

# فصل اول

## مجموعه، الگو و دنباله

### درس اول - مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

#### مجموعه‌های اعداد:

برخی از مجموعه‌های اعداد که در سال‌های گذشته آشنا شده‌اید به صورت زیر است:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی}$$

$$W = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ : مجموعه‌ی اعداد حسابی}$$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ : مجموعه‌ی اعداد صحیح}$$

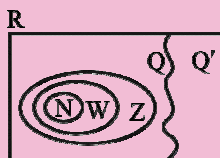
$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \text{ : مجموعه‌ی اعداد گویا}$$

مجموعه‌ی اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد  $Q'$  : مجموعه‌ی اعداد گنگ (اصم)

$$R = Q \cup Q' \text{ : مجموعه‌ی اعداد حقیقی}$$

برای مجموعه‌های فوق، رابطه‌ی  $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$  برقرار است.

نمودار ون مجموعه‌های فوق به صورت زیر است:



(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۷)

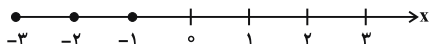
مثال ۱) مجموعه‌ی اعداد صحیح غیرحسابی را نمایش و روی محور نشان دهید.

پاسخ: مجموعه‌ی اعداد صحیح غیرحسابی برابر است با:  $Z - W$

$$Z - W = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1\}$$



نمایش این مجموعه روی محور به صورت زیر است:



نکته: اعداد صحیح غیر حسابی همان اعداد صحیح منفی است.



(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه ۱۳)

مثال ۲) هریک از اعداد داده شده را روی محور نشان دهید و سپس مشخص کنید کدام گنگ است؟

$$3\frac{2}{3}, -\sqrt{5}, \pi, -\frac{49}{10}, 4, -2/85$$

پاسخ: تمامی اعداد را به صورت تقریبی و اعشاری می‌نویسیم و سپس روی محور نمایش می‌دهیم:

$$3\frac{2}{3} = \frac{11}{3} \approx 3/66 \text{ گنگ}$$

$$-\sqrt{5} \approx -2/24 \text{ گنگ}$$

$$\pi \approx 3/14 \text{ گنگ}$$

$$\frac{-49}{10} = -4/9$$



مثال ۳) اگر تمام اعضای مجموعه‌ی اعداد حسابی را قرینه کنیم، کدام مجموعه بدست می‌آید؟

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه ۲-آزمون کانون-۹۵)

$$W - N \quad (4)$$

$$Z - W \quad (3)$$

$$Z - N \quad (2)$$

$$Q - N \quad (1)$$

پاسخ: اعداد حسابی برابر است با  $W = \{0, 1, 2, \dots\}$  اگر آن‌ها را قرینه کنیم، مجموعه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\text{قرینه‌ی اعداد حسابی} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): این مجموعه اعداد گویایی است که اعداد طبیعی از آن کم شده است و قطعاً با مجموعه‌ی مورد نظر برابر نیست.

گزینه (۲):

$$Z - N = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

گزینه (۳):

$$Z - W = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1\}$$

گزینه (۴):

$$W - N = \{0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, \dots\} = \{0\}$$

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مثال ۴) مجموعه‌ی اعداد گویا، صحیح، حسابی و طبیعی به ترتیب  $Q$ ،  $Z$ ،  $W$  و  $N$  هستند؛ کدام حکم نادرست است؟

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه ۲-آزاد انسانی ۸۴)

$$W - N = \emptyset \quad (4)$$

$$W \cap Z = W \quad (3)$$

$$Z \subseteq Q \quad (2)$$

$$N \cup W = W \quad (1)$$

پاسخ:

$$N \subseteq W \Rightarrow N \cup W = W$$

$$W \subseteq Z \Rightarrow W \cap Z = W$$

و می‌دانیم  $Z \subseteq Q$  است، اما داریم:

$$W - N = \{0\}$$

پس گزینه‌ی (۴) نادرست و جواب سؤال است.

## بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از  $R$  که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص می‌باشند را بازه یا فاصله می‌نامیم.

$$A = \{x \in R \mid a < x < b\}$$

بازه‌ها را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

(۱) بازه‌ی باز: بازه‌ای که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه در مجموعه‌ی مورد نظر نباشد:

$$A = \{x \in R \mid a < x < b\}, \quad A = (a, b), \quad \begin{array}{c} \circ \text{-----} \circ \\ a \qquad \qquad b \end{array} \rightarrow$$

مجموعه‌ی فوق به صورت بازه‌ی باز بین  $a$  و  $b$  خوانده می‌شود.

(۲) بازه‌ی بسته: بازه‌ای که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه در مجموعه‌ی مورد نظر باشد:


$$B = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}, \quad B = [a, b], \quad \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ a \qquad \qquad b \end{array} \rightarrow$$

مجموعه‌ی فوق به صورت بازه‌ی بسته بین  $a$  و  $b$  خوانده می‌شود.

(۳) بازه‌ی نیم‌باز: بازه‌ای که یک سمت آن باز و سمت دیگر آن بسته باشد.

$$C = \{x \in R \mid a < x \leq b\}, \quad C = (a, b], \quad \begin{array}{c} \circ \text{-----} \bullet \\ a \qquad \qquad b \end{array} \rightarrow$$


$$D = \{x \in R \mid a \leq x < b\}, \quad D = [a, b), \quad \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \circ \\ a \qquad \qquad b \end{array} \rightarrow$$

نکته: [ یا ] نماد بسته بودن و ( یا ) نماد باز بودن بازه است. 

علاوه بر بازه‌های فوق، با بازه‌های زیر نیز آشنا شوید:

$$E = \{x \in R \mid x > a\}, \quad E = (a, +\infty), \quad \begin{array}{c} \circ \text{-----} \\ a \end{array} \rightarrow$$

$$F = \{x \in R \mid x \leq a\}, \quad F = (-\infty, a], \quad \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \\ a \end{array} \rightarrow$$

 $+\infty$  و  $-\infty$  را به ترتیب بخوانید مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت.نکته:  $E$  یک بازه‌ی باز و  $F$  یک بازه‌ی نیم‌باز است. 



