱۳ با نقاط روی دایره، چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟



۱۴ در شکل زیر، چند مربع وجود دارد؟ (مربع با ضلع ۱، ۲ و ...)



۱۵ در شکل زیر، چند زاویهٔ 90° وجود دارد؟ نام آنها را بنویسید.



۱۶ چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰۰ داریم، که مجموع ارقام آنها ۲ باشد؟

راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

در راهبرد الگوسازی، آموختیم که چگونه همهٔ حالت‌های ممکن را برای یک رویداد بنویسیم. در برخی مسائل، همهٔ حالت‌ها مورد نظر ما نیستند و باید با توجه به شرایط مسئله، حالت‌های نامطلوب را حذف کنیم تا پاسخ مسئله را به‌دست آوریم.

مثال مجموع دو عدد طبیعی ۱۵ و حاصل ضرب آنها ۳۶ است. آن دو عدد طبیعی را بیابید. (اعداد طبیعی : ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ...)

پاسخ برای حلّ این مسئله، ابتدا با کمک الگوسازی، همهٔ حالت‌هایی را که مجموع دو عدد طبیعی ۱۵ است پیدا می‌کنیم و سپس حالت‌هایی را که ضرب آنها ۳۶ نمی‌شود، حذف می‌کنیم.

عدد اوّل	عدد دوم	حاصل ضرب
۱	۱۴	۱۴ ✗
۲	۱۳	۲۶ ✗
۳	۱۲	۳۶ ✓
۴	۱۱	۴۴ ✗
۵	۱۰	۵۰ ✗
۶	۹	۵۴ ✗
۷	۸	۵۶ ✗

(حذف حالت‌های نامطلوب)

عدد اوّل	عدد دوم
۱	۱۴
۲	۱۳
۳	۱۲
۴	۱۱
۵	۱۰
۶	۹
۷	۸

(حذف حالت‌های نامطلوب)

۱۷ مجموع تعداد شکلات‌های ارسلان، اسفندیار و بهنام ۸تا است. اگر بدانیم حاصل ضرب تعداد شکلات‌های آنها ۱۲ است، تعداد شکلات‌های آنها چندتاست؟

حاصل ضرب	حاصل جمع	بهنام	اسفندیار	ارسلان

۱۸ اگر بدانیم دو ضلع مثلثی ۵ و ۷ هستند، طول ضلع دیگر مثلث (که آن هم عدد صحیح است) کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ (در هر مثلث مجموع دو ضلع کوچک‌تر، از ضلع بزرگ‌تر، بیشتر است.)

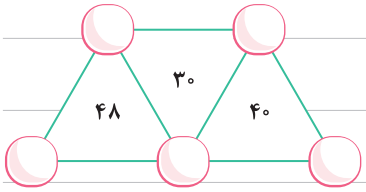
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲

۱۹ می‌خواهیم با ضرب اعداد ۲ و ۵ (به هر تعداد که لازم باشد)، عددی بین ۱۰۰ و ۲۰۰ ایجاد کنیم. چند عدد می‌توانیم بسازیم؟

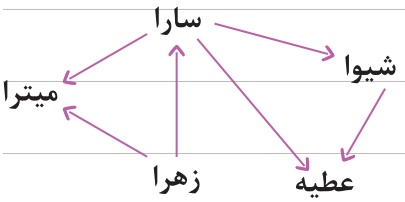
۲۰ ۱۳ سکه داریم. می‌خواهیم آنها را به ۳ دسته تقسیم‌بندی کنیم، به‌صورتی‌که تعداد سکه‌های هیچ‌کدام از دسته‌ها، زوج نباشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۲۱ در یک کیسه ۱۰ مهرهٔ سیاه و ۱۸ مهرهٔ سفید وجود دارد. در هر ساعت ۴ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ سفید به آن اضافه می‌کنیم. پس از چند ساعت تعداد مهره‌های سیاه و سفید با هم برابر می‌شوند و از هر کدام چند مهره درون کیسه خواهد بود؟

۲۲ اعداد ۲، ۳، ۴، ۵ و ۸ را طوری درون دایره‌ها قرار دهید که حاصل ضرب دایره‌های هر مثلث، برابر با عدد نوشته‌شده درون آن باشد.



