

مجموعه‌ها



درس اول: معرفی مجموعه

◀ **تعریف مجموعه:** به دستمای از اعداد یا اشیا یا حروف و یا اشکال که **دو به دو متمایز و کاملاً مشخص** باشند، مجموعه می‌گوییم. به‌طور مثال مجموعه عددهای طبیعی یک رقمی عبارتند از: ۱، ۲، ۳، ... و ۹ که اگر آن‌ها را داخل دو آکولاد قرار دهیم و با حروفی مانند $B \cup A$ و ... نام‌گذاری کنیم در این صورت یک مجموعه تشکیل داده‌ایم.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

بچه‌های عزیز، مجموعه بالا را می‌توانیم به شکل خلاصه‌تر به صورت $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ نیز بنویسیم.

به هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳، ... و ۹ که در مجموعه A قرار دارند یک **عضو** مجموعه A گفته می‌شود چون از ۱ تا ۹ تعداد نه عدد طبیعی وجود دارد پس این مجموعه دارای ۹ عضو است.

- نکته** ۱) در تعریف مجموعه که در بالا به آن اشاره شد منظور از **دو به دو متمایز**، یعنی اینکه تکرار در مجموعه اثر ندارد. پس اگر در مجموعه A ، چند مرتبه عدد ۲ نوشته شود، باید عضوهای تکراری را حذف کنیم و فقط یک عضو ۲ را بنویسیم.

۲) در تعریف مجموعه منظور از عبارت **کاملاً مشخص**، یعنی اینکه عضوهای مجموعه به‌طور سلیقه‌ای انتخاب نشوند و عضو مجموعه منحصر به فرد باشد.

با توجه به نکته بالا، نمی‌توان مجموعه‌ای با عنوان «سه شاعر معروف» تشکیل داد. چون هر کسی به‌طور سلیقه‌ای، شاعران معروف را مشخص می‌کند. شاید یک فرد از حافظ، سعدی و فردوسی نام ببرد اما فردی دیگر از حافظ، نظامی و خیام و فرد سوم از مولوی، عطار و فردوسی به عنوان مجموعه شعرای معروف یاد کند. پس دقت داشته باشید که مفهوم مجموعه در علم ریاضی کاملاً با مفهوم مجموعه، گروه یا دسته که ما در زندگی روزمره، در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان استفاده می‌کنیم؛ متفاوت است. مثلاً وقتی می‌گوییم: «گروهی از معلمان به همایش ریاضی انتشارات کلاغ سپید دعوت شدند» از نظر علم ریاضی هیچ مجموعه‌ای را تشکیل نداده‌ایم. چون در این جمله نام معلمان و یا تعداد آن‌ها مشخص نشده است. و یا زمانی که می‌خواهیم چهار فوتبالیست معروف را نام ببریم، با توجه به سلیقه‌های متفاوت افراد، باز هم نمی‌توان یک مجموعه مشخص را تشکیل داد.



۱ در نوشتن و نمایش مجموعه‌ها، جاه‌جایی اعضای مجموعه اهمیت ندارد بدین معنی که با جابه‌جا کردن اعضای یک مجموعه مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. به طور مثال مجموعه‌های $\{1, 2, 3\}$ و $\{3, 2, 1\}$ و $\{1, 2, 3, 4\}$ هیچ تفاوتی ندارند و فقط عضوی آن‌ها جابه‌جا شده‌اند.

۲ همان‌طور که گفته شد، هر یک از عوامل تشکیل‌دهنده یک مجموعه را عضو آن مجموعه می‌گویند. قابل ذکر است که برای نمایش «عضویت» یا «تعلق داشتن» از نماد \in استفاده نموده و عدم عضویت را با نماد \notin نمایش می‌دهیم. به طور مثال در مجموعه $D = \{1, 2, 3\}$ ، می‌توانیم عضویت هر یک از اعضای مجموعه را به این صورت نمایش دهیم:

$1 \in D$ (۱ عضو D است)

$2 \in D$ (۲ عضو D است)

$3 \in D$ (۳ عضو D است)

هم‌چنین با توجه به اینکه ۴ عضو این مجموعه نیست، آن را به صورت $4 \notin D$ نشان داده و می‌خوانیم: ۴ عضو مجموعه D نیست.

۳ به مجموعه‌هایی مانند (۳) و یا (۴)، مجموعه یک عضوی می‌گویند.

تذکر مهم: دقت داشته باشید که در مجموعه $E = \{2, \{7\}, 3\}$

۷ عضو مجموعه E نمی‌باشد بلکه $\{7\}$ عضو مجموعه E است. یعنی در این مجموعه داریم: $7 \in E$ و $\{7\} \in E$ در ضمن $7 \in \{7\}$ یعنی همان چیزی که عیناً درون مجموعه می‌بینیم، عضو آن است.

