

بخش اول: ریاضیات پایه

تست درسنامه

۳۲۳	۹	قسمت اول: اتحادهای جبری
۳۲۸	۱۰	قسمت دوم: تجزیه عبارت‌های جبری
۳۳۳	۱۳	قسمت سوم: مثلث خیام، ب.م و ک.م
۳۳۶	۱۴	قسمت چهارم: عبارت‌های گویا
	۱۷	پاسخ تشریحی

فصل اول:

عبارت‌های جبری (ریاضی و آمار دهم - فصل ۱)



۳۴۰	۲۹	قسمت اول: معادله درجه اول و روش‌های حل آن
۳۴۲	۳۰	قسمت دوم: معادله درجه دوم و روش‌های حل آن
۳۴۸	۳۳	قسمت سوم: کاربردهای معادله درجه دوم
۳۵۱	۳۵	قسمت چهارم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا
	۳۷	پاسخ تشریحی

فصل دوم:

معادله درجه دوم (ریاضی و آمار دهم - فصل ۲)



۳۵۶	۴۹	قسمت اول: مفهوم رابطه و روش‌های نمایش آن
۳۵۹	۴۹	قسمت دوم: مفهوم تابع و روش‌های نمایش آن
۳۶۵	۵۱	قسمت سوم: مقدار تابع در یک نقطه - دامنه و بُرد تابع
۳۷۰	۵۳	قسمت چهارم: توابع خطی و کاربرد آن‌ها در حل مسائل
۳۷۷	۵۷	قسمت پنجم: سهمی (نمودار تابع درجه دوم)
	۶۲	پاسخ تشریحی

فصل سوم:

تابع (۱) (ریاضی و آمار دهم - فصل ۳)



۳۸۶	۸۳	قسمت اول: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی
۳۹۱	۸۸	قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلقی
۳۹۸	۹۳	قسمت سوم: اعمال روی تابع
	۱۰۱	پاسخ تشریحی

فصل چهارم:

تابع (۲) (ریاضی و آمار پازدهم - فصل ۴)



۴۰۸	۱۱۷	قسمت اول: گردآوری داده‌ها - انواع متغیرها
۴۱۳	۱۲۰	قسمت دوم: معیارهای گرایش به مرکز (حد وسط)
۴۱۹	۱۲۲	قسمت سوم: معیارهای (شخص‌های) پراکندگی
	۱۲۵	پاسخ تشریحی

فصل پنجم:

کار با داده‌های آماری (ریاضی و آمار دهم - فصل ۵)



۴۲۸	۱۳۳	قسمت اول: نمودارهای تکمتغیره
۴۳۳	۱۳۷	قسمت دوم: نمودارهای چندمتغیره
	۱۳۹	پاسخ تشریحی

فصل ششم:

نمایش داده‌ها (ریاضی و آمار دهم - فصل ۶)



۴۳۷	۱۴۵	قسمت اول: شاخص‌های آماری
۴۴۲	۱۴۹	قسمت دوم: سری‌های زمانی
	۱۵۲	پاسخ تشریحی

فصل هفتم:

آمار (ریاضی و آمار پازدهم - فصل ۷)



تست درسنامه

۴۴۷	۱۵۷	قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی
۴۵۰	۱۵۸	قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی
۴۵۴	۱۶۲	قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دو شرطی
۴۵۸	۱۶۸	قسمت چهارم: استدلال‌های ریاضی
	۱۷۲	پاسخ تشریحی

فصل هشتم:

آشنایی با منطق و استدلال
ریاضی
(ریاضی و آمار یازدهم - فصل ۱)



بخش دوم: ریاضیات دوازدهم

۴۶۳	۱۸۴	قسمت اول: اصول شمارش
۴۶۶	۱۸۷	قسمت دوم: تبدیل - ترکیب
۴۶۸	۱۸۸	قسمت سوم: احتمال (۱)
۴۷۵	۱۹۴	قسمت چهارم: احتمال (۲)
۴۷۸	۱۹۶	قسمت پنجم: چرخه آمار در حل مسائل
	۲۰۲	پاسخ تشریحی

فصل نهم:

آمار و احتمال
(ریاضی و آمار دوازدهم - فصل ۱)



فصل دهم:

الگوهای خطی
(ریاضی و آمار دوازدهم - فصل ۲)



۴۸۴	۲۲۲	قسمت اول: مدل‌سازی و دنباله
۴۸۹	۲۲۶	قسمت دوم: دنباله‌های حسابی (عددی)
	۲۲۲	پاسخ تشریحی

فصل یازدهم:

الگوهای غیرخطی
(ریاضی و آمار دوازدهم - فصل ۳)



کتاب آزمون فصلی و جامع

۲۷۷		آزمون (۱): آزمون جامع فصل اول
۲۷۹		آزمون (۲): آزمون جامع فصل دوم
۲۸۲		آزمون (۳): آزمون جامع فصل سوم
۲۸۵		آزمون (۴): آزمون جامع فصل چهارم
۲۸۸		آزمون (۵): آزمون جامع فصل پنجم
۲۹۰		آزمون (۶): آزمون جامع فصل ششم
۲۹۳		آزمون (۷): آزمون جامع فصل هفتم
۲۹۶		آزمون (۸): آزمون جامع فصل هشتم
۲۹۹		آزمون (۹): آزمون جامع فصل نهم
۳۰۱		آزمون (۱۰): آزمون جامع فصل دهم
۳۰۳		آزمون (۱۱): آزمون جامع فصل یازدهم
۳۰۶		آزمون (۱۲): آزمون جامع کل کتاب
۳۱۰		آزمون (۱۳): آزمون جامع کل کتاب
۳۱۴		کنکور سراسری ۱۳۹۹

عبارت‌های جبری

فصل ۱

قسمت اول: اتحادهای جبری

مفهوم اتحاد

- .۱ \star تساوی $ax^3 + 2x(x - 3) = 3x^3 + bx + c$ به ازای هر x ای برقرار است. حاصل abc کدام است؟
- ۱) ۴ ۶) ۳ -۶) ۲ ۱) صفر
- .۲ اگر تساوی $ax^3 - 3x + 4 = (x - 4)(\frac{x}{2} + b)$ برابر با کدام گزینه است؟
- $(2x + 1)^3$ ۴ $(1 - x)^3$ ۳ $(x + 1)^3$ ۲ $(2x - 1)^3$ ۱
- | اتحاد مربع دوجمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک
- .۳ حاصل $|1 + \sqrt{2}|^2 - 2|1 - \sqrt{2}|$ کدام است؟
- ۴) ۴ ۱ + $4\sqrt{2}$ ۳ ۵) ۲ ۱ - $4\sqrt{2}$
- .۴ \star عبارت A در تساوی $\frac{x}{3} - 4 = \frac{x^3}{9} + A + 16$ کدام است؟
- $-\frac{\lambda}{3}x$ ۴ $-\frac{4}{3}x$ ۳ $\frac{4}{3}x$ ۲ $\frac{\lambda}{3}x$ ۱
- .۵ حاصل $(\frac{1}{x} - y)^3 + \frac{4y}{x}$ کدام است؟
- $(x + \frac{1}{y})^3$ ۴ $(x - \frac{1}{y})^3$ ۳ $(\frac{2}{x} + y)^3$ ۲ $(\frac{1}{x} + y)^3$ ۱
- .۶ \star اگر xy^2 باشد، حاصل $(x + 3y^2)^3 - (x - 3y^2)^3$ کدام است؟
- ۱۸) ۴ ۱۶) ۳ ۱۲) ۲ ۸) ۱
- .۷ حاصل عبارت $(5\sqrt{2} + \sqrt{45})^2 - (3\sqrt{5} - \sqrt{25})^2$ کدام است؟
- $30\sqrt{10}$ ۴ ۱۹۰) ۳ $60\sqrt{10}$ ۲ ۱۰) ۱
- .۸ \star اگر $3 - \frac{1}{x}$ باشد، مقدار $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ کدام است؟
- ۱۴) ۴ ۱۳) ۳ ۱۲) ۲ ۱۱) ۱
- .۹ اگر تفاضل دو عدد برابر $\frac{1}{2}$ و مجموع آنها برابر $\frac{3}{2}$ باشد، حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟
- $\frac{3}{4}$ ۴ $\frac{1}{4}$ ۳ ۱) ۲ $\frac{1}{2}$ ۱
- .۱۰ \star اگر $a + b = 5$ و $a^3 + b^3 = 9$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار $a - b$ کدام است؟
- ۳) ۴ ۳) ۳ ۱) ۲ -۱) ۱
- .۱۱ \star اگر $2x + \frac{25}{x^2}$ باشد حاصل $4x^2 + \frac{5}{x}$ کدام است؟
- ۶) ۴ ۵۷) ۳ ۵۱) ۲ ۴۳) ۱
- .۱۲ \star اگر مجموع دو عدد a و b برابر ۶ و حاصل ضرب آنها ۵ باشد، تفاضل مربع آنها کدام است? ($a > b$)
- ۳۶) ۴ ۲۴) ۳ ۹۶) ۲ ۶۴) ۱

۱۳★ . اگر قطر یک مستطیل برابر ۶ و مساحت آن ۱۴ باشد، محیط آن چقدر است؟			
۱۶ (۴) 50 (۳) $10\sqrt{2}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۱)			
(۹۵ - سراسری) $(25x^3 + \frac{9}{4x^2})$ کدام است؟ ۳۲ (۴) 31 (۳) 29 (۲) 24 (۱)			
در تساوی $\frac{1-x^{16}}{A} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ عبارت A کدام است؟ $1-x^8$ (۴) $1-x^4$ (۳) $1-x^2$ (۲) $1-x$ (۱)			
(۹۵ - سراسری) فاصله از گشتو - $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ برابر است با $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (۴) $(x^2 - y^2)^2$ (۳) $x^4 - x^2y^2 + y^4$ (۲) $x^4 + y^4$ (۱)			
(۹۵ - سراسری) باشد، حاصل $(3x + \frac{1}{2x})$ کدام است؟ ۲۲ (۴) 21 (۳) 20 (۲) 18 (۱)			
حاصل $(x+a)(x+b) - (x-a)(x-b)$ کدام است؟ $2(a+b)x$ (۴) $a+b$ (۳) ۰ (۲) صفر $(a+b)x$ (۱)			