(کتاب درسی، مشابه مثال صفحه ۴-۴ آزمون کلون ۹۵)

مثال ۵) کدام یک از مجموعه‌های زیر نمایان‌گر یک بازه است؟

(۱)  $R - Z$       (۲)  $\{x \in R \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$

(۳)  $\{x \in Q \mid x > 1\}$       (۴)  $(-\infty, 1] \cap (-2, +\infty)$

پاسخ: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): نمایش هندسی مجموعه‌ی  $R - Z$  به صورت به صورت یک بازه نمایش دارد.

گزینه‌ی (۲):

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, -2$$

مجموعه به صورت  $\{-1, -2\}$  است که همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نمی‌توان آن را به صورت بازه نمایش داد.

گزینه‌ی (۳): مجموعه‌ی  $\{x \in Q \mid x > 1\}$  شامل تمام اعداد گویای بزرگ‌تر از یک است، دقت کنید که بی‌شمار عدد گنگ بزرگ‌تر از یک است که در این مجموعه قرار ندارد. پس نمایش هندسی آن شامل بی‌شمار نقطه‌ی توفالی است، پس نمی‌توان به صورت بازه نمایش داد.

گزینه‌ی (۴):

$$(-\infty, 1] \cap (-2, +\infty) = (-2, 1]$$

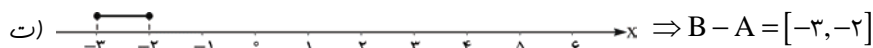
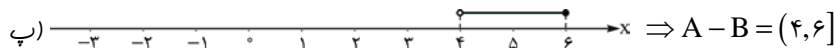
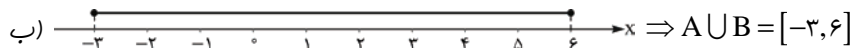
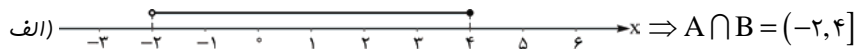
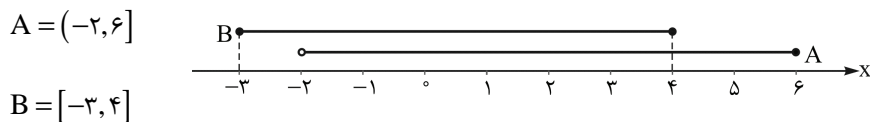
گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مثال ۶) نمایش هندسی دو بازه‌ی  $A = (-2, 6]$  و  $B = [-3, 4]$  را روی محور رسم کنید و سپس هریک از موارد زیر را نیز روی محور رسم کنید و حاصل آن را بنویسید.

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۳، صفحه ۵)

الف)  $A \cap B$       ب)  $A \cup B$       ج)  $A - B$       د)  $B - A$

پاسخ:



مثال ۷) اگر  $A = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 3\}$  و  $B = \{x \in R \mid x > 0\}$  و  $C = \{x \in R \mid x \leq 4\}$  باشد، مجموعه‌ی  $(A \cup B) \cap C$  کدام است؟

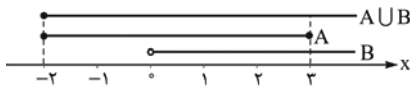
(کتاب درسی، مشابه تمرین ۴، صفحه ۷-۷ آزمون کلون ۹۵)

(۱)  $[-2, 4]$       (۲)  $(0, 3]$       (۳)  $(-2, 3]$       (۴)  $(-2, 4]$

پاسخ: هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  و  $C$  را به صورت بازه نشان می‌دهیم و با نمایش آن‌ها روی محور، مطلوب مسئله را به دست می‌آوریم:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\} \Rightarrow A = [-2, 3]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \Rightarrow B = (0, +\infty)$$



$$\Rightarrow A \cup B = [-2, +\infty)$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\} \Rightarrow C = (-\infty, 4]$$



$$\Rightarrow (A \cup B) \cap C = [-2, 4]$$

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۱، صفحه‌ی ۵ - آزمون کانون ۹۵)

مثال ۸) چه تعداد از موارد زیر درست است؟

پ)  $-6 / 0.22 \times 10^{22} \in (-30, +\infty)$

الف)  $(-2, 3) \subseteq [-3, 4]$       ب)  $\{-\pi, \sqrt{2}\} \subseteq (-4, 2)$

۳(۴)

۲(۳)

۱(۲)

۱(صفر)

پاسخ: موارد را تک تک بررسی می‌کنیم:

الف)  $(-2, 3) \subseteq [-3, 4]$

می‌دانیم وقتی  $A \subseteq B$  است، هر عضو مجموعه‌ی  $A$  عضوی از مجموعه‌ی  $B$  است. که این رابطه در مورد بالا صدق می‌کند. پس این گزاره صحیح است.

ب)  $\{-\pi, \sqrt{2}\} \subseteq (-4, 2)$

چون  $-\pi \in (-4, 2)$  و  $\sqrt{2} \in (-4, 2)$  است، بنابراین گزاره‌ی فوق صحیح است، یعنی  $\{-\pi, \sqrt{2}\} \subseteq (-4, 2)$  است.

پ)  $-6 / 0.22 \times 10^{22} \in (-30, +\infty)$

چون  $-6 / 0.22 \times 10^{22} < -30$  است، پس این عدد عضو مجموعه‌ی  $(-30, +\infty)$  نیست. بنابراین این گزاره غلط است. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

نکته: اگر انتهای بازه (یا) باشد، نمایش آن روی محور توخالی و اگر [یا] باشد نمایش آن روی محور توپر می‌شود.