نمودار ون: می‌توانیم اعضای یک مجموعه را داخل یک منحنی یا شکل بسته به صورت زیر بنویسیم:



به این نوع نمایش مجموعه‌ها، **نمودار ون** می‌گویند.



اگر در مجموعه‌ای، هیچ عضوی وجود نداشته باشد؟ آن مجموعه را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

به طور مثال، مجموعه اعداد اول دو رقمی زوج هیچ عضوی ندارد؛ پس یک مجموعه تهی است.

هم‌چنین مجموعه مضرب‌های عدد ۱۰ که بین دو عدد ۱۲ و ۱۵ می‌باشند نیز یک مجموعه تهی است؛ چون هیچ‌یک از مضرب‌های ۱۰ بین دو عدد ۱۲ و ۱۵ وجود ندارد.

مجموعه اعداد طبیعی بین $7/2$ و $7/5$ نیز یک مجموعه تهی می‌باشد.



دقت داشته باشید که مجموعه‌های $\{0\}$ و $\{\emptyset\}$ تهی نبوده و یک عضوی هستند و به ترتیب عضوی آن‌ها 0 و \emptyset می‌باشند.



۱ جمله‌های درست را با علامت ✓ و نادرست را با ✗ مشخص کنید.

الف) جمله «سه قهرمان ایرانی در رشته کشتی» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

ب) جمله «شمارنده‌های عدد ۳۰» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

ج) جمله «اعداد منفی بزرگتر از ۵» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

د) مجموعه $\{۳, ۱, ۳, ۵, ۳, ۱\}$ دارای ۶ عضو می‌باشد.

ه) با جابه‌جا کردن عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ای جدید ساخته می‌شود.

و) در مجموعه $A = \{d, b, \{a\}\}$ ، یکی از عضوهای مجموعه A است.

۲ هر یک از جمله‌های زیر را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف) به دسته‌ای از اعداد یا اشیا یا حروف و یا شکل‌ها که دو به دو متمایز و کاملاً مشخص باشند، _____ می‌گویند.

ب) به هر یک از عوامل تشکیل‌دهنده یک مجموعه، _____ آن می‌گویند.

ج) مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعه _____ نام دارد که آن را با نماد _____ نشان می‌دهند.

د) مجموعه $B = \{۱۳\}$ ، فقط _____ عضو دارد و آن را مجموعه _____ یا _____ می‌نامند.

ه) به نمایش یک مجموعه به وسیله منحنی بسته، نمودار _____ گفته می‌شود.

و) با توجه به مجموعه $D = \{۳, -۵, ۹, -۱\}$ ، عضو مجموعه D است که آن را با نماد ریاضی به صورت _____ نشان

می‌دهیم.

۳ شماره هر یک از عبارتهای ستون سمت راست را در دایره عبارت مناسب آن در ستون سمت چپ بنویسید.

$\{-۹, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, ۹\}$

\emptyset

$\{-۱\}$

مجموعه یک عضوی

مجموعه عددهای طبیعی زوج دو رقمی

مجموعه اعداد اول یک رقمی

$\{A, B, C, \dots, Z\}$

$\{۱, ۲, ۳, ۶\}$

$\{۶, ۱۲, ۱۸, \dots\}$

مجموعه دو عضوی

۱) مجموعه حروف زبان انگلیسی

۲) $\{۱۰, ۱۲, ۱۴, \dots, ۹۸\}$

۳) مجموعه شمارنده‌های عدد ۶

۴) مجموعه ضرب‌های صحیح یک رقمی ۳

۵) $\{۵, ۷, ۵\}$

۶) مجموعه اعداد صحیح منفی بزرگ‌تر از -۲

۷) مجموعه اعداد اول زوج سه رقمی

۸) مجموعه اعداد طبیعی که بر ۶ بخش پذیرند

۹) $\{۷, ۷\}$

۱۰) $\{۲, ۳, ۵, ۷\}$



۴ کدام یک از عبارتهای زیر یک مجموعه را نشان می‌دهد، در صورت امکان عضوهای مجموعه را بنویسید.

الف) حروف x و y و اعداد طبیعی بین ۷ و ۱۰ .

ب) چهار فوتبالیست معروف ایرانی.

ج) حروف زبان فارسی.

د) اعداد طبیعی، فرد دو رقمی.

ه) اعداد اول منفی.

و) دو عدد اول کوچک‌تر از ۲۰ .

ز) قرینه اعداد اول یک رقمی.

ح) دو دانشمند معروف ایرانی.

ط) سه عدد فرد متوالی.

۵ هر یک از مجموعه‌های زیر را با یک عبارت کلامی، بیان کنید.