اتحاد مکعب دوجمله‌ای و اتحاد چاق و لاغر

۱۹★ . در چندجمله‌ای حاصل از $\frac{x^3}{2} - \frac{y}{3}$ ضریب جمله شامل x^2y^2 کدام است؟			
$\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۱)			
حاصل $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)(x^2+x+1)$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟ $-\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۲) $-\frac{7}{8}$ (۱)			
حاصل $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)-8y^3$ به ازای $y = \sqrt{2}$ و $x = \frac{3}{2}$ کدام است؟ $3/375$ (۴) $3/125$ (۳) $2/875$ (۲) $2/625$ (۱)			

قسمت دوم: تجزیه عبارت‌های جبری

فاکتورگیری

۲۲★ . در تجزیه $x^3 + x^2 + x$ کدام عامل وجود ندارد؟			
$x^2 + 1$ (۴) x (۳) $x+1$ (۲) $x-1$ (۱)			
در تجزیه عبارت $8x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 8x^3$ کدام عامل وجود ندارد؟ $x^2 + 1$ (۴) $4x$ (۳) $x+1$ (۲) $2x+1$ (۱)			

استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج

۲۵★ . عبارت $16x^3y + 40x^2y^2 + 25xy^3$ بر کدام عامل بخشیدیر است؟			
$(5x + 4y)^2$ (۴) x^2y^2 (۳) $(4x + 5y)^2$ (۲) $4x - 5y$ (۱)			
اگر عبارت $x^4 - 16x^2y^2 + \square$ مربع کامل باشد، مقدار \square کدام است؟ $4x^5y$ (۴) $8xy$ (۳) $8x^5y$ (۲) $4xy$ (۱)			
به عبارت $4x^3 - 10x^2 + 9$ کدام جمله افزوده شود تا حاصل عبارت به صورت مربع دوجمله‌ای گردد؟ $-4x$ (۴) $4x$ (۳) $-2x$ (۲) $2x$ (۱)			

(سراسری - ۹۷) $x + 6$ (۴)	۲۸★ با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ ، مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌گردد؟ $\frac{15}{4}$ (۲)	۲۹★ در تجزیه عبارت $(x^2 - 12)^2 - 16x^2$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟ $x + 2$ (۲)	۳۰★ اگر $x^2 - xy + y^2 = 0$ باشد، حاصل $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$ کدام است؟ 3 (۲)
(سراسری - ۹۷) $x + 6$ (۴)	-1 (۴)	-3 (۳)	۳۱ جذر $3 + 2\sqrt{2}$ کدام است؟ $\sqrt{2} - 1$ (۱)
$1 + 2\sqrt{2}$ (۴)	$\sqrt{3} + 13$ (۳)	$1 + \sqrt{2}$ (۲)	۳۲★ کدام عبارت در تجزیه شده عبارت $(x^2 + 1)^2 - 2x^2$ وجود دارد؟ $(x-1)^2$ (۱)
$(x-2)^2$ (۴)	$(x-1)^2$ (۳)	$(x+1)^2$ (۲)	۳۳★ اگر عبارت $5x^2 + mx + 10$ به صورت توان دوم مجموع دو جمله باشد، مقدار m کدام است؟ $5\sqrt{2}$ (۴)
$5\sqrt{2}$ (۴)	$10\sqrt{2}$ (۳)	$2\sqrt{5}$ (۲)	۳۴★ در تجزیه $x^6y^2 - x^2y^6$ کدام عامل وجود ندارد؟ $x + y$ (۲)
$(x+y)^2$ (۴)	$x - y$ (۳)	$x^2 + y^2$ (۱)	۳۵★ حاصل $(ax+by)^2 - (ay+bx)^2$ کدام است؟ $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$ (۱)
$(a^2 + x^2)(b^2 - y^2)$ (۴)	$(a^2 + b^2)(x^2 - y^2)$ (۳)	$(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$ (۲)	۳۶★ اگر $c^2 + d^2 + 2cd = 77$ و $c - d = -7$ باشد مقدار $d^2 - c^2$ کدام است؟ 144 (۴)
144 (۴)	121 (۳)	81 (۲)	۳۷★ حاصل $\frac{205^2 - 195^2}{(\sqrt{125} + 5)(\sqrt{500} - 10)}$ کدام است؟ 40 (۱)
20 (۴)	400 (۳)	200 (۲)	۳۸ اگر $2x - y = 6$ و $4x^2 - y^2 = 12$ باشد، $x + y$ کدام است؟ 2 (۴)
2 (۴)	-4 (۳)	4 (۲)	۳۹★ اگر $a^2 - 2b = 5$ و $a - 2b = 15$ باشد، حاصل $a^2 - 4b^2$ کدام است؟ 31 (۴)
31 (۴)	33 (۳)	65 (۲)	۴۰ اگر $x^2 + 4y^2 = 4xy$ باشد، مقدار $x^2 - 4y^2$ کدام است؟ 4 (۳)
4 صفر	-3 (۳)	2 (۲)	استفاده از اتحاد یک جمله مشترک

(سراسری - ۹۸) $x^2 - x$ (۴)	۴۱★ عبارت $4x^2 - 4x^2 + 2x^2$ بر کدام دوجمله‌ای بخش‌پذیر نیست؟ $x + 2$ (۳)	۴۲ عبارت $2x^2 + 2x^2 - 6x^2$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟ $x - 1$ (۲)	۴۳★ عبارت $-4x^2 - 3x^2$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر نیست؟ $x + 1$ (۲)
(سراسری - ۹۸) $x + 2$ (۴)	$x + 1$ (۳)	$2x + 1$ (۱)	۴۴ در تجزیه $16x^4 + 24x^2 - 7$ کدام عامل وجود ندارد؟ $4x^2 + 7$ (۲)
$2x + 1$ (۴)	$x - 2$ (۳)	$x + 2$ (۲)	۴۵★ در تجزیه $a(a-2)(a-3) - 4a + 8$ کدام عامل وجود ندارد؟ $a - 4$ (۴)
$a - 4$ (۴)	$a + 1$ (۳)	$a - 2$ (۲)	$a - 1$ (۱)

(سراسری - ۹۰)

$a + 2^4$

$a - 2^3$

در تجزیه $a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36$ کدام عامل وجود ندارد؟

$a - 3^2$

$a - 6^1$

عبارت $(x^7 + x)^7 - (x^7 + x)^2$ بر کدام عامل بخش پذیر است؟

$x + 2^4$

$x - 2^3$

$x + 1^2$

$x^7 + x - 1^1$

عبارت $(x^7 - 4x + 2)^7 + 3(x^7 - 4x + 2)^2 + 2$ بر کدام عامل بخش پذیر نیست؟

$x + 1^4$

$x - 3^3$

$x - 2^2$

$x - 1^1$

در تجزیه $-144x^7 - 6x^5 - 4x^3$ کدام عامل وجود ندارد؟

$x + 4^4$

$x + 2^3$

$x - 4^2$

$x - 8^1$

(سراسری فارج از کشون - ۹۰)

استفاده از اتحاد چاق و لاغر و اتحاد مکعب دو جمله‌ای

$4x^7 + \frac{y^7}{4} - 2xy^4$

$4x^7 + \frac{y^7}{4} - xy^3$

عبارت $8x^3 - \frac{1}{4}y^3$ بر کدام دو جمله‌ای بخش پذیر است؟

$x + 0/0^2$

$x - 0/2^3$

$2x + \frac{y}{2}$

$2x - \frac{y}{2}$

در تجزیه $2x^3 - 0/0^6$ کدام عامل وجود دارد؟

$1 + x^7 + x^4$

$1 - x^3$

$x + 0/2^2$

$x - 0/0^2$

در تجزیه $x^6 - 1$ کدام عامل وجود ندارد؟

$9a^3b^3 + 3ab + 1^4$

$3ab - 1^3$

$54a^5b^3 - 2a^2$

$2a^3$

در تجزیه $54a^5b^3 - 2a^2$ کدام عامل وجود ندارد؟

$x^4 - x^4 + 1^4$

$x^4 + 1^3$

$x^2 - 1^2$

$x^2 + 1^1$

در تجزیه $\frac{1}{6}a^6 - a^6$ کدام عامل وجود ندارد؟

$a + \frac{1}{2}^4$

$a^2 - \frac{1}{4}^3$

$a - \frac{1}{4}^2$

$a - \frac{1}{2}^1$

در محاسبه حاصل $-98^3 - 101^3$ کدام اتحاد کاربرد ندارد؟

$4)$ مزدوج

$3)$ یک جمله مشترک

$1)$ مربع مجموع دو جمله

در محاسبه $99^3 + 102^3$ به کمک اتحادها، کدام اتحاد کاربرد ندارد؟

$4)$ مزدوج

$3)$ چاق و لاغر

$2)$ مربع تفاضل دو جمله

در محاسبه $a^3 + b^3 = a + b$ باشد، $a^3 + b^3 = a + b$ کدام است؟

8^4

7^3

$1)$ جمله مشترک

اگر $a + b = a^3 - b^3$ باشد، $a \neq b$ و $a^3 - b^3 = a - b$ کدام است؟

$1 - ab^4$

$1 + ab^3$

$2ab^2$

1^1

اگر $x^3 + \frac{1}{x^3}$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟ ($x > 0$)

70^4

9^3

24^2

18^1

48^4

52^3

اگر $x^3 + \frac{1}{x^3}$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

6^4

64^1

اگر $xy = 9$ و $x - y = 4$ باشد، حاصل $x^3 - y^3$ کدام است؟

1722^4

91^3

44^2

64^1

(مشابه سراسری - ۸۶)