مثال ۹) مجموعه‌ی  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  را روی محور نشان دهید و سپس به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید. (کتاب درسی، مشابه تمرین ۵، صفحه‌ی ۷)



پاسخ: نقاط  $+1$  و  $-1$  بایر توخالی باشند:

$$\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$



▼ مثال ۱۰) سه بازه  $A = [2, +\infty)$ ،  $B = (-2, 2)$  و  $C = [-2, 3]$  را در نظر بگیرید. مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

(کتاب درسی، مشابه مثال، صفحه ۱۴)

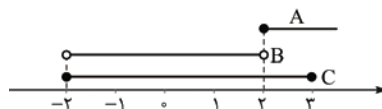
الف)  $A \cup B \cup C$       ب)  $(C - A) \cup A$       پ)  $(C - B) \cup A$

☑ پاسخ: با توجه به نمایش هندسی مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، مجموعه‌های مورد نظر را به دست می‌آوریم.

الف)  $A \cup B \cup C = [-2, +\infty)$

ب)  $C - A = [-2, 2) \Rightarrow (C - A) \cup A = [-2, +\infty)$

پ)  $C - B = [2, 3] \cup \{-2\} \Rightarrow (C - B) \cup A = \{-2\} \cup [2, +\infty)$



مجموعه‌ی متناهی: مجموعه‌هایی مانند  $A$  که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی می‌باشد را مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.

▼ مثال ۱۱) در هر یک از مجموعه‌های زیر مشخص کنید که کدام متناهی و کدام نامتناهی است.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحه ۶)

الف) مجموعه‌ی اعداد اول.

ب) بازه  $(-1, 0)$

پ) مجموعه مولکول‌های روی زمین

ت) مجموعه‌ی اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰

ث) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱

ج) مجموعه تمام مستطیل‌هایی به مساحت ۲

☑ پاسخ: الف) بی‌شمار عدد اول داریم پس مجموعه‌ی اعداد اول نامتناهی است  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

ب) در بازه  $(-1, 0)$  بی‌شمار عدد وجود دارد، پس این مجموعه نامتناهی است.

پ) هر چند مولکول‌های روی زمین بسیار زیاد هستند اما می‌توان تعداد آن‌ها را با یک عدد حسابی نشان داد، پس این مجموعه متناهی است.

ت) این مجموعه نیز نامتناهی است.

$\{11, 12, 13, \dots\}$

ث) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از یک تهی است که صفر عضو دارد. چون تعداد اعضای آن حسابی است، پس مجموعه متناهی است.

ج) اگر  $x$  طول و  $y$  عرض مستطیل باشد داریم:  $xy = 2$ . چون  $x$  و  $y$  بی‌شمار مقدار می‌توانند داشته باشند، پس این مجموعه نامتناهی است.

است.

نکته: مجموعه‌ی اعداد گنگ و یا مجموعه‌ی اعداد گویا در بازه  $(a, b)$ ، نامتناهی است.



(کتاب درسی، مشابه فعالیت صفحه ۷ - آزمون کانون ۹۵)

▼ مثال ۱۲) کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) مجموعه‌ی اعداد گویای موجود در بازه  $[-1, 0)$ ، مجموعه‌ای متناهی است.

۲) مجموعه‌ی اعداد گنگ موجود در بازه  $[-1, 0)$ ، مجموعه‌ای متناهی است.

۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح موجود در بازه  $[-10^6, 10^6]$ ، مجموعه‌ای نامتناهی است.

۴) مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۳، مجموعه‌ای نامتناهی است.

پاسخ: دقت کنید که مجموعه‌ی اعداد گنگ و یا گویا در بازه‌ی  $(a, b)$ ، نامتناهی است. اما مجموعه‌ی اعداد صحیح در بازه‌ی  $(a, b)$ ، متناهی است. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۳ برابر  $\{۳, ۶, ۹, \dots\}$  است که مجموعه‌ای نامتناهی است. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مثال ۱۳) اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی، حسابی و صحیح به ترتیب  $N$ ،  $W$  و  $Z$  باشد، کدام مجموعه با پایان است؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه‌ی ۷ - آزاد انسانی ۸۳)

$$W - N \quad (۴) \quad Z \cap W \quad (۳) \quad W \cap N \quad (۲) \quad Z - W \quad (۱)$$

پاسخ:

$$W - N = \{۰, ۱, ۲, \dots\} - \{۱, ۲, ۳, \dots\} = \{۰\}$$

با پایان

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

نکته‌ی ۱) اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  نامتناهی باشد، آن گاه  $B$  نیز نامتناهی است.  
نکته‌ی ۲) اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  متناهی باشد، آن گاه  $A$  نیز متناهی است.

### درس دوم - متمم یک مجموعه

**مجموعه‌ی مرجع:** مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با  $U$  نشان می‌دهیم.  
**متمم یک مجموعه:** هر گاه  $U$  مجموعه‌ی مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آن گاه مجموعه‌ی  $U - A$  را متمم  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوایی از  $U$  می‌باشد که در  $A$  نیستند.

مثال ۱۴) مجموعه‌ی اعداد حقیقی را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیرید. متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۳، صفحه‌ی ۹)

$$A = [-۲, ۵) \quad B = (-\infty, ۲] \cup (۵, ۱۳] \quad C = \mathbb{R} - [-۲, ۶)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} A = [-۲, ۵) &\Rightarrow A' = (-\infty, -۲) \cup [۵, +\infty) \\ B = (-\infty, ۲] \cup (۵, ۱۳] &\Rightarrow B' = (۲, ۵] \cup (۱۳, +\infty) \\ C = \mathbb{R} - [-۲, ۶) &= (-\infty, -۲) \cup [۶, +\infty) \Rightarrow C' = [-۲, ۶) \end{aligned}$$

مثال ۱۵) با توجه به مجموعه‌ی مرجع داده شده در هر مورد، متمم مجموعه را پیدا کنید.