الف) $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$;

ب) $\{۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\}$;

ج) $\{۸, ۱۰, ۱۲\}$;

د) \emptyset ;

ه) $\{-۱, -۲, -۳, -۴, -۵\}$;

و) $\{-۵, -۱۰, -۱۵, \dots\}$;

۶ با توجه به مجموعه $A = \{-۳, ۷, -۴, ۳\}$ درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $-۳ \in A$

ب) $-۷ \in A$

ج) $۴ \in A$

د) $۳ \in A$

ه) $۷ \in A$

و) $-(-۳) \in A$

ز) $\frac{-۲۴}{۶} \in A$

ح) $\frac{۲۱}{۳} \in A$

۷ با توجه به مجموعه‌های $B = \{۱, \{۳\}, ۵\}$ و $D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) آیا ۳ عضو مجموعه B است؟ عضو D چه‌طور؟

ب) مجموعه عضوهای مشترک دو مجموعه A و B چند عضوی است؟ آن را بنویسید و E بنامید.

ج) کدام یک از این دو مجموعه، نشان‌دهنده مجموعه اعداد فرد کوچک‌تر از ۶ می‌باشد؟ چرا؟

د) درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$۱ \in B$

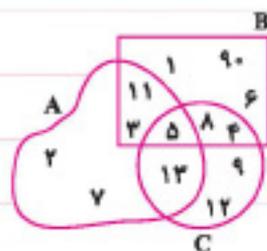
$۲ \notin D$

$\{۵\} \in B$

$\{۴\} \notin B$



۸ الف) هر یک از مجموعه‌های مقابل را با عضوهایشان نشان دهید.



$$A = \{$$

$$B = \{$$

$$C = \{$$

ب) کدام اعداد فقط عضو A هستند؟

ج) کدام اعداد هم عضو A هستند و هم عضو B، اما عضو C نمی‌باشند؟

د) کدام اعداد هم عضو A هستند و هم عضو C، اما عضو B نمی‌باشند؟

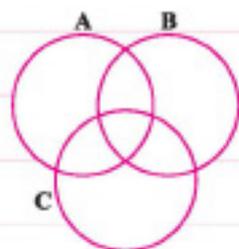
ه) کدام اعداد هم عضو B هستند و هم عضو C، اما عضو A نمی‌باشند؟

و) کدام اعداد عضو هر سه مجموعه هستند؟

۹ دو مجموعه $E = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ و $F = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ را با یک نمودار ون نمایش دهید.

۱۰ الف) عضوهای سه مجموعه $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ و $C = \{2, 4, 8, 16\}$ را در

نمودار ون زیر جای‌گذاری نموده، سپس یک مجموعه بنویسید که تمامی عضوهای مشترک هر سه مجموعه را تشکیل می‌دهد.



ب) هر یک از مجموعه‌های A، B و C را با یک عبارت کلامی نشان دهید.

بررسی‌کنای چهارگزیندای

۱ کدام یک از گزینه‌های زیر، یک مجموعه تشکیل می‌دهد؟

الف) سه عدد طبیعی فرد متوالی

ب) سه بازیگر معروف

ج) سه شهر زیبای ایران

د) سه نفر اول کنکور سراسری، در رشته ریاضی سال ۹۴

۲ مجموعه اعداد صحیح و منفی بزرگ‌تر از -۱۰ چند عضو دارد؟

د) بی‌شمار عضو

ج) ۹

ب) ۱۰

الف) ۱۱



۱۲ کدام یک از حروف زیر، عضو مجموعه حروف تشکیل دهنده کلمه «کلاغ سپید» **نمی‌باشند**؟

- (الف) ل (ب) ف (ج) ا (د) ی

۱۳ مجموعه شمارنده‌های عدد ۴۲ دارای چند عضو اول است؟

- (الف) ۶ (ب) ۵ (ج) ۴ (د) ۳

۱۴ اگر A، مجموعه اعداد اول یک رقمی باشد، کدام یک از روابط زیر درست است؟

- (الف) $\{2\} \in A$ (ب) $4 \in A$ (ج) $1 \in A$ (د) $-(-3) \in A$

۱۵ تعداد عضوهای مجموعه $E = \{1, \{1\}, \{1,1\}, \{1,1,1\}\}$ کدام است؟

- (الف) ۴ (ب) ۳ (ج) ۲ (د) ۱

۱۶ مجموعه مقابل چند عضوی است؟ $\left\{ \sqrt{36}, \frac{100}{20}, 0, 13, -6, \sqrt{25}, \frac{12}{2}, \frac{9}{30} \right\}$

- (الف) ۷ (ب) ۶ (ج) ۵ (د) ۴

۱۷ اگر A، «مجموعه اعداد صحیح بین -۲ و +۳» باشد، کدام رابطه زیر صحیح است؟

- (الف) $-(-5) \in A$ (ب) $(7-5) \in A$ (ج) $\frac{\sqrt{9}}{3} \in A$ (د) $(5-7) \in A$

۱۸ کدام یک از مجموعه‌های زیر، **یکانی نمی‌باشد**؟

- (الف) $\{5, 5, 5\}$ (ب) $\{\{2, 3\}, \{3, 2\}\}$ (ج) $\{2, \{2\}\}$ (د) $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$

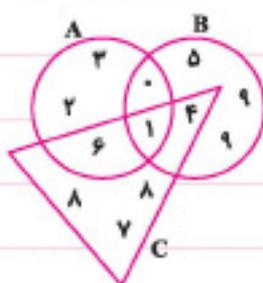
۱۹ با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه درست است؟

(الف) تعداد عضوهای هر سه مجموعه برابر است.