$46\sqrt{7}^4$

$38\sqrt{7}^3$

$50\sqrt{7}^2$

$44\sqrt{7}^1$

اگر مجموع دو عدد $2\sqrt{7}$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۳ باشد، مجموع مکعب آن‌ها کدام است؟

(سراسری - ۸۶)	$x + y = ۷$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟	.۶۴
۲۶۴ (۴)	۲۴۴ (۳)	۲۳۸ (۲)
(سراسری - ۹۷)	در تجزیه عبارت $(x-2)(x^2-4x+4)-1$ ، کدام عامل ضرب موجود است؟	.۶۵★
$x + ۳$ (۴)	$x - ۱$ (۳)	$x - ۲$ (۲)
-۹۰ (۴)	-۱۸ (۳)	۱۸ (۲)
$2\sqrt{۲}$ (۴)	۴ (۳)	$4\sqrt{۲}$ (۲)
$x(x+1)(x-2)$ (۴)	$x(x-1)(x+2)$ (۳)	حاصل $(x-1)(x+1)$ کدام است؟
$x+6$ (۴)	$x-2$ (۳)	$x+2$ (۲)
۱۶ (۴)	۴ (۳)	$x(x-1)(x-2)$ (۱)
		عبارت $(x+2)^3 + (\sqrt{۲}x-2\sqrt{۲})(\sqrt{۲}x+2\sqrt{۲})$ بر کدام عامل بخش‌پذیر نیست؟
		$x+2$ (۱)
		اگر $x-y=۲$ باشد، حاصل x^3-y^3-6xy کدام است؟
		.۷۰★
		۲ (۱)

دسته‌بندی

(سراسری - ۸۸)	در تجزیه عبارت $2x^3 - 2x^2 - 8x + 4$ کدام دو جمله‌ای وجود ندارد؟	.۷۱★
$2a+b+1$ (۴)	$x+2$ (۳)	$2x-1$ (۲)
(سراسری خارج از کشیور - ۸۹)	در تجزیه عبارت $4a^3 - 4a^2 - b^2 - 4b - 3$ کدام عامل وجود دارد؟	.۷۲★
$2a+b+1$ (۴)	$2a+b-3$ (۳)	$2a-b+1$ (۲)
(سراسری خارج از کشیور - ۹۰)	اگر $a+2b=۳$ ، حاصل $a(a+2)+4b(b+1)+4ab$ کدام است؟	.۷۳★
$x+1$ (۴)	17 (۳)	16 (۲)
(سراسری - ۹۰)	عبارت $x^2 - (x-1)(x^2-x+3) - x$ بر کدام عامل بخش‌پذیر نیست؟	.۷۴★
$x+3$ (۴)	$x-1$ (۳)	$x+3$ (۲)
$x^2 - xy + y^2$ (۴)	$x^2 + y^2$ (۳)	$x^2 - xy + y^2$ (۲)
		$x^2 + y^2$ (۱)

قسمت سوم: مثلث خیام، ب.م.م و ک.م.م

مثلث خیام

اگر شکل روبرو مربوط به دو سطر متولی از مثلث خیام باشد، حاصل $a-b+c$ کدام است؟	.۷۷★	
$1 \quad 6 \quad 15 \quad a \quad b \quad 6 \quad 1$ ۱ ۷ ۲۱ c ۳۵ ۲۱ ۷ ۱	۷۰ (۲)	۴۰ (۱)
	۶۰ (۴)	۵۰ (۳)
اگر عدد دوم از سطر n ام مثلث خیام برابر ۱۸ باشد، مجموع اعداد واقع در این سطر کدام است؟	.۷۸★	
۲۳° (۴)	2^{17} (۳)	2^{18} (۲)
ضرايب چندجمله‌ای $(a+b)^n$ برابر با سطر چندم از مثلث خیام است؟	.۷۹★	
۴) هفدهم	۳) شانزدهم	۲) پانزدهم
		۱) چهاردهم
در چندجمله‌ای حاصل از $(x-\frac{2}{\sqrt{x}})^6$ ، ضرایب جمله شامل x^3 کدام است? ($x > 0$)	.۸۰★	
۲۴۰ (۴)	۶۰ (۳)	۳۰ (۲)
		۱۲ (۱)

عبارت‌های جبری

۱

پاسخ فصل

۴ ۳ ۲ ۱ ۵

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} - y\right)^2 + \frac{4y}{x} &= \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right)(y) + y^2 + \frac{4y}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{2y}{x} + y^2 + \frac{4y}{x} = \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^2}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} + \underbrace{\frac{2y}{x}}_{\text{دوجمله‌ای}} + y^2 = \left(\frac{1}{x} + y\right)^2 \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۶

$$\begin{cases} (x + 3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2 \\ (x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2 \end{cases} \Rightarrow \text{عبارت مطلوب} = x^2 + 6xy + 9y^2 - x^2 + 6xy - 9y^2 = 12xy$$

$$= 12\left(\frac{4}{3}\right) = 16$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۷

$$\begin{aligned} (\sqrt{50} - 3\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{2} + \sqrt{45})^2 &\downarrow \quad \downarrow \\ 25 \times 2 &\quad 9 \times 5 \\ = (\underbrace{5\sqrt{2}}_a - \underbrace{3\sqrt{5}}_b)^2 + (\underbrace{5\sqrt{2}}_a + \underbrace{3\sqrt{5}}_b)^2 & \end{aligned}$$

بنابراین نکته گفته شده در درسنامه این مقدار برابر است با:

$$2a^2 + 2b^2 = 2(5\sqrt{2})^2 + 2(3\sqrt{5})^2 = 2 \times 25 \times 2 + 2 \times 9 \times 5$$

$$= 100 + 90 = 190$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۸

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} = 3 &\quad \text{طرفین به توان ۲ اتحاد مربع دوجمله‌ای} \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x\left(\frac{1}{x}\right) = 9 \\ \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9 &\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11 \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۹

روش اول: دو عدد را a و b در نظر می‌گیریم، با فرض $a > b$ داریم:

$$a - b = \frac{1}{2}, \quad a + b = \frac{3}{2}$$

طبق نکته گفته شده در درسنامه داریم:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 4ab \Rightarrow 4ab = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow ab = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

روش دوم (حل دستگاه):

$$\begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ a + b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 + b = \frac{3}{2} \quad \text{جایگذاری در یکی از معادلات}$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۱

ابتدا طرفین تساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2x(x - 3) &= 3x^2 + bx + c \\ \Rightarrow ax^2 + 2x^2 - 6x &= 3x^2 + bx + c \\ \Rightarrow \underline{(a+2)x^2} - \underline{6x} + \circ &= \underline{3x^2} + \underline{bx} + \circ \end{aligned}$$

چون این تساوی به ازای هر x برقرار است، لذا اتحاد بوده و جملات متشابه در دو طرف تساوی دارای ضرایب برابرند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ b = -6 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow abc = (1)(-6)(0) = 0.$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲

ابتدا طرفین تساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ax^2 - 3x + 4 &= (x - 4)\left(\frac{x}{2} + b\right) \\ \Rightarrow ax^2 - 3x + 4 &= \frac{1}{2}x^2 + bx - 2x - 4b \\ \Rightarrow \underline{ax^2} - \underline{3x} + \circ &= \underline{\frac{1}{2}x^2} + \underline{(b-2)x} - \underline{4b} \end{aligned}$$

حال چون تساوی داده شده یک اتحاد است، باید جملات متشابه در طرفین تساوی دارای ضرایب برابر باشند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b - 2 = -3 \Rightarrow b = -1 \\ 4 = -4b \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

حال حاصل $(2ax + b)^2$ را می‌یابیم.

$$(2ax + b)^2 \stackrel{a=\frac{1}{2}}{=} (x - 1)^2 = (1 - x)^2$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۳

$$\begin{aligned} &\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای} \\ (1 + \sqrt{2})^2 - 2|1 - \sqrt{2}| &= (1^2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2) - 2(-1 + \sqrt{2}) \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2 - 2\sqrt{2} = 5 \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴

بنابراین نکته گفته شده در درسنامه داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{3} - 4\right)^2 &= \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{3}\right)(4) + 4^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8x}{3} + 16 \\ \Rightarrow A = -\frac{8}{3}x & \end{aligned}$$