(مشابه کار در کلاس ۵، صفحه‌ی ۹، کتاب درسی)

الف)  $U = Z$  ،  $A = \{x \in W \mid x < ۳\}$   
ب)  $U = W$  ،  $B = N$   
پ)  $U = [۰, +\infty)$  ،  $C = Q$

پاسخ:



الف)  $U = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $A = \{0, 1, 2\} \Rightarrow A' = \{\dots, -2, -1, 3, 4, \dots\}$

ب)  $U = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow B' = \{0\}$

پ) مجموعه‌ی مربع، اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و مجموعه‌ی  $C$  اعداد گویا است. بنابراین  $C'$  برابر مجموعه اعداد گنگ بزرگ‌تر از صفر می‌شود.  
 $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$

نکته: برخی از روابط حاکم به متمم‌ها در زیر آمده است:

- |                            |                                                 |
|----------------------------|-------------------------------------------------|
| ۱) $\emptyset' = U$        | ۶) $(A \cup B)' = A' \cap B'$                   |
| ۲) $U' = \emptyset$        | ۷) $(A \cap B)' = A' \cup B'$                   |
| ۳) $(A')' = A$             | ۸) $A - B = A - (A \cap B)$                     |
| ۴) $A \cup A' = U$         | ۹) $A - B = A \cap B'$                          |
| ۵) $A \cap A' = \emptyset$ | ۱۰) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$ |

مثال ۱۶) اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد صحیح باشد،  $A' = \{1, 2, 3\}$  و  $B' = \{2, 3, 4, 5\}$  آنگاه  $(A \cup B)'$  کدام مجموعه است؟  
 (کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه‌ی ۹)

- ۱)  $\{2, 3\}$       ۲)  $\{2, 4, 5\}$       ۳)  $\{3, 4, 5\}$       ۴)  $\{4, 5\}$

پاسخ: با توجه به فواصل بالا داریم:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$$

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه‌ی ۹ - آزاد انسانی-۷۷)

مثال ۱۷) کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

- |                                               |                                                                 |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| ۱) $(B \cap B') \cup (A \cup A') = U$         | ۲) $(A \cap A') \cap (B \cup B') = \emptyset$                   |
| ۳) $(B \cap B') \cup (A \cup A') = \emptyset$ | ۴) $[(A \cap B) \cap A'] \cup [(B \cap C) \cap B'] = \emptyset$ |

پاسخ:

گزینه‌ی ۳ نادرست است.  $(B \cap B') \cup (A \cup A') = \emptyset \cup U = U$ ؛ گزینه‌های ۱) و ۲)

گزینه‌ی ۲)  $(A \cap A') \cap (B \cup B') = \emptyset \cap U = \emptyset$

گزینه‌ی ۴)  $A \cap A' = \emptyset \xrightarrow{(A \cap B) \subseteq A} (A \cap B) \cap A' = \emptyset$

$B \cap B' = \emptyset \xrightarrow{(B \cap C) \subseteq B} (B \cap C) \cap B' = \emptyset \Rightarrow [(A \cap B) \cap A'] \cup [(B \cap C) \cap B'] = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مثال ۱۸) اگر  $A = [0, 10]$  و  $B = [-15, 15]$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع  $U$  باشند و  $A' = [-20, 0) \cup [10, 20]$  آنگاه  $B'$  شامل چند عدد صحیح است؟  
 (کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه‌ی ۱۶ - آزمون کانون-۹۶)

- ۱) ۱۱      ۲) ۸      ۳) ۹      ۴) ۱۰

پاسخ: می‌دانیم  $A \cup A' = U$  است:

$$A \cup A' = [0, 10] \cup [-20, 0) \cup [10, 20] = [-20, 20]$$

$$B = [-15, 15] \Rightarrow B' = [-20, -15) \cup (15, 20]$$



پس  $B'$  شامل اعداد صحیح  $\{-20, -19, -18, -17, -16, 16, 17, 18, 19, 20\}$  است که تعداد آن‌ها ۱۰ تا است.  
گزینه‌ی ۴ صحیح است.

دو مجموعه‌ی جدا از هم: به هر دو مجموعه‌ی مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

اشتراک دو مجموعه‌ی جدا از هم برابر تهی است.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ جدا از هم}$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی متناهی باشد، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

که  $n(A)$ ، تعداد اعضای مجموعه‌ی  $A$  است.

▼ مثال ۱۹ اگر  $A$  و  $B$  به ترتیب مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی ۲۴ و ۱۸ باشد،  $n(A \cup B)$  را به دست آورید.

(کتاب درسی، مشابه فعالیت ۲، صفحه‌ی ۱۰)

✓ پاسخ: اعضای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را می‌نویسیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \Rightarrow n(A) = 8$$

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 6 - 4 = 10$$



نکته‌ی ۱:

$$۱) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$۲) B \subseteq A \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(B)$$

$$۳) A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A - B) = n(A)$$

$$۴) n(A') = n(U) - n(A)$$

نکته‌ی ۲: در حالت کلی:  $n(A - B) \neq n(A) - n(B)$ .

▼ مثال ۲۰ اگر  $U$  مجموعه‌ی مرجع باشد و  $n(U) = 65$ ،  $n(A) = 40$ ،  $n(B) = 30$  و  $n(A \cap B) = 20$  باشد، آنگاه مقادیر زیر را حساب کنید.

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۱۳)

الف)  $n(A' \cap B')$

ب)  $n(A' \cap B)$

پ)  $n(A' \cup B)$

✓ پاسخ:

الف)  $A' \cap B' = (A \cup B)' = U - (A \cup B)$

$$n(A' \cap B') = n(U - (A \cup B)) = n(U) - n(A \cup B) = n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] = 65 - [40 + 30 - 20] = 15$$

ب)  $A' \cap B = B \cap A' = B - A$

$$n(A' \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 30 - 20 = 10$$

پ)  $n(A' \cup B) = n(A') + n(B) - n(A' \cap B) = (n(U) - n(A)) + n(B) - n(A' \cap B) = (65 - 40) + 30 - 10 = 45$



▼ مثال ۲۱) در یک کلاس ۴۰ نفره، ۲۰ نفر عضو گروه سرود، ۱۵ نفر عضو گروه تئاتر هستند، اگر ۱۰ نفر در هیچ گروهی نباشند، آنگاه:

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۵، صفحه ۱۳)

الف) چند نفر در هر دو گروه هستند.