(ب) $0 \in A, 4 \in C$

(ج) عددهای ۱ و ۴ عضو هر سه مجموعه هستند.

(د) عدد ۳ فقط عضو مجموعه A است و عدد ۷ نیز فقط عضو مجموعه B است.



۲۰ کدام یک از مجموعه‌های زیر، **تهی** است؟

(الف) اعداد اول زوج (ب) اعداد حسابی که طبیعی نیستند.

(ج) اعداد طبیعی بین ۲۰ و ۳۰ که بر ۱۶ بخش پذیرند. (د) اعداد صحیح منفی کوچک‌تر از (-۱)

۲۱ کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (الف) $\{0\}$ (ب) $0 \in \emptyset$ (ج) $\emptyset \in \emptyset$ (د) $\emptyset \notin \{\emptyset\}$

۲۲ اگر $A = \{0, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ باشد، در این صورت کدام گزینه **نا درست** است؟

- (الف) $\{2, 3\} \in A$ (ب) $5 \in A$ (ج) $1 \in A$ (د) $0 \in A$

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

❖ دو مجموعه برابر: دو مجموعه A و B را برابر گوئیم هرگاه عضوهای دو مجموعه یکسان باشند؛ یعنی هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر هر عضوی که در یکی از مجموعه‌ها می‌بینیم، در دیگری هم می‌بینیم. تساوی دو مجموعه A و B را با نماد ریاضی به صورت $A = B$ نشان می‌دهیم.

به‌طور مثال دو مجموعه $A = \{1, 5, 8\}$ و $B = \{8, 1, 5\}$ با یکدیگر برابر هستند. چون هر عضوی از A را می‌توان در B مشاهده نمود و برعکس هر عضوی از B را نیز می‌توان در مجموعه A مشاهده کرد. به مجموعه‌های زیر دقت کنید:

(الف) مجموعه E شامل سه عدد طبیعی زوج متوالی، شروع از ۶: $E = \{6, 8, 10\}$

(ب) مجموعه C شامل مضرب‌های طبیعی عدد ۲ که بزرگتر از ۴ و کوچکتر از ۱۲ هستند: $C = \{6, 8, 10\}$

(ج) مجموعه D شامل اعداد مرکب بزرگتر از ۵ و کوچکتر از ۱۱: $D = \{6, 8, 9, 10\}$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید دو مجموعه E و C با یکدیگر برابر هستند. اما مجموعه D با هیچ‌کدام از آن‌ها برابر نیست زیرا عضو ۹ در مجموعه D ، در هیچ یک از مجموعه‌های E و C موجود نیست. بنابراین می‌توانیم بگوییم:

$$E = C$$

$$E \neq D$$

$$C \neq D$$

مثال اگر $A = B$ و $A = \{5\}$ و $B = \{a, b-3\}$ باشد مقدار a و b را به‌دست آورید.

چون دو مجموعه A و B برابر هستند، پس مجموعه B نیز باید دارای یک عضو باشد یعنی هر دو عضو B باید مساوی

$$a = 5$$

$$b - 3 = 5 \Rightarrow b = 5 + 3 = 8$$

۵ باشند. بنابراین:

$$B = \{5, 5\}$$

۱ تمامی مجموعه‌های تهی با یکدیگر برابر هستند.

۲ همه عددهای $\sqrt{16}$ و $\frac{12}{3}$ و 3^2 نمایش‌های مختلفی از عدد ۴ می‌باشند لذا با یکدیگر برابر هستند. بنابراین باید در مجموعه‌ها

به نمایش مختلف اعداد دقت کرده و در صورت لزوم عضوهای تکراری را حذف نمود.

❖ زیرمجموعه: مجموعه A را زیرمجموعه مجموعه B گوئیم، هرگاه هر عضوی از A ، یک عضو از مجموعه B باشد.

به‌طور مثال $A = \{1, 9, 4\}$ زیرمجموعه $B = \{-1, 1, 6, 9, 4, 7\}$ است؛ زیرا تمام عضوهای مجموعه A ، حتماً عضوی از مجموعه B هستند.

لازم به ذکر است که عبارت « A زیرمجموعه B است» را با نماد ریاضی به صورت $A \subseteq B$ نشان می‌دهند.

و اما مجموعه $C = \{-1, 6, 11\}$ ، زیرمجموعه B نیست؛ چون در مجموعه C عضوی مانند ۱۱ وجود دارد که عضو مجموعه B نمی‌باشد.