آزمون ۱

جامع فصل اول



۱

۱۴۵۸. کدام عامل در تجزیه عبارت $(x^4 + x^2 - 2)$ وجود ندارد؟
- $x^2 + 2$ (۴) $x - 1$ (۳) $x + 1$ (۲) $x^2 - 2$ (۱)
۱۴۵۹. ارتفاع یک متوازیالاضلاع برابر $(3x+1)$ و مساحت آن $(9x^2 - 18x - 7)$ است. اندازه قاعده متوازیالاضلاع کدام است؟
- $x + 2$ (۴) $x - 2$ (۳) $3x + 7$ (۲) $3x - 7$ (۱)
- $A = \frac{4x^4(x^2 + 4)^2 - 2x^3(x^2 + 4)^3}{x^4 - 16x^4}$
- $\frac{2}{3x - 3} - \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{2x + 2} = ?$
- $a - x$ (۴) $\frac{1}{2(x-1)}$ (۴) $\frac{1}{6(x-1)}$ (۳) $\frac{1}{x-2}$ (۲) $\frac{1}{x+2}$ (۱)
۱۴۶۰. در ساده شده عبارت مقابل، مخرج کسر کدام است؟
- $\frac{ax^4 - ax}{4x} \times \frac{3x+6}{x^2+x-2}$ باشد، مقدار a کدام است؟
- 4 (۳) 6 (۲) 8 (۱)
۱۴۶۱. با فرض آن که 6 باشد، مقدار a کدام است؟
۱۴۶۲. حاصل عبارت مقابل چیست؟
- $\frac{x^6 - a^6}{ax^3 - a^3 x}$ در ساده شده کسر عبارت مخرج، کدام است؟
- ax (۳) $a^2 - x^2$ (۲) $3x - 10$ (۲) ax^2 (۱)
۱۴۶۳. عبارت گویای $\frac{3x-10}{x^3+5x^2+6x}$ به ازای چند مقدار x تعریف نشده است؟
- 4 (۳) 2 (۲) 1 (۱)
۱۴۶۴. کوچکترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای $x^2 + 6x + 8$ و $x^2 - 2x - 8$ را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آنها تقسیم کردایم، حاصل تقسیم کدام است؟
- $x^3 + 16$ (۴) $x^3 - 16$ (۳) $x^2 + 9$ (۲) $x^2 - 9$ (۱)
۱۴۶۵. در تجزیه $24 - 2x - 3x^2$ به عوامل اول، دو برابر یکی از این عوامل کدام است؟
- $2x - 8$ (۴) $2x - 4$ (۳) $x + 3$ (۲) $2x + 8$ (۱)
۱۴۶۶. ب.م.م دو عبارت $x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 2x^3 - 3x$ و $x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 2x^3 - 3x$ کدام است؟
- $x^7 + 3x$ (۴) $x^7 - 3x$ (۳) $x^7 + 4x$ (۲) $x^7 - 4x$ (۱)
۱۴۶۷. در تجزیه $x^6 + 6x^4 + 6x^2$ کدام عامل وجود دارد؟
- $x^4 + 4x^2 - 16$ (۴) $x^4 + 4x^2 + 16$ (۳) $x^7 + 4$ (۲) $x^7 + 8$ (۱)
۱۴۶۸. در مثلث خیام مقابل، مقدار $x+y-z-t+m$ کدام است؟
- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | | | | |
| ۱ | ۱ | | | |
| ۱ | ۲ | ۱ | | |
| ۱ | ۳ | ۳ | ۱ | |
| ۱ | ۴ | ۶ | ۴ | ۱ |
| ۱ | x | y | y | x |
| z | t | m | t | z |
| ۱ | | | | |
- 28 (۴) 12 (۳) 8 (۲) 4 (۱)
۱۴۶۹. در بسط $(4x - 2y^2)^2$ مجموع ضرایب کدام است؟
- -10 (۴) 10 (۳) -20 (۲) 20 (۱)
۱۴۷۰. اگر $a+b=5$ و $a^2+b^2=30$ باشد، حاصل $4ab$ کدام است؟
- $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 + 2x + 1$ (۳) $9x^2$ (۲) $25x^2$ (۱)
۱۴۷۱. عبارت $-12 - 9x^2 - 3x^3$ را به عوامل اول خود تجزیه کردایم، مربع یکی از این عوامل کدام است؟

آزمون ۱۳

جامع کل کتاب

$$\frac{3a^3 - 6ab}{2a} \div \frac{3a - 12b}{8a}$$

۴a (۴)

۳a (۳)

۲a (۲)

a (۱)

۱۶۴۳. حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$$m < \frac{-1}{4}$$

$$m > \frac{-1}{4}$$

$$m < \frac{1}{4}$$

$$m > \frac{1}{4}$$

۱۶۴۴. به ازای چه مقادیری از m ، معادله $x^3 + (2m-1)x - m^3 = 0$ دارای ریشه حقیقی نیست؟

$$R(x) = 240x - \frac{1}{20}x^2$$

$$C(x) = 36000 + 40x$$

۶۸۰۰۰۰ (۴)

۵۸۰۰۰۰ (۳)

۱۶۴۰۰۰ (۲)

۲۶۴۰۰۰ (۱)

۱۶۴۵. اگر x تعداد کالاهای تولیدی در یک کارخانه باشد و روابط زیر برقرار باشند:

بیشترین سود کارخانه کدام است؟

۱۶۴۶. در مورد معادله $\frac{2x+2}{x^2+x} + \frac{3x-2}{x} = 1$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) جواب‌های آن صفر و -۱ هستند.

۲) دو جواب مثبت دارد.

۳) یک جواب قابل قبول دارد.

۴) فاقد جواب است.

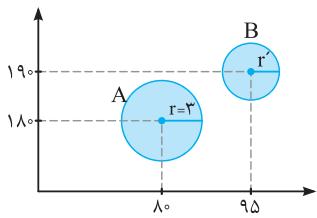
۱۶۴۷. نمودار سهمی به معادله $y = x^3 + 6x - 3$ از کدام نواحی محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) همه نواحی

۲) فقط دوم و چهارم

۳) فقط اول و دوم

۱۶۴۸. در نمودار حبابی زیر، مساحت دایره‌ها مقدار درآمد افراد را بر حسب میلیون تومان نشان می‌دهند. اگر درآمد فرد A دو برابر درآمد فرد B باشد، شعاع دایره B کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
 (۲) $3\sqrt{2}$
 (۳) $\sqrt{5}$
 (۴) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

۱۶۴۹. طرف دوم هماری مقابل کدام است؟

~ p \wedge q (۴)p \wedge ~ q (۳)

q (۲)

p (۱)

۱۶۵۰. با توجه به جدول زیر، در جاهای خالی، چه ارزش‌هایی باید قرار بگیرند؟

گزاره p: نمودار	گزاره q: دمای هوا، متغیر کیفی ترتیبی است.	$\sim q \Leftrightarrow \sim p$

 $\equiv T$, $\equiv F$, $\equiv F$ (۲) $\equiv F$, $\equiv T$, $\equiv F$ (۴) $\equiv T$, $\equiv T$, $\equiv T$ (۱) $\equiv F$, $\equiv F$, $\equiv T$ (۳)

کنکور سراسری



۱۶۶۳. اگر عبارت مخرج کسرها، صفر نباشند، حاصل عبارت $\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)} - \frac{2}{x^2-2x}$ کدام است؟

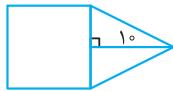
$$\frac{x}{x-2} \quad (4)$$

$$\frac{2}{x} \quad (3)$$

$$\frac{1}{x-2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{x} \quad (1)$$

۱۶۶۴. در شکل زیر، مساحت مثلث متساوی الساقین، از $\frac{2}{3}$ مساحت مریع به اندازه $\frac{1}{3}$ واحد مریع، کمتر است. مساحت مثلث، کدام است؟



$$35 \quad (2)$$

$$30 \quad (1)$$

$$45 \quad (3)$$

$$40 \quad (3)$$

۱۶۶۵. مجموع ریشه‌های معادله $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{2}{3}$ ، کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

۱۶۶۶. اگر $\{f+g\}_{f-g}$ باشند، برد تابع $g = \{(5,6), (1,2), (3,2), (4,1)\}$ و $f = \{(3,4), (2,6), (5,3), (10,5)\}$ ، کدام است؟

$$\left\{ \frac{7}{3}, 3, -2 \right\} \quad (4)$$

$$\left\{ \frac{5}{3}, 4, -2 \right\} \quad (3)$$

$$\left\{ \frac{7}{3}, 3, -3 \right\} \quad (2)$$

$$\left\{ \frac{5}{3}, 2, -3 \right\} \quad (1)$$

۱۶۶۷. دو تابع با ضابطه‌های x و $y = x^2 - 2x - 2$ و $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، در نقطه‌ای با کدام طول، مشترک‌اند؟

$$-1, 1 - \sqrt{2} \quad (4)$$

$$3, 1 + \sqrt{2} \quad (3)$$

$$-1, 1 + \sqrt{2} \quad (2)$$

$$3, 1 - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$-2 \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$1 \text{ صفر} \quad (1)$$

$$12 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

۱۶۶۹. در بسط عبارت $(a^2 + 4b)^3$ ، ضریب $a^3 b$ ، کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

۱۶۷۰. سهمی $y = -\frac{1}{3}x^2 + ax + b$ با خط $x - y = 13$ ، در دو نقطه به طول های ۲ و ۸، منقطع‌اند. مختصات رأس این سهمی، کدام است؟

$$(4, 13) \quad (4)$$

$$(3, 12) \quad (3)$$

$$(3, 9) \quad (2)$$

$$(1, 9) \quad (1)$$

۱۶۷۱. اگر در شاخص بهای کالا و خدمات، واحد اندازه‌گیری ۲ برابر شود، آن‌گاه تغییرات مقدار این شاخص، کدام است؟

۱) تغییر نمی‌کند.
۲) نصف می‌شود.
۳) دو برابر می‌شود.
۴) قابل پیش‌بینی نیست.

(x) سال	۲	۴	۶	۸	۱۰
(y) تورم	۱۴	۱۸	۱۲	۲۰	۲۶

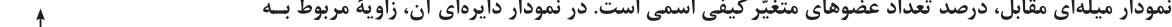
$$22 \quad (1)$$

$$23 \quad (2)$$

$$24 \quad (3)$$

$$25 \quad (4)$$

۱۶۷۲. نرخ تورم کشوری با فاصله‌های زمانی دو سال، به صورت جدول زیر است. درون یابی آن در سال نهم، کدام است؟



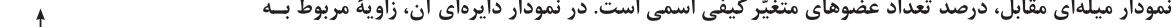
$$132 \quad (1)$$

$$144 \quad (2)$$

$$150 \quad (3)$$

$$156 \quad (4)$$

۱۶۷۳. نمودار میله‌ای مقابل، درصد تعداد عضوهای متغیر کیفی اسمی است. در نمودار دایره‌ای آن، زاویه مربوط به گروه B، چند درجه است؟



فصل ۱ عبارت‌های جبری

قسمت اول: اتحادهای جبری

قبل از این‌که درس رو شروع کنم دوس دارم یه سلام و احوالپرسی کنم باهاتون. سلام، فوین دانشجوهای آینده؟ آقایان و قانم‌های رشته انسانی، همین شروع کتاب، دوس دارم برآتون آرزو کنم که هم تو مسائل درسی هم غیردرسی، به هر پی که مفوبه برسید. شما در سال‌های قبل با مفهوم عبارت هبّری آشنا شدید هالا می‌فوایم یه مفهوم بدید و فوق العاده مهوم به نام اتحادهای هبّری رو بتوون یاد بدم. فقط فواهشنا فرمول اتحادها رو فوب هفظ کنید پون تا آنرا کتاب باهشون سروکار داریم. إنقدر که اسم اتحادها توی ریاضی می‌یار اسم فربود توی روانشناسی نمی‌یار!