ب) چند نفر فقط در گروه سرود هستند.

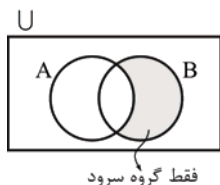
☑ پاسخ: A، اگر گروه تئاتر و B، اگر گروه سرود و U، اگر کل کلاس می‌نامیم.

الف) فواسته‌ی مسئله  $A \cap B$  است.

$$n(A \cup B) = n(U) - n(\underbrace{(A \cup B)'}_{\text{هیچ گروه}}) = 40 - 10 = 30$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(\underbrace{(A \cap B)}_{\text{هر دو گروه}}) \Rightarrow 30 = 15 + 20 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 5$$

ب) فواسته‌ی مسئله  $B - A$  است.



$$n(B - A) = n(B) - n(B \cap A) = 20 - 5 = 15$$

▼ مثال ۲۲) ۳۰ درصد از افراد یک شهر چشم قهوه‌ای و ۵۰ درصد آن‌ها مو مشکی هستند. اگر ۲۰ درصد افراد مو مشکی و چشم قهوه‌ای باشند، چند درصد نه مو مشکی هستند و نه چشم قهوه‌ای؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۶، صفحه ۱۳)

☑ پاسخ: ابتدا درصد افرادی را حساب می‌کنیم که یا مو مشکی (A) یا چشم قهوه‌ای (B) هستند:

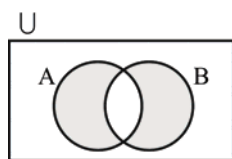
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 50 - 20 = 60 \text{ درصد}$$

حال مطلوب مسئله، یعنی افرادی که نه مو مشکی هستند و نه چشم قهوه‌ای، برابر است با:

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 60 = 40 \text{ درصد}$$

▼ مثال ۲۳) مجموعه‌ای که اعضای آن فقط در A یا فقط در B باشند را با نمودار ون نشان داده و سپس تعداد اعضای آن را به دست آورید.

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۱، صفحه ۱۱- تیریز- توتلی- ۹۶)



☑ پاسخ: مجموعه‌ی مورد نظر به صورت هاشور فورده است.

این مجموعه برابر  $(A - B) \cup (B - A)$  است:

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} n((A - B) \cup (B - A)) &= n(A - B) + n(B - A) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$n((A - B) \cap (B - A)) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه ۹- آزاد پزشکی- ۷۸)

▼ مثال ۲۴) اگر  $A = \{1, \{1\}\}$  و  $B = \{\{1, \{1\}\}\}$  حاصل  $B - A$  کدام است؟

{1}

{1}

{1}

{1}

پاسخ: مجموعه  $B$  یک عضو دارد که برابر  $\{1, \{1\}\}$  است چون این عضو در  $A$  نیست پس  $A$  و  $B$  دو مجموعه میزنا هستند. پس:

$$B - A = B - (A \cap B) = B - \emptyset = B$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲۵: مجموعه اعداد طبیعی و کوچک‌تر از ۲۲ را مجموعه مرجع در نظر بگیرید. اگر مجموعه  $A$  شامل اعداد اول، مجموعه  $B$  شامل اعداد زوج و مجموعه  $C$  شامل اعدادی باشد که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  قرار داشته باشد، متمم مجموعه  $C$  چند عضو دارد؟

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه ۹ - آزمون کانون ۹۵)

۱۶(۴)

۴(۳)

۹(۲)

۱۷(۱)

پاسخ: هر یک از مجموعه‌ها را با نوشتن اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$U = \{1, 2, \dots, 21\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

مجموعه  $C$  با توجه به صورت سوال، برابر است با اجتماع  $A$  و  $B$ :

$$C = A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

در مجموعه فوق، فقط اعداد ۱ و ۹ و ۱۵ و ۲۱ وجود ندارند. بنابراین متمم  $C$  برابر است با:

$$C' = \{1, 9, 15, 21\} \Rightarrow n(C') = 4$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲۶: به هر کدام از دو مجموعه غیر تهی  $A$  و  $B$ ، ۹ عضو جدید اضافه می‌کنیم، به نحوی که به مجموعه  $A - (A - B)$ ، ۴ عضو جدید اضافه می‌شود. در این حالت به مجموعه  $(A - B) \cup (B - A)$  چند عضو جدید افزوده شده است؟

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه ۱۷ - آزمون کانون ۹۵)

۱۴(۴)

۱۰(۳)

۵(۲)

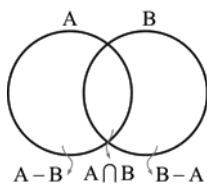
۴(۱)

پاسخ: ابتدا حاصل  $A - (A - B)$  را می‌یابیم:

$$(A - B) \subseteq A \Rightarrow n(A - (A - B)) = n(A) - n(A - B) = n(A) - (n(A) - n(A \cap B)) = n(A \cap B)$$

بنابراین وقتی به  $A - (A - B)$ ، ۴ عضو اضافه می‌شود یعنی به  $A \cap B$  چهار عضو اضافه می‌شود و در نتیجه به هر یک از  $A - B$  و  $B - A$ ، ۵ - ۴ = ۹ عضو اضافه می‌شود.

به شکل زیر دقت کنید:



مطلوب مساله، افزایش تعداد اعضای  $(A - B) \cup (B - A)$  است. داریم:

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A - B) + n(B - A) = 5 + 5 = 10$$

بنابراین به مجموعه  $(A - B) \cup (B - A)$  ده عضو جدید اضافه می‌شود.  
گزینه ۳ صحیح است.