عبارت « C زیرمجموعه B نیست» را با نماد ریاضی به صورت $C \not\subseteq B$ نشان می‌دهند.

۱) اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعه A نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$ همچنین به مثال‌های زیر نیز دقت کنید.

$$\{2, \{5, 7\}\} \not\subseteq \{2, 5, 7, 8\}$$

$$\{\{3\}\} \not\subseteq \{2, \{3\}, \{3, 5\}\}$$

$$\{2, 6\} \subseteq \{2, 6\}$$

$$\{1, 5, \{7\}\} \subseteq \{1, 5, \{7\}\}$$

$$\emptyset \subseteq \emptyset$$

مثال: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است و برای هر مجموعه دلخواه مانند A داریم $A \subseteq A$

$$\emptyset \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\emptyset \subseteq \{2, -9, 5\}$$

$$\emptyset \subseteq \{1, 5\}$$

نوشتن تمامی زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

برای این که تمامی زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند $\{2, \{5\}, 7\}$ را بنویسیم، باید به ترتیب زیر عمل کنیم:

۱) با توجه به اینکه مجموعه تهی، زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست پس ابتدا مجموعه \emptyset را می‌نویسیم.

۲) زیرمجموعه‌های یک عضوی مجموعه را می‌نویسیم. برای این منظور کافی است که هر عضو مجموعه را داخل یک جفت آکولاد قرار دهیم.

$$\{2\}, \{\{5\}\}, \{7\}$$

۳) زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه را می‌نویسیم. برای این منظور کافی است که هر دو عضو مجموعه را داخل یک جفت آکولاد قرار دهیم.

$$\{2, \{5\}\}, \{2, 7\}, \{\{5\}, 7\}$$

۴) زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه را می‌نویسیم. در این مثال، چون خود مجموعه، یک مجموعه سه عضوی است؛ پس آخرین زیرمجموعه

$$\{2, \{5\}, 7\}$$

این مجموعه، خودش است.

دقت داشته باشید که اگر مجموعه بیشتر از سه عضو داشته باشد باید به ترتیب بالا ادامه دهیم و تمامی زیرمجموعه‌های آن را تا جایی که تعداد

عضوهای آخرین زیرمجموعه با تعداد عضوهای مجموعه اصلی برابر شود، ادامه می‌دهیم.

بیشتر بدانیم: هر مجموعه Π عضوی دارای 2^{Π} زیرمجموعه است. بنابراین مجموعه تهی دارای 2^0 یعنی یک زیرمجموعه است: $\emptyset \subseteq \emptyset$

و هر مجموعه تک عضوی مانند مجموعه $\{5\}$ دارای 2^1 یعنی ۲ زیرمجموعه است: $\emptyset \subseteq \{5\}$ و $\{5\} \subseteq \{5\}$

و همین‌طور یک مجموعه دو عضوی مانند مجموعه $\{a, b\}$ دارای 2^2 یعنی ۴ زیرمجموعه است:

$$\emptyset \subseteq \{a, b\}$$

زیرمجموعه صفر عضوی

$$\{a\} \subseteq \{a, b\} \text{ و } \{b\} \subseteq \{a, b\}$$

زیرمجموعه‌های یک‌عضوی

$$\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$$

زیرمجموعه دو‌عضوی

نمایش مجموعه‌های اعداد:

در سال‌های گذشته با مجموعه‌های عددی مانند اعداد طبیعی (\mathbb{N})، اعداد حسابی (\mathbb{W})، اعداد صحیح (\mathbb{Z}) و اعداد گویا (\mathbb{Q}) آشنا شده‌اید. در

اینجا برای یادآوری، هر یک از آن‌ها را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم:

از این اعداد برای شمارش استفاده می‌شود $\Rightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ = مجموعه اعداد طبیعی

از این اعداد برای محاسبات استفاده می‌شود $\Rightarrow \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ = مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ = مجموعه اعداد صحیح

در اعداد گویا، چون بین هر دو عضو دلخواه، بی‌شمار عضو دیگر وجود دارد لذا این مجموعه را نمی‌توان با عضوهایش نشان داد و برای نمایش آن باید از نمادهای ریاضی استفاده کنیم.

و به این صورت می‌خوانیم: مجموعه اعداد گویا برابر است با تمامی عددهای کسری مانند $\frac{a}{b}$ به طوری که a و b عدد صحیح باشند و مخرج کسر یعنی b ، مخالف صفر باشد. (یعنی مخرج صفر نباشد).

(در نمایش مجموعه‌ها، نماد «|» خوانده می‌شود: «به طوری که» یا «به شرطی که».)