۲۳ اگر {ملینا ⟵ مینا} به‌معنی این باشد که مینا از ملینا بلند قدتر است، در شکل زیر بلند قدترین فرد چه کسی است؟



۲۴ می‌خواهیم حروف کلمهٔ «هفتم» را به‌صورتی درون جدول زیر قرار دهیم که در هر سطر و هر ستون، از هر حرف فقط یک‌بار استفاده شده باشد (مانند جدول پر شده). به‌جای علامت سؤال چه حرفی قرار می‌گیرد؟

ت			م
	ت		
ف	ه		
		؟	ف

ه	ف	ت	م
م	ت	ف	ه
ت	م	ه	ف
ف	ه	م	ت

۲۵ حاصل ضرب دو عدد یک رقمی، عددی دو رقمی شده است که رقم یکان آن ۶ است. جمع این دو عدد، چند می‌تواند باشد؟ تمام حالت‌ها را بنویسید. (دو عدد نمی‌توانند تکراری باشند.)

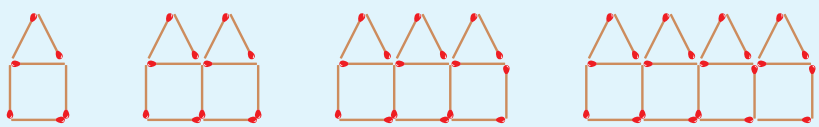
راهبرد الگویابی

گاهی در مسائل ریاضی به دنباله‌های (رشته‌های) عددی یا هندسی (شکلی) برخورد می‌کنیم که به آنها، الگوهای عددی و هندسی (شکلی) می‌گوییم. اگر بین این اعداد یا شکل‌ها، رابطهٔ خاصی وجود داشته باشد، می‌توانیم با پیدا کردن آنها، پاسخ مسئله را بیابیم.

نمونه‌هایی از الگوهای عددی و هندسی:

الگوی عددی: ۵ , ۷ , ۹ , ۱۱ , ...

الگوی هندسی:



الگوهایی که با یک مقدار ثابت، افزایش یا کاهش می‌یابند: در برخی الگوهای عددی و هندسی، اعداد با یک مقدار ثابت افزایش می‌یابند (فاصلهٔ بین اعداد، ثابت است.) در این الگوها می‌توانیم رابطه را با کمک شمارهٔ عدد یا شکل و فاصلهٔ بین اعداد پیدا کنیم.

به‌عنوان مثال، می‌خواهیم صدمین عدد الگوی زیر را بیابیم:

	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	
شمارهٔ اعداد:	۵	۷	۹	۱۱	...

+۲ +۲ +۲

در این الگو، اعداد ۲ واحد، ۲ واحد افزایش می‌یابند (فاصلهٔ بین اعداد = ۲)

شمارهٔ عدد	۱	۲	۳	۴	...
عدد	۵	۷	۹	۱۱	...
رابطه	۲×۲+۱	۳×۲+۱	۴×۲+۱	۵×۲+۱	...

مشاهده می‌کنید که رابطهٔ محاسبهٔ هر عدد، به‌صورت زیر است:

(شمارهٔ عدد +۱)×۲+۱

صدمین عدد = (۱۰۰+۱)×۲+۱ = ۲۰۲+۱ = ۲۰۳

(۱۰۰+۱ = ۱۰۱)

الگوهایی که با یک مقدار ثابت، افزایش یا کاهش نمی‌یابند: در این الگوها روش خاصی برای یافتن الگو وجود ندارد. اما معمولاً بین عدد و شمارهٔ آن، یک رابطهٔ خاص وجود دارد. (این موضوع همیشه برقرار نیست. مثلاً در الگوی ... و ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳ نمی‌توان بین عددها و شماره‌های آنها رابطه‌ای یافت.)

به‌عنوان مثال، عدد بیستم الگوی مقابل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود. ۹ , ۱۶ , ۲۵ , ۳۶ , ...

شمارهٔ عدد	۱	۲	۳	۴	...
عدد	۹	۱۶	۲۵	۳۶	...
رابطه	(۱+۲)×(۱+۲)	(۲+۲)×(۲+۲)	(۳+۲)×(۳+۲)	(۴+۲)×(۴+۲)	...