نکته: مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, n\}$  را در نظر بگیرید، تعداد مضرب‌های عدد  $k$  در این مجموعه برابر است با  $\frac{n}{k}$ . اگر حاصل

عدد صحیح نشود، برابر اولین عدد صحیح کوچکتر از  $\frac{n}{k}$  است.

▼ مثال (۲۷) اگر  $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$  مجموعه‌ی مرجع،  $A$  مجموعه‌ی اعداد مضرب ۵ و  $B$  مجموعه‌ی اعداد مضرب ۳ باشد، کدام گزینه نادرست است؟  
(کتاب درسی، مشابه فعالیت ۲، صفحه‌ی ۱۰-۱۰-آزمون کانون-۹۵)

$$n(A \cap B) = 6 \quad (۱) \quad n(A \cap B') = 14 \quad (۲) \quad n(A \cup B) = 47 \quad (۳) \quad n(B') = 77 \quad (۴)$$

پاسخ: با توجه به نکته‌ی فوق داریم:

$$A = \{5, 10, \dots, 95, 100\} \Rightarrow n(A) = \frac{100}{5} = 20$$

$$B = \{3, 6, \dots, 96, 99\} \Rightarrow n(B) = \frac{100}{3} = 33 / \dots \Rightarrow n(B) = 33$$

گزینه (۱):  $A \cap B$  برابر است با مضرب‌های عدد ۱۵:

$$A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 6 = 14 \quad \text{گزینه (۲):}$$

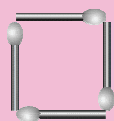
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 33 - 6 = 47 \quad \text{گزینه (۳):}$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = 100 - 33 = 67 \quad \text{گزینه (۴):}$$

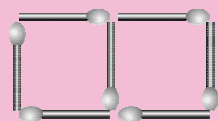
گزینه‌ی ۴ صحیح است.

### درس سوم - الگو و دنباله

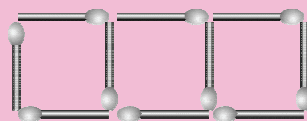
یکی از مهم‌ترین رسالت‌های ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و پی بردن به الگوهای حاکم بر آن‌ها است. یافتن یک مدل یا الگوی ریاضی برای طرح‌ها و آزمایش‌های متوالی نیاز به سازماندهی و تنظیم اطلاعات دارد. به شکل‌های زیر و تعداد چوب‌کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آن‌ها دقت کنید.



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

جدول زیر را می‌توان تنظیم کرد:

شماره شکل : $n$	۱	۲	۳
تعداد چوب‌کبریت‌ها : $a_n$	۴	۷	۱۰
رابطه‌ی بین $n$ و $a_n$	$a_1 = 4$	$a_2 = 7$	$a_3 = 10$
		+۳	+۳

همان‌طور که می‌بینید در هر مرحله سه عدد چوب‌کبریت اضافه می‌شود. پس در مرحله‌ی  $n$  ام،  $(n-1) \times 3$  چوب‌کبریت به تعداد

چوب کبریت‌های موجود در مرحله اول اضافه می‌شود.

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 4 + 3$$

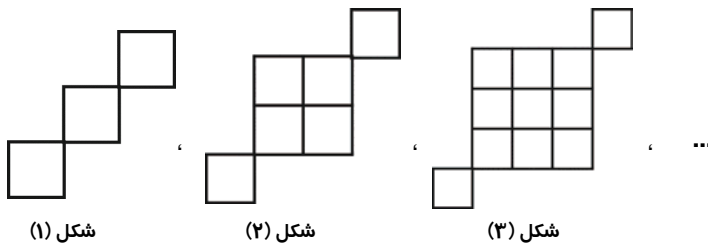
$$a_3 = 4 + 3 \times 2$$

⋮

$$a_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$$

$a_n$  را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامیم، زیرا این رابطه، ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند. در واقع در اختیار داشتن جمله‌ی عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو می‌باشد.

▼ مثال ۲۸ در شکل زیر تعداد مربع‌ها، تابع الگویی است. جمله‌ی عمومی الگو را بنویسید. (کتاب درسی، مشابه فعالیت، صفحه ۱۵ - تهران - آزمون - ۸۹)



☑ پاسخ: اگر شماره‌ی هر مرحله را  $n$  و تعداد مربع‌ها را  $a_n$  بنامیم، داریم:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 1+2=1^2+2$$

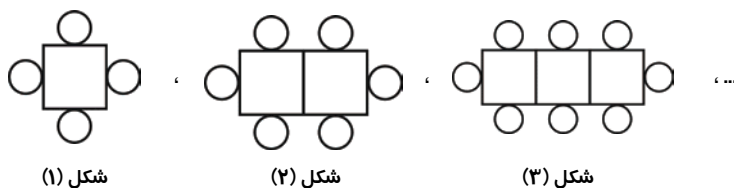
$$n=2 \Rightarrow a_2 = 4+2=2^2+2$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 9+2=3^2+2$$

با توجه به تعداد مربع‌ها، در شکل  $n$ ،  $n^2 + 2$  مربع وجود دارد. یعنی جمله‌ی این الگو به صورت  $a_n = n^2 + 2$  است.