مفهوم اتحاد

در سال نهم فهمیدیم که هر عبارتی که شامل اعداد و متغیرها باشد، عبارت جبری نام دارد و اگر مقدار دو عبارت جبری A و B به ازای هر مقداری برابر متغیرهایشان با هم برابر باشد، تساوی $A = B$ را یک اتحاد می‌گویند. (به زبان دیگه، یعنی اگه رابطه $A = B$ به ازای هر مقدار که به متغیرهاش بدم، برقرار باشه، به این رابطه یه اتحاد می‌گیم). مثلاً رابطه $1 - 2x^3 = x^3 - 2x$ یک اتحاد است، چون به x هر عددی بدهیم دوطرف، مساوی می‌شوند. مثلاً اگر x را صفر فرض کنیم به رابطه درست $1 = 1$ می‌رسیم. (شما به x هر پی دوست دارین بدم، دو طرف مساوی می‌شن).

نکته ضریب جملات متشابه در دو طرف تساوی یک اتحاد، با هم برابر است. مثلاً اگر $kx^3 + mx^2 - 7x = 5x^3 - 7x$ یک اتحاد باشد خیلی سریع می‌گوییم که $k = 5$ و $m = -7$ است.

تست: اگر تساوی $(x-a)(3x+a) = 3x^2 - 4x - a^2$ یک اتحاد باشد، مقدار a کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: باید ضرایب جملات متشابه در دو طرف تساوی، با هم برابر باشد:

$$(x-a)(3x+a) = 3x^2 - 4x - a^2 \Rightarrow 3x^2 + ax - 3ax - a^2 = 3x^2 - 4x - a^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2ax - a^2 = 3x^2 - 4x - a^2 \Rightarrow \begin{cases} 3=3 & \checkmark \\ -2a = -4 & \Rightarrow a = \frac{-4}{-2} = 2 \\ -a^2 = -a^2 & \checkmark \end{cases}$$

پس گزینه (۲) درست است.

انواع اتحادهای جبری مشهور

(۱) اتحادهای مربيع دوجمله‌ای: در این اتحادها دو جمله‌ای های $a+b$ و $a-b$ به توان ۲ می‌رسند:

دو برابر اوی در دومی اولی به توان ۲

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{مثال: } (5x+3y)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(3y) + (3y)^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{مثال: } \left(\frac{m}{3} - \frac{6z}{9}\right)^2 = \left(\frac{m}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{m}{3}\right)(6z) + (6z)^2 = \frac{m^2}{9} - 4mz + 36z^2$$

پاسخ:

تست: اگر $4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ باشد، حاصل $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

$$x + \frac{1}{x} = 4 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14 \Rightarrow \text{صحیح است.}$$

تست: حاصل $(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})^2$ کدام است؟

۲ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۴ $\sqrt{2}$ (۱)

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})^2 &= [(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2})]^2 = [(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2}) + 1]^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 2 = 6 \end{aligned}$$

گزینه (۳) صحیح است.

پاسخ: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

از این نکته وقتی استفاده می‌شود که مجموع و تفاضل دو عدد را داشته باشیم و حاصل ضرب یا مجموع مربعات آنها خواسته شوند. (حفظ این دو فرمول الزامی نیست).

تست: حاصل $(ax+by)^2 - (ax-by)^2$ کدام است؟

۴ abxy (۴)

۲ $a^2x^2 - 2b^2y^2$ (۳)۲ $a^2x^2 + 2b^2y^2$ (۲)

۲ abxy (۱)

$$\frac{(ax+by)^2 - (ax-by)^2}{A \quad B} = 4AB = 4(ax)(by) = 4abxy$$

البته بدون استفاده از نکته بالا هم می‌توانید تک تک اتحادها را باز کرده و جواب را به دست آورید.

$$(ax+by)^2 - (ax-by)^2 = a^2x^2 + 2axby + b^2y^2 - a^2x^2 + 2axby - b^2y^2 = 4axby$$

گزینه (۴) صحیح است.

پهنهای از سوال‌الای ریاضی هست که طراح، از نمادهای ریاضی استفاده نمی‌کند. مثل تست پایین که طراح به زبان فارسی، سوال ریاضی رو مطرح می‌کند. اکثر پهنهای با این موضوع مشکل دارند. قلب طراحت کاریش نمی‌شود که پهنهای، نمی‌شوند درگیر شد که، پس برای این که هالشو بگیرین اولین کاری که باید بگذرد اینه که اطلاعات مسئله رو به زبان ریاضی تبدیل کنید بعده مفهوم فواید شده رو رو به دست بیاریں.

تست: اگر مجموع دو عدد برابر ۵ و تفاضل آنها برابر ۹ باشد، مجموع مربعات آنها کدام است؟

۵۴ (۴)

۵۳ (۳)

۵۲ (۲)

۵۱ (۱)

پاسخ: روش اول: اگر آن دو عدد را a و b در نظر بگیریم، به کمک نکته تستی گفته شده داریم:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25+81}{2} = \frac{106}{2} = 53$$

روش دوم: بدون استفاده از نکته تستی هم می‌توانیم مسئله را به شکل مقابل حل کنیم:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=9 \end{cases} \quad \text{طبق فرض سوال} \quad \xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از معادلات}} \quad 7 + b = 5 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 7^2 + (-2)^2 = 49 + 4 = 53$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۲ اتحاد مزدوج: در این اتحاد، دو پرانتز به شکل $(a+b)$ و $(a-b)$ در هم ضرب می‌شوند، در این حالت خیلی سریع می‌گوییم جواب برابر می‌شود با $a^2 - b^2$ به عبارت دیگر در این اتحاد جملاتی مانند a و b عیناً در دو پرانتز تکرار می‌شوند. فقط در یکی از پرانتزها علامت بین a و b مثبت و در پرانتز دیگر علامت بین a و b منفی است.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

دویی به توان ۲
اویی به توان ۲

مثال $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2 = 5 - 2 = 3$

مثال $(\frac{x}{2} - \frac{y}{5})(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}) = (\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{5})^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$

تست: حاصل عبارت $A = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چقدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

 $\sqrt{2} - 1$ (۲) $\sqrt{2} + 1$ (۱)

پاسخ:

$$\begin{aligned} A &= (\underbrace{(\sqrt{x}-1)}_{\text{اتحاد مزدوج}})(\underbrace{(\sqrt{x}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}) = ((\sqrt{x})^2 - 1^2)(x+1) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1 \\ &\xrightarrow{x=\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

گزینه (۴) صحیح است.

تست: حاصل $(a+b-1)(a-b-1)$ کدام است؟

$$a^2 - b^2 + 1 \quad (4)$$

$$a^2 - b^2 - 1 \quad (3)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + 1 \quad (2)$$

$$a^2 - b^2 - 2a + 1 \quad (1)$$

پاسخ :

$$(a-1+b)(a-1-b) = (a-1)^2 - b^2 = a^2 - 2a + 1 - b^2 = a^2 - b^2 - 2a + 1 \Rightarrow \text{گزینه (1) صحیح است.}$$

تذکر: اگر نفوایستین یا نتوئیستین از اتحاد استفاده کنیم باید دو پرانتز را به صورت معمولی در هم ضرب کنیم.

تست: اگر مجموع دو عدد برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و تفاضل مربعات آنها $\frac{3}{4}$ باشد، اختلاف این دو عدد کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

پاسخ : باز هم سوال، به زبان فارسی داده شده، پس باید آن را به نماد ریاضی تبدیل کنید. اگر آن دو عدد را a و b در نظر بگیریم، می‌توان

$$\text{گفت } a^2 - b^2 = \frac{3}{4} \text{ و } a + b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ بنابراین اتحاد مزدوج داریم:}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \xrightarrow[a^2-b^2=\frac{3}{4}]{a+b=\frac{\sqrt{2}}{2}} (a-b)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow a-b = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{گزینه (2) صحیح است.}$$

(۳) اتحاد یک جمله مشترک: در این اتحاد بازهم دو پرانتز در هم ضرب می‌شوند ولی این بار، یک جمله مشترک در دو پرانتز وجود دارد.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \xrightarrow[\text{مشترک به توان ۲}]{\text{ضرب غیرمشترکها}} \text{مثال: } (\varepsilon x - 1)(\varepsilon x + \lambda) = (\varepsilon x)^2 + (-1+\lambda)(\varepsilon x) + (-1)(+\lambda) = ۳\varepsilon x^2 + ۴\varepsilon x - \lambda$$

تست: حاصل $(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b)$ کدام است؟

$$(b-a)x \quad (4)$$

$$2(a-b)x \quad (3)$$

$$2(b-a)x \quad (2)$$

$$(a-b)x \quad (1)$$

پاسخ :

$$(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b) = (x^2 + (a-b)x + a(-b)) - (x^2 + (-a+b)x + b(-a))$$

$$= x^2 + (a-b)x - ab - x^2 + (a-b)x + ab = 2(a-b)x \Rightarrow \text{گزینه (3) صحیح است.}$$

(۴) اتحادهای مکعب دو جمله‌ای: در این اتحاد، یک دو جمله‌ای مانند $a+b$ یا $a-b$ به توان ۳ می‌رسد و خواهیم داشت:

۲ برابر اولی در دومی به توان ۳

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \xrightarrow[\text{اولی به توان ۳}]{\text{دو می به توان ۳}} \text{مثال: } (x+2y)^3 = (x^3 + 3(x^2)(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3) = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \xrightarrow[\text{اولی به توان ۳}]{\text{دو می به توان ۳}} (\sqrt{2} - 1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2(1) + 3(\sqrt{2})(1)^2 - (1)^3 = \sqrt{2} - 3(2)(1) + 3\sqrt{2}(1) - 1$$

$$= \sqrt{4 \times 2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$$

تست: اگر $x + \frac{1}{x^3} = 2$ باشد حاصل $x^3 + \frac{1}{x}$ کدام است؟

۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = 2 &\stackrel{\text{دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم}}{\Rightarrow} \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow x^3 + 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 8 \\ \Rightarrow x^3 + 3x^2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = 8 &\Rightarrow x^3 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{2} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 6 = 8 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 8 - 6 = 2 \end{aligned}$$

پاسخ:

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست: در ساده شده عبارت $(3x - 2y)^3$ ، ضریب عددی جمله شامل y^3 کدام است؟

-۵۴) ۴

-۱۸) ۳

۱۸) ۲

۵۴) ۱

پاسخ: $a = 3x$ و $b = 2y$ را فرض کرده و به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای این‌طور می‌نویسیم که:

$$\begin{aligned} (3x - 2y)^3 &= (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 - (2y)^3 = 27x^3 - 3(9x^2)(2y) + 3(3x)(4y^2) - 8y^3 \\ &= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \Rightarrow x^3 y \text{ ضریب جمله شامل } y^3 \text{ است.} \end{aligned}$$

تست: حاصل $(x - 1)^3 - (\sqrt{3}x + 1 + \sqrt{3})$ برابر با کدام گزینه است؟

x³ + 6x² + √3) ۴x³ - √3) ۳x³ - 6x² + √3) ۲x³ + √3) ۱

پاسخ: به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای و اتحاد یک جمله مشترک چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} (x - 1)^3 - (\sqrt{3}x + 1 + \sqrt{3}) &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - ((\sqrt{3}x)^2 + (-1 + 1 + \sqrt{3})(\sqrt{3}x) + (-1)(1 + \sqrt{3})) \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (3x^2 + 3x - \sqrt{3} - 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3x^2 - 3x + \sqrt{3} + 1 = x^3 - 6x^2 + \sqrt{3} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.} \end{aligned}$$

تذکر: البته حاصل $(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1 + \sqrt{3})$ را بدون استفاده از اتحاد یک جمله مشترک هم به راحتی می‌توانید به دست آورید. یعنی دو پرانتز را به صورت معمولی در هم ضرب کنید:

$$(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3}x)^3 + \sqrt{3}x^2 + 3x - \sqrt{3}x^2 - 1 - \sqrt{3} = 3x^3 + 3x - 1 - \sqrt{3}$$

نکته‌ستی: در اتحادهای مکعب دو جمله‌ای اگر a^3 و b^3 را کنار هم بنویسیم و در جملات $3ab^2$ و $3a^2b$ از $3ab$ فاکتور بگیریم، خواهیم داشت:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \Rightarrow a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

ضمناً به $a^3 + b^3$ مجموع مکعبات a و b و به $a^3 - b^3$ تفاضل مکعبات a و b می‌گوییم.

تست: اگر مجموع دو عدد برابر ۲ و حاصل ضرب آن‌ها (-۱) باشد، مجموع مکعبات آن‌ها کدام است؟

۱۵) ۴

۱۴) ۳

۱۳) ۲

۱۲) ۱

پاسخ: مجموع و حاصل ضرب دو عدد داده شده است، پس می‌فهمیم که باید از نکته گفته شده استفاده کنیم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 2^3 - 3(-1)(2) = 8 + 6 = 14 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

تست: اگر تفاضل دو عدد برابر (-1) و حاصل ضرب آنها 6 باشد، تفاضل مکعبات آنها کدام است؟

-۱۷ (۴)

-۱۹ (۳)

۱۹ (۲)

۱۷ (۱)

پاسخ: تفاضل و حاصل ضرب دو عدد داده شده است، پس باز هم از نکته گفته شده بهره می‌گیریم:

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (-1)^3 + 3(-1)(-1) = -1 - 18 = -19 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

(۵) اتحادهای چاق و لاغر: از ضرب یک سه‌جمله‌ای (lagr) در یک سه‌جمله‌ای (چاق) به شکل زیر بدست می‌آید:

$$(a \oplus b)(a^2 \ominus ab + b^2) = a^3 \oplus b^3 \xrightarrow{\text{مثال}} (x+2)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 2^3 = x^3 + 27$$

$$(a \ominus b)(a^2 \oplus ab + b^2) = a^3 \ominus b^3 \xrightarrow{\text{مثال}} (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1$$

تست: اگر $(x+2)(x^2 + Ax + 4) = x^3 + B^3$ باشد، حاصل $A + B$ کدام است؟

۴ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: روش اول: بنایه اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(x+2)(x^2 + Ax + 4) = x^3 + B^3 \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B^3 = 2^3 \Rightarrow B = 2 \end{cases} \Rightarrow A + B = -2 + 2 = 0.$$

روش دوم: فرض کنید یادتان رفته که از چه اتحادی باید استفاده کنید. در این صورت پرانتزها را به صورت معمولی در هم ضرب می‌کنید و دو طرف تساوی را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\text{ضرب}}{\text{پرانتزها}} \xrightarrow{\substack{\text{فاکتور از } 2x \\ \text{فاکتور از } x^2}} x^3 + Ax^2 + 4x + 2x^2 + 2Ax + 8 = x^3 + B^3 \Rightarrow x^3 + \underbrace{(A+2)x^2}_{\substack{\downarrow \\ \text{این جمله باید کلاً نابود شود.}}} + \underbrace{(2+A)2x}_{\substack{\downarrow \\ \text{این جمله هم همین طور}} \xrightarrow{\substack{\text{این مساوی باشند.}}}} + 8 = x^3 + B^3$$

$$\Rightarrow A + 2 = 0 \Rightarrow A = -2 \quad \Rightarrow A + B = -2 + 2 = 0 \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

$$\Rightarrow B^3 = 8 \Rightarrow B = 2$$

تست: مقدار عبارت $(4x^2 + 2xy + y^2)(2x - y) - 8x^3$ به ازای $x = 3\sqrt{2}$ و $y = -\frac{1}{2}$ کدام است؟

۴ (۴)

-۱/۴ (۳)

-۱/۸ (۲)

۱/۸ (۱)

پاسخ: می‌توانیم همان اول، به جای x و y اعداد داده شده را قرار دهیم ولی راه حل کمی طولانی خواهد شد. بهتر است ابتدا عبارت داده شده را تا حد ممکن ساده کرده، سپس به جای x و y عدد قرار دهیم:

$$\frac{\text{اتحاد چاق و لاغر}}{\text{اعمال}} \xrightarrow{\substack{\text{اعمال} \\ \text{اعمال}}} 8x^3 - ((2x)^3 - y^3) = 8x^3 - 8x^3 + y^3 = y^3 \xrightarrow{y = -\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

فصل ۱ عبارت‌های جبری

قسمت دوم: تجزیه عبارت‌های جبری

بازم سلام، فُل بپه‌ها زود تند سریع بگید بینم اتهادها رو فوب یاد گرفتین؟ اگه هدود نصف تست‌های اتهادها رو تو نستیید هل کنید الان بهشت تهزیه رو شروع کنید به فوندن و گزنه فواهشان یه بار دیگه با دقت پیش‌تر برگردین و درسته قبلى رو با مثال‌ها و تست‌هاش بفوندیر. چون تو تهزیه، در واقع بر عکس کارهایی رو انبام می‌دیم که توی اتهادها انبام دادیم و فیلی به هم وابسته هستن. لطفاً کسی هم زرگ بازی در نیاره. چون یه کلم که ببریم چالوت، اگه اتهادها رو یادتون نباشه گلیر می‌کنین. اونوقته که استادتون که من باشم ازتون نرا هست می‌شما، گفته باشم.



مفهوم تجزیه

اگر یک عبارت جبری را بتوان به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر (با درجه کم‌تر) نوشت، می‌گوییم آن عبارت را تجزیه کرده‌ایم. این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که دیگر نتوان عبارت‌ها را تجزیه کرد. به هر کدام از عبارت‌های جبری به دست آمده از تجزیه، یک عامل یا فاکتور می‌گویند. هر عبارت جبری به عامل‌هایش بخش‌پذیر است. مثلاً وقتی عبارت $-6 - 5x^3 - x^5$ را به صورت $(x+1)(x-6)$ تجزیه می‌کنیم، $(x+1)$ و $(x-6)$ هر دو، عوامل عبارت اولیه هستند و ضمناً عبارت اولیه یعنی $-6 - 5x^3 - x^5$ هم بر $x+1$ و هم بر $x-6$ بخش‌پذیر است.

روش‌های تجزیه یک عبارت جبری

۱) **فاکتورگیری:** در این روش عبارت‌هایی که عامل مشترک دارند، یعنی یک عامل که در هر دوی آن‌ها وجود دارد را در نظر می‌گیریم و آن عامل مشترک را پشت پرانتز قرار داده و سپس تک‌تک جملات را بر آن عامل مشترک تقسیم می‌کنیم و جواب‌ها را در داخل پرانتز با هم جمع جبری می‌کنیم.