با توجه به تعریف زیرمجموعه داریم:

$N \subseteq W, W \subseteq Z, N \subseteq Z$

$Z \subseteq Q, N \subseteq Q, W \subseteq Q$

$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

توجه

بنابراین:

مثال مجموعه $A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, \dots, ۴۵\}$ را با نماد ریاضی نشان دهید.

تمام اعضای این مجموعه، مضرب‌های ۳ هستند، یعنی هر عضو مجموعه از رابطه $۳k$ به طوری که k عدد طبیعی باشد ساخته می‌شود. پس می‌توانیم مجموعه را به صورت زیر بنویسیم:

$$A = \{۳ \times ۱, ۳ \times ۲, ۳ \times ۳, ۳ \times ۴, \dots, ۳ \times ۱۵\} = \{۳k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq ۱۵\}$$

مثال مجموعه $B = \{۵, ۸, ۱۱, ۱۴, \dots\}$ را با نماد ریاضی نشان دهید.

در این مثال، اعضا مضرب یک عدد ثابت نیستند اما فاصله همه آن‌ها از هم، ۳ واحد می‌باشد؛ پس می‌توانیم هر عضو این مجموعه را از مضرب‌های طبیعی ۳ که ۲ واحد به آن‌ها اضافه شده در نظر بگیریم. یعنی هر عضو مجموعه از رابطه $۳k + ۲$ به طوری که k عدد طبیعی باشد، ساخته می‌شود. بنابراین داریم:

$$B = \{۳ \times ۱ + ۲, ۳ \times ۲ + ۲, ۳ \times ۳ + ۲, ۳ \times ۴ + ۲, \dots\} = \{۳k + ۲ \mid k \in \mathbb{N}\}$$

دقت داشته باشید که برای ساختن مجموعه B ، از تمام عددهای طبیعی استفاده نموده‌ایم لذا نیازی به استفاده از نمادهای کوچک‌تر یا بزرگ‌تر نمی‌باشد.

مثال مجموعه $C = \{۵, ۱۲, ۱۹, ۲۶, \dots, ۶۸\}$ را با نماد ریاضی نشان دهید.

در این مثال، اعضا مضرب یک عدد ثابت نیستند اما فاصله آن‌ها از هم، ۷ واحد می‌باشد؛ پس می‌توانیم هر عضو این مجموعه را با استفاده از مضرب‌های طبیعی ۷ که ۲ واحد از آن‌ها کم شده است بسازیم، یعنی هر عضو مجموعه از رابطه $۷k - ۲$ به طوری که k عدد طبیعی باشد، ساخته می‌شود.

$$C = \{۷ \times ۱ - ۲, ۷ \times ۲ - ۲, ۷ \times ۳ - ۲, ۷ \times ۴ - ۲, \dots, ۷ \times ۱۰ - ۲\}$$

$$= \{۷k - ۲ \mid k \in \mathbb{N}, k \leq ۱۰\} \xrightarrow{\text{یا}} \{۷k + ۵ \mid k \in \mathbb{W}, k \leq ۸\}$$

مثال مجموعه $D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ را با نماد ریاضی نشان دهید.

در این مثال فاصله اعضا ثابت نیست، همچنین اعضا مضرب های متوالی یک عدد ثابت نیستند ولی با دقت در آن ها ملاحظه می کنید که تمامی آن ها توان هایی از ۲ هستند یعنی هر عضو از رابطه 2^k ساخته می شود پس ابتدا عضوهای این مجموعه را به صورت توان هایی از ۲ می نویسیم، سپس مجموعه را با نماد ریاضی نشان می دهیم.

$$D = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5\} = \{2^k \mid k \in \mathbb{W}, k \leq 5\}$$

مثال مجموعه $E = \{1, 10, 100, 1000, 10000\}$ را با نماد ریاضی نشان دهید.

در این مثال هم فاصله اعضا ثابت نیست همچنین اعضا مضرب های متوالی یک عدد ثابت نیستند ولی با دقت در آن ها ملاحظه خواهید کرد که همه اعضا از توان های عدد ۱۰ به اضافه یک واحد ساخته شده اند، یعنی هر عضو مجموعه از رابطه $10^k + 1$ ساخته می شود. پس ابتدا عضوهای این مجموعه را به صورت توان هایی از ۱۰ به اضافه یک واحد می نویسیم سپس مجموعه را با نماد ریاضی نشان می دهیم.

$$E = \{10^1 + 1, 10^2 + 1, 10^3 + 1, 10^4 + 1\} = \{10^k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$$

مثال مجموعه $F = \{4x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 7\}$ را با اعضایش نمایش دهید.