مشاهده می‌کنید که رابطهٔ هر عدد با شمارهٔ آن، به‌صورت زیر است:

عدد مورد نظر = (شمارهٔ عدد +۲)×(شمارهٔ عدد +۲)

عدد بیستم = (۲۰+۲)×(۲۰+۲) = ۲۲×۲۲ = ۴۸۴

۲۶ در هر الگوی عددی، ۳ عدد بعدی را بنویسید.

الف) ۱ , ۷ , ۱۳ , ۱۹ , ... , ... , ...

ب) ۵ , ۱۱ , ۲۳ , ۴۷ , ... , ... , ...

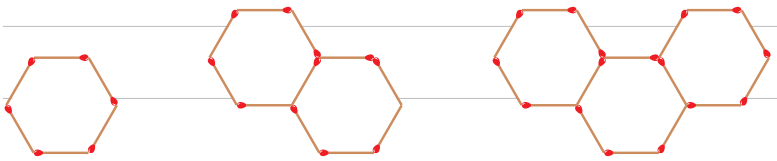
ج) $\frac{۳}{۴}$, $\frac{۹}{۱۶}$, $\frac{۲۷}{۶۴}$, ... , ... , ...

۲۷ در هر الگو، عدد خواسته‌شده را به‌دست آورید.

الف) ۹ , ۱۳ , ۱۷ , ... ⟵ چهلمین عدد = ▭

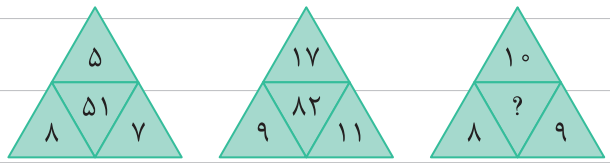
ب) ۴ , ۹ , ۱۶ , ۲۵ , ... ⟵ هفدهمین عدد = ▭

۲۸ در الگوی زیر، در شکل چهل و هشتم، از چند چوب‌کبریت استفاده می‌شود؟

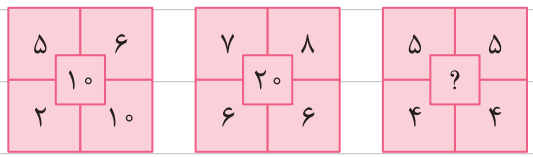


۲۹ در هر الگو، مشخص کنید به‌جای علامت سؤال، چه عددی قرار می‌گیرد؟

الف



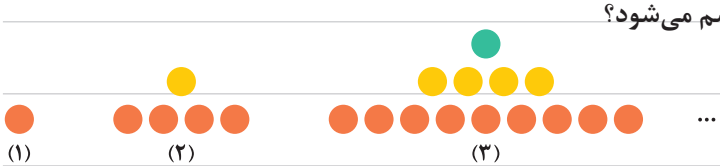
ب



۳۰ اگر نوشتن عدد زیر را ادامه دهیم، سی‌اُمین رقم چند خواهد بود؟ (دقت کنید که ارقام چندتا چندتا تکرار می‌شوند.)

۳۷۵۸۹۳۷۵۸۹۳۷۵۸۹

۳۱ در پایین‌ترین ردیف شکل هفدهم، چند دایره رسم می‌شود؟

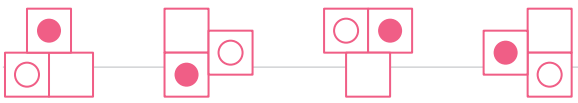


۳۲ با توجه به الگوی زیر، حاصل ضرب خواسته‌شده را بنویسید.

۱۱×۱۱=۱۲۱ ۱۱۱×۱۱۱=۱۲۳۲۱ ۱۱۱۱×۱۱۱۱=۱۲۳۴۳۲۱

۱۱۱۱۱×۱۱۱۱۱=_____

۳۳ در الگوی زیر، به‌جای علامت سؤال چه شکلی قرار می‌گیرد؟



راهبرد حدس و آزمایش

برخی مواقع به دلایلی مانند نبودن راه حلّ مستقیم برای حلّ مسئله، یا کم بودن اطلاعات ما، برای حلّ مسئله و یا پیچیده و طولانی بودن راه حلّ مسئله، امکان پاسخ دادن به مسئله وجود ندارد. در این وضعیت می‌توانیم مراحل زیر را طی کنیم.

مرحلهٔ اوّل: پاسخ احتمالی مسئله را حدس می‌زنیم.