تست: کدام عبارت، نادرست تجزیه شده است؟

$$(a+b)^2 - 2(a+b) = (a+b)(a+b-2) \quad (1)$$

$$2xy^3 - 6x^2y^2z^2 = 2xy(y - 3xz^2) \quad (2)$$

$$15y(x-y)^3 - 18x^2(x-y)^2 = 3(x-y)^2(5yx - 6y^2 - 6x^2) \quad (3)$$

$$12x^4(x^2 - 5)^2 + 3x^3(x^2 - 5)^3 = 3x^3(x^2 - 5)^2(x^2 + 4x - 5) \quad (4)$$

پاسخ:

$$(a+b)^2 - 2(a+b) = \overbrace{(a+b)(a+b)}^{فاکتور از} - 2(a+b) = (a+b)(a+b-2) \quad (1)$$

$$2xy^3 - 6x^2y^2z^2 = 2xy^2(y - 3xz^2) \quad (2)$$

$$15y(x-y)^3 - 18x^2(x-y)^2 = 3(x-y)^2[5yx - 6y^2 - 6x^2] = 3(x-y)^2[5yx - 6y^2 - 6x^2] \quad (3)$$

$$12x^4(x^2 - 5)^2 + 3x^3(x^2 - 5)^3 = 3x^3(x^2 - 5)^2[4x + (x^2 - 5)] \quad (4)$$

پس گزینه (۲) درست است.

تست: عبارت جبری $10x^3z^2 - 15xy^3$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

$$5x^2 \quad (3) \quad 15x \quad (2) \quad 5x \quad (1)$$

$$10x^3z^2 - 15xy^3 = \cancel{5x}(2xz^2 - 3y^3) \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

پاسخ:

تست: در تجزیه $20x^5(x^2 + 3)^3 - 10x^3(x^2 + 3)^2$ کدام عامل وجود ندارد؟

$$x^2 - 3 \quad (4) \quad x^2 + 3 \quad (3) \quad x^2 + 3 \quad (2) \quad 10x^3 \quad (1)$$

$$20x^5(x^2 + 3)^3 - 10x^3(x^2 + 3)^2 = 10x^3(x^2 + 3)^2[2x^2 - (x^2 + 3)] = 10x^3(x^2 + 3)^2(x^2 - 3)$$

پاسخ:

مالحظه می‌کنید که عبارت تجزیه شده بالا شامل $(x^2 + 3)$ نیست، پس جواب گزینه (۲) است.

۲) استفاده از اتحادها: در این روش از اتحادها برای تجزیه کردن کمک می‌گیریم.

(آ) **تجزیه از طریق اتحاد مربع دوچمله‌ای:** اگر یک عبارت سه تا جمله داشت و ۲ تا از آن‌ها مربيع کامل بود (توان زوج داشت) و جمله سوم ۲ برابر ضرب جذرهاي دو جمله دیگر بود، متوجه می‌شویم که برای تجزیه از این اتحاد باید استفاده کنیم:

$$a^3 + 2ab + b^3 = (a+b)^3 \Rightarrow \text{تجزیه به کمک اتحاد اول} \quad a^3 - 2ab + b^3 = (a-b)^3$$

به عبارت دیگر در مبحث اتحادها در متن سؤال، عبارت $(a+b)^3$ یا $a^3 - 2ab + b^3$ داده می‌شد و ما می‌گفتیم جواب هایشان می‌شود $a^3 + 2ab + b^3$ یا $a^3 - 2ab + b^3$ ولی در مبحث تجزیه، بر عکس است یعنی عبارتهای $a^3 + 2ab + b^3$ یا $a^3 - 2ab + b^3$ به ما داده می‌شوند و ما باید آن‌ها را به شکل اولیه آن‌ها یعنی $(a+b)^3$ یا $(a-b)^3$ تبدیل کنیم. البته کمی جلوتر خواهید دید که برای تجزیه از بقیه اتحادها نیز به صورت بر عکس استفاده می‌کنیم.

تست: تجزیه شده چند تا از عبارت‌های زیر، نادرست است؟

$$\begin{array}{lll} ۱) ۴x^5(x-1)^3 - 8x^3(x-1)^4 = 2x^3(x-1)^3(x-2)^3 & ۲) x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = (x - \frac{1}{3})^3 & ۳) 4x^3 + 4x + 1 = (2x+1)^3 \\ ۳) ۴ & ۲) ۳ & ۱) ۲ \end{array}$$

۱) صفر

پاسخ :

$$\begin{array}{lll} x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوچمله‌ای}} (x - \frac{1}{3})^3 & ۲) & ۳) 4x^2 + 4x + 1 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوچمله‌ای}} (2x+1)^2 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (x)^3 - 2(\frac{1}{3})(x) + (\frac{1}{3})^3 & & (2x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ۴) 2x^5(x-1)^3 - 8x^3(x-1)^4 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} 2x^3(x-1)^3[x^3 - 4(x-1)] = 2x^3(x-1)^3[x^3 - 4x + 4] = 2x^3(x-1)^3(x-2)^3 & ۵) \\ \text{اتحاد مربع دوچمله‌ای} & \end{array}$$

پس گزینه (۳) درست است.

تست: اگر $a - 2b = 1$ باشد، حاصل $2a^3b - 8a^2b^2 + 8ab^3$ کدام است؟

$$\begin{array}{lll} -2ab \quad ۴ & 2ab \quad ۳ & ab \quad ۲ \\ -ab \quad ۱ \end{array}$$

پاسخ :

$$\begin{array}{lll} ۶) 2a^3b - 8a^2b^2 + 8ab^3 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} 2ab(a^2 - 4ab + 4b^2) & \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوچمله‌ای}} 2ab(a - 2b)^3 = 2ab(1) = 2ab \Rightarrow ۷) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (a)^2 - 2(a)(2b) + (2b)^2 & & (a - 2b)^3 \end{array}$$

تست پایین، یه کم سفته یعنی واقعاً سفته. توی گنگور، از این سوالا، زیاد نمی‌بینید پس توی کتاب ما هم، این سوالا رو فیلی زیارت نفواهید کن.

تست: کدام عدد به حاصل ضرب x و $x+6$ اضافه گردد تا مربع دوچمله‌ای بددست آید؟

$$\begin{array}{lll} ۸) ۳6 \quad ۴ & ۹) ۶ \quad ۳ & ۱۰) ۹ \quad ۲ \end{array}$$

پاسخ : روش اول:

$$x(x+6) + k^3 = x^2 + 6x + k^3 \Rightarrow 2xk = 6x \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$$

پس باید $k^3 = 9$ به حاصل ضرب اضافه گردد.

روش دوم (روش تستی): در این‌گونه سوالات می‌توانید عدد مورد نظر را مثلاً m بنامید سپس آن را به عبارت داده شده اضافه کنید و دلتای عبارت حاصل را مساوی صفر قرار دهید تا $m = x^2 + 6x + m$ بددست آید.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 36 - 4(m) = 0 \Rightarrow 4m = 36 \Rightarrow m = 9 \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

نکته تستی: عبارت‌هایی به فرم $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ را به کمک اتحاد مربع دوچمله‌ای می‌توان به صورت $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ یا $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ تجزیه کرد. (البته می‌دونید که a و b باید منفی باشند و گرنه \sqrt{a} و \sqrt{b} بی معنی می‌شون).

تست: عبارت $\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$ بر کدام عامل بخش پذیر است؟

$$\begin{array}{lll} \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad ۴ & \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad ۳ & ۳ + \sqrt{2} \quad ۲ \\ ۲ + \sqrt{3} \quad ۱ \end{array}$$

پاسخ : روش اول (استفاده از نکته تستی بالا): می‌دانیم $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2} + 3$ و $5 = 2 + 3$ و $5 = 5$ ، بنابراین:

$$\text{عبارت } (5 + 2\sqrt{6}) \text{ بر } (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ بخش پذیر است.} \Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

روش دوم: به جای استفاده از نکته تستی، می‌توانیم عبارت‌های داده شده در گزینه‌ها را به توان ۲ برسانیم، جواب باید $(5 + 2\sqrt{6})^2$ شود که این اتفاق

$$\begin{array}{ll} (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 5 + 2\sqrt{6} & \text{ فقط برای } \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ رخ می‌دهد زیرا:} \\ \text{بنابراین گزینه (۳) صحیح است.} & \end{array}$$

ب) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج: اگر عبارتی به شکل تفاضل دو جمله مربع کامل باشد، برای تجزیه آن از این اتحاد استفاده می‌شود:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)$$

تست: در کدام گزینه، عبارت داده شده اشتباہ تجزیه شده است؟

$$1 - 9x^4 = (1 - 3x)(1 + 3x) \quad (1)$$

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \quad (2)$$

$$x^4 - 81x^4 = x^4(x^2 + 9) \quad (3)$$

$$18x^5(x^2 + 5)^3 - 15x^3(x^2 + 5)^4 = 3x^3(x^2 + 5)^3(x + 5)(x - 5) \quad (4)$$

$$\begin{array}{l} 1 - 9x^4 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 1 - (3x)^2 \end{array} = (1 - 3x)(1 + 3x) \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} x^4 - 16 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (x^2)^2 - 4^2 \\ (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x^2 + 4)(x - 2)(x + 2) \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} x^4 - 81x^4 \\ \text{فاکتورگیری} \quad \quad \quad x^4(x^4 - 81) = x^4(x^2 + 9)(x^2 - 9) = x^4(x^2 + 9)(x - 3)(x + 3) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (x^2)^2 - 9^2 \\ (x^2 - 9)(x^2 + 9) \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} 18x^5(x^2 + 5)^3 - 15x^3(x^2 + 5)^4 \\ \text{فاکتورگیری} \quad \quad \quad 3x^3(x^2 + 5)^3[6x^2 - 5(x^2 + 5)] \\ = 3x^3(x^2 + 5)^3(6x^2 - 5x^2 - 25) = 3x^3(x^2 + 5)^3(x^2 - 25) = 3x^3(x^2 + 5)^3(x + 5)(x - 5) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x^2 \quad 5^2 \end{array} \quad (4)$$

پس گزینه (۳) درست است.