▼ مثال ۲۹ در شکل زیر مدلی از میز و صندلی‌ها رسم شده است. فرمول مناسب برای تعداد صندلی‌ها در هر مرحله کدام است؟

(کتاب درسی، مشابه فعالیت، صفحه ۱۵ - تهران - استعداد درخشان - ۸۸)



☑ پاسخ: اگر شماره‌ی هر مرحله را  $n$  و تعداد صندلی‌ها را  $a_n$  بنامیم، داریم:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 4 = 2(1) + 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 6 = 2(2) + 2$$

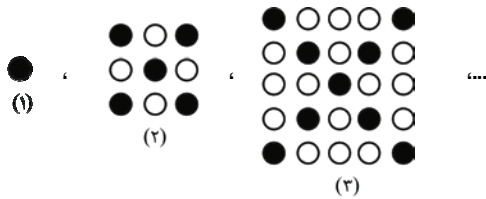
$$n=3 \Rightarrow a_3 = 8 = 2(3) + 2$$

با توجه به الگوی به‌دست آمده، در شکل  $n$ ،  $2n + 2$  صندلی وجود دارد. یعنی فرمول تعداد صندلی‌ها برابر  $a_n = 2n + 2$  است.



(کتاب درسی، مشابه فعالیت، صفحه ۱۷- آزمون کانون-۹۵)

مثال ۳۰ در کدام مرحله از الگوی زیر، تعداد گوی‌های سفید برابر ۱۹۶ خواهد شد؟



- ۷(۱)  
۸(۲)  
۹(۳)  
۱۱(۴)

پاسخ: اگر شماره‌ی هر مرحله را  $n$  و تکرار گوی‌های سفید را  $a_n$  بنامیم، داریم:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 0 = 4 \times (1-1)^2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 4 = 4 \times (2-1)^2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 16 = 4 \times (3-1)^2$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 36 = 4 \times (4-1)^2$$

⋮

$$n = n \Rightarrow a_n = 4(n-1)^2$$

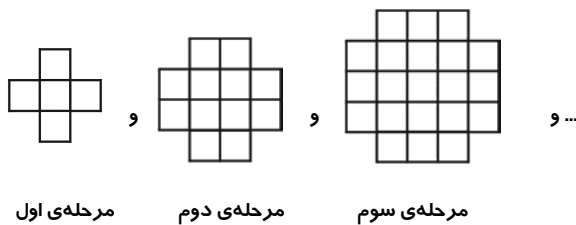
با توجه به الگوی فوق، در شکل  $n$ ام،  $4(n-1)^2$  گوی سفید وجود دارد. یعنی جمله‌ی این الگو به صورت  $a_n = 4(n-1)^2$  است، داریم:

$$4(n-1)^2 = 196 \Rightarrow (n-1)^2 = 49 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مثال ۳۱ در الگوی زیر، جمله‌ی عمومی مربوط به تعداد مربع‌های کوچک کدام است؟ ( $n$  شماره‌ی مرحله است.)

(کتاب درسی، مشابه فعالیت، صفحه ۱۷)



مرحله‌ی اول

مرحله‌ی دوم

مرحله‌ی سوم

$$a_n = 2n^2 - n + 4 \quad (۱)$$

$$a_n = 7n - 2 \quad (۲)$$

$$a_n = n^2 + 4n \quad (۳)$$

$$a_n = 9n - 6 \quad (۴)$$

پاسخ: تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله را با  $a_n$  نمایش می‌دهیم که  $n$  شماره‌ی هر مرحله است. شکل‌ها را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$n = 1 \Rightarrow \text{مرحله‌ی اول} \Rightarrow a_1 = 1^2 + 4(1) = 5$$

$$n = 2 \Rightarrow \text{مرحله‌ی دوم} \Rightarrow a_2 = 2^2 + 4(2) = 12$$

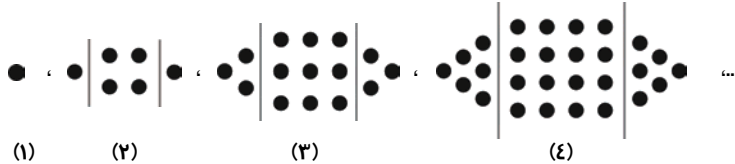
$$n = 3 \Rightarrow \text{مرحله‌ی سوم} \Rightarrow a_3 = 3^2 + 4(3) = 21$$

بنابراین در مرحله ی  $n$  تعداد مربع‌ها برابر است با  $a_n = n^2 + 4n$ .

دقت کنید که در جمله ی فوق،  $n^2$  تعداد مربع‌های وسطی و  $4n$  تعداد مربع‌های کناری در هر مرحله است. گزینه ی ۳ صحیح است.

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۶، صفحه ی ۶۰)

▼ مثال ۳۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.

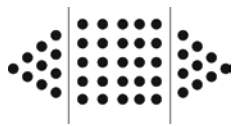


الف) شکل بعد را رسم کنید.

ب) جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

☑ پاسخ: همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در هر مرحله تعداد نقطه‌های بین دو قط مربع، یک عدد کامل است. پس در شکل (۵) باید ۲۵ نقطه بین

دو قط باشد. داریم:



ب)

$$n=1 \rightarrow a_1=1$$

$$n=2 \rightarrow a_2=4+2=2^2+2(1)$$

$$n=3 \rightarrow a_3=9+6=3^2+2(1+2)$$

$$n=4 \rightarrow a_4=16+12=4^2+2(1+2+3)$$

$$n=5 \rightarrow a_5=25+20=5^2+2(1+2+3+4)$$

⋮

$$n=n \rightarrow a_n = n^2 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = 2n^2 - n$$

نکته:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

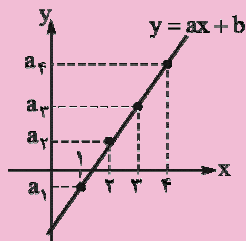
الگوی خطی: الگوهایی که جمله ی عمومی آن‌ها به صورت  $t_n = an + b$  باشد را الگوهای خطی می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

نکته: در الگوی خطی اختلاف دو جمله ی متوالی برابر مقدار ثابت است. این اختلاف برابر ضریب  $n$  در جمله ی عمومی است. به‌عنوان مثال در جمله ی عمومی  $a_n = 2n + 3$ ، اختلاف دو جمله ی متوالی برابر ۲ است.