مرحلهٔ دوم: با توجه به شرایطی که مسئله به آنها اشاره کرده است، پاسخی را که حدس زده‌ایم بررسی می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم: با توجه به بررسی‌های انجام داده شده، حدس خود را اصلاح می‌کنیم و حدس بعدی را آزمایش می‌کنیم و به همین صورت ادامه می‌دهیم تا به پاسخ نهایی برسیم.

مثال **در یک توقفگاه ۲۰ خودرو (با ۴ چرخ) و دوچرخه وجود دارد. اگر تعداد چرخ‌های آنها روی هم ۶۶ چرخ باشد، در این توقفگاه چند دوچرخه وجود دارد؟**

پاسخ مرحلهٔ اوّل: ۱۰ خودرو و ۱۰ دوچرخه : حدس اوّلیه $\Rightarrow$ تعداد چرخ‌ها $= ۱۰\times۴+۱۰\times۲=۶۰$

مرحلهٔ دوم: حدس اوّلیه را بررسی می‌کنیم. چون تعداد چرخ‌ها کمتر از ۶۶ شد، باید تعداد خودروها بیشتر از ۱۰ تا باشد.

مرحلهٔ سوم:

۱۱ خودرو و ۹ دوچرخه : حدس (۲) $\longrightarrow ۱۱\times۴+۹\times۲=۶۲$

۱۲ خودرو و ۸ دوچرخه : حدس (۳) $\longrightarrow ۱۲\times۴+۸\times۲=۶۴$

۱۳ خودرو و ۷ دوچرخه : حدس (۴) $\longrightarrow ۱۳\times۴+۷\times۲=۶۶$

پاسخ نهایی مسئله : ۱۳ خودرو و ۷ دوچرخه

این مراحل را می‌توانیم در یک جدول نظام‌دار بنویسیم.

نتیجه	بررسی	حدس‌ها	
		تعداد دوچرخه‌ها	تعداد خودروها
✗	$۱۰\times۴+۱۰\times۲=۶۰$	۱۰	۱۰
✗	$۱۱\times۴+۹\times۲=۶۲$	۹	۱۱
✗	$۱۲\times۴+۸\times۲=۶۴$	۸	۱۲
✓	$۱۳\times۴+۷\times۲=۶۶$	۷	۱۳

۳۴ **در یک سفینه ۱۶ آدم فضایی وجود دارند. بعضی از آنها سه چشم و بعضی دیگر چهار چشم دارند. اگر تعداد کلّ چشم‌های آنها ۵۸ تا باشد، چند آدم فضایی سه چشم و چند آدم فضایی چهار چشم در سفینه وجود دارند؟**

بررسی آزمایش	تعداد ۴ چشمی	تعداد ۳ چشمی

۳۵ ۱۱ برابر کدام اعداد طبیعی بین ۸۰ و ۱۳۰ قرار دارند؟

۳۶ عددی طبیعی‌ای بیابید که حاصل ضرب آن در خودش، ۳۰ واحد از خودش بزرگ‌تر باشد.

۳۷ به‌جای مربع‌ها، چه عددی را می‌توان قرار داد؟ (در مربع‌های همرنگ اعداد یکسان قرار می‌گیرند.)

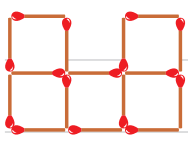
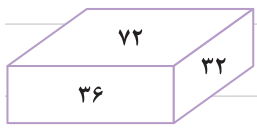
الف) $۵ \times \square + ۳ \times \square = ۵۶$

ب) $۳۵ - ۲ \times \square = ۵ \times \square$

۳۸ به‌جای ، و ، رقم‌هایی قرار دهید تا جمع زیر صحیح باشد (در شکل‌های یکسان، رقم‌های یکسان قرار دهید).

$$\begin{array}{r} \triangle\square\bigcirc \\ +\ \square\bigcirc\triangle \\ \hline ۹\ ۷\ ۸ \end{array}$$

۳۹ با جابه‌جایی ۳ چوب‌کبریت، کاری کنید که در شکل فقط ۴ مربع کوچک داشته باشیم.



۴۰ مساحت سه وجه یک مکعب‌مستطیل را روی آن نوشته‌ایم. ابتدا اندازهٔ طول، عرض و ارتفاع آن را حدس بزنید و سپس حجم آن را محاسبه کنید.