برای حل این گونه سوالات ابتدا باید به شرط هایی که در مجموعه مشخص شده دقت کنیم، در این مجموعه شرط اول (یعنی $x \in \mathbb{Z}$) مشخص می کند که باید x ها را از اعداد صحیح انتخاب کنیم و شرط دوم هم مشخص می کند که اعدادی که انتخاب می کنیم (یعنی x ها) باید از -2 تا خود $+7$ باشند. (دقت کنید که $x \leq 7$ یعنی اعداد کوچک تر یا مساوی با ۷ اما $x < -3$ یعنی اعداد بزرگ تر از -3) حالا اعداد صحیح ما از -2 تا $+7$ را در رابطه $4x - 5$ جای گذاری نموده و مقادیر به دست آمده را در یک مجموعه می نویسیم تا عضوهای مجموعه F مشخص شوند.

$$F = \left\{ \overbrace{4(-2) - 5}^{-8-5}, \overbrace{4(-1) - 5}^{-4-5}, \overbrace{4(0) - 5}^{-5}, \dots, \overbrace{4(7) - 5}^{28-5} \right\} = \{-13, -9, -5, \dots, 23\}$$

۱ جمله های درست را با علامت ✓ و نادرست را با ✗ مشخص کنید.

- الف) اگر تعداد عضوهای دو مجموعه یکسان باشند، آن دو مجموعه برابر هستند.
- ب) دو مجموعه «اعداد اول دو رقمی زوج» و «اعداد طبیعی بین ۲ و ۳» با یک دیگر برابر هستند.
- ج) مجموعه «اعداد اول دو رقمی زوج» زیرمجموعه تمامی مجموعه ها است.
- د) مجموعه $\{2, 3, 5, 7\}$ زیرمجموعه $\{3, 5, 7\}$ می باشد.
- ه) هر عدد گویا یک عدد صحیح است.
- و) مجموعه $\{x \mid x \in \mathbb{W}, 6 < x \leq 10\}$ دارای سه عضو است.
- ز) مجموعه $\{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ معرف مجموعه مضرب های طبیعی ۲ است.



۱۴ هر یک از جمله‌های زیر را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف) اگر هر عضو از مجموعه A ، عضو مجموعه B و همچنین هر عضو B ، عضوی از A باشند، آن‌گاه _____ است.

ب) اگر هر عضو مجموعه A ، یک عضو از مجموعه B باشد، آنگاه _____ است.

ج) هر مجموعه، _____ خودش است.

د) مجموعه _____، زیرمجموعه تمامی مجموعه‌ها است.

ه) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد، آن‌گاه _____ است.

و) هر عضو از مجموعه اعداد صحیح، حتماً عضوی از مجموعه اعداد _____ است.

ز) مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10\}$ دارای _____ عضو است.

۱۵ در هر قسمت، جاهای خالی را طوری پر کنید که تساوی برقرار باشد.

الف) $\{5, 7, \dots, 14\} = \{7, 11, \dots, 5\}$

ب) $\{20, \frac{2}{3}, (-2)^2, \dots, \sqrt{25}\} = \{\frac{12}{18}, 5, \dots, 4, \sqrt{49}\}$

ج) $\{\frac{-\sqrt{81}}{(-3)^2}, \dots, \frac{2}{8}, 0, 5, -\sqrt{49}\} = \{\sqrt{0/25}, \frac{2}{12}, -7, \dots, -1\}$

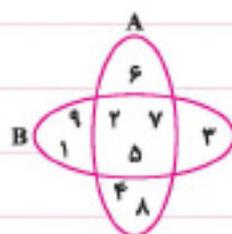
د) $\{\{\dots\}, 4, 5\} = \{\dots, \{\sqrt{16}\}, \frac{100}{(-5)^2}\}$

۱۶ الف) اگر $\{x, y+3\} = \{-7\}$ باشد، مقدار x و y را تعیین کنید.

ب) اگر $C = E$ و $C = \{-5, b-3\}$ و $E = \{a+4, 7\}$ باشد، آن‌گاه مقدار a و b را تعیین کنید.

ج) اگر $\{2x, \frac{2}{3}, \frac{12}{4}\} = \{3, 12, \frac{y}{6}\}$ باشد حاصل xy را به دست آورید.

د) اگر دو مجموعه $A = \{5, \{y+3\}\}$ و $B = \{x-2, \{7\}\}$ با هم مساوی باشند، مقدار x و y را حساب کنید.



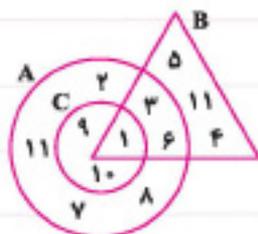
۱۷ با توجه به شکل مقابل، چه عضوهایی را باید از A و چه عضوهایی را باید از B کم کنیم تا مجموعه‌های

جدیدی که به دست می‌آیند با هم مساوی باشند؟



۶ با توجه به نمودار و نِ مقابل،

الف) هر یک از مجموعه‌های، A ، B و C را با عضوهایشان نمایش دهید.



ب) بزرگ‌ترین زیرمجموعه از A را بنویسید به طوری که زیرمجموعه B نیز باشد.

ج) دو زیرمجموعه از A بنویسید به طوری که زیرمجموعه B و C نیز باشند.