نکته ۱: اگر نقاط به مختصات  $(n, t_n)$  را در صفحه‌ی مختصات مشخص کنیم، همگی بر روی خط  $y = ax + b$  قرار

دارند.



نکته ۲: به الگویی که خطی نباشد غیر خطی می‌گویند.

▼ مثال ۳۳ در یک الگوی خطی جملات ششم و هشتم به ترتیب از راست به چپ برابر ۸- و ۴ است.

(کتاب درسی، مشابه مثال، صفحه‌ی ۱۶- کلیاتگان- فرزانگان- ۹۲)

الف) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

ب) چندمین جمله‌ی دنباله برابر ۱۰ است؟

☑ پاسخ: الف) فرض کنید جمله‌ی عمومی الگوی فطی به صورت  $t_n = an + b$  باشد، داریم:

$$\begin{cases} t_6 = -8 \\ t_8 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + b = -8 \\ 8a + b = 4 \end{cases}$$

$$\overline{2a = 12} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = -44$$

$$\Rightarrow t_n = 6n - 44$$

$$t_n = 10 \Rightarrow 6n - 44 = 10 \Rightarrow 6n = 54 \Rightarrow n = 9 \quad (\text{نهمین جمله برابر } 10 \text{ است.}) \quad \text{ب)}$$

▼ مثال ۳۴ در دنباله‌ی خطی  $t_n$ ، اگر تفاضل دو جمله‌ی متوالی برابر با ۴ و مجموع جملات دوم و سوم برابر با ۱۰ باشد، جمله‌ی ششم کدام است؟

(کتاب درسی، مشابه مثال، صفحه‌ی ۱۶- گرمسار- لژیس- ۹۳)

☑ پاسخ: می‌دانیم افتلاف دو جمله‌ی متوالی در یک دنباله‌ی فطی  $t_n = an + b$  برابر ضریب  $n$  یعنی  $a$  است.

$$a = 4 \Rightarrow t_n = 4n + b$$

$$t_2 + t_3 = 10 \Rightarrow (4(2) + b) + (4(3) + b) = 10 \Rightarrow 20 + 2b = 10 \Rightarrow 2b = -10 \Rightarrow b = -5$$

$$t_n = 4n - 5 \Rightarrow t_6 = 4(6) - 5 = 19$$

دنباله: هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. این اعداد جملات دنباله نامیده می‌شود. مانند دنباله‌های زیر:

دنباله:  $3, \sqrt{3}, -2, 0, 2, \sqrt{5}, \dots$  الف)

ب)  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

جملات دنباله ممکن است الگو داشته باشند مثل (ب) یا فاقد الگو باشند مثل (الف).



▼ مثال ۳۵) سه جمله‌ی بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید و همچنین جمله‌ی عمومی هر دنباله را حدس بزنید.

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۳، صفحه ۱۹)

الف) ۱, ۳, ۵, ۷, ...

ب)  $\sqrt{۲}, \sqrt{۴}, \sqrt{۶}, \sqrt{۸}, \dots$

پ)  $۰/۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱, \dots$

ت)  $\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۹}, \frac{۳}{۲۷}, \frac{۴}{۸۱}, \dots$

ث) -۱, ۴, -۹, ۱۶, ...

☑ پاسخ:

الف)  $۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۲ \rightarrow a_n = 2n - 1$

ب)  $\sqrt{۲}, \sqrt{۴}, \sqrt{۶}, \sqrt{۸}, \sqrt{۱۰}, \sqrt{۱۲}, \sqrt{۱۴} \rightarrow a_n = \sqrt{2n}$

پ)  $۱۰^{-۱}, ۱۰^{-۳}, ۱۰^{-۵}, ۱۰^{-۷}, ۱۰^{-۹}, ۱۰^{-۱۱}, ۱۰^{-۱۳} \rightarrow a_n = 10^{-(2n-1)}$

ت)  $\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۹}, \frac{۳}{۲۷}, \frac{۴}{۸۱}, \frac{۵}{۲۴۳}, \frac{۶}{۷۲۹}, \frac{۷}{۲۱۸۷} \rightarrow a_n = \frac{n}{3^n}$

ث)  $-۱, ۴, -۹, ۱۶, -۲۵, ۳۶, -۴۹ \rightarrow a_n = (-1)^n n^2$

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۲، صفحه ۱۹ - تهران - کاوه - ۸۹)

▼ مثال ۳۶) اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت  $a_n = \frac{1+3n}{n+1}$  باشد:

الف) جمله‌ی نهم آن را به دست آورید.

ب) چندمین جمله‌ی آن برابر  $\frac{7}{3}$  می‌باشد.

☑ پاسخ: الف) برای به دست آوردن جمله‌ی نهم کفایت  $n = 9$  قرار دهیم:

$$a_9 = \frac{1+3(9)}{9+1} = \frac{28}{10} = 2.8$$

ب) جمله‌ی عمومی را برابر  $\frac{7}{3}$  قرار می‌دهیم:

$$\frac{1+3n}{n+1} = \frac{7}{3} \Rightarrow 3+9n = 7n+7 \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$$

▼ مثال ۳۷) جمله‌ی چندم دنباله‌ی  $a_n = n^2 - 12n + 11$  با جمله‌ی نهم دنباله برابر است؟

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۲، صفحه ۱۹ - آزمون کانون - ۸۹)

ع) سوم

۳) چهارم

۲) پنجم

۱) هفتم

☑ پاسخ: ابتدا مقدار جمله‌ی نهم را به دست می‌آوریم، کفایت  $n = 9$  قرار دهیم:

$$n = 9: a_9 = 9^2 - 12(9) + 11 = 81 - 108 + 11 = -16$$

حال  $a_n$  را برابر  $-16$  قرار می‌دهیم:

$$a_n = -16 \Rightarrow n^2 - 12n + 11 = -16 \Rightarrow n^2 - 12n + 27 = 0 \Rightarrow (n-9)(n-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=9 \\ n=3 \end{cases}$$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.