تست: حاصل عددی $1000^2 - 999^2$ کدام است؟

$$0/02 \quad (4)$$

$$0/04 \quad (3)$$

$$0/004 \quad (2)$$

$$0/002 \quad (1)$$

$$(1000)^2 - (999)^2 = (1000 + 999)(1000 - 999) = 2 \times 0/002 = 0/004 \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

پاسخ :

تست: اگر $a + b$ باشد، $a - b = -6$ و $b - a = 66$ کدام است؟

$$-\sqrt{11} \quad (4)$$

$$11 \quad (3)$$

$$-11 \quad (2)$$

$$\sqrt{11} \quad (1)$$

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \xrightarrow[b-a=6]{a-b=-6} 66 = 6(a + b) \Rightarrow a + b = \frac{66}{6} = 11 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

پاسخ :

دقت کنید که وقتی $a - b = -6$ است حاصل $b - a$ برابر $+6$ خواهد بود.

پ) تجزیه به کمک اتحاد یک جمله مشترک: اگر سه جمله داشته باشیم که یکی از آنها مربع کامل بود، احتمالاً می‌توانیم از این اتحاد برای تجزیه کمک بگیریم:

$$x^4 + (a + b)x + (ab) = (x + a)(x + b)$$

حاصل ضرب دو عدد جمله مشترک مجموع دو عدد

در این صورت جذر جمله مربع کامل، جمله مشترکمان است و با مقایسه عبارت داده شده با اتحاد بالا ضرب آن جذر، برابر با مجموع ۲ عدد و جمله سوم برابر با حاصل ضرب ۲ عدد است. حال این ۲ عدد را پیدا می‌کنیم و عبارت را تجزیه می‌کنیم.

$$(1) \text{ مثال: } x^3 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$$

$$(2) \text{ مثال: } x^3 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

تست: یکی از عامل‌های اول $2x^3 + 6x^2 - 8x$ کدام است؟

$$x + 4 \quad (4)$$

$$x + 3 \quad (3)$$

$$x + 1 \quad (2)$$

$$x - 4 \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} 2x^3 + 6x^2 - 8x \\ \text{فاکتورگیری} \quad \quad \quad 2x(x^2 + 3x - 4) = 2x(x + 4)(x - 1) \Rightarrow \text{گزینه (۴) صحیح است.} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ +4-1 \quad 4(-1) \end{array}$$

پاسخ :

نکته گاهی اوقات یک سه‌جمله‌ای به ما داده می‌شود که در آن ضریب x^2 عددی مربيع کامل (به جزء) است. در این حالت، برای تجزیه این سه‌جمله‌ای، کافی است از جمله شامل x^2 جذر گرفته تا جمله مشترک معلوم شود سپس این جمله مشترک را از درون جمله دیگر که شامل x است بیرون می‌کشیم. مثلًاً می‌خواهیم عبارت $(8 + 18x + 9x^2)$ را تجزیه کنیم ۹ مربيع کامل است، و جذر $9x^2$ می‌شود $3x$ ، پس $3x$ جمله مشترک است و باید $18x$ را طوری بنویسیم که شامل $3x$ شود می‌توانیم $18x$ را به صورت $(3x + 6)$ بنویسیم لذا خواهیم داشت:

$$9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6(3x) + 8 = (3x + 4)(3x + 2)$$

↑ ↑ ↑
جمله مشترک ضرب ۲ و ۴ می‌شود + و جمعشان می‌شود ۶

تست: در یکی از عوامل اول $25x^3 + 30x^2 - 7$ عدد ثابت کدام است؟

- ۶ (۴) ۶ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

پاسخ :

$$25x^3 + 30x^2 - 7 = (5x)^3 + 6(5x) - 7 = (5x + 1)(5x - 1)$$

↑ ↑ ↑
ضرب (۷+) و (-۱-) می‌شود -۷ و جمعشان می‌شود ۶ جمله مشترک

در عامل $(-5x - 1)$ عدد ثابت (-1) است، پس گزینه (۲) درست است.

نکته فرض کنید می‌خواهیم عبارت $-x^2 - 3x^3 - x$ را تجزیه کنیم. الان ضریب x^2 یعنی عدد ۳ مربيع کامل نیست. در چنین عبارت‌هایی، بهترین روش این است که ابتدا ضریب x^2 را در عدد ثابت ضرب کنیم، بنابراین در اینجا ۳ را در -2 ضرب کرده و به عبارت $-x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ می‌رسیم. حال عبارت به دست آمده را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

در مرحله آخر، باید عدد ثابت یکی از پرانتزها را بر ضریب x اولیه یعنی ۳ تقسیم کرد و x پرانتز دیگر را در 3 ضرب کنیم. البته مهم نیست از کدام پرانتز شروع کنیم اما در این عبارت بهتر است پرانتزی را که ۳ دارد انتخاب کرده و 3 را بر 3 تقسیم کنیم و در پرانتز دیگر یعنی $(x + 2)$ عدد 3 را در x آن ضرب کنیم، در نتیجه عبارت مطلوب برابر است با:

تست: عبارت $2x^3 + 5x^2 + 2x$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر نیست؟

- $x + 2$ (۴) $x - 2$ (۳) $2x + 1$ (۲) x (۱)

پاسخ :

$$2x^3 + 5x^2 + 2x = x(2x^2 + 5x + 2) = x(x + 2)(2x + 1)$$

فاکتور از x این عبارت را به روش
گفته شده تجزیه می‌کنیم.

عامل $(x - 2)$ در تجزیه شده عبارت بالا دیده نمی‌شود. پس گزینه (۳) صحیح است.

ت) **تجزیه به کمک اتحادهای چاق و لاغر:** اگر عبارتی شامل مجموع یا تفاضل دو جمله مکعب کامل (توان ۳) باشد، از این اتحاد برای تجزیه آش کمک می‌گیریم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \Rightarrow \text{مثال} : 8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \Rightarrow \text{مثال} : x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

تست: در تجزیه $8x^4 - 27xy^3$ کدام عامل وجود دارد؟

- $2x - 3y$ (۴) $(2x - 3y)^2$ (۳) $2x + 3y$ (۲) xy (۱)

پاسخ :

$$8x^4 - 27xy^3 = x(8x^3 - 27y^3) = x(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$$

فاکتورگیری چاق و لاغر گزینه (۴) صحیح است.

ث) تجزیه به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای: اگر عبارتی شامل ۴ جمله باشد که ۲ تای آن‌ها مکعب کامل (توان ۳) باشند (a^3 , b^3) و ۲ تای دیگر مضرب ۳ باشند ($3ab^2$, $3a^2b$), در این صورت از اتحاد مکعب دوجمله‌ای برای تجزیه آن عبارت، استفاده می‌کنیم:

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a+b)^3 \Rightarrow \text{مثال: } x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

$$a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 = (a-b)^3 \Rightarrow \text{مثال: } x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = (x-2y)^3$$

تست: حاصل $-8x^3 + 12x^2 - 6x - 1$ به ازای $x = 2 + \sqrt{2}$ کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\begin{array}{c} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x^3 - 3x^2(2) - 3x(2^2) - 2^3 \end{array} \xrightarrow{x=2+\sqrt{2}} (2+\sqrt{2}-2)^3 = \sqrt{2}^3 = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \downarrow \text{از رادیکال خارج می‌شود}$$

پاسخ:

۳) تجزیه به کمک دسته‌بندی

وقتی تعداد جملات یک عبارت زیاد باشد (بیشتر از ۳ تا)، برای تجزیه به دسته‌بندی احتیاج پیدا می‌کنیم (البته به شرطی که اتحاد مکعب دوجمله‌ای نداشته باشیم). فقط باید دقت کنیم که کدام جمله‌ها را با هم در نظر بگیریم. در واقع جملات را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که یا با هم تشکیل اتحاد بهمند، یا این‌که دارای قسمت مشترک باشند و بعد از فاکتورگیری، دوباره آن‌ها را تجزیه کنیم.

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^3 + y^3 - 1 - 2xy \quad (b)$$

$$ax - by - ay + bx \quad (a)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} ax - b \underbrace{y - a y + b x}_{\substack{\text{فاکتور از } -y \\ \text{فاکتور از } x}} &= x(a+b) - y(a+b) = (a+b)(x-y) \\ &\quad \text{فاکتور از } (a+b) \\ x^3 + y^3 - 2xy - 1 &= (x-y)^3 - 1^3 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-y-1)(x-y+1) \\ &\quad \text{اتحاد مربع دوجمله‌ای} \end{aligned} \quad (b)$$

تست: کدام عامل در تجزیه $2x^3 + x^2 - 8x - 4$ وجود ندارد؟

$$2x + 1 \quad (4)$$

$$2x - 1 \quad (3)$$

$$x + 2 \quad (2)$$

$$x - 2 \quad (1)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 - 8x - 4 &= x^2(2x+1) - 4(2x+1) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (2x+1)} (2x+1)(x^2 - 4) = (2x+1)(x-2)(x+2) \\ &\quad \text{اتحاد مزدوج} \end{aligned}$$

تست: اگر $2a + b = 1$ باشد، حاصل $4a^3 + b^3 - 4a - 2b + 4ab$ کدام است؟

$$-1 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$1 \text{ صفر} \quad (1)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} 4a^3 + b^3 + 4ab - 4a - 2b &= (2a+b)^3 - 2(2a+b) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \text{گزینه (4) صحیح است.} \\ &\quad \text{فاکتور از } (-2) \text{ اتحاد مربع دوجمله‌ای} \end{aligned}$$

نکته‌تستی: اگر A و B دو عبارت جبری دلخواه باشند، تساوی $A^2 + B^2 = 0$ تنها زمانی برقرار است که هم $A = 0$ و هم $B = 0$ باشد.

تست: اگر $= 0$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$y = x = -1 \quad (4)$$

$$y = -x = -1 \quad (3)$$

$$y = x = 1 \quad (2)$$

$$y = -x = 1 \quad (1)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x + 2xy + 1 &= 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ &\xrightarrow{\text{مربيع دوجمله‌ای}} (\underbrace{x+y}_A)^2 + (\underbrace{x+1}_B)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \Rightarrow x+y = 0 \Rightarrow y = -x \\ B = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow y = -x = 1 \Rightarrow \text{گزینه (1) صحیح است.} \end{aligned}$$