د) بزرگ‌ترین زیرمجموعه از A را بنویسید به طوری که زیرمجموعه B باشد اما زیرمجموعه C نباشد.

ه) بزرگ‌ترین زیرمجموعه از B را بنویسید به طوری که زیرمجموعه A نباشد.

و) با توجه به مجموعه‌های بالا درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$A \subseteq B \quad \text{○}$$

$$C \not\subseteq B \quad \text{○}$$

$$A \not\subseteq C \quad \text{○}$$

$$C \subseteq A \quad \text{○}$$

$$B \subseteq A \quad \text{○}$$

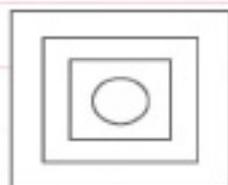
$$\{9, 1\} \subseteq C \quad \text{○}$$

$$\emptyset \subseteq B \quad \text{○}$$

$$\{9, 8, 4\} \subseteq A \quad \text{○}$$

۷ با توجه به مجموعه‌های، اعداد طبیعی (N)، اعداد حسابی (W)، اعداد صحیح (Z) و اعداد گویا (Q)،

الف) مجموعه‌های نمودار و نِ مقابل را نامگذاری کنید.



ب) با توجه به مجموعه‌های N ، W ، Z ، Q جاهای خالی را کامل کنید.

$$\text{○} \subseteq \text{○} \subseteq \text{○} \subseteq \text{○}$$

ج) سه زیرمجموعه از Z بنویسید که زیرمجموعه N هم باشند.

د) با توجه به مجموعه‌های بالا درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$N \subseteq Z \quad \text{○}$$

$$Q \subseteq W \quad \text{○}$$

$$\{-, 9, 99\} \subseteq W \quad \text{○}$$

$$Q \subseteq N \quad \text{○}$$

$$\{-1, 0\} \subseteq W \quad \text{○}$$

$$Z \not\subseteq W \quad \text{○}$$

$$\{-5, 0, 5\} \subseteq Q \quad \text{○}$$

$$\emptyset \subseteq Q \quad \text{○}$$



۸ در هر قسمت، تمامی زیرمجموعه‌های مجموعه مشخص شده را بنویسید.

الف) $A = \{۳\}$ (مضرب‌های طبیعی یک رقمی ۳)

ب) $B = \{۱, \{۱\}\}$

ج) $C = \{a, b, c\}$

د) $D = \{\text{اعداد اول یک رقمی}\}$

ه) $E = \{۳x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < ۲\}$

و) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid ۲x - ۱ = ۵\}$

۹ الف) تمامی زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه $D = \{a, e, u, i, o\}$ را بنویسید.

ب) یک مجموعه بنویسید که دقیقاً شامل ۸ زیرمجموعه باشد.

ج) سه مجموعه مانند A, B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $A \subseteq C$ و سپس نشان دهید که نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $B \subseteq C$ است.

د) سه مجموعه مانند A, B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq C$ ؟

۱۰ هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان نمایش دهید.

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq ۷\}$

ب) $B = \{۲x + ۱ \mid x \in \mathbb{W}, ۲ < x \leq ۵\}$



ج) $C = \{x \mid x = 0, 3, 7, 10\} =$

د) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -10 \leq x < -5\} =$

ه) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 25\} =$

و) $F = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq -3\} =$

ز) $G = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 7\} =$

ح) $H = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 1 = 4\} =$

ط) $I = \{2^x \mid x \in \mathbb{W}, x < 4\} =$

ی) $J = \{2x - 5 \mid 3x \in \mathbb{N}\} =$

۱ هر یک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نشان دهید.

الف) $A = \{\text{اعداد طبیعی یک رقمی}\} =$

ب) $B = \{-5, -6, -7, \dots, -11\} =$

ج) $C = \{-4, -3, -2, \dots\} =$

د) $D = \{2, 4, 6, 8, \dots\} =$

ه) $E = \{-6, -3, 0, 3, 6\} =$

و) $F = \{4, 7, 10, \dots, 40\} =$

ز) $G = \{2, 11, 20, 29, \dots\} =$

ح) $H = \{1, 3, 9, 27, 81\} =$

ط) $I = \{1, 4, 9, 16, 25\} =$

ی) $J = \{9, 99, 999, 9999\} =$

پرسش‌های چهارگزیندهای

۱ مجموعه $\{1, 2\}$ دارای چند زیرمجموعه است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲ اگر $A = \{0, 1\}$ باشد، کدام یک از رابطه‌های زیر صحیح است؟

$\{1\} \in A$ (۴)

$\{1\} \subseteq A$ (۳)

$1 \subseteq A$ (۲)

$\{0\} \in A$ (۱)

۳ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$ کدام است؟

۴ (۴)

۱۴ (۳)

۸ (۲)

۱۶ (